ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

1

98

ACADEMIA
PRAHA

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 98 • Č. 1 • STR. 1—112 • PRAHA 14. 2. 1973

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fyziky")

SVAZEK 98 (1973)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd v Praze

Redakce:

Matematický ústav Československé akademie věd v Praze
115 67 Praha 1, Žitná 25

Časopis pro pěstování matematiky. Ročník *98* (1973). — Vydává Československá akademie věd v Academii, nakladatelství Československé akademie věd, Vodičkova 40, 112 29 Praha 1. Redakce: Matematický ústav ČSAV v Praze, Žitná 25, 115 67 Praha 1. — Tiskne Státní tiskárna, n. p., závod 5, nositel Řádu práce, tř. Rudé Armády 171, 180 00 Praha 8. — Objednávky a předplatné přijímá PNS, administrace odborného tisku, Jindřišská 14, 125 05 Praha 1. Lze také objednat u každého poštovního úřadu nebo doručovatele. Vychází čtvrtletně. Roční předplatné Kčs 56,— cena jednotlivého sešitu Kčs 14,—. (Tyto ceny jsou platné pouze pro Československo.)

Sole agents for all western countries KUBON & SAGNER, P.O.B. 68, 8000 München 34, G.F.R. Annual subscription: Vol. 98, 1973 (4 issues) DM 65,—.

Toto číslo vyšlo v únoru 1973

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 98 * PRAHA 14. 2. 1973 * ČÍSLO 1

ON THE ZEROS OF GENERALIZED JACOBI'S ORTHOGONAL POLYNOMIALS

FRANTIŠEK PÚCHOVSKÝ, Žilina

(Received December 15, 1970)

1. INTRODUCTION

1,1. We employ the following notation:

1. I is the closed interval $[-1, 1]$.

2. c_i $(i = 1, 2, \ldots)$ are positive constants independent of n as well as of $x \in I$ or of x in the interval in question.

3. $c_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ are functions of the variable x such that

$$|c_i(x)| < c_1 .$$

The numbering of c_i a $c_i(x)$ is independent for every section.

1,2. In this paper the zeros of the orthonormal polynomials

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^{n-k} , \quad a_0^{(n)} > 0 , \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1,2a}$$

associated with the function

$$Q(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta e^{u(x)} = J(x) \,.\, e^{u(x)} \tag{1,2b}$$

on the interval I are investigated. Here $\alpha > -1$, $\beta > -1$ and $u(x)$ is a real function satisfying the following conditions:

1. $u'''(x)$ exists in the interval $[-1, 1]$.

2. If we put for brevity

$$\Delta_x f(t) = \frac{f(x) - f(t)}{x - t}, \quad v_1(t) = \Delta_x u''(t), \quad v_2(t) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial t} \Delta_x u'(t), \quad v_3(t) = \Delta_x u'''(t),$$

then for $i = 1, 2, 3$

(1,2c) $$\min(\alpha, \beta) \geqq \tfrac{1}{2} \Rightarrow \int_I (t - t^2)^{3/2} |v_i(t)| \, dt = c_1(x)$$

and

(1,2d) $$\min(\alpha, \beta) < \tfrac{1}{2} \Rightarrow \Delta_x v_i(t) = c_2(x).$$

1,3. In my paper "On a class of generalized Jacobi's orthonormal polynomials"[1]) I have established the following differential equation for the above polynomials $Q_n(x)$:

(1,3a)

$$Q^{-1}(x) \frac{d}{dx} [(1 - x^2)\, Q_n'(x)\, Q(x) + (1 - x^2)\, b_n(x)\, Q_n'(x) + [\lambda_n^2 + a_n(x)]\, Q_n(x) = 0.$$

Herein

(1,3b) $$\lambda_n = \sqrt{(n(n + \alpha + \beta + 1))}$$

(We suppose n to be so large that λ_n is real.)

Further

(1,3c) $$a_n(x) = n\, c_3(x),$$

(1,3d) $$b_n(x) = n^{-1}\, c_4(x),$$

$b_n'(x)$ exists in the interval $[-1, 1]$ and

(1,3e) $$b_n'(x) = n^{-1}\, c_5(x).$$

1,4. We denote by $J_n(x)$ the orthonormal polynomial associated with the function $J(x)$ on the interval $[-1, 1]$. $J_n(x)$ are normalized Jacobi's polynomials.

1,5. The results of my investigations are contained in the second chapter. The theorems on the zeros of the polynomials $J_n(x)$ are a generalization of the known results of Szegö (See [7] p. 9 and [1] pp. 135–136).

---

[1]) See Čas. pěst. mat. *97* (1972), 361–378.

2. THEOREMS ON THE ZEROS OF THE POLYNOMIALS $Q_n(x)$

2,1. *Let $\{x_{\nu,n}\}_{n=1}^{\infty}$ be the increasing sequence of the zeros of Bessel function $I_\nu(x)$ of the first kind and of order ν.*

Let $\{x_k^{(n)}\}_{k=1}^{n}$ be the increasing sequence of zeros of the polynomial $Q_n(x)$.

Let $k = 1, 2, \ldots$ be independent of n. Then for $n \to +\infty$

$$x_k^{(n)} = -1 + \frac{x_{\beta,k}^2}{2n^2}\left[1 + O(n^{-1})\right] \tag{2,1a}$$

and

$$x_{m-k+1}^{(n)} = 1 - \frac{x_{\alpha,k}^2}{2n^2}\left[1 + O(n^{-1})\right]. \tag{2,1b}$$

(*The constants in O depend on k.*)

The proof of this theorem is contained in Chapter 5.

2,2. *Let $Q_n(x) = J_n(x)$ where $J_n(x)$ is defined in Section 1,4. If we put*

$$j(\alpha, \beta) = j = \tfrac{1}{6}(\alpha^2 + 3\alpha\beta + 3\alpha + 3\beta + 2), \quad j_1 = j(\beta, \alpha), \tag{2,2a}$$

then

$$x_k^{(n)} = -1 + \frac{x_{\beta,k}^2}{2n^2}\left[1 - \frac{\alpha+\beta+1}{n} - \frac{(\alpha+\beta+1)^2 + j_1}{n^2} - \frac{(\alpha+\beta+1)\left[2j_1 + (\alpha+\beta+1)^2\right]}{n^3}\right] - \frac{x_{\beta,k}^4}{24n^4}\left[1 - \frac{2(\alpha+\beta+1}{n}\right] + O(n^{-6}) \tag{2,2b}$$

and

$$x_{n-k+1}^{(n)} = 1 - \frac{x_{\alpha,k}^2}{2n^2}\left[1 - \frac{\alpha+\beta+1}{n} - \frac{(\alpha+\beta+1)^2 + j}{n^2} - \frac{(\alpha+\beta+1)\left[2j + (\alpha+\beta+1)^2\right]}{n^3}\right] + \frac{x_{\alpha,k}^4}{24n^4}\left[1 - \frac{2(\alpha+\beta+1)}{n}\right] + O(n^{-6}). \tag{2,2c}$$

The proof is in Chapter 6.

2,3. Theorem on the distance of the consecutive zeros of the function $Q_n(\sin z)$.

Notations.

$$|\alpha| \leqq \tfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha_1 = 0\,; \quad |\alpha| > \tfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4\alpha^2 - 1)}\,; \tag{2,3a}$$

$$|\beta| \leqq \tfrac{1}{2} \Rightarrow \beta_1 = 0\,; \quad |\beta| > \tfrac{1}{2} \Rightarrow \beta_1 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(4\beta^2 - 1)}\,. \tag{2,3b}$$

$\alpha_0 > \alpha_1$, $\beta_0 < \beta_1$ are arbitrary real numbers independent of n;

(2,3c) $$a_n \in (\alpha_0, n)\,, \quad b_n \in (-n, \beta_0)$$

are arbitrary numbers which may depend on n;

(2,3d) $$J_n = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} - \frac{a_n}{n}\right), \quad J_n^{(1)} = \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{b_n}{n}, \frac{\pi}{4}\right);$$

(2,3e) $$\lambda_n = \sqrt{(n(n + \alpha + \beta + 1))}\,;$$

(2,3f) $$\varrho(x) = \lambda_n^2 + \frac{1 - 4\alpha^2}{4x^2}, \quad \varrho_1(x) = \lambda_n^2 + \frac{1 - 4\beta^2}{4x^2}\,;$$

(2,3g) z_1 and z_2, $z_1 < z_2$ are arbitrary two consecutive zeros of the function

$$Q_n(\sin z)\,.$$

Assertion.

(2,3h) $$[z_1, z_2] \subset J_n \Rightarrow z_2 - z_1 = \pi\varrho^{-1/2}\left(\frac{\pi}{2} - z_1\right) + \delta_1^{(n)}$$

and

(2,3i) $$[z_1, z_2] \subset J_n^{(1)} \Rightarrow z_2 - z_1 = \pi\varrho_1^{-1/2}\left(-\frac{\pi}{2} + z_1\right) + \delta_2^{(n)}\,.$$

Herein

(2,3j) $$|\delta_1^{(n)}| < cn^{-2}(na_n^{-3} + 1)\,,$$

(2,3k) $$|\delta_2^{(n)}| < cn^{-2}(n|b_n|^{-3} + 1)\,,$$

where c is a constant independent of n, a_n, b_n, z_1 and z_2, that is, c is the same number for any two consecutive zeros z_1, z_2 located in J_n and $J_n^{(1)}$ respectively.

For the proof see Chapter 7.

2,4. *Let $\delta \in (0, \pi/4)$ be a constant independent of n and*

(2,4a) $$J_\delta = \left(-\frac{\pi}{2} + \delta, \frac{\pi}{2} - \delta\right).$$

Then in terms of the notation of Section 2,3

(2,4b) $$[z_1, z_2] \subset J_\delta \Rightarrow z_2 - z_1 = \frac{\pi}{n} + \vartheta_n$$

where

(2,4c) $$|\vartheta_n| < cn^{-2}\,,$$

c is a constant with the same properties as that in (2,3j) *and* (2,3k).

For the proof see Chapter 7.

2,5. *For the zeros of the function $J_n(\sin z)$ the following inequalities hold if we employ the notation introduced in Section 2,3*

$$|\delta_1^{(n)}| < cn^{-2}(na_n^{-3} + n^{-1}), \tag{2,5a}$$

$$|\delta_2^{(n)}| < cn^{-2}(n|b_n|^{-3} + n^{-1}), \tag{2,5b}$$

where $\delta_1^{(n)}$, $\delta_2^{(n)}$ are defined by (2,3h) and (2,3i) respectively.

For the proof see Chapter 7.

3. A TRANSFORMATION OF THE FUNDAMENTAL DIFFERENTIAL EQUATION

3,1. We shall employ the following notations

$$z = \arcsin x, \tag{3,1a}$$

$$y' = \frac{dy}{dz}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dz^2}, \tag{3,1b}$$

$$\omega(z) = (1 + \alpha + \beta) \operatorname{tg} z + (\alpha - \beta) \sec z, \tag{3,1c}$$

$$J(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta, \tag{3,1d}$$

$$q(x) = \sqrt{(\cos z\, J(\sin z))} = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^z \omega(t)\, dt\right], \tag{3,1e}$$

$$\gamma(z) = \tfrac{1}{2}[\omega'(z) - \tfrac{1}{2}\omega^2(z)], \tag{3,1f}$$

(3,1g) $\quad \alpha_n(z) = \lambda_n^2 + a_n(\sin z) + \gamma(z) - \frac{1}{2}[b_n'(\sin z) + u''(\sin z)] \cos^2 z -$

$- \frac{1}{4}[b_n(\sin z) + u'(\sin z)]\,\{[b_n(\sin z) + u'(\sin z)] \cos^2 z - 2\omega(z) \cos z - 2 \sin z\}$.

$$\left(\text{Here } b_n'(x) = \frac{db_n(x)}{dx}, \; u^{(k)}(\sin z) = \frac{d^k[u(x)]}{dx^2} \quad (k = 1, 2).\right)$$

$$q_n(z) = Q_n(\sin z)\, q(z) \exp\left\{\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^z [b_n(\sin t) + u'(\sin t)] \cos t\, dt\right\}. \tag{3,1h}$$

3,2. *In the above notation the function $Q_n(\sin z)$ is a solution of the differential equation*

$$y'' + \{[u'(\sin z) + b_n(\sin z)] \cos z - \omega(z)\}\, y' + [\lambda_n^2 + \alpha_n(z)]\, y = 0 \tag{3,2a}$$

and the function $q_n(z)$ satisfies the differential equation

$$y'' + \alpha_n(z)\, y = 0\,. \tag{3,2b}$$

Proof follows from (1, 3a).

