

## Werk

**Label:** Article

**Jahr:** 1973

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X\\_0098|log49](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0098|log49)

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## ÜBER EIN GEWISSES NETZ EBENER KURVEN 6. ORDNUNG

VLADIMÍR MAHEL, Praha

(Eingelangt am 21. Juni 1971)

### 1. EINLEITUNG

In zwei früheren Arbeiten [1] und [2] wurde ein Netz ebener Kurven 6. Ordnung erwähnt, welche in bezug auf eine Transformationsgruppe  $G_{24}$ , die zwölf Kollineationen und zwölf quadratische Transformationen (darunter sechs quadratische Inversionen) enthält, invariant sind. Das Ziel dieser Abhandlung ist die Untersuchung der Eigenschaften dieser Kurven.

Es sei eine projektive Ebene über dem Körper komplexer Zahlen gegeben und in ihr sei eine geometrische Basis  $O_1(1, 0, 0)$ ,  $O_2(0, 1, 0)$ ,  $O_3(0, 0, 1)$  und  $I(1, 1, 1)$  gewählt. Das untersuchte Netz der Kurven 6. Ordnung hat in bezug auf diese Basis die Gleichung:

$$(1) \quad A[x_1^4x_2^2 + x_1^2x_3^4 + x_2^4x_3^2] + B[x_1^4x_3^2 + x_1^2x_2^4 + x_2^2x_3^4] + Cx_1^2x_2^2x_3^2 = 0,$$

in welcher wenigstens einer von den Koeffizienten  $A, B, C$  von Null verschieden ist. Die Gleichungen aller erwähnten Transformationen sind bei derselben Basis explizit in [2], (Gleichungen 1–24), angeführt.

Der einfacheren Ausdrucksweise wegen wird in den folgenden Ausführungen immer mit den Koordinaten gearbeitet, wenn auch geometrische Eigenschaften der Kurven untersucht werden (die Invarianz der verwendeten Betriffe in bezug auf die Basis ist sofort erkennbar). Im Gegensatz zu den angeführten Arbeiten ist aus typografischen Gründen die Bezeichnung der Koeffizienten der Gleichung (1) des Kurvennetzes abgeändert worden; alle anderen Bezeichnungen blieben unverändert.

### 2. VERZWEIGUNG DES PUNKTES

Im Einvernehmen mit [4] führen wir folgende Definition ein:

**Definition:** Als *Verzweigung eines Punktes  $X$  in einer gegebenen Transformationsgruppe* wird die Menge der Abbildungen des Punktes  $X$  in allen Transformationen der Gruppe bezeichnet.

Die Verzweigung des Punktes  $X(x_1, x_2, x_3)$  in  $\mathbf{G}_{24}$  – vorausgesetzt, dass  $X$  in keiner Transformation der Gruppe sich selbst entspricht – ist also ein 24-Tupel von Punkten in  $\mathbf{G}_{24}(X)$ , von dem in [2] bewiesen wurde, dass es eine Punkte- und Geradenkonfiguration  $(24_3, 18_4)$  bildet. Widmen wir hier unsere Aufmerksamkeit noch den weiteren Fällen:

**Satz 1.** *Es liege der Punkt  $X$  genau auf einem der Grundkegelschnitte der Inversionen  $T_1 - T_6$ . Dann ist die Verzweigung dieses Punktes in  $\mathbf{G}_{24}$  eine Zwölfpunkteschar  $\mathbf{G}_{24}(Y)$ , die auch als Verzweigung  $\mathbf{G}_{12}(Y)$  des Punktes  $Y$  in der Gruppe aller Kollineationen  $\mathbf{G}_{12} \subset \mathbf{G}_{24}$  entsteht.*

*Beweis.* Die Gleichungen der Grundkegelschnitte der Inversionen  $T_1 - T_6$  finden wir in [2], (25)–(30). Nehmen wir jetzt an, dass

$$(2) \quad y_3^2 - y_1y_2 = 0, \quad y_1y_2y_3 \neq 0,$$

aber

$$(3) \quad y_3^2 + y_1y_2 = 0, \quad y_1^4 - y_2^2y_3^2 \neq 0, \quad y_2^4 - y_1^2y_3^2 \neq 0,$$

