Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ELIPTICKÉ PARCIÁLNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S DEGENEROVANÝMI KOEFICIENTY

JIŘÍ CERHA, Praha

(Došlo dne 21. června 1971)

Práce se skládá ze dvou částí. V první z nich se dokazují věty o vnoření pro Sobolevovy prostory s nezápornou spojitou vahou, která je nulová nejvýše v jednom bodě. Těchto vět se ve druhé části používá k důkazu existence zobecněných řešení, ve smyslu distribucí, parciálních diferenciálních rovnic eliptického typu s degenerovanými koeficienty.

VĚTY O VNOŘENÍ

Budiž dáno přirozené číslo N, omezená oblast $\Omega \subset R_N$ s hranicí $\partial\Omega$, reálné číslo $p \geqq 1$ a celé číslo $k \geqq 0$. Je-li dána funkce w definovaná, spojitá a nezáporná na uzávěru $\bar{\Omega}$ oblasti Ω, kladná uvnitř Ω, pak symbolem $\mathscr{E}(\bar{\Omega})$ označíme množinu funkcí definovaných v Ω, které tam mají spojité všechny derivace všech řádů a které je možno i s těmito derivacemi spojitě rozšířit na uzávěr oblasti Ω. Banachův prostor, který vznikne jako uzávěr množiny $\mathscr{E}(\bar{\Omega})$ v normě

$$(1)\qquad \|u\|_{W_{p,w}^{(k)}(\Omega)} = \left(\int_\Omega w^p \sum_{j=0}^{k} \sum_{|i|=j} |D^i u| \,\mathrm{d}\Omega\right)^{1/p}, \quad u \in \mathscr{E}(\bar{\Omega}),$$

označíme

$$W_{p,w}^{(k)}(\Omega),$$

případně

$$L_{p,w}(\Omega) = W_{p,w}^{(0)}(\Omega).$$

Prvky tohoto prostoru je možno ztotožnit s funkcemi u definovanými skoro všude v Ω, které tam mají zobecněné derivace (ve smyslu distribucí) $D^i u$ až do řádu k včetně takové, že funkce $|wD^i u|^p$ jsou integrovatelné v Ω, $|i| = 0, 1, \ldots, k$. Dále buď a funkce definovaná na $\bar{\Omega}$, $s > t > 0$ reálná čísla. Označíme: $|x|$ Eukleidovskou normu bodu $x \in R_N$, $T_r = \{x: |x| < r\}$, $K_r = T_r \cap \Omega$, $L_r = \{x: |x| = r\}$, $S_r = L_r \cap \Omega$, pro $r > 0$; $U_x = \{z: z = \lambda x,\ 1 < \lambda < sr^{-1}\}$, pro $x \in L_r$, $0 < r < s$. Pro funkce u

s definičním oborem v R_N budeme psát $u(x) = u(S, r)$, kde $S = x/r$, $r = |x|$. Písmeno c, c_1 bude značit kladnou konstantu, nezávislou na funkcích u, f. V různých výrazech může značit různé konstanty. Zavedeme ještě tyto předpoklady

$$(2) \qquad 0 \in \partial\Omega\,; \quad U_x \subset \Omega\,, \quad \text{jestliže} \quad 0 < r < t\,, \quad x \in S_r\,;$$

a bude spojitá konečná nezáporná funkce v $\bar{\Omega}$, $a(S, r)$ neklesající kladná funkce r pro $r > 0$ a každé S.

Lemma. *Existuje c nezávislé na r tak, že pro $u \in \mathscr{E}(\bar{\Omega})$, $0 < r < t$ platí*

$$\int_{S_r} a(S, r)\,|u(S, r)|\,\mathrm{d}S_r \leqq c \int_{K_s - K_r} a(x) \left(|u(x)| + \sum_{n=1}^{N} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right|\right) \mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Zvolme funkci $\varphi \in \mathscr{D}(T_s)$ takovou, že $\varphi(x) = 1$ pro $x \in T_t$, $0 \leqq \varphi \leqq 1$, označme $\psi = 1 - \varphi$. Buď $u \in \mathscr{E}(\Omega)$, $v = u\varphi$, $w = u\psi$. Je

$$a(S, r)\,|v(S, r)| \leqq a(S, r) \int_r^s \left|\frac{\partial v(S, \varrho)}{\partial \varrho}\right| \mathrm{d}\varrho \leqq \int_r^s a(S, \varrho) \left|\frac{\partial v(S, \varrho)}{\partial \varrho}\right| \mathrm{d}\varrho\,.$$

Odtud integrací přes S_r dostaneme

$$\int_{S_r} a(S, r)\,|v(S, r)|\,\mathrm{d}S_r \leqq c \int_{K_s - K_r} a(x) \sum_{n=1}^{N} \left|\frac{\partial v(x)}{\partial x_n}\right| \mathrm{d}x\,,$$

kde c nezávisí na v, r. Obdobná nerovnost pro w je zřejmá. Jejich užitím dostáváme tvrzení.