3,3. Remark. In the following all the assertions are derived for $x \in [0, 1]$, that is for $z \in [0, \pi/2]$. The same assertions hold for $z \in [-\pi/2, 0]$ if we replace α by β.

3,4. *For* $\zeta \to 0+$

$$q\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right) = 2^{(\beta-\alpha)/2} \,.\, \zeta^{\alpha+1/2}[1 + O(\zeta^2)]\,, \tag{3,4a}$$

$$\omega\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right) = (1 + 2\alpha)\,\zeta^{-1} - \tfrac{1}{6}(\alpha + 3\beta + 2)\,\zeta + O(\zeta^3)\,, \tag{3,4b}$$

$$\gamma\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right) = \tfrac{1}{4}(1 - 4\alpha^2)\,\zeta^{-2} + j + O(\zeta^2)\,, \tag{3,4c}$$

where j is defined by (2,2a).

Proof. Trivial.

3,5. *For brevity, put*

$$\omega_n(\zeta) = \alpha_n\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right) - \lambda_n^2 + \frac{4\alpha^2 - 1}{4\zeta^2}\,. \tag{3,5a}$$

Then

$$\zeta \in \left[0\, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow |\omega_n(\zeta)| < c_1 n\,. \tag{3,5b}$$

The proof follows from (3,5a), (1,3c), (1,3d), and (1,3e).

3,6. *Let* $|\alpha| > \frac{1}{2}$. *Denote by* $\alpha^{(n)}$ *the greatest real zero of the function* $\alpha_n(z)$ *defined by* (3,1g). *Then for* $n \to +\infty$

$$\alpha^{(n)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_1}{n}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \tag{3,6a}$$

where for brevity

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4\alpha^2 - 1)}\,. \tag{3,6b}$$

Remark. For almost all values of n there exists one and only one positive zero of $\alpha_n(z)$ (provided $|\alpha| > \frac{1}{2}$).

Proof. According to (3,5a) and (3,5b) it is

$$\frac{\pi}{2} - \alpha^{(n)} = \frac{\lambda_n^{-1}}{2}\left\{(4\alpha^2 - 1)\Big/\left[1 + \lambda_n^{-2}\omega_n\left(\frac{\pi}{2} - \alpha^{(n)}\right)\right]\right\}^{1/2} = \frac{\alpha_1}{n}\left[1 + O(n^{-1})\right].$$

3,7. *Let $|\alpha| > \frac{1}{2}$ and let $\alpha_0 > \alpha_1$ be a constant independent of n, where α_1 is defined by (3,6b). Then for $z \in [0, \pi/2 - \alpha_0/n]$*

(3,7a) $$0 < \alpha_n^{-1}(z) < c_1 n^{-2}$$

for almost all values of n.

If $\alpha \leqq -\frac{1}{2}$, then (3,7a) holds for every $\alpha_0 > 0$.

Proof. Put

$$f(x) = \frac{1 - 4\alpha^2}{4x^2}.$$

Hence $f(\alpha_1) = -1$. Since $f(x)$ is an increasing function for $x > 0$, there exists in virtue of (3,5a) and (3,5b) a constant $c > 0$ independent of n such that for almost all values of n

$$\zeta \in \left(\frac{\alpha_0}{n}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \alpha_n\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right) = \lambda_n^2 + f(\zeta) + \omega_n(\zeta) > \lambda_n^2 + n^2[f(\alpha_0) - f(\alpha_1)] +$$

$$+ n^2 f(\alpha_1) - cn = \lambda_n^2 - n^2 - cn + \frac{\alpha_0^2 - \alpha_1^2}{4\alpha_0^2\alpha_1^2}(4\alpha^2 - 1)\, n^2 > \frac{\alpha_0^2 - \alpha_1^2}{8\alpha_1^2\alpha_0^2}(4\alpha^2 - 1)\, n^2.$$

3,8. *For brevity, put*

(3,8a) $$\psi_n(x) = q_n\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Then for $x \to 0+$

(3,8b) $$\psi_n(x) = 2^{(\beta-\alpha)/2} x^{\alpha+1/2}\, Q_n(1)\left[1 + O(x^2)\right],$$

where

(3,8c) $$Q_n(1) > 0.$$

Proof. For brevity, put

(1) $$\varepsilon_n(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{\pi/2-x}^{\pi/2} [b_n(\sin t) + u'(\sin t) \cos t\, dt\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x [b_n(\cos t) + u'(\cos t)] \sin t\, dt\right\} = 1 + O(x^2) \quad \text{for} \quad x \to 0+.$$

Further

(2) $$Q_n(\cos x) = Q_n(1) + O(x^2).$$

Since

$$\psi_n(x) = Q_n(\cos x)\, q\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \varepsilon_n(x),$$

(3.8b) follows from (1), (2) and (3,4a).

By a well known theorem

$$Q_n(x) \neq 0 \quad \text{for} \quad x \geqq 1$$

and in virtue of (1,1a) it is $Q_n(+\infty) = +\infty$. This shows that (3,8c) is true.

4. LEMMAS

4,1. In the following we employ the Bessel functions $I_\alpha(x)$ of the order α and of the first kind as well as the Bessel functions $Y_\alpha(x)$ of the order α and the second kind.

It is well known that

(4,1a) $$I_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+2\nu}}{\nu!\,\Gamma(\alpha + \nu + 1)}$$

and provided $\alpha \geqq 0$ is an integer,

(4,1b) $$Y_\alpha(x) = \frac{2}{\pi}\left[C + \lg \frac{x}{2}\right] I_\alpha(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha+2\nu}}{\nu!\,(\nu + \alpha)!}\, \sigma_\nu - S_\alpha(x).$$

Herein C is the Euler constant and

$$\alpha > 0 \Rightarrow \sigma_0 = \sum_{k=1}^{\alpha} \frac{1}{k}, \quad \alpha = 0 \Rightarrow \sigma_0 = 1,$$

$$\nu > 0 \Rightarrow \sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{\nu+\alpha} \frac{1}{k},$$

$$S_0(x) = 0, \quad \alpha > 0 \Rightarrow S_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} \frac{(\alpha - \nu - 1)! \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu-\alpha}}{\nu!}.$$

4,2. Put

(4,2a) $$v(x) = \sqrt{(x)}\, I_\alpha(x)$$

and if α is not an integer,

(4,2b) $$w(x) = \sqrt{(x)}\, I_{-\alpha}(x)\,.$$

If α is an integer, then

(4,2c) $$w(x) = \sqrt{(x)}\, Y_\alpha(x)\,.$$

$v(x)$ and $w(x)$ are linearly independent solutions of the differential equation

(4,2d) $$y'' + \left(1 + \frac{1 - 4\alpha^2}{4x^2}\right) y = 0\,.$$

(See [I] pp. 29–30.)

It is easily seen that for any real number k the functions $v(kx)$ and $w(kx)$ are linearly independent solutions of the differential equation

(4,2e) $$y'' + \left[k^2 + \frac{1 - 4\alpha^2}{4x^2}\right] y = 0\,.$$

(See [I] p. 31.)

4,3. The following theorem will be used:

Let $p(x)$ and $q(x) < 0$ be real functions continuous on the interval (a, b) and let $\varphi(x)$ be a solution of the differential equation

(4,3a) $$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0\,.$$

Then the function $\varphi(x)\,.\,\varphi'(x)$ has at most one zero in the closed interval $[a, b]$. Herein a or b are also zeros of $\varphi(x)\,\varphi'(x)$ if for $i = 0,1$

$$\lim_{x \to a+} \varphi^{(i)}(x) = 0 \quad \text{or} \quad \lim_{x \to b-} \varphi^{(i)}(x) = 0\,.$$

Proof. (See [2] pp. 164–165.)

4,4. *Let $\{x_{\alpha,n}\}_{n=1}^{\infty}$ and $\{x'_{\alpha,n}\}_{n=1}^{\infty}$ be the increasing sequences of all the positive zeros of the functions $v(x)$ and $v'(x)$ respectively.*

Let $\{\zeta_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{\zeta'_n\}_{n=0}^{\infty}$ be the increasing sequences of all the positive zeros of the functions $\psi_n(x)$ and $\psi'_n(x)$ respectively.[2]

If $|\alpha| > \frac{1}{2}$, then

(4,4a) $$x_{\alpha,1} > x'_{\alpha,1} > \tfrac{1}{2}\sqrt{(4\alpha^2 - 1)} = \alpha_1\,.$$[3]

---

[2]) See (3,8a).

[3]) See (3,6b).

and

(4,4b) $$\tilde{\alpha}_n\left(\frac{\pi}{2}-\zeta_1\right) > \alpha_n\left(\frac{\pi}{2}-\zeta_1'\right) > 0\,.$$

Proof. Since

$$v(0) = \psi_n(0) = 0$$

and $y = v(x)$ is a solution of the equation (4,2d) our assertion is a consequence of theorem in Section 4,3.

4,5. *Let $v(x)$ and $w(x)$ be the functions defined by* (4,2a), (4,2b) *and* (4,2c) *respectively and let $\psi_n(x)$ be defined by* (3,8b).

For brevity, put

(4,5a) $$W(x, t) = v(x)\, w(t) - v(t)\, w(x)\,,$$

(4,5b) $$l^{-1} = v'(x)\, w(x) - v(x)\, w'(x)\,,$$

(4,5c) $$l_n = \sqrt{(\lambda_n^2 + \tau_n)}\,,$$

where $\lambda_n = \sqrt{(n(n+\alpha+\beta+1))}$ *and*

(4,5d) $$\tau_n = O(n)$$

is a real number depending on n.

Further, put

(4,5e) $$\psi_n = \lim_{x\to 0+}\frac{v(l_n x)}{\psi_n(x)} = \frac{2^{-(\alpha+\beta)/2}\, l_n^{\alpha+1/2}}{\Gamma(\alpha+1)\, Q_n(1)}\,,$$

(4,5f) $$\chi_n(x) = \psi_n\, \psi_n(x)$$

and

(4,5g) $$\beta_n(t) = \omega_n(t) - \tau_n$$

where $\omega_n(t)$ is defined by (3,5a).

Then for $x \in (0, 1)$

(4,5h) $$\chi_n(x) = v(l_n x) - \varrho_n(x)$$

where

(4,5i) $$\varrho_n(x) = l l_n^{-1}\int_0^x \beta_n(t)\, W(l_n x, l_n t)\, \chi_n(t)\, dt\,.$$

Proof. 1. Denote by k_i ($i = 1, 2, \ldots$) positive constants independent of x and t in the interval $[0, 1]$. (They may depend on n.)

In virtue of (3,8b) and (3,5b) we may write for $t \in (0, 1)$

(1) $$|\chi_n(t)| < k_1 t^{\alpha+1/2}, \quad |\beta_n(t)| < k_2 .$$

By applying (4,1a) and (4,1b) we deduce that for $x \in (0, 1)$ and $t \in [0, 1)$ and $x > t$

(2) $$|W(l_n x, l_n t)| < k_3\, \delta(x, t) = k_3[(xt^{-1})^\alpha + (x^{-1}t)^\alpha]\, \sqrt{(xt)}\, \lg^{m_0} \left|\frac{ex}{t}\right| ,$$

where $m_0 = 1$ if $\alpha = 0$, and $m_0 = 0$ if $\alpha \neq 0$.