d. h. der Punkt  $Y$  liegt auf dem Grundkegelschnitt der Inversion  $T_1$  (jedoch nicht im Hauptpunkt), aber er liegt auf keinem der Grundkegelschnitte der Inversion  $T_2 - T_6$ . Durch direkte Berechnung erhalten wir folgende Gleichungen

$$(4) \quad \begin{array}{l} T_1(Y) = I(Y) \quad \dots\dots (y_1^2, \quad y_2^2, \quad y_1y_2), \\ T_2(Y) = L_2(Y) \quad \dots\dots (y_1^2, \quad y_2^2, \quad -y_1y_2), \\ K_1(Y) = L_3(Y) \quad \dots\dots (y_1^2, \quad -y_2^2, \quad y_1y_2), \\ K_2(Y) = L_4(Y) \quad \dots\dots (-y_1^2, \quad y_2^2, \quad y_1y_2), \\ T_3(Y) = L_5(Y) \quad \dots\dots (y_1y_2, \quad y_1^2, \quad y_2^2), \\ T_4(Y) = L_{11}(Y) \quad \dots\dots (y_1y_2, \quad -y_1^2, \quad y_2^2), \\ K_3(Y) = L_{10}(Y) \quad \dots\dots (y_1y_2, \quad y_1^2, \quad -y_2^2), \\ K_4(Y) = L_{12}(Y) \quad \dots\dots (-y_1y_2, \quad y_1^2, \quad y_2^2), \\ T_5(Y) = L_5(Y) \quad \dots\dots (y_2^2, \quad y_1y_2, \quad y_1^2), \\ T_6(Y) = L_8(Y) \quad \dots\dots (-y_2^2, \quad y_1y_2, \quad y_1^2), \\ K_5(Y) = L_6(Y) \quad \dots\dots (y_2^2, \quad y_1y_2, \quad -y_1^2), \\ K_6(Y) = L_7(Y) \quad \dots\dots (y_2^2, \quad -y_1y_2, \quad y_1^2), \end{array}$$

wo  $y_1^3 \neq \pm y_2^3$ , wie aus (2) und (3) folgt.

Liegt der Punkt  $Y$  auf einem Kegelschnitt einer anderen Inversion, wird der Beweis analog geführt.

**Satz 2.** Die Zwölfpunkteschar (4) erzeugt die Punkte- und Geradenkonfiguration  $(12_2, 6_4)$ .

Beweis. Die Untergruppe  $G_{12}$  aller Kollineationen von  $G_{24}$  (die sog. Tetraedergruppe) hat die Normaluntergruppe  $N = \{I, L_2, L_3, L_4\}$  (siehe [2], Tab. 2), so dass  $A = \{L_5, L_6, L_7, L_8\}$  und  $B = \{L_9, L_{10}, L_{11}, L_{12}\}$  Restklassen sind. Die Zwölfpunkteschar (4) zerfällt also in 3 Vierecke. Wir können uns leicht überzeugen, dass jedes von diesen Vierecken ein Diagonaldreieck besitzt, welches von den Punkten

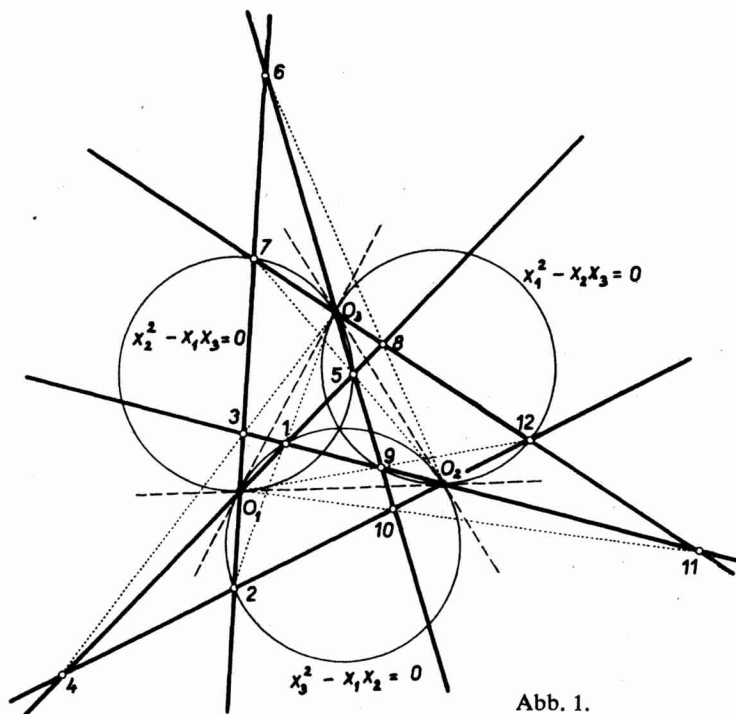


Abb. 1.