Věta 1. *Buď b_0 spojitá nezáporná neklesající funkce v intervalu $\langle 0, \infty)$, kladná v $(0, \infty)$, $b(x) = b_0(|x|)$, w buď spojitá nezáporná v $\bar{\Omega}$ funkce, kladná pro $x \neq 0$,*

$$Q = \int_0^t b_0^{-1}(r) \left(\int_{K_s - K_r} w^{-p/(p-1)}\,\mathrm{d}\Omega\right)^{-(p-1)/p} \mathrm{d}r < \infty\,, \quad \textit{je-li} \quad p > 1\,,$$

$$Q = \int_0^t b_0(r)^{-1}\,\mathrm{d}r < \infty\,, \quad w = 1\,, \quad \textit{je-li} \quad p = 1\,.$$

Pak

$$\|u\|_{L_{1,a(\Omega)}} \leqq c\|u\|_{W^{(1)}_{p,wba}}(\Omega)\,, \quad u \in W^{(1)}_{p,wba}(\Omega)\,.$$

Důkaz. Podle lemmatu je pro $u \in \mathscr{E}(\Omega)$

$$\int_{S_r} a(S, r)\,|u(S, r)|\,\mathrm{d}S_r \leqq c b_0^{-1}(r) \int_{K_s - K_r} w^{-1} a b w \left(u + \sum_{n=1}^{N} \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|\right) \mathrm{d}\Omega\,.$$

Odtud, případným užitím Hölderovy nerovnosti (při $p > 1$) a integrací dle r, dostáváme

$$\|u\|_{L_{1,a}(K_t)} \leqq cQ\|u\|_{W^{(1)}_{p,abw}(K_s)}.$$

Odtud a z nerovnosti

$$\|u\|_{L_{1,a}(\Omega - K_t)} \leqq c\|u\|_{W^{(1)}_{p,abw}(\Omega - K_t)}$$

plyne tvrzení věty pro $u \in \mathscr{E}(\Omega)$ a limitním přechodem i pro ostatní u.

Věta 2. *Za předpokladů věty* 1 *buďte* b_m *neklesající spojité nezáporné funkce* na intervalu $\langle 0, \infty)$, $a_m(x) = b_m(|x|)$, $\int_0^t b_m(r)^{-1}\,\mathrm{d}r < \infty$, $m = 1, 2, \ldots, k-1$, $v = aa_1a_2 \ldots a_{k-1}bw$. *Pak*

$$\|u\|_{L_{1,a}(\Omega)} \leqq c\|u\|_{W^{(k)}_{p,v}(\Omega)}, \quad u \in W^{(k)}_{p,v}(\Omega).$$

Důkaz. Věta se dokáže postupným užitím věty 1 na derivace $D^i u$.

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Podobně jako v [1] nebo [2] lze dokázat

Věta 3. *Budiž L Banachův prostor, M modul hustý v L, B sesquilineární forma na M, $B(u, u) \geqq c\|u\|_L^2$; $u \in M$. Uvtořme a označme H_B Hilbertův prostor, který vznikne jako uzávěr množiny M v normě určené skalárním součinem $(u, v)_B = B(u, v)$; $u, v \in M$. Formu B tak spojitě rozšíříme na prostor H_B a platí*

(i) *existuje jediné lineární spojité zobrazení $Z : H_B \to L$ tak, že $Z(u) = u$ pro $u \in M$.*

(ii) *Je-li $f \in L^*$ (hvězdička značí duální prostor), existuje jediný prvek $u \in H_B$ tak, že pro (rozšířenou) formu B platí $B(v, u) = f(v)$, $v \in M$. Přitom*

$$\|Zu\|_L \leqq c\|u\|_{H_B} \leqq c_1\|f\|.$$

Buď M modul splňující $\mathscr{D}(\Omega) \subset M \subset \mathscr{E}(\Omega)$, P_k množina polynomů stupně nejvýše $k-1$, $a_{i,j}$ omezené měřitelné funkce v Ω; $|i|, |j| = 1, 2, \ldots, k$; $a_{i,j} = \bar{a}_{j,i}$ při $|i| = |j|$ (pruh značí komplexně sdruženou funkci). Zavedeme formální diferenciální operátor

$$A = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \sum_{|i|=m} D^i \sum_{|j|=m} a_{i,j} D^j$$

a sesquilineární formu

$$B(u, v) = \int_\Omega \sum_{m=0}^{k} \sum_{|i|=|j|=m} \overline{a_{i,j} D^i u D^j v}\,\mathrm{d}\Omega\,; \quad u, v \in M. \tag{3}$$