From (1) and (2) it follows for $x \in (0, 1)$

(3) $$|\varrho_n(x)| < k_4 \int_0^x t^{\alpha+1/2}\, \delta(x, t)\, dt < k_5 x^{\alpha+5/2} .$$

2. The function $\chi_n(x)$ defined by (4,5f) is a solution of the differential equation

$$y'' + \alpha_n \left(\frac{\pi}{2} - x\right) y = 0 .$$

Hence

(4) $$\chi_n''(x) + \left[l_n^2 + \frac{1 - 4\alpha^2}{4x^2}\right] \chi_n(x) = -\beta_n(x)\, \chi_n(x) .$$

By (4) we derive the equation

(5) $$\chi_n(x) = C_1\, v(l_n x) + C_2\, w(l_n x) - \varrho_n(x) ,$$

where C_1 and C_2 are constants.

Let α be non integer. Making use of (3,8b), (4,1a), (4,5e) and (3) we deduce by (5) that for $x \to 0+$

$$\frac{(l_n x)^{\alpha+1/2}}{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} + O(x^{\alpha+5/2}) = \frac{C_1 (l_n x)^{\alpha+1/2}}{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} + O(x^{\alpha+5/2}) + \frac{C_2 (l_n x)^{-\alpha+1/2}}{2^{-\alpha}\Gamma(1 - \alpha)} [1 + O(x^2)] .$$

Hence

(6) $$C_1 + \frac{2^{2\alpha}\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(1 - \alpha)}\, l_n^{-2\alpha} x^{-2\alpha} [1 + O(x^2)]\, C_2 = 1 + O(x^2) .$$

From (6) it is easily seen that

(7) $$\alpha > 0 \Rightarrow C_2 = O(x^{2\alpha}) \Rightarrow C_2 = 0 , \quad C_1 = 1$$

and

$$\alpha < 0 \Rightarrow C_1 = 1 + O(x^{-2\alpha}) \Rightarrow C_1 = 1 , \quad C_2 = O(x^{2-2\alpha}) \Rightarrow C_2 = 0 .$$

If α is an integer, then by (3,8b), (4,1b) and (3) we deduce that for $x \to 0+$

$$\frac{(l_n x)^{\alpha+1/2}}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} + O(x^{\alpha+5/2}) = \frac{C_1 (l_n x)^{\alpha+1/2}}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)} + O(x^{\alpha+5/2}) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left[\frac{(l_n x)^{\alpha+1/2}}{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)} \lg x + 2^\alpha(\alpha-1)!\,(l_n x)^{-\alpha+1/2}\right][1 + O(x^2)]\, C_2 .$$

Hence we deduce $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ by a similar argument as above.

4,6. *Let $a > 0$ be an arbitrary number independent of n and*

(4,6a) $$I_a = \left(0, \frac{a}{n}\right).$$

Further denote by $\gamma_n(x)$ a real function defined in the interval I_a such that

(4,6b) $$t \in I_a \Rightarrow |\gamma_n(t)| < \gamma_n .$$

Put

(4,6c) $$\sigma_n(x) = \int_0^x \gamma_n(t)\, W(l_n x, l_n t)\, \chi_n(t)\, dt ,$$

where $\chi_n(x)$ is defined by (4,5f).

Then

(4,6d) $$x \in I_a \Rightarrow |\sigma_n(x)| < c_1 n^{-1} \gamma_n .$$

From (4,5i) and (4,6d) we deduce that

(4,6e) $$x \in I_a \Rightarrow |\varrho_n(x)| < c_2 n^{-1} .$$

Proof. 1. For brevity, put

(1) $$l_n(x) = x^{-\alpha-1/2}\chi_n(x) , \quad S_n = \sup_{x \in I_a} |l_n(x)| .$$

Making use of (4,6b) and (2) in Section 4,5, we obtain from (4,6c)

(2) $$x \in I_a \Rightarrow |\sigma_n(x)| < c_3 \gamma_n x S_n x^{\alpha+1/2} < c_4 \gamma_n n^{-1} S_n x^{\alpha+1/2} .$$

2. Put $\gamma_n(t) = \beta_n(t)$, where $\beta_n(t)$ is defined by (4,5g). In this case we may put $\gamma_n = c_5 n$ so that we obtain from (4,5i) and (2)

(3) $$x \in I_a \Rightarrow |\varrho_n(x)| < c_6 n^{-1} n n^{-1} x^{\alpha+1/2} S_n < c_7 n^{-1} x^{\alpha+1/2} S_n .$$

Since

(4) $$x \in I_a \Rightarrow |v(l_n x)| < c_8 (l_n x)^{\alpha+1/2}$$

and by (4,5h)

$$(5) \qquad l_n(x) = [v(l_n x) - \varrho_n(x)]\, x^{-\alpha-1/2}$$

we deduce by (2) and (5)

$$S_n < c_9 n^{\alpha+1/2} + c_{10} n^{-1} S_n \Rightarrow S_n < c_{11} n^{\alpha+1/2}.$$

Applying this result we obtain (4,6d) from (2) and (4,6e) from (3).

4,7. *Let $v(x)$ be defined by (4,2a) and let $x_{\alpha,k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ be the zeros of $v(x)$ introduced in Section 4,4. Let $A_n > 0$ satisfy the condition*

$$(4,7\text{a}) \qquad A_n = o(1) \quad \textit{for} \quad n \to +\infty.$$

If

$$(4,7\text{b}) \quad x_{\alpha,0} = 0,\ x_{\alpha,k} + \eta n \in (x_{\alpha,k-1} + c_1, x_{\alpha,k+1} - c_1) \ \textit{and}\ |v(x_{\alpha,k} + n\eta)| < A_n,$$

then

$$(4,7\text{c}) \qquad |\eta| < c_2 n^{-1} A_n.$$

Proof. For brevity, put $x_{\alpha,k} = x_k$ and $x_k + n\eta = b$.

Let I_η be the interval (b, x_k) if $\eta < 0$ or (x_k, b) if $\eta > 0$. By (4,7a) and (4,7b) we deduce

$$(1) \qquad x \in I_\eta \Rightarrow |v(x)| < A_n.$$

Further

$$(2) \qquad v(b) = n\eta\, v'(x_k) + \tfrac{1}{2} n^2 \eta^2\, v''(\xi),$$

where

$$(3) \qquad \xi \in I_\eta.$$

From the equation (4,2d) we obtain

$$(4) \qquad v''(\xi) = \left[\frac{4\alpha^2 - 1}{4\xi^2} - 1\right] v(\xi).$$

Making use of (4), and (1) we deduce

$$(5) \qquad |v''(\xi)| < c_3 |v(\xi)| < c_4 A_n.$$

Since $v'(x_k) \neq 0$ it follows from (2), (5) and (4,7a) that

$$A_n > |v(b)| > n|\eta|\, |v'(x_k)| - c_5 |v''(\xi)| > n\eta |v'(x_k)| - c_6 A_n$$

for almost all values of n.

4,8. *Following the notation of Section* 4,6 *we put*

$$h_n(x) = v(l_n x) + \eta_n(x), \tag{4,8a}$$

where l_n *is defined by* (4,5c)

$$x \in I_a \Rightarrow |\eta_n(x)| < A_n. \tag{4,8b}$$

Here A_n *satisfies* (4,7a).

Let $\{\xi_n\}_{n=1}^{N}$ *be the increasing sequence of all the zeros of the function* $h_n(x)$ *contained in the interval* I_a. *Then the following assertions are true*:

a) *For every positive integer* k *there exists an integer* $r > 0$ *such that for* $n \to +\infty$

$$\xi_k = \frac{x_{\alpha,r}}{l_n}[1 + O(A_n)]. \tag{4,8c}$$

b) *For every integer* $m > 0$ *there exists an integer* s *such that for* $n \to +\infty$

$$\xi_s = \frac{x_{\alpha,m}}{l_n}[1 + O(A_n)]. \tag{4,8d}$$

Proof. 1. Let $\{x'_{\alpha,n}\}_{n=1}^{\infty}$ be the increasing sequence of all the positive zeros of the function $v'(x)$.

From (4,8b) and (4,7a) we deduce the following assertion A: For every integer $v > 0$ there is at least one zero of the function $h_n(x)$ in the interval $(x'_{\alpha,v}/l_n, x_{\alpha,v+1}/l_n)$.

2. Put

$$\xi_k = \frac{x_{\alpha,r}}{l_n} + l_n^{-1} n\eta, \tag{1}$$

where $x_{\alpha,r}$ is the zero of the function $v(l_n x)$ nearest to the number ξ_k. From the above proposition

$$\xi_k < \frac{x'_{\alpha,k+1}}{l_n} < \frac{x_{\alpha,k+2}}{l_n} \in I_a. \tag{2}$$

From (2) it is obvious that $r \leq k + 2$.

If $a > x_{\alpha,k+2}$ it follows from (4,8b) that

$$|\eta_n(\xi_k)| < A_n. \tag{3}$$

By (4,8a) and (1) we deduce that

$$0 = h_n(\xi_k) = v(x_r + n\eta) + \eta_n(\xi_k). \tag{4}$$

Hence we obtain as a consequence of (3) and (4,8b) that

$$|v(x_r + n\eta)| < A_n. \tag{5}$$

The proposition of Section 4,7 yields

$$|\eta| < A_n n^{-1} .$$

This inequality shows that (4,8c) is true.

3. Let

$$\frac{x_{\alpha,m}}{l_n} = \xi_s - n l_n^{-1} \eta' , \tag{6}$$

where ξ_s is a zero of the function $h_n(x)$ nearest to the number $x_{\alpha,m}/l_n$. From the above assertion A we see that

$$a > x'_{\alpha,m+2} \Rightarrow \xi_s < \frac{x'_{\alpha,m+2}}{l_n} \in I_a . \tag{7}$$

Making use of (4,8a) we obtain

$$0 = h_n(\xi_s) = v(x_{\alpha,m} + n\eta') + \eta_n(\xi_s) .$$

Hence, in virtue of (7) and (4,8b)

$$|v(x_m + n\eta')| < A_n \tag{8}$$

Hence by the statement of Section 4,7

$$|\eta'| < n^{-1} A_n . \tag{9}$$

(7) and (9) establish (4,8d).

5. PROOF OF (2,1a) AND (2,1b)

5,1. *In the notation introduced in Section 4,4, for* $k = 1, 2, \dots$ *independent of* n *it is*

$$\zeta_k = \frac{x_{\alpha,k}}{n} [1 + O(n^{-1})] \quad \textit{for} \quad n \to +\infty . \tag{5,1a}$$

Proof. 1. The zeros of the function $\psi_n(x)$ coincide with the zeros of the function $\chi_n(x)$ defined by (4,5f). Let I_a be defined by (4,6a) and choose a sufficiently large.

In virtue of (4,5h) and (4,6e) the theorem of Section 4,8 yields for $k = 1, 2, \dots$ and $m = 1, 2, \dots$ provided that $\zeta_k \in I_a$ and $x_{\alpha,m}/n \in I_a$,

$$\zeta_k = \frac{x_{\alpha,r}}{n} [1 + O(n^{-1})] \tag{1}$$

and

$$\zeta_s = \frac{x_{\alpha,m}}{n} [1 + O(n^{-1})] . \tag{2}$$

Herein $x_{\alpha,r}/l_n$ is the zero of $v(l_n x)$ nearest to the number ζ_k and ζ_s is the zero of $\chi_n(x)$ nearest to the number $x_{\alpha,m}/l_n$.

2. Put in (1) $k = 1$ and in (2) $m = 1$. Then

(3) $$n\zeta_1 \geqq x_{\alpha,1} + O(n^{-1})$$

and

(4) $$n\zeta_1 \leqq x_{\alpha,1} + O(n^{-1}) .$$

From (3) and (4) we see that

(5) $$\zeta_1 = \frac{x_{\alpha,1}}{n}\,[1 + O(n^{-1})] .$$

Hereby (5,1a) is established for $k = 1$.