$O_1O_2O_3$  gebildet wird. In [2] wurde bewiesen (Satz 2 auf Seite 81), dass je zwei von diesen Vierecken auf einem Kegelschnitt liegen ([2], Gleichungen (34), (35), (36), siehe auch [3]). Nach den Voraussetzungen (2), (3) stellen jedoch in diesem Fall diese Gleichungen singuläre Kegelschnitte dar, die immer aus zwei verschiedenen Geraden bestehen, und zwar:

$$k_1 : x_2^2(y_1^4 - y_2^2y_3^2) + x_3^2(y_2^4 - y_1^2y_3^2) = 0,$$

$$k_2 : x_1^2(y_2^4 - y_1^2y_3^2) + x_3^2(y_1^4 - y_2^2y_3^2) = 0,$$

$$k_3 : x_1^2(y_1^4 - y_2^2y_3^2) + x_2^2(y_2^4 - y_1^2y_3^2) = 0.$$

Der Kegelschnitt  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) hat den singulären Punkt  $O_i$ ; nach der Voraussetzung (3) sind also alle diese sechs Geraden verschieden. Auf jeder von ihnen liegen immer zwei Punkte des zugehörigen Paares von Vierecken. Das bedeutet also, dass die Verzweigung  $G_{12}(Y)$  eine Punkte- und Geradenkonfiguration  $(12_2, 6_4)$  bildet. Siehe Abb. 1.

**Satz 3.** Es sei jetzt der Punkt  $Z \neq O_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) der gemeinsame Punkt der Grundkegelschnitte zweier Inversionen aus  $\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_6$ . Dann ist die Verzweigung des Punktes  $Z$  in  $\mathbf{G}_{24}$  ein Viereck, das auch also Verzweigung  $\mathbf{N}(Z)$  des Punktes  $Z$  in  $\mathbf{N} \subset \mathbf{G}_{24}$  gebildet wird.

Beweis. Erwägen wir z. B. die Grundkegelschnitte der Inversionen  $\mathbf{T}_1$  und  $\mathbf{T}_3$ . Es sind Kegelschnitte, deren Gleichungen  $x_3^2 - x_1x_2 = 0$  und  $x_2^2 - x_1x_3 = 0$  sind (siehe [2], Gleichungen (25) und (27)). Die gemeinsamen Punkte dieser Kegelschnitte sind  $O_1(1, 0, 0)$  und  $Z_1(1, 1, 1)$ ,  $Z_2(\varepsilon^2, \varepsilon, 1)$ ,  $Z_3(\varepsilon, \varepsilon^2, 1)$ , wo  $\varepsilon$  die primitive dritte Wurzel aus 1 ist. Wir überzeugen uns leicht, dass die Punkte  $Z_1$ ,  $Z_2$  und  $Z_3$  auch auf dem Grundkegelschnitt der Inversion  $\mathbf{T}_5$  liegen und durch direkte Berechnung erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1(Z_i) &= \mathbf{T}_3(Z_i) = \mathbf{T}_5(Z_i) = \mathbf{L}_9(Z_i) = \mathbf{L}_5(Z_i) = \mathbf{I}(Z_i), \\ \mathbf{T}_2(Z_i) &= \mathbf{K}_3(Z_i) = \mathbf{K}_5(Z_i) = \mathbf{L}_6(Z_i) = \mathbf{L}_{10}(Z_i) = \mathbf{L}_2(Z_i), \\ \mathbf{T}_4(Z_i) &= \mathbf{K}_1(Z_i) = \mathbf{K}_6(Z_i) = \mathbf{L}_{11}(Z_i) = \mathbf{L}_7(Z_i) = \mathbf{L}_3(Z_i), \\ \mathbf{T}_6(Z_i) &= \mathbf{K}_2(Z_i) = \mathbf{K}_4(Z_i) = \mathbf{L}_8(Z_i) = \mathbf{L}_{12}(Z_i) = \mathbf{L}_4(Z_i) \end{aligned}$$

