Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

POZNÁMKA K ČLÁNKU V. PETRŮVA

PAVEL KALÁŠEK, Ostrava

(Došlo dne 1. června 1971)

Buď C prostor spojitých funkcí na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ s obvyklou metrikou. V práci [2] je ukázáno, že existuje množina $B \subset C$, prvé kategorie v C tak, že pro každou funkci $f \in C - B$ a pro každé $t \in (0, 1)$ je

$$f^s(t) = \limsup_{h\to 0} \frac{f(t + h) - f(t - h)}{2h} = +\infty, \tag{1}$$

$$f_s(t) = \liminf_{h\to 0} \frac{f(t + h) - f(t - h)}{2h} = -\infty.$$

V práci [1] je uvedena konstrukce takovéto funkce.

V této poznámce udáme jednoduchý obecný postup ke konstrukci takové funkce, z něhož vhodnou specialisací plyne zjednodušení podstatné části důkazu uvedeného tvrzení v práci [2] a i jednodušší konstrukce, než je uvedena v [1].

1. Buď $g(t)$ spojitá funkce definovaná v $(-\infty, +\infty)$, periodická s periodou 1, $0 \leqq g \leqq 1$ a nechť existují kladná čísla α, β, γ tak, že platí

a)

$$|g(t_1) - g(t_2)| \leqq \alpha|t_1 - t_2| \tag{2}$$

pro všechna t_1, t_2,

b) pro každé t existuje číslo $h_i(t)$ $(i = 1, 2)$ tak, že $\beta \leqq h_i(t) < 1$ a platí

$$2\gamma\, h_i(t) < (-1)^{i+1} \left(g(t + h_i(t)) - g(t - h_i(t))\right), \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Buď $1 < A < B$ a položme

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(B^n t)}{A^n}.$$

Funkce f je zřejmě spojitá. Označme $h_{i,k}(t) = h_i(B^k t)/B^k$ pro $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots$ Je tedy

$$\frac{\beta}{B^k} \leqq h_{i,k}(t) < \frac{1}{B^k}. \tag{4}$$

Zvolme t pevné. Pro $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots$ je dle (2)–(4)

$$(-1)^{i+1} \frac{f(t + h_{i,k}(t)) - f(t - h_{i,k}(t))}{2h_{i,k}(t)} > \gamma \left(\frac{B}{A}\right)^k - \sum_{n=0}^{k-1} \alpha \left(\frac{B}{A}\right)^n - \frac{B^k}{2\beta} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{A^n} >$$

$$> \left(\frac{B}{A}\right)^k \left(\gamma - \frac{\alpha A}{B - A} - \frac{1}{2\beta(A - 1)}\right),$$

což je pro $B > A(1 + 4\alpha/\gamma)$, $A > 1 + 2/\beta\gamma$ jistě větší než $\frac{1}{2}(B/A)^k \gamma$. Platí tedy (1), tj. funkce f má v každém bodě horní symetrickou derivaci $+\infty$, dolní $-\infty$.

2. Buď $\varphi(h)$ kladná funkce definovaná v intervalu $(0, +\infty)$, $\lim_{h \to 0+} \varphi(h) = 0$. V práci [2] je ukázáno, že množina A těch $f \in C$, pro něž pro každé $t \in (0, 1)$ je

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{f(t + h) - f(t - h)}{\varphi(h)} = +\infty, \quad \liminf_{h \to 0+} \frac{f(t + h) - f(t - h)}{\varphi(h)} = -\infty$$

tvoří residuel, tj. $C - A$ je prvé kategorie. Z [2] (str. 338–339) vyplývá, že k důkazu tohoto tvrzení stačí ukázat, že pro každé přirozené $n > 1$ je množina B_n těch $f \in C$, pro něž existuje $t \in \langle 1/n, 1 - 1/n \rangle$ tak, že pro všechna $h \in (0, 1/n\rangle$ platí

$$f(t + h) - f(t - h) \leqq n\, \varphi(h)$$

řídká v C. Stejně jako v [2] ukážeme, že množiny B_n jsou uzavřené. Protože polynomy jsou husté v C, stačí jako v [2] ukázat toto:

K danému přirozenému $n > 1$, danému polynomu p a k danému $r > 0$ existuje $f \in C$ tak, že $|f| < r$ a $p + f \in C - B_n$.

Buď $M > 0$ takové, že $|p(t + h) - p(t - h)| \leqq 2Mh$ pro všechna $t \in \langle 1/n, 1 - 1/n \rangle$, $0 < h < 1/n$ a buď $f(t) = g(B^k t)/A^k$, kde g je funkce z odst. 1, $1 < A < B$. Označme $\psi(h) = \sup_{0 < u \leqq h} \varphi(u)$. Je tedy ψ neklesající, $\lim_{h \to 0+} \psi(h) = 0$. Buď $t \in \langle 1/n, 1 - 1/n \rangle$. Potom je

$$\frac{p(t + h_{1,k}(t)) + f(t + h_{1,k}(t)) - p(t - h_{1,k}(t)) - f(t - h_{1,k}(t))}{\varphi(h_{1,k}(t))} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{\varphi(h_{1,k}(t))} \left(\frac{\gamma B}{A^k} - \frac{2M}{B^k}\right).$$