3. Let $\omega_n(x)$ be defined by (3,5a) and put

(6) $$s_n = \sup_{x\in[0,\pi/2]} |\omega_n(x)| .$$

In virtue of (3,5b) we may choose $k_1 > 1$ independent of n and σ_n such that

(7) $$k_1 n > \sigma_n > s_n .$$

Put

(8) $$\lambda = \sqrt{(\lambda_n^2 - \sigma_n)} .$$

(5) enables us to choose σ_n so that

(9) $$\frac{x_{\alpha,1}}{\lambda} > \zeta_1 .$$

Since the functions $v(\lambda x)$ and $\chi_n(x)$ are solutions of the differential equations

(10) $$y'' + \left[\lambda^2 + \frac{1 - 4\alpha^2}{4x^2}\right] y = 0$$

and

(11) $$y'' + \left[\lambda_n^2 + \frac{1 - 4\alpha^2}{4x^2} + \omega_n(x)\right] y = 0$$

respectively it follows by the well-known Sturm's comparison theorem in virtue of (9) that in the interval $[0, \zeta_k]$ there are at most $(k - 1)$ zeros of the function $v(\lambda x)$. Hence we obtain for the number k and r in (1)

(12) $$r \leqq k .$$

3. Further, put

(13) $$k_2 n > \mu_n > s_n\,, \quad \mu = \sqrt{(\lambda_n^2 + \mu_n)}\,,$$

where k_2 does not depend on n and s_n is defined by (6). Choose μ_n so that

(14) $$\zeta_1 > \frac{x_{\alpha,1}}{\mu}\,.$$

Then there are at least $(k - 1)$ zeros of $v(\mu x)$ in the interval $[0, \zeta_k]$. Hence by (1)

(15) $$\zeta_k = \frac{x_{\alpha,t}}{n}\,[1 + O(n^{-1})]\,,$$

where

(16) $$t \geqq k\,.$$

From (1) and (15) we deduce that

$$0 = x_{\alpha,r} - x_{\alpha,t} + O(n^{-1})\,.$$

Hence

(17) $$x_{\alpha,r} = x_{\alpha,t} \Rightarrow r = t\,.$$

(12), (16) and (17) show that $r = k$.

5,2. The proof of (2,1b). By (5,1a) we deduce

$$x_{n-k}^{(n)} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \zeta_{k+1}\right) = 1 - \frac{x_{\alpha,k+1}}{2n^2}\,[1 + O(n^{-1})]$$

for $n \to +\infty$.

5,3. For the proof of (2,1a) see Remark 3,3.

6. PROOF OF (2,2b) AND (2,2c)

6,1. 1. Put $Q_n(x) = J_n(x)$. Then by (3,5a)

(1) $$\omega_n(t) = \gamma(t) - \frac{1 - 4\alpha^2}{4t^2}\,.$$

Put in (4,5c) and (4,5g)

(2) $$l_n = (\lambda_n^2 + j)^{1/2}\,,$$

(3) $$\beta_n(t) = \omega_n(t) - j\,.$$

where j is defined by (2,1a).

Let I_a be defined by (4,6a) and a sufficiently large. It is easly to see from (3,4c) and (1) that

(4) $$t \in I_a \Rightarrow |\beta_n(t)| < c_1 n^{-2}.$$

Then by (4,5i) and (4,6d)

(5) $$x \in I_a \Rightarrow |\varrho_n(x)| < c_2 n^{-4}$$

for in this case $\gamma_n = c_3 n^{-2}$.

Denote by $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ the increasing sequence of all the zeros of $J_n(\sin z)$.

By the theorem of Section 4,8 and by (5) we deduce that for every $k = 1, 2, \dots$ there exists an integer $r > 0$ such that

(6) $$\zeta_k = \frac{x_{\alpha,r}}{l_n} + O(n^{-5}).$$

By (5,1a) we have

(7) $$\zeta_k = \frac{x_{\alpha,k}}{n} + O(n^{-2}).$$

From (6) and (7) it follows that

$$0 = x_{\alpha,r} - x_{\alpha,k} + O(n^{-1}).$$

Hence

$$x_{\alpha,r} = x_{\alpha,k} \Rightarrow r = k$$

so that by (6)

(8) $$\zeta_k = \frac{x_{\alpha,k}}{l_n} + O(n^{-5}).$$

2. Let $Q_n(x) = J_n(x)$. Then

(9) $$x_{n-k+1}^{(n)} = \cos \zeta_k = 1 - \frac{\zeta_k^2}{2} + \frac{\zeta_k^4}{24} + O(n^{-6}).$$

From (2) it is obvious that

(10)
$$n^2 l_n^{-2} = 1 - \frac{\alpha+\beta+1}{n} - \frac{j}{n^2} - \left[\frac{\alpha+\beta+1}{n} + \frac{j}{n^2}\right]^2 - \frac{(\alpha+\beta+1)^3}{n^3} + O(n^{-4}) =$$
$$= 1 - \frac{\alpha+\beta+1}{n} - \frac{(\alpha+\beta+1)^2 + j}{n^2} - \frac{(\alpha+\beta+1)\,[2j + (\alpha+\beta+1)^2]}{n^3} +$$
$$+ O(n^{-4}).$$

Further

$$n^4 l_n^{-4} = 1 - \frac{2(\alpha + \beta + 1)}{n} + O(n^{-2}) \,. \tag{11}$$

From (8)–(11) we may deduce (2,2c).
As for (2,2b), see Remark 3,3.

7. PROOF OF THE INEQUALITIES IN SECTIONS 2,3; 2,4 AND 2,5

7,1. *In the notations introduced in Section* 2,3

$$z \in J_n \Rightarrow c_1 n^2 < \alpha_n(z) < c_2 n^2 \,. \tag{7,1a}$$

Proof. (7,1a) is a consequence of (3,5a), (3,5b). See also (3,7a).

7,2. *Let z_1 and z_2 be defined by* (2,3g). *Then*

$$(z_1, z_2) \subset J_n \Rightarrow z_2 - z_1 < c_1 n^{-1} \,. \tag{7,2a}$$

Proof. Employing Sturm's comparison theorem we obtain from the differential euqation $y'' + \alpha_n(z)\, y = 0$

$$z_2 - z_1 < \pi \sup_{z \in J_n} \alpha_n^{-1/2}(z) \,. \tag{1}$$

Now, (7,2a) is a consequence of (1) and (7,1a).

7,3. *In the notation of Section* 2,3

$$[z_1', z_2'] \subset [z_1, z_2] \Rightarrow \left| \varrho\left(\frac{\pi}{2} - z_1'\right) - \varrho\left(\frac{\pi}{2} - z_2'\right) \right| < c_1 n^2 a_n^{-3} \,. \tag{7,3a}$$

Here c_1 does not depend on z_i, z_i' $(i = 1, 2)$.

Proof. For brevity, put

$$\xi_i' = \frac{\pi}{2} - z_i' \quad (i = 1, 2) \,.$$

From (2,3d) it follows

$$\xi_i' > \frac{a_n}{n} \,.$$

Now, (7,2a) yields

$$|\varrho(\xi_1') - \varrho(\xi_2')| = |\alpha^2 - \tfrac{1}{4}| \frac{(\xi_1' - \xi_2')(\xi_1' + \xi_2')}{\xi_1'^2 \cdot \xi_2'^2} < c_2 n^{-1} \xi_2'^{-3} < c_3 n^2 a_n^{-3} \,.$$

7,4 *According to the notation introduced in the preceding chapter*

$$\delta_n = |\alpha_n^{-1/2}(z_1') - \alpha_n^{-1/2}(z_2')| < c_1 n^{-2}(n a_n^{-3} + 1)\,. \tag{7,4a}$$

Proof. Making use of (7,3a), (3,5a) and (3,5b), we obtain

$$|\alpha_n(z_1') - \alpha_n(z_2')| = |\varrho(\xi_2') - \varrho(\xi_1') + \omega_n(\xi_2') - \omega_n(\xi_1')| < c_2 n(n a_n^{-3} + 1)\,.$$

Further, it follows from (7,1a) and (7,2a) that

$$\delta_n = |\alpha_n(\xi_1') - \alpha_n(\xi_2')|\,[\alpha_n(\xi_1')\,\alpha_n(\xi_2')]^{-1/2}\,[\sqrt{\alpha_n(\xi_1')} + \sqrt{\alpha_n(\xi_2')}]^{-1} <$$
$$< c_3 n^{-2}(n a_n^{-3} + 1)\,.$$

7,5. The proof of (2,3i).

Put

$$s_1 = \sup_{z \in (z_1, z_2)} \alpha_n^{-1/2}(z)\,, \quad s_2 = \inf_{z \in (z_1, z_2)} \alpha_n^{-1/2}(z)\,.$$

Making use of Sturm's comparison theorem, we deduce by the differential equation (3,2b)

$$\pi s_2 < z_2 - z_1 < \pi s_1\,.$$

Hence

$$z_2 - z_1 = \pi s_2 + \vartheta(s_1 - s_2) \tag{1}$$

where $\vartheta \in (0, 1)$. Put

$$s_1 = \alpha_n^{-1/2}(z_1) + \vartheta_1^{(n)}\,, \quad s_2 = \alpha_n^{-1/2}(z_1) + \vartheta_2^{(n)}\,, \quad s_1 - s_2 = \vartheta_3^{(n)}\,. \tag{7,5a}$$

From (7,4a) it follows for $i = 1, 2, 3$

$$|\vartheta_i^{(n)}| < c_1 n^{-2}(n a_n^{-3} + 1)\,. \tag{2}$$

By (7,5a), (7,1a), (3,5a), (3,5b), (1) and (2) we deduce that

$$z_2 - z_1 = \pi\alpha_n^{-1/2}(z_1) + \vartheta_4^{(n)} = \pi\varrho^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2} - k_1\right) + O(n^{-2}) + \vartheta_4^{(n)} \tag{7,5b}$$

where $\vartheta_4^{(n)}$ satisfies (2) for $i = 4$.

7.6 The proof of (2.5a). It follows from (3,5a) for the polynomials $J_n(x)$ that

$$\omega_n(\zeta) = \gamma\left(\frac{\pi}{2} - \zeta\right) + \frac{4\alpha^2 - 1}{4\zeta^2}\,. \tag{1}$$

Hence

$$\frac{\pi}{2} - \zeta \in J_n \Rightarrow |\omega_n(\zeta)| < c_1\,. \tag{2}$$

From (2) we deduce by a similar argument as in Section 7,4 that in this case

$$\delta_n < c_2 n^{-1}(a_n^{-3} + n^{-1}), \tag{3}$$

where δ_n is defined by (7,4a).

By (2) we deduce

$$|\vartheta_i^{(n)}| < c_3 n^{-1} a_n^{-3} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{4}$$

where $\vartheta_i^{(n)}$ is defined by equations (7,5a) and (7,5b). (2,5a) is a consequence of (7,5b) and (2).

7,7. The proof of (2,4b).

(2,4b) is a consequence of (2,3h) and (2,3i) for

$$(z_1, z_2) \subset \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} - \delta\right) \Rightarrow \alpha_n^{-1/2}(z_1) = \frac{1}{n} + O(n^{-2})$$

and

$$\delta = \frac{a_n}{n} \Rightarrow a_n = \delta n \Rightarrow a_n^{-3} = \delta^{-3} n^{-3}.$$

References

[1] *Szegö:* Orthogonal polynomials, Moscow 1962, (Russian).
[2] *Sansone:* Ordinary differential equations I Moscow 1953, (Russian).
[3] *Szegö:* Inequalities for the zeros of Legendre polynomials and related functions. Transactions of Amer. Math. Soc. *39* (1936), 1—17.

Author's address: 010 00 Žilina, Marxa-Engelsa 25 (Vysoká škola dopravní).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

O JEDNOM ZOVŠEOBECNENÍ MENELAOVEJ A CEVOVEJ VETY

TOMÁŠ KLEIN, Zvolen

(Došlo dňa 27. decembra 1970)

V práci [2] ukázali autori krátky analytický dôkaz Menelaovej a Cevovej vety pre normálny $(n + 1)$-uholník v n-rozmernom priestore. V tomto článku sa pridržíme označenia z [2] a ukážeme jedno zovšeobecnenie obidvoch viet.