$(i = 1, 2, 3).$

Es ist also die Verzweigung des Punktes  $Z_1$  (bzw.  $Z_2$  bzw.  $Z_3$ ) das Punktequadrupel

$$(5) \quad (1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)$$

bzw.

$$(6) \quad (\varepsilon^2, \varepsilon, 1), (\varepsilon^2, \varepsilon, -1), (\varepsilon^2, -\varepsilon, 1), (-\varepsilon^2, \varepsilon, 1)$$

bzw.

$$(7) \quad (\varepsilon, \varepsilon^2, 1), (\varepsilon, \varepsilon^2, -1), (\varepsilon, -\varepsilon^2, 1), (-\varepsilon, \varepsilon^2, 1).$$

Alle diese Punktequadrupel sind Vierecke mit einem gemeinsamen Diagonaldreieck  $O_1O_2O_3$ .

Suchen wir die gemeinsamen (von  $O_i$  verschiedenen) Punkte aller weiteren Grundkegelschnittpaare der restlichen Inversionen und der Verzweigungen dieser Punkte in  $\mathbf{G}_{24}$ , erhalten wir immer nur die Quadrupel (5), (6) und (7).

In den Sätzen (2) und (3), verbunden mit dem 4. Abschnitt der Abhandlung [2], wurden alle Verzweigungen  $\mathbf{G}_{24}(X)$  gefunden, denn:

- a) die quadratischen Transformationen  $\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_6$  haben keine Koinzidenzpunkte;
- b) die Kollineation der Untergruppe  $\mathbf{N} \subset \mathbf{G}_{24}$  haben Koinzidenzpunkte in den Hauptpunkten und Hauptgeraden der quadratischen Transformationen (und diese Punkte und Geraden schliessen wir aus);
- c) die Kollineationen  $\mathbf{L}_5 - \mathbf{L}_{12}$  haben zwar ein Tripel von Koinzidenzpunkten, welche nicht auf den Hauptgeraden liegen; es sind aber immer nur drei Punkte aus (5) oder (6) oder (7) und durch ihre Verzweigung erhalten wir nichts Neues.

Die Punktequadrupel haben aber wieder eine interessante Konfigurationseigenschaft. Sehr leicht beweisen wir durch direkte Berechnung den folgenden

**Satz 4.** *Es liegen immer zwei Punktequadrupel aus (5), (6) und (7) auf einem Kegelschnitt.*

Für den Beweis dieser Behauptung genügt es die Gleichungen dieser Kegelschnitte zu finden:

$$(8) \quad k_1 : x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + \varepsilon^2 x_3^2 = 0,$$

$$(9) \quad k_2 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

$$(10) \quad k_3 : x_1^2 + \varepsilon^2 x_2^2 + \varepsilon x_3^2 = 0,$$

und zu bestätigen, dass  $\{(5) \cup (6)\} \in k_1$ ,  $\{(6) \cup (7)\} \in k_2$  und  $\{(5) \cup (7)\} \in k_3$ .

Für die weiteren Untersuchungen ist es nützlich die Gleichungen dieser Kegelschnitte in den Tangentialkoordinaten anzuführen:

$$(8a) \quad k_1 : \xi_1^2 + \varepsilon^2 \xi_2^2 + \varepsilon \xi_3^2 = 0,$$

$$(9a) \quad k_2 : \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0,$$

$$(10a) \quad k_3 : \xi_1^2 + \varepsilon \xi_2^2 + \varepsilon^2 \xi_3^2 = 0.$$

### 3. SINGULÄRE PUNKTE DER KURVEN 6. ORDNUNG IM NETZ

Suchen wir jetzt die singulären Punkte der Kurven 6. Ordnung des Netzes (1). Aus der Form der Gleichung (1) ist sofort zu entnehmen, dass alle Kurven des Netzes in den Punkten  $O_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) Doppelpunkte haben. Weitere Einzelheiten entnehmen wir dem

**Satz 5.** *Die Kurven 6. Ordnung des Netzes (1) haben in den Hauptpunkten der quadratischen Inversionen gewöhnliche Knotenpunkte, eine Ausnahme bilden die Kurven 6. Ordnung zweier Büschel, die in diesen Punkten Doppelpunkte mit einer einzigen Tangente mit einer vierpunktigen Berührung haben.*

**Beweis.** Die Hauptpunkte der quadratischen Inversion  $T_1 - T_6$  liegen in den Punkten  $O_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Aus der Form der Gleichung (1) ist ersichtlich, dass das Tangentenpaar in allen Hauptpunkten durch eine rein quadratische Gleichung ausgedrückt ist, und zwar:

$$(11) \quad Ax_2^2 + Bx_3^2 = 0 \dots \text{die Tangenten in } O_1,$$

$$(12) \quad Ax_3^2 + Bx_1^2 = 0 \dots \text{die Tangenten in } O_2,$$

$$(13) \quad Ax_1^2 + Bx_2^2 = 0 \dots \text{die Tangenten in } O_3,$$

a) ist  $A \neq 0$  und gleichzeitig  $B \neq 0$ , hat jede Netzkurve in allen drei Hauptpunkten gewöhnliche Knotenpunkte;

b) ist entweder  $A = 0$  und gleichzeitig  $B \neq 0$  oder  $A \neq 0$  und gleichzeitig  $B = 0$ , dann repräsentieren die Gleichungen (11), (12) und (13) immer eine Doppelgerade; dann haben aber in jedem Hauptpunkt alle Kurven zweier Büschel eine einzige Tangente, die mit der Kurve eine vierpunktige Berührung hat.

c) der Fall  $A = 0$  und  $B = 0$  (und auch  $C \neq 0$ ) ist trivial, denn dann zerfällt die Kurve (1) in ein Tripel von Doppelhauptgeraden.

Interessieren wir uns weiter um Netzkurven, die in den Hauptpunkten gewöhnliche Knotenpunkte haben. Es gilt der

**Satz 6.** *Im Netz (1) existieren drei Büschel von Kurven 6. Ordnung mit gewöhnlichen Knotenpunkten in den Hauptpunkten, welche die Eigenschaft haben, dass alle drei Tangentenpaare in diesen Knotenpunkten einen bestimmten Kegelschnitt berühren.*

Beweis: Nehmen wir an es sei  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$ , d. h., dass nach dem vorangehenden Satz alle drei Punkte  $O_1, O_2, O_3$  gewöhnliche Knotenpunkte sind. Für die Determinante  $D$  6. Ordnung, deren Annulierung bedeutet, dass sechs Geraden (11), (12) und (13) einen Kegelschnitt berühren, gilt

$$D = 8i(A^3 - B^3) \cdot (AB)^{3/2}.$$

Die Annulierung der Determinante  $D$  erfolgt nur dann, wenn entweder

$$(14a) \quad A = B,$$

oder

$$(14b) \quad A = \varepsilon B,$$

oder

$$(14c) \quad A = \varepsilon^2 B$$

ist.

Jede von diesen drei Eventualitäten führt also zu einem Büschel von Kurven 6. Ordnung mit der gewünschten Eigenschaft. Leicht findet man, dass die Gleichung jenes Kegelschnittes, den die sechs Tangenten berühren, im Fall (14a) der Kegelschnitt mit der Gleichung (9), im Fall (14b) der Kegelschnitt mit der Gleichung (10) und im Fall (14c) der Kegelschnitt mit der Gleichung (8) ist.

Wenn wir auf den Netzkurven neben den Hauptpunkten noch weitere singuläre Punkte suchen, genügt die Erwägung, dass mit jedem singulären Punkt  $X$  der Kuve 6. Ordnung (1), dank den Eigenschaften der Kollineationen und quadratischen Transformationen der Gruppe  $\mathbf{G}_{24}$ , auf der Krueve (1) als singulärer Punkt gleicher Multiplizität auch jeder Punkt der Verzweigung  $\mathbf{G}_{24}$  sein muss.

Aus der Theorie der algebraischen Kurven ist bekannt, dass die maximale Anzahl von Doppelpunkten einer nichtreduziblen Kurve 6. Ordnung 10 ist (oder ihr Äquivalent in höheren Singularitäten). Die höchstmögliche Anzahl von Doppelpunkten einer Kurve 6. Ordnung ist 15 (oder ihr Äquivalent) – aber dann zerfällt die Kurve in 6 verschiedene Geraden. Daraus folgt, dass die Kurve des Netzes (1) keinen singulären Punkt, welcher nicht auf dem Grundkegelschnitt irgendeiner von den Inversionen  $T_1 - T_6$  liegt, enthalten kann.

Denn dann müsste sie neben den Hauptpunkten auch noch weitere 24 singuläre Punkte der Verzweigung  $G_{24}(X)$  haben.