Veta 1. *Nech $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ je normálny $(n + 1)$-uholník v euklidovskom priestore $\mathbf{E}_n$ $(n \geqq 2)$. Zvoľme $n + 1$ čísel k_i $(0 \neq k_i \neq 1)$ a zostrojme na stranách uvažovaného $(n + 1)$-uholníka $n + 1$ bodov B_i tak, aby*

$$(A_iA_{i+1}B_i) = k_i\,.^{1)} \tag{1}$$

Označme V_1 resp. V_2 objem simplexu $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ resp. $B_1B_2 \dots B_{n+1}$. Potom platí

$$V_2 = \left| \frac{1 - \prod_{i=1}^{n+1} k_i}{\prod_{i=1}^{n+1} (1 - k_i)} \right| . V_1\,. \tag{2}$$

Dôkaz. Body B_i z (1) môžeme vyjadriť v tvare $B_i = \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}A_j$, kde $c_{ii} = 1/(1 - k_i)$ a $c_{i,i+1} = -k/(1 - k_i)$. Pre objemy V_1, V_2 platí $V_2 = |\text{det.}\,(c_{ij})|\, V_1$.[2]) Ľahko zistíme, že

[1]) Všetky indexy, prebiehajúce vždy prirodzené čísla, budeme dôsledne brať mod $(n + 1)$, pri čom $A_{n+2} \equiv A_1$ a pod.

[2]) Pozri [6] vzťah (5.41) na str. 174.

$$\det.(c_{ij}) = \begin{vmatrix} 1, & \dfrac{-k_1}{1-k_1}, & 0, & \dots, 0, & 0 \\ 1, & \dfrac{1}{1-k_2}, & \dfrac{-k_2}{1-k_2}, & \dots, 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1, & 0, & 0, & \dots, 0, & \dfrac{1}{1-k_{n+1}} \end{vmatrix} = \frac{1 - \prod\limits_{i=1}^{n+1} k_i}{\prod\limits_{i=1}^{n+1}(1-k_i)}$$

a tým je veta 1 dokázaná.

Vetu 1 môžeme chápať ako zovšeobecnenie Menelaovej vety z [2].[3]) Platí totiž: ak $k_1k_2 \dots k_{n+1} = 1$, potom $V_2 = 0$ a body B_i sú lineárne závislé; obrátene ak sú body B_i lineárne závislé potom je $V_2 = 0$ a je $1 - k_1k_2 \dots k_{n+1} = 0$.

Poznamenajme, že pre normálny $(n + 1)$-uholník $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ zo vzťahu (2) plynie:

a) Ak body B_i z (1) sú stredmi jeho strán dostaneme pre n párne resp. nepárne, že objem simplexu $B_1B_2 \dots B_{n+1}$ je $V_2 = V_1/2^n$ resp. $V_2 = 0$, tj. pre n nepárne ležia stredy strán normálneho $(n + 1)$-uholníka v jednej nadrovine.[4])

b) Ak na strane A_iA_{i+1} miesto bodu B_i zvolíme bod B_i^*, pre ktorý platí $(A_iA_{i+1}B_i^*) = k_{j_i}$, kde $k_{j_1} \dots k_{j_i} \dots k_{j_{n+1}}$ je ľubovoľná permutácia čísel k_i z (1), potom simplex $B_1^*B_2^* \dots B_{n+1}^*$ má rovnaký objem ako simplex $B_1B_2 \dots B_{n+1}$.

c) Ak k bodu B_i zostrojíme bod B_i' symetrický podľa stredu strany A_iA_{i+1} (s deliacim pomerom $1/k_i$), má simplex $B_1'B_2' \dots B_{n+1}'$ rovnaký objem ako simplex $B_1B_2 \dots$ $\dots B_{n+1}$.

d) Ak na strane A_iA_{i+1} miesto bodu B_i zvolíme bod B_i'' s deliacim pomerom $1/k_{j_i}$, kde $1/k_{j_1} \dots 1/k_{j_i} \dots 1/k_{j_{n+1}}$ je ľubovoľná permutácia čísel $1/k_i$, potom simplex $B_1''B_2'' \dots B_{n+1}''$ má rovnaký objem ako simplex $B_1B_2 \dots B_{n+1}$.

V normálnom $(n + 1)$-uholníku $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ bodmi

$$A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, B_i, A_{i+2}, \dots, A_{n+1}$$

prechádza práve jedna nadrovina, označme ju v_i. Položme

$$K_1 = 1 - k_1 + k_1k_2 - \dots + (-1)^n k_1 \dots k_n \; ; \quad cycl. \tag{3}$$

Jednoduchou úvahou (pozri [2]) sa dá dokázať, že nadroviny $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ s vý-

[3]) O Menelaovej vete pozri tiež [1], [3], [4], [7]; podrobná citácia ďalších prác je v [2].

[4]) Pozri vetu 1 v [5].

nimkou nadroviny v_i majú spoločný bod Q_i práve vtedy, ak $K_i \neq 0$; pri $K_i = 0$ má týchto n nadrovín spoločný smer. Podobne ako v [2] zistíme, že pri $K_i \neq 0$ je

$$(4) \qquad Q_1 = \frac{1}{K_1} [A_1 - k_1 A_2 + \ldots + (-1)^n k_1 \ldots k_n A_{n+1}] ; \quad cycl.$$

Veta 2. *Nech $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$ je normálny $(n + 1)$-uholník v $\mathbf{E}_n$. Zvoľme opäť $n + 1$ čísel k_i tak, aby každé z $n + 1$ čísel K_i v (3) bolo nenulové. Označme V_1 resp. V_3 objem simplexu $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$ resp. $Q_1 Q_2 \ldots Q_{n+1}$. Potom platí*

$$V_3 = \left| \frac{[1 + (-1)^n \prod_{i=1}^{n+1} k_i]^n}{\prod_{i=1}^{n+1} K_i} \right| . V_1 .$$

Dôkaz. Vyjdeme opäť z rovníc $Q_i = \sum_{j=1}^{n+1} d_{ij} A_j$, $V_3 = |\det. (d_{ij})| \, V_1$. Vzhľadom k (4) môžeme písať

$$\det. (d_{ij}) = \frac{1}{K_1 K_2 \ldots K_{n+1}} \begin{vmatrix} 1, & -k_1, & \ldots, & (-1)^n k_1 k_2 \ldots k_n \\ (-1)^n k_2 \ldots k_{n+1}, & 1, & \ldots, & (-1)^{n-1} k_2 \ldots k_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -k_{n+1}, & k_{n+1} k_1, & \ldots, & 1 \end{vmatrix} .$$

Matematickou indukciou sa dá dokázať, že

$$\det. (d_{ij}) = \frac{[1 + (-1)^n k_1 k_2 \ldots k_{n+1}]^n}{K_1 K_2 \ldots K_{n+1}} .$$

Vetu 2 môžeme ponímať ako zovšeobecnenie Cevovej vety z [2]. Pretože, ak predpokladáme, že $k_1 k_2 \ldots k_{n+1} = (-1)^{n+1}$, potom podľa (4) ľahko zistíme, že všetky body Q_i splývajú. A naopak, ak všetky nadroviny v_i majú spoločný bod, tj. ak $Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_{n+1}$ potom $V_3 = 0$ a teda aj $1 + (-1)^n k_1 k_2 \ldots k_{n+1} = 0$. Je teda Cevova veta špeciálnym prípadom vety 2.

Za podnet k tejto práci ďakujem autorovi prace [1].

Literatúra

[1] *Budinský B.:* Sätze von Menelaos und Ceva für Vielecke im sphärischen n-dimensionalen Raum, Čas. pěst. mat. *97* (1972), 78—85.

[2] *Budinský B., Nádeník Z.:* Mehrdimensionales Analogon zu den Sätzen von Menelaos und Ceva, Čas. pěst. mat. *97* (1972), 75—77.

[3] *Nádeník Z.*: Rozšíření věty Menelaovy a Cevovy na n-dimensionální útvary, Čas. pěst. mat. *81* (1956), 1—25.
[4] *Nádeník Z.*: Několik vlastností vrcholových nadrovin normálního mnohoúhelníka, Čas. pěst. mat. *81* (1956), 287—291.
[5] *Nádeník Z.*: O ortocentru normálního mnohoúhelníka, Čas. pěst. mat. *81* (1956), 292—298.
[6] *Розенфельд Б. А.*: Многомерные пространства. Наука Москва, 1966.
[7] *Sasayama H.*: General coordinate of the geometries VI, Yournal of spatial mathematics of the Sasayama researeli room. Japan, *3* (1960), 125—134.

Adresa autora: 960 53 Zvolen, Štúrova 4 (Vysoká škola lesnícka a drevárska).

Zusammenfassung

ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG DER SÄTZE VON MENELAOS UND CEVA

TOMÁŠ KLEIN, Zvolen

In der vorliegenden Arbeit ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Menelaos im n-dimensionalen Euklidischen Raum $\mathbf{E}_n$ (wenn alle Punkte B_i, für die (1) gilt, nicht in einer Hyperebene liegen) und eine Verallgemeinerung des Satzes von Ceva in $\mathbf{E}_n$ (wenn alle Hyperebenen v_i nicht durch einen Punkt gehen und keine gemeinsame Richtung haben) gezeigt.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

GENERAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN INTEGRODIFFERENTIAL SYSTEM AND ITS ADJOINT

MILAN TVRDÝ, OTTO VEJVODA, Praha

(Received January 19, 1971 — in revised form February 10, 1972)*)

(Continuation)**)

4. WEAKLY NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM

Notation. Given a B-space $\mathscr{B}$ with the norm $\|.\|_{\mathscr{B}}$, $u_0 \in \mathscr{B}$ and $\varrho > 0$, the set $\{u \in \mathscr{B} : \|u - u_0\|_{\mathscr{B}} \leqq \varrho\}$ is denoted by $\mathscr{U}(u_0, \varrho; \mathscr{B})$.

Definition 4,1. Let $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ be B-spaces and let $\varepsilon_0 > 0$. An operator $F : u \in \mathscr{B}_1$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \rightarrow F(\varepsilon)(u) \in \mathscr{B}_2$ is said to be locally lipschitzian in u near $\varepsilon = 0$ if, given an arbitrary $u_0 \in \mathscr{B}_1$, there exist $\alpha(u_0) > 0$, $\varrho(u_0) > 0$ and $\varepsilon(u_0) > 0$ such that

$$\|F(\varepsilon)(u_2) - F(\varepsilon)(u_1)\|_{\mathscr{B}_2} \leqq \alpha(u_0) \|u_2 - u_1\|_{\mathscr{B}_1}$$

for all $u_1, u_2 \in \mathscr{U}(u_0, \varrho(u_0); \mathscr{B}_1)$ and $\varepsilon \in [0, \varepsilon(u_0)]$.

Hereafter we suppose

$$(\mathscr{A}) \qquad A \in \mathscr{L}^1_{n,n}, \quad G \in \mathscr{L}^2[\mathscr{BV}], \quad L \in \mathscr{BV}_{n,n} \quad (m = n).$$

The mappings

$$\Phi : x \in \mathscr{AC}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \rightarrow \Phi(\varepsilon)(x) \in \mathscr{L}^1,$$
$$\Lambda : x \in \mathscr{AC}, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \rightarrow \Lambda(\varepsilon)(x) \in \mathscr{R}_n$$

are locally lipschitzian in x near $\varepsilon = 0$ and continuous in $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ for any $x \in \mathscr{AC}$ fixed, $\varepsilon_0 > 0$.

*) The last paragraph (§ 5) was added.

**) The first part was published in this Čas. pěst. mat. *97* (1972), 399—419.

Let us consider the weakly nonlinear boundary value problem $(\mathscr{P}_\varepsilon)$

$$\dot{x} = A(t)\, x + \int_a^b [\mathrm{d}_s G(t, s)]\, x(s) + \varepsilon\, \Phi(\varepsilon)\,(x)\,(t)\,, \tag{4,1}$$

$$\int_a^b [\mathrm{d}L(s)]\, x(s) + \varepsilon\, \Lambda(\varepsilon)\,(x) = 0\,, \tag{4,2}$$

where $\varepsilon \geqq 0$ is a small parameter.