Nehmen wir also an, dass der Doppelpunkt  $Y$  der Kurve auf genau einem Grundkegelschnitt der Inversion, z. B.  $T_1$ , liegt, d. h. es sind für seine Koordinaten die Bedingungen (2) und (3) erfüllt. Dann hat die Kurve (neben den Hauptpunkten) Doppelpunkte in allen 12 Punkten (4) und die Kurve 6. Ordnung besteht notwendig aus 6 Geraden, und zwar aus 6 Geraden der Konfiguration des Satzes 2. (Für den Punkt auf jedem anderen Grundkegelschnitt wird die Untersuchung analog durchgeführt.)

Leicht wird durch direkte Berechnung gezeigt, dass dann für die Koeffizienten  $A, B, C$  einer solchen Kurve 6. Ordnung

$$(15) \quad A : B : C = y_1^4 y_2^2 : -y_1^2 y_2^4 : y_2^6 - y_1^6$$

gilt, wo  $y_1^3 \neq y_2^3$ .

Eine weitere Möglichkeit der Existenz singulären Punkte der Kurven des Netzes (1) ausser den Hauptpunkten ist die, dass der singuläre Punkt der Kurve ein gemeinsamer Punkt von Grundkegelschnitten zweier Inversionen (ausser den Hauptpunkten) ist. Nach dem Satz 3 müssen auch die weiteren 3 Punkte der Verzweigung  $G_4 \subset G_{12}$  singuläre Punkte der Kurve sein, und es können also weitere singuläre Punkte nur in den Quadrupeln (5), (6) oder (7) liegen.

Die Forderung, dass die Kurve z. B. durch den Punkt (1, 1, 1) (und somit auch durch die Punkte des Quadrupels (5)) geht, führt zu einer linearen Bedingung für die Koeffizienten  $A, B, C$  der Kurve, und zwar:

$$(16) \quad C = -3(A + B).$$

Setzen wir die Koordinaten irgendeines Punktes aus (5) in die ersten partiellen Ableitungen der Gleichung (1) nach  $x_1, x_2, x_3$  ein, dann erhalten wir für die Koeffizienten  $A, B, C$  der Kurve wieder nur die Beziehung (16), und es sind also alle 4 Punkte (5) wenigstens Doppelpunkte der Kurve (1). Setzen wir die Koordinaten irgendeines Punktes aus (5) in die zweiten partiellen Ableitungen der Gleichung (1) ein, stellen wir fest, dass nur eine Möglichkeit existiert für die Kurve 6. Ordnung (1) mit 4 dreifachen Punkten in (5), wo ausser (16) auch

$$(17) \quad C = 0,$$



und somit

$$A + B = 0$$

gilt.

Dann zerfällt aber die untersuchte Kurve 6. Ordnung genau in 6 Seiten des vollständigen Viereckes (5). Gilt  $C = -3(A + B) \neq 0$ , dann hat die Kurve (1) genau 7 Doppelpunkte und wir stellen leicht fest, dass bei dieser Anzahl von Doppelpunkten die Kurve 6. Ordnung (1) nicht reduzibel ist.

Es existiert also ein ganzes Büschel von Kurven 6. Ordnung, die ausser den Punkten  $O_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) Doppelpunkte in den Punkten des Quadrupels (5) haben; die Gleichungen dieses Büschels sind

$$(18) \quad A(x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_3^4 + x_2^4 x_3^2) + B(x_1^4 x_3^2 + x_1^2 x_2^4 + x_2^2 x_3^4) - \\ - 3(A + B) x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 0,$$

wo  $A + B \neq 0$  ist.

Ähnlich führen wir die Untersuchungen für die Kurven mit singulären Punkten im Viereck (6) oder (7) durch. Im Netz (1) existiert ein Büschel von Kurven 6. Ordnung, welche genau 7 Doppelpunkte (in  $O_i$  und in (6)) haben; ihre Gleichung ist

$$(19) \quad A(x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_3^4 + x_2^4 x_3^2) + B(x_1^4 x_3^2 + x_1^2 x_2^4 + x_2^2 x_3^4) - \\ - 3\varepsilon(A + \varepsilon B) x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 0,$$

wo  $A + \varepsilon B \neq 0$  ist.