We proceed formally as in § 3 and write the problem $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ in the equivalent form as the system of equations for $x \in \mathscr{AC}$, $h \in \mathscr{L}^2$ and $c \in \mathscr{R}_n$

$$\begin{aligned} -x(t) + X(t)\, c + \int_a^t X(t)\, X^{-1}(s)\, h(s)\, \mathrm{d}s + \varepsilon P_0(\varepsilon)\,(x)\,(t) &= 0\,, \\ -h(t) + H_1(t)\, c + \int_a^b K(t, s)\, h(s)\, \mathrm{d}s + \varepsilon P_1(\varepsilon)\,(x)\,(t) &= 0\,, \\ Cc + \int_a^b H_2(s)\, h(s)\, \mathrm{d}s + \varepsilon P_2(\varepsilon)\,(x) &= 0\,, \end{aligned} \tag{4,3}$$

where $X(t)$ has the same meaning as before ((3,3)) and

$$H_1(t) = \int_a^b [\mathrm{d}_s G(t, s)]\, X(s)\,, \quad H_2(t) = \left(\int_t^b [\mathrm{d}L(s)]\, X(s)\right) X^{-1}(t)\,, \tag{4,4}$$

$$K(t, s) = \left(\int_s^b [\mathrm{d}_\sigma G(t, \sigma)]\, X(\sigma)\right) X^{-1}(s)\,, \quad C = \int_a^b [\mathrm{d}L(s)]\, X(s)\,,$$

$$P_0(\varepsilon)\,(x)\,(t) = X(t) \int_a^t X^{-1}(s)\, \Phi(\varepsilon)\,(x)\,(s)\, \mathrm{d}s\,,$$

$$P_1(\varepsilon)\,(x)\,(t) = \int_a^b [\mathrm{d}_s G(t, s)] \left(X(s) \int_a^s X^{-1}(\sigma)\, \Phi(\varepsilon)\,(x)\,(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\right) =$$

$$= \int_a^b \left(\int_s^b [\mathrm{d}_\sigma G(t, \sigma)]\, X(\sigma)\right) X^{-1}(s)\, \Phi(\varepsilon)\,(x)\,(s)\, \mathrm{d}s = \int_a^b K(t, s)\, \Phi(\varepsilon)\,(x)\,(s)\, \mathrm{d}s\,,$$

$$P_2(\varepsilon)\,(x) = \Lambda(\varepsilon)\,(x) + \int_a^b [\mathrm{d}L(s)] \left(X(s) \int_a^s X^{-1}(\sigma)\, \Phi(\varepsilon)\,(x)\,(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\right) =$$

$$= \Lambda(\varepsilon)\,(x) + \int_a^b \left(\int_s^b [\mathrm{d}L(\sigma)]\, X(\sigma)\right) X^{-1}(s)\, \Phi(\varepsilon)\,(x)\,(s)\, \mathrm{d}s =$$

$$= \Lambda(\varepsilon)\,(x) + \int_a^b H_2(s)\, \Phi(\varepsilon)\,(x)\,(s)\, \mathrm{d}s\,.$$

By assumptions of this paragraph $K \in \mathscr{L}_2$, H_1 and $H_2 \in \mathscr{L}^2_{n,n}$ and P_0, P_1 and P_2 are mappings of $\mathscr{AC} \times [0, \varepsilon_0]$ into $\mathscr{AC}$, $\mathscr{L}^2$ and $\mathscr{R}_n$, respectively, locally lipschitzian in x near $\varepsilon = 0$ and continuous in $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ for any $x \in \mathscr{AC}$ fixed. For example, in the case of P_1 we have for $x_1, x_2 \in \mathscr{AC}$, $t \in J$ and $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [0, \varepsilon_0]$

$$\|P_1(\varepsilon_2)(x_2)(t) - P_1(\varepsilon_1)(x_1)(t)\| \leqq \beta \operatorname{var}_a^b G(t, \cdot) \|\Phi(\varepsilon_2)(x_2) - \Phi(\varepsilon_1)(x_1)\|_1,$$

where $\beta = \sup_{t,s \in J} \|X(t) X^{-1}(s)\|$. Hence

$$\|P_1(\varepsilon_2)(x_2) - P_1(\varepsilon_1)(x_1)\|_2 \leqq \alpha \|\Phi(\varepsilon_2)(x_2) - \Phi(\varepsilon_1)(x_1)\|_1,$$

where

$$\alpha = \beta \|\operatorname{var}_a^b G(t, \cdot)\|_2.$$

Let $K_0 \in \mathscr{L}_2$, $K_1 \in \mathscr{L}^2_{n,n'}$ and $K_2 \in \mathscr{L}^2_{n',n}$ be again such that $K(t, s) = K_0(t, s) + K_1(t) K_2(s)$, $|||K_0||| < 1$. Let Γ be the resolvent kernel of K_0 and let $\tilde{H}_1$ and $\tilde{K}_1$ be again defined by (3,10). ($\Gamma \in \mathscr{L}_2$, $\tilde{H}_1 \in \mathscr{L}^2_{n,n}$ and $\tilde{K}_1 \in \mathscr{L}^2_{n,n'}$, of course.) Then the system (4,3) becomes

$$\begin{aligned} -x(t) + U(t)\, b + \varepsilon R_0(\varepsilon)(x)(t) &= 0, \\ Bb + \varepsilon R(\varepsilon)(x) &= 0, \end{aligned} \tag{4,5}$$

where B is given by (4,4), (3,9), (3,10) and (3,12),

$$U(t) = \left(X(t) \left[I + \int_a^t X^{-1}(s)\, \tilde{H}_1(s)\, ds \right], \; X(t) \int_a^t X^{-1}(s)\, \tilde{K}_1(s)\, ds \right), \tag{4,6}$$

$$R_0(\varepsilon)(x)(t) = P_0(\varepsilon)(x)(t) + X(t) \int_a^t X^{-1}(s)\, P_1(\varepsilon)(x)(s)\, ds,$$

$$R(\varepsilon)(x) = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_a^b \tilde{K}_2(s)\, P_1(\varepsilon)(x)(s)\, ds \\ \displaystyle P_2(\varepsilon)(x) + \int_a^b \tilde{H}_2(s)\, P_1(\varepsilon)(x)(s)\, ds \end{pmatrix},$$

$$\tilde{H}_2(t) = H_2(t) + \int_a^b H_2(s)\, \Gamma(s, t)\, ds, \quad \tilde{K}_2(t) = K_2(t) + \int_a^b K_2(s)\, \Gamma(s, t)\, ds,$$

$$h(t) = \tilde{H}_1(t)\, c + \tilde{K}_1(t)\, d + \varepsilon \left[P_1(\varepsilon)(x)(t) + \int_a^b \Gamma(t, s)\, P_1(\varepsilon)(x)(s)\, ds \right],$$

$$d = \int_a^b K_2(s)\, h(s)\, ds, \quad b = (c', d')'.$$

Clearly, $U(t)$ is absolutely continuous on J, $\tilde{H}_2 \in \mathscr{L}^2_{n,n}$, $\tilde{K}_2 \in \mathscr{L}^2_{n',n}$, R_0 and R are mappings of $\mathscr{AC} \times [0, \varepsilon_0]$ into $\mathscr{AC}$ and $\mathscr{R}_{n+n'}$, respectively, locally lipschitzian in x near $\varepsilon = 0$ and continuous in $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ for any $x \in \mathscr{AC}$ fixed.

The further investigation of our problem rather depends on whether $\det B \neq 0$ or $\det B = 0$. In the former simple (so called noncritical) case the following theorem holds.

Theorem 4,1. *Let the boundary value problem* $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ *be given and let the assumptions* $(\mathscr{A})$ *be fulfilled. Let the limit problem* $(\mathscr{P}_0)$ *have only the trivial solution. Then there exists* $\varepsilon^* > 0$ *such that for any* $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ *there exists a unique solution* x_ε^* *of* $(\mathscr{P}_\varepsilon)$, *while* $\|x_\varepsilon^*\|_{\mathscr{AC}} \to 0$ *for* $\varepsilon \to 0+$.

Proof. Let $(\mathscr{P}_0)$ have only the trivial solution. Then by Corollary 1 of Theorem 3,1 $\det B \neq 0$ and (4,5) becomes

$$x(t) = \varepsilon[R_0(\varepsilon)(x)(t) - U(t) B^{-1} R(\varepsilon)(x)] = \varepsilon T(\varepsilon)(x)(t).$$

It follows immediately from the above argument that the operator $T: \mathscr{AC} \times [0, \varepsilon_0] \to \mathscr{AC}$ is locally lipschitzian in x near $\varepsilon = 0$ and continuous in $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ for any $x \in \mathscr{AC}$ fixed. Hence the fixed point theorem for contractive operators ([8]) can be applied.

Remark 4,1. The given boundary value problem $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ is certainly noncritical e.g. if in (4,3)

a) $\det C \neq 0$ and 1 is not an eigenvalue of $K(t, s) - H_1(t) C^{-1} H_2(s)$,

b) 1 is not an eigenvalue of K and

$$\det\left(C + \int_a^b H_2(s)\left[H_1(s) + \int_a^b Q(s, \sigma) H_1(\sigma) \, d\sigma\right] ds\right) \neq 0,$$

where Q is the resolvent kernel of K.

In the critical case ($\det B = 0$) some further notations are needed.

Notation. $\mathscr{N}_0$ denotes the naturally ordered set $\{1, 2, \ldots, n + n'\}$. If $\mathscr{S}$ is a naturally ordered subset of $\mathscr{N}_0$, then $\mathscr{S}^*$ denotes the naturally ordered complement of $\mathscr{S}$ with respect to $\mathscr{N}_0$. The number of elements of a set $\mathscr{S} \subset \mathscr{N}_0$ is denoted by $\gamma(\mathscr{S})$. Let $C = (c_{i,j})_{i,j \in \mathscr{N}_0}$ be an $(n + n') \times (n + n')$-matrix and let $\mathscr{S} \subset \mathscr{N}_0$, $\mathscr{V} \subset \mathscr{N}_0$, then $C_{\mathscr{S},\mathscr{V}}$ denotes the matrix $(c_{i,j})_{i \in \mathscr{S}, j \in \mathscr{V}}$. Similarly if b is an $(n + n')$-vector ($b = (b_j)_{j \in \mathscr{N}_0}$) and $\mathscr{S} \subset \mathscr{N}_0$, then $b_{\mathscr{S}} = (b_j)_{j \in \mathscr{S}}$. (Analogously for matrix or vector functions and operators.) $\mathscr{N}$ denotes the naturally ordered set $\{1, 2, \ldots, n\}$. The sign $\dotplus$ is defined by $b = b_{\mathscr{S}} \dotplus b_{\mathscr{S}^*}$.

Let $\chi = \operatorname{rank}(B) < n + n'$, while

$$\det B_{\mathscr{S}^*,\mathscr{V}^*} \neq 0 \quad \text{and} \quad B_{\mathscr{S},\mathscr{N}_0} - W B_{\mathscr{S}^*,\mathscr{N}_0} = 0, \tag{4,7}$$

$\nu(\mathscr{S}^*) = \nu(\mathscr{V}^*) = \chi$ and W is an $(n + n' - \chi) \times \chi$-matrix. Let us put $\nu = n + n' - \chi$, $B_1 = B_{\mathscr{S}^*,\mathscr{V}^*}$, $B_2 = B_{\mathscr{S}^*,\mathscr{V}}$, $\gamma = b_{\mathscr{V}^*}$ and $\delta = b_{\mathscr{V}}$. Then $(4,5)_2$ yields

$$\gamma = -B_1^{-1}B_2\delta - \varepsilon B_1^{-1}R_{\mathscr{S}^*}(\varepsilon)(x)\,. \tag{4,8}$$

Inserting (4,8) and $b = \gamma + \delta$ into $(4,5)_1$ we obtain that (4,5) is equivalent to the system of equations for $x \in \mathscr{AC}$ and $\delta \in \mathscr{R}_\nu$,

$$\begin{aligned} -x(t) + V(t)\,\delta + \varepsilon S(\varepsilon)(x)(t) &= 0\,, \\ T(\varepsilon)(x) &= 0\,, \end{aligned} \tag{4,9}$$

where

$$V(t) = U_{\mathscr{N},\mathscr{V}}(t) - U_{\mathscr{N},\mathscr{V}^*}(t)\,B_1^{-1}B_2\,, \tag{4,10}$$

$$S : x \in \mathscr{AC}\,,\quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \to S(\varepsilon)(x) = R_0(\varepsilon)(x) - U_{\mathscr{N},\mathscr{V}^*}(.)\,B_1^{-1}R_{\mathscr{S}^*}(\varepsilon)(x) \in \mathscr{AC}\,,$$

$$T : x \in \mathscr{AC}\,,\quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \to T(\varepsilon)(x) = R_{\mathscr{S}}'(\varepsilon)(x) - WR_{\mathscr{S}^*}(\varepsilon)(x) \in \mathscr{R}_\nu\,.$$

$V(t)$ is absolutely continuous on J and it is easy to verify that the operators S and T have the same smoothness properties as Φ, Λ, P_0, P_1 etc.

Let $\varepsilon > 0$, then $x \in \mathscr{AC}$ is a solution to the boundary value problem $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ iff (x, δ), where

$$\delta = b_{\mathscr{V}} \quad\text{and}\quad b = \begin{pmatrix} x(a) \\ \displaystyle\int_a^b K_2(t)\left(\int_a^b [\mathrm{d}_s G(t, s)]\, x(s)\right) \mathrm{d}t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x(a) \\ \displaystyle\int_a^b \left[\mathrm{d}_t \int_a^b K_2(s)\, G(s, t)\, \mathrm{d}s\right] x(t) \end{pmatrix},$$

is a solution to (4,9). (All solutions x_0 of the limit problem $(\mathscr{P}_0)$ are given by $x_0(t) = V(t)\,\delta$, where δ is an arbitrary ν-vector.) To investigate further the existence of a solution (and its dependence on ε) to $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ various principles in accordance with the smoothness of the operators Φ and Λ may be used. Below we state two existence theorems which can serve as models. The first one is obtained by the use of the Newton method for equations in B-spaces.

Proposition 1. *Let $\mathscr{B}_1$ and $\mathscr{B}_2$ be B-spaces and let $\varepsilon_0 > 0$. Let $\mathscr{U} \subset \mathscr{B}_1$ and let F be an operator: $(u, \varepsilon) \in \mathscr{U} \times [0, \varepsilon_0] \to F(\varepsilon)(u) \in \mathscr{B}_2$. Let us assume that*

(i) *the equation $F(0)(u) = 0$ possesses a solution $u_0 \in \mathscr{U}$;*

(ii) *there exists $\varrho_0 > 0$ such that F is continuous in $(u, \varepsilon) \in \mathscr{U}_0 \times [0, \varepsilon_0] = \mathscr{U}(u_0, \varrho_0; \mathscr{B}_1) \times [0, \varepsilon_0]$ and for all $(u, \varepsilon) \in \mathscr{U}_0 \times [0, \varepsilon_0]$ possesses a G-derivative $F_u'(\varepsilon)(u)$ with respect to u which is continuous in $(u, \varepsilon) \in \mathscr{U}_0 \times [0, \varepsilon_0]$;*

(iii) *$F_u'(0)(u_0)$ possesses a bounded inverse $[F_u'(0)(u_0)]^{-1}$.*

Then there exist $\varepsilon^* > 0$ *and* $\varrho^* > 0$ *such that for any* $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ *the equation* $F(\varepsilon)(u) = 0$ *possesses one and only one solution* $u^*(\varepsilon)$ *in* $\mathscr{U}(u_0, \varrho^*; \mathscr{B}_1)$. *The mapping* $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*] \to u^*(\varepsilon) \in \mathscr{B}_1$ *is continuous and* $u^*(\varepsilon) \to u_0$ *in* $\mathscr{B}_1$ *if* $\varepsilon \to 0+$.

(For the proof see [19], p. 355. Similar theorems are proved also in [8] or [16].)

Remark 4,1. Let us notice that the assertion of Proposition 1 can be equivalently reformulated as follows.

There exists $\varepsilon^* > 0$ *such that for all* $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ *there exists a unique solution* $u^* = u^*(\varepsilon) \in \mathscr{U}_0$ *of the equation* $F(\varepsilon)(u) = 0$ *continuous in* $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ *and such that* $u^*(0) = u_0$.

To be able to apply Proposition 1 to the boundary value problem $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ we have to add some further assumptions concerning the differentiability of Φ and Λ to those used until now. It is easy to verify that if $\mathscr{U} \subset \mathscr{AC}$ and Φ and Λ are continuous in $(x, \varepsilon) \in \mathscr{U} \times [0, \varepsilon_0]$ and for all $(x, \varepsilon) \in \mathscr{U} \times [0, \varepsilon_0]$ possess a G-derivative with respect to x which is continuous in $(x, \varepsilon) \in \mathscr{U} \times [0, \varepsilon_0]$, then the same holds also for the operators S and T.

Theorem 4,2. *Let the boundary value problem* $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ *fulfilling the assumptions* $(\mathscr{A})$ *be given. Let the limit problem* $(\mathscr{P}_0)$ *admit a nonzero solution (i.e.* $\det B = 0$). *Let the matrix function* V *and the operators* T *and* T_0 *be defined by* (4,7), (4,10) *and*

$$T_0 : \delta \in \mathscr{R}_\nu \to T_0(\delta) = T(0)(V(.)\,\delta) \in \mathscr{R}_\nu\,. \tag{4,11}$$

Suppose

(I) *the limit problem* $(\mathscr{P}_0)$ *possesses a solution* x_0 *such that* $T_0(\delta_0) = 0$ *for* $\delta_0 = (b_0)_\mathscr{V}$, *where*

$$b_0 = \begin{pmatrix} x_0(a) \\ \displaystyle\int_a^b \left[d_t \int_a^b K_2(s)\, G(s, t)\, ds \right] x_0(t) \end{pmatrix};$$

(II) *there exists* $\varrho_0 > 0$ *such that* Φ *and* Λ *are continuous in* $(x, \varepsilon) \in \mathscr{U}_0 \times \times [0, \varepsilon_0] = \mathscr{U}(x_0, \varrho_0; \mathscr{AC}) \times [0, \varepsilon_0]$ *and for all* $(x, \varepsilon) \in \mathscr{U}_0 \times [0, \varepsilon_0]$ *possess a G-derivative with respect to* x *continuous in* $(x, \varepsilon) \in \mathscr{U}_0 \times [0, \varepsilon_0]$;

(III) *the Jacobian*

$$\det\left(\frac{DT_0}{D\delta}(\delta_0)\right)$$

is nonzero.

Then there exists $\varepsilon^* > 0$ *such that for all* $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ *there exists a unique solution* $x^*(\varepsilon)$ *to* $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ *continuous in* $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ *as a mapping* $[0, \varepsilon^*] \to \mathscr{AC}$ *and such that* $x^*(0) = x_0$.

Proof. Let us denote $\mathscr{B} = \mathscr{AC} \times \mathscr{R}_v$ and

$$F : (x, \delta) \in \mathscr{B}\,, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \to \begin{pmatrix} -x + V(.)\,\delta + \varepsilon S(\varepsilon)\,(x) \\ T(\varepsilon)\,(V(.)\,\delta + \varepsilon S(\varepsilon)\,(x)) \end{pmatrix} \in \mathscr{B}\,.$$

($\mathscr{B}$ is a B-space with the norm $\|(x, \delta)\|_{\mathscr{B}} = \|x\|_{\mathscr{AC}} + \|\delta\|$.)

We shall verify that the operator F fulfils all the assumptions of Proposition 1.

(i) For $(x, \delta) \in \mathscr{B}$ we have

$$F(0)\,(x, \delta) = \begin{pmatrix} -x + V(.)\,\delta \\ T(0)\,(V(.)\,\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + V(.)\,\delta \\ T_0(\delta) \end{pmatrix}.$$

Let x_0 be a solution to $(\mathscr{P}_0)$ such that $T_0(\delta_0) = 0$ for $\delta_0 = (b_0)_{\mathscr{V}}$, where

$$b_0 = \begin{pmatrix} x_0(a) \\ \displaystyle\int_a^b \left[\mathrm{d}_t \int_a^b K_2(s)\, G(s, t)\, \mathrm{d}s \right] x_0(t) \end{pmatrix}.$$

Then $x_0 = V(.)\,\delta_0$ and hence $F(0)\,(x_0, \delta_0) = 0$.

(ii) Since the operators S and T have the same smoothness properties as Φ and Λ, there exist $\varepsilon_1 > 0$ and $\varrho_1 > 0$ such that F fulfils the assumption (ii) of Proposition 1 on $\mathscr{U}_1 \times [0, \varepsilon_1] = \mathscr{U}((x_0, \delta_0), \varrho_1; \mathscr{B}) \times [0, \varepsilon_1]$ while for $(x, \delta, \varepsilon) \in \mathscr{U}_1 \times [0, \varepsilon_1]$ and $(\bar{x}, \bar{\delta}) \in \mathscr{B}$,

$$[F'_{(x,\delta)}(\varepsilon)\,(x, \delta)]\,(\bar{x}, \bar{\delta}) =$$

$$= \begin{pmatrix} -\bar{x} + V(.)\,\bar{\delta} + \varepsilon[S'_x(\varepsilon)\,(x)]\,\bar{x} \\ [T'_x(\varepsilon)\,(V(.)\,\delta + \varepsilon S(\varepsilon)\,(x))]\,(V(.)\,\bar{\delta}) + \varepsilon[T'_x(\varepsilon)\,(V(.)\,\delta + \varepsilon S(\varepsilon)\,(x))]\,[S'_x(\varepsilon)\,(x)]\,\bar{x} \end{pmatrix}.$$

In particular

$$J_0(\bar{x}, \bar{\delta}) = [F'_{(x,\delta)}(0)\,(x_0, \delta_0)]\,(\bar{x}, \bar{\delta}) = \begin{pmatrix} -\bar{x} + V(.)\,\bar{\delta} \\ [T'_x(0)\,(V(.)\,\delta)]\,(V(.)\,\bar{\delta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{x} + V(.)\,\bar{\delta} \\ \left[\dfrac{\mathrm{D}T_0}{\mathrm{D}\delta}\,(\delta_0)\right]\bar{\delta} \end{pmatrix}.$$

(iii) Given an arbitrary couple $(x, \delta) \in \mathscr{B}$,

$$J_0(\bar{x}, \bar{\delta}) = \begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix}$$

iff

$$\bar{\delta} = \left[\frac{\mathrm{D}T_0}{\mathrm{D}\delta}\,(\delta_0)\right]^{-1} \delta \quad \text{and} \quad \bar{x} = V(.)\,\bar{\delta} + x\,.$$

Thus the operator J_0 possesses an inverse

$$J_0^{-1} : (x, \delta) \in \mathscr{B} \to \begin{pmatrix} x + V(.) \left[\dfrac{DT_0}{D\delta}(\delta_0)\right]^{-1} \delta \\ \left[\dfrac{DT_0}{D\delta}(\delta_0)\right]^{-1} \delta \end{pmatrix} \in \mathscr{B}\,,$$

the boundedness of J_0^{-1} being obvious.

Applying Proposition 1 we complete the proof.

The system (4,9) can be simplified by means of the following

Proposition 2. *There exists* $\varepsilon_1 > 0$ *such that for every* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$ *and* $\delta \in \mathscr{R}_v$ *there exists a unique solution* $x = \Xi(\varepsilon)(\delta) \in \mathscr{AC}$ *of the equation*

$$(4,9)_2 \qquad -x + V(.)\,\delta + \varepsilon S(\varepsilon)(x) = 0\,,$$

the operator $\Xi : \mathscr{R}_v \times [0, \varepsilon_1] \to \mathscr{AC}$ *being continuous in* (δ, ε) *and locally lipschitzian in* δ *near* $\varepsilon = 0$.