Wäre nämlich  $A + \varepsilon B = 0$ , dann würde die Kurve in 6 Seiten des vollständigen Viereckes (6) zerfallen.

Ebenso die Gleichung

$$(20) \quad A(x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_3^4 + x_2^4 x_3^2) + B(x_1^4 x_3^2 + x_1^2 x_2^4 + x_2^2 x_3^4) - \\ - 3\varepsilon^2(A + \varepsilon^2 B) x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 0,$$

bedeutet für  $A + \varepsilon^2 B \neq 0$  ein Büschel von Kurven 6. Ordnung, die 7 Doppelpunkte in  $\{O_i \cup (7)\}$  haben; im Falle  $A + \varepsilon^2 B = 0$  zerfällt die Kurve in 6 Seiten eines vollständigen Viereckes (7).

Wir können also die Ergebnisse dieser Erwägungen im folgenden Satz zusammenfassen

**Satz 7.** *Im Netz von Kurven 6. Ordnung (1) existieren nur folgende reduzible Kurven*

- a) *Kurven 6. Ordnung, die aus 6 Geraden der Konfiguration des Satzes 2 bestehen (dabei gelten für die Koeffizienten in der Gleichung (1) die Bedingungen (15));*
- b) *drei Kurven 6. Ordnung, die aus 6 Seiten eines vollständigen Viereckes (5), bzw. (6), bzw. (7) bestehen; (für die Koeffizienten in der Gleichung der Kurve (1) gilt immer  $C = 0$  und eine der folgenden Bedingungen entweder  $A + B = 0$ , oder  $A + \varepsilon B = 0$ , oder  $A + \varepsilon^2 B = 0$ );*

c) Kurven 6. Ordnung, die aus drei Doppelhauptgeraden ( $A = B = 0, C \neq 0$ ) bestehen.

Alle übrigen Kurven des Netzes (1) sind nichtreduzible Kurven, darunter

d) drei Büschel von Kurven 6. Ordnung mit den Gleichungen (18), (19) und (20) haben Doppelpunkte in den Hauptpunkten  $O_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) und in einem der Quadrupel (5), (6) oder (7) und sie sind also vom Geschlecht 3;

e) die übrigen nichtreduziblen Kurven des Netzes sind vom Geschlecht 7, da sie ihre Doppelpunkte nur in den Hauptpunkten  $O_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) haben.

Untersuchen wir näher jene drei Büschel der Kurven 6. Ordnung vom Geschlecht 3. Nehmen wir vorerst das Büschel mit der Gleichung (18) und suchen die Tangenten in den Doppelpunkten (5). Nach längerer Berechnung stellen wir fest, dass das Tangentenpaar in diesen Punkten immer aus einem Paar verschiedener Geraden besteht, und zwar im Punkt

$$(21) \quad \begin{aligned} (1, 1, 1) & \dots (x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3) \cdot (x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3) = 0, \\ (1, 1, -1) & \dots (x_1 + \varepsilon x_2 - \varepsilon^2 x_3) \cdot (x_1 + \varepsilon^2 x_2 - \varepsilon x_3) = 0, \\ (1, -1, 1) & \dots (x_1 - \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3) \cdot (x_1 - \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3) = 0, \\ (-1, 1, 1) & \dots (-x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3) \cdot (-x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3) = 0. \end{aligned}$$

Da die Tangentengleichung nicht von Koeffizienten  $A, B, C$  abhängt, ist sofort ersichtlich, dass alle Punkte des Quadrupels (5) nur gewöhnliche Knotenpunkte mit gemeinsamen Tangenten für alle Kurven des Büschels (18) sind.

Analog hat das Büschel der Kurven 6. Ordnung (19) in vier Doppelpunkten (6) ein Tangentenpaar im Punkt

$$(22) \quad \begin{aligned} (\varepsilon^2, \varepsilon, 1) & \dots (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3) = 0, \\ (\varepsilon^2, \varepsilon, -1) & \dots (x_1 + x_2 - x_3) \cdot (x_1 + \varepsilon^2 x_2 - \varepsilon x_3) = 0, \\ (\varepsilon^2, -\varepsilon, 1) & \dots (x_1 - x_2 + x_3) \cdot (x_1 - \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3) = 0, \\ (-\varepsilon^2, \varepsilon, 1) & \dots (-x_1 + x_2 + x_3) \cdot (-x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3) = 0. \end{aligned}$$

Auch das dritte Büschel (20) hat in den Doppelpunkten (7) die folgenden Tangentenpaare im Punkt

$$(23) \quad \begin{aligned} (\varepsilon, \varepsilon^2, 1) & \dots (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3) = 0, \\ (\varepsilon, \varepsilon^2, -1) & \dots (x_1 + x_2 - x_3) \cdot (x_1 + \varepsilon x_2 - \varepsilon^2 x_3) = 0, \\ (\varepsilon, -\varepsilon^2, 1) & \dots (x_1 - x_2 + x_3) \cdot (x_1 - \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3) = 0, \\ (-\varepsilon, \varepsilon^2, 1) & \dots (-x_1 + x_2 + x_3) \cdot (-x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3) = 0. \end{aligned}$$

Die gegenseitige Verflechtung dieser drei Büschel von Kurven 6. Ordnung zeigt eine weitere hübsche Konfigurationseigenschaft:

**Satz 8.** *Alle acht Tangenten eines Knotenpunktequadrupels (5), bzw. (6), bzw. (7) der Kurven 6. Ordnung eines der Büschel (18), bzw. (19), bzw. (20) berühren einen Kegelschnitt, der durch die übrigen zwei Knotenpunktequadrupel hindurchgeht. Dabei berührt jedes Tangentenpaar in einem Knotenpunkt die beiden erwähnten Kegelschnitte, die durch den gegebenen Punkt hindurchgehen.*

Zum Beweis des ersten Teiles dieses Satzes genügt es, das Dualitätsprinzip auszunützen. Die Tangentenkoordinaten der Geraden (21) sind äquivalent mit den Punktkoordinaten der Punktequadrupel (6) und (7). Im Satz 4 wurde gezeigt, dass diese acht Punkte auf dem Kegelschnitt  $k_1$  mit der Gleichung (9) liegen; dual gesehen berühren diese acht Geraden (21) den Kegelschnitt mit der Tangentengleichung (9a), das ist wieder der Kegelschnitt  $k_2$ .

Für die weiteren zwei Achtupel von Tangenten (22), bzw. (23) ist der Beweis analog.

Der zweite Teil der Behauptung wird durch direkte Berechnung bestätigt. So ist z. B. die Tangente des Kegelschnittes  $k_1$  mit der Gleichung (8) im Punkt  $(1, 1, 1)$  eine Gerade mit der Gleichung

$$x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 = 0,$$

die allerdings auch den Kegelschnitt  $k_2$  mit der Gleichung (9) im Punkt  $(\varepsilon, \varepsilon^2, 1)$  berührt; durch den Punkt  $(1, 1, 1)$  geht aber auch der Kegelschnitt  $k_3$  mit der Gleichung (10) hindurch und die Tangente dieses Kegelschnittes in dem betrachteten Punkt ist die Gerade mit der Gleichung

$$x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon x_3 = 0,$$

die auch Tangente des Kegelschnittes  $k_2$  im Punkt  $(\varepsilon^2, \varepsilon, 1)$  ist, usw. Abschliessend lässt sich noch die Verbindung des Satzes 6 und des Satzes 8 zeigen:

**Satz 9.** *Im Netz (1) existieren genau drei Kurven 6. Ordnung vom Geschlecht 3, welche die Eigenschaft haben, dass alle 14 Tangenten der Kurven in ihren 7 einfachen Knotenpunkten einen bestimmten Kegelschnitt berühren.*

**Beweis.** Im Satz 6 wurde gezeigt, dass im Fall  $A = B$  6 Tangenten der Kurve 6. Ordnung (1) in den Doppelpunkten  $O_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) einen Kegelschnitt mit der Gleichung (9) berühren. Im Satz 8 wurde dann gezeigt, dass denselben Kegelschnitt auch 8 Tangenten aller Kurven 6. Ordnung des Büschels (18) in den 4 Doppelpunkten (5) berühren; es ist also die Kurve 6. Ordnung mit der Gleichung

$$(24) \quad x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_3^4 + x_2^2 x_3^4 + x_1^4 x_3^2 + x_1^2 x_2^4 + x_2^4 x_3^2 - 6x_1^2 x_2^2 x_3^2 = 0$$

eine Kurve 6. Ordnung, die 7 gewöhnliche Knotenpunkte  $\{O_i \cup (5)\}$  mit 14 Tangenten, die den Kegelschnitt (9) berühren, hat.