Proof. The existence and uniqueness of the desired solution $x = \Xi(\varepsilon)(\delta)$ for all $\delta \in \mathscr{R}_v$ and $\varepsilon \in [0, \varepsilon_2]$ with some $\varepsilon_2 > 0$ and the continuity of Ξ in $(\delta, \varepsilon) \in \mathscr{R}_v \times [0, \varepsilon_2]$ are evident. Given an arbitrary $\delta_0 \in \mathscr{R}_v$, let us denote

$$x_0 = V(.)\,\delta_0 = \Xi(0)(\delta_0)\,.$$

Let $\beta = \beta(\delta_0) > 0$, $\varepsilon_3 = \varepsilon(\delta_0) > 0$ $(\varepsilon_3 \leqq \varepsilon_2)$ and $\varrho = \varrho(\delta_0) > 0$ be such that

$$\|S(\varepsilon)(x_1) - S(\varepsilon)(x_1)\|_{\mathscr{AC}} \leqq \beta \|x_2 - x_1\|_{\mathscr{AC}}$$

for all $x_1, x_2 \in \mathscr{U}(x_0, \varrho; \mathscr{AC})$ and $\varepsilon \in [0, \varepsilon_3]$. In virtue of the continuity of Ξ in (δ, ε) there exist $\sigma = \sigma(\delta_0) > 0$ and $\varepsilon_4 = \varepsilon_4(\delta_0) > 0$ $(\varepsilon_4 \leqq \varepsilon_3)$ such that $\Xi(\varepsilon)(\delta) \in \mathscr{U}(x_0, \varrho; \mathscr{AC})$ for all $\delta \in \mathscr{U}(\delta_0, \sigma; \mathscr{R}_v)$ and $\varepsilon \in [0, \varepsilon_4]$. Hence for $\delta_1, \delta_2 \in \mathscr{U}(\delta_0, \sigma; \mathscr{R}_v)$ and $\varepsilon \in [0, \varepsilon_4]$

$$\|\Xi(\varepsilon)(\delta_2) - \Xi(\varepsilon)(\delta_1)]_{\mathscr{AC}} \leqq \|V\|_{\mathscr{AC}} \|\delta_2 - \delta_1\| + \varepsilon\beta\|\Xi(\varepsilon)(\delta_2) - \Xi(\varepsilon)(\delta_1)\|_{\mathscr{AC}}\,.$$

Wherefrom, putting $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\delta_0) = \min(\varepsilon_4, (2\beta)^{-1})$ our assertion follows.

Remark 4,2. It could be shown that if $\delta_0 \in \mathscr{R}_v$, $x_0 = V(.)\,\delta_0$ and S possesses for all $(x, \varepsilon) \in \mathscr{U}(x_0, \varrho_1; \mathscr{AC}) \times [0, \varepsilon_1]$ $(\varrho_1 > 0)$ a G-derivative with respect to x continuous in $(x, \varepsilon) \in \mathscr{U}(x_0, \varrho_1; \mathscr{AC}) \times [0, \varepsilon_1]$, then there exist $\varepsilon_2 > 0$ and $\varrho_2 > 0$

such that for all $(\delta, \varepsilon) \in \mathscr{U}(\delta_0, \varrho_2; \mathscr{R}_\nu) \times [0, \varepsilon_2]$ Ξ possesses a G-derivative with respect to δ continuous in $(\delta, \varepsilon) \in \mathscr{U}(\delta_0, \varrho_2; \mathscr{R}_\nu) \times [0, \varepsilon_2]$. (For $\bar{\delta} \in \mathscr{R}_\nu$

$$[\Xi'_\delta(\varepsilon)(\delta)]\,\bar{\delta} = (i - \varepsilon[S'_x(\varepsilon)(\Xi(\varepsilon)(\delta))])^{-1}(V(.)\,\bar{\delta}),$$

where i denotes the identity operator in $\mathscr{AC}$.)

Inserting $x = \Xi(\varepsilon)(\delta)$ into $(4,9)_2$ we get

$$\Theta(\varepsilon)(\delta) = T(\varepsilon)(\Xi(\varepsilon)(\delta)) = 0\,. \tag{4,12}$$

The second existence theorem for the critical case is based on the notion of the Brouwer topological degree and does not require any assumptions of the differentiability of Φ and Λ. It follows from the following proposition. (For the definition of the Brouwer topological degree see J. Cronin [4].)

Proposition 3. *Let $\mathscr{G}$ be a bounded open set in $\mathscr{R}_\nu$ and let f be a continuous mapping of the closure $\bar{\mathscr{G}}$ of $\mathscr{G}$ in $\mathscr{R}_\nu$ into $\mathscr{R}_\nu$. Let $f(\delta) \neq 0$ on the frontier $\partial\mathscr{G}$ of $\mathscr{G}$ in $\mathscr{R}_\nu$ and let the degree $\mathrm{d}(f, \mathscr{G}, 0)$ of f with respect to $0 \in \mathscr{R}_\nu$ and $\mathscr{G}$ be nonzero. Then the equation $f(\delta) = 0$ has at least one solution in $\mathscr{G}$ and there exists $\eta > 0$ such that for every continuous mapping $g : \bar{\mathscr{G}} \to \mathscr{R}_\nu$ with $\sup_{\delta \in \partial\mathscr{G}} \|f(\delta) - g(\delta)\| < \eta$ there exists in $\mathscr{G}$ at least one solution of the equation $g(\delta) = 0$.*

Proof. The mapping

$$h : \delta \in \bar{\mathscr{G}}\,, \quad t \in [0, 1] \to h(\delta, t) = f(\delta) + (1 - t)(g(\delta) - f(\delta))$$

is a continuous mapping of $\bar{\mathscr{G}} \times [0, 1]$ into $\mathscr{R}_\nu$ with $h(\delta, 0) = g(\delta)$ and $h(\delta, 1) = f(\delta)$. If

$$\|f(\delta)\| \geqq 2\eta > 0 \quad \text{and} \quad \|f(\delta) - g(\delta)\| < \eta \quad \text{on} \quad \partial\mathscr{G}\,,$$

then for all $\delta \in \partial\mathscr{G}$ and $t \in [0, 1]$

$$\|h(\delta, t)\| \geqq \|f(\delta)\| - \|f(\delta) - g(\delta)\| > \eta > 0\,.$$

Proposition 2 is now an immediate consequence of Existence Theorem ([4]. p. 32) and of Theorem of Invariance under Homotopy ([4], p. 31).

Theorem 4,3. *Let the boundary value problem $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ fulfilling the assumptions $(\mathscr{A})$ be given. Let the limit problem $(\mathscr{P}_0)$ admit a nonzero solution (i.e. $\det B = 0$). Let the matrix function V and the operators T and T_0 be given by (4,7), (4,10) and (4,11). Suppose*

(I) *the limit problem $(\mathscr{P}_0)$ possesses a solution x_0 such that $T_0(\delta_0) = 0$ for $\delta_0 = (b_0)_\mathscr{V}$, where*

$$b_0 = \begin{pmatrix} x_0(a) \\ \displaystyle\int_a^b \left[\mathrm{d}_t \int_a^b K_2(s)\, G(s, t)\, \mathrm{d}s\right] x_0(t) \end{pmatrix}$$

(II) *there exists a bounded open subset* $\mathscr{G}$ *of* $\mathscr{R}_\nu$ *such that* $T_0(\delta) \neq 0$ *for* $\delta \in \partial\mathscr{G}$ *and* $\mathrm{d}(T_0, \mathscr{G}, 0) \neq 0$.

Then there exists $\varepsilon^* > 0$ *such that for every* $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ *there exists at least one solution to* $(\mathscr{P}_\varepsilon)$.

Proof. It is easy to verify that the operator $T_0 : R_\nu \times [0, \varepsilon_0] \to \mathscr{R}_\nu$ is locally lipschitzian in $\delta \in \mathscr{R}_\nu$ near $\varepsilon = 0$ and continuous in $\varepsilon \in [0, \eta_1]$ with some $\eta_1 > 0$ small enough for any $\delta \in \mathscr{R}_\nu$ fixed. By Heine-Borel Covering Theorem we may assume that there exists $\eta_2 > 0$ such that Θ is uniformly continuous in $(\delta, \varepsilon) \in \bar{\mathscr{G}} \times \times [0, \eta_2]$. Applying Proposition 3 to the equation (4,12) we complete the proof.

Remark 4,3. The methods of this paragraph can be also applied if $L \in \mathscr{BV}_{m,n}$ and $\Lambda : \mathscr{AC} \to \mathscr{R}_m$, where generally $m \neq n$. Of course, the situation is no more predetermined so largely by the fact whether the limit problem $(\mathscr{P}_0)$ admits a nonzero solution or not. Let the $(m + n') \times (n + n')$-matrix B be defined by (4,4), (3,9), (3,10) and (3,12). Let the $n \times (n + n')$-matrix function U and the operators $R_0 : \mathscr{AC} \times \times [0, \varepsilon_0] \to \mathscr{AC}$ and $R : \mathscr{AC} \times [0, \varepsilon_0] \to \mathscr{R}_{n+n'}$ be given by (4,4) and (4,6). Then again an n-vector function $x \in \mathscr{AC}$ is a solution to the boundary value problem $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ iff a couple (x, b), where

$$b = \begin{pmatrix} x(a) \\ \displaystyle\int_a^b \left[\mathrm{d}_t \int_a^b K_2(s)\, G(s, t)\, \mathrm{d}s \right] x(t) \end{pmatrix},$$

is a solution to the system of operator equations ((4,5))

$$\begin{aligned} -x + U(.)\, b + \varepsilon R_0(\varepsilon)(x) &= 0\,, \\ Bb + \varepsilon R(\varepsilon)(x) &= 0\,. \end{aligned}$$

Let $m < n$ and rank $(B) = m + n'$. Let us denote $\mathscr{M} = \{1, 2, \ldots, m + n'\}$ and let $\mathscr{V} \subset \mathscr{N}_0$ be such that $\nu(\mathscr{V}) = n - m$ and det $B_{\mathscr{M},\mathscr{V}^*} \neq 0$. Putting $\gamma = b_{\mathscr{V}^*}$, $\delta = b_{\mathscr{V}}$, $B_1 = B_{\mathscr{M},\mathscr{V}^*}$ and $B_2 = B_{\mathscr{M},\mathscr{V}}$, (4,5) becomes

$$-x + V(.)\,\delta + \varepsilon S(\varepsilon)(x) = 0\,, \tag{4,13}$$

where the $n \times (n - m)$-matrix function V and the operator S are given by (4,10). Given an arbitrary $\delta_0 \in \mathscr{R}_{n-m}$, the function $x_0 = V(.)\,\delta_0$ is a solution to the limit problem $(\mathscr{P}_0)$ and by Proposition 2 there exists $\varepsilon^* > 0$ such that for all $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ there exists a unique solution $x^*(\varepsilon)$ to $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ continuous in $\varepsilon \in [0, \varepsilon^*]$ as a mapping $[0, \varepsilon^*] \to \mathscr{AC}$ and such that $x^*(0) = x_0$. The given boundary value problem $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ can be treated similarly as the noncritical case for $m = n$, although the limit problem $(\mathscr{P}_0)$ possesses a nonzero solution. On the other hand, if $\varepsilon > 0$, $m > n$ and rank $(B) = = n + n'$, then (4,5) is equivalent to the system

$$-x + \varepsilon S(\varepsilon)(x) = 0\,, \quad T(\varepsilon)(x) = 0 \tag{4,14}$$

with S and T defined analogously as in (4,10). Now the function x is uniquely determined by $(4,14)_1$ and to be a solution to the given problem $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ with $\varepsilon > 0$ it has to satisfy $(4,14)_2$. Hence the boundary value problem $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ has generally no solution, though the limit problem $(\mathscr{P}_0)$ has only the trivial solution (cf. Corollary 1 of Theorem 3,1). In the other cases we meet an analogous situation.

5. LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM – FUNCTIONAL ANALYSIS APPROACH

Let us turn back to the linear boundary value problem $(\mathscr{P})$ given by

$$\dot{x} - A(t)\,x - \int_a^b [\mathrm{d}_s G(t, s)]\,x(s) = f(t)\,, \tag{5,1}$$

$$\int_a^b [\mathrm{d}L(s)]\,x(s) = l\,, \tag{5,2}$$

where $A \in \mathscr{L}^1_{n,n}$, $f \in \mathscr{L}^1$, $G \in \mathscr{L}^2[\mathscr{BV}]$, $L \in \mathscr{BV}_{m,n}$ and $l \in \mathscr{R}_m$. Without any loss of generality we may assume that for all $t \in J$ $G(t, .)$ and L are continuous from the right on the open interval (a, b).

In [20] D. Wexler derived the true adjoint (in the sense of functional analysis) to the boundary value problem

$$\dot{x} - A(t)\,x = f(t)\,, \quad Lx = l\,,$$

where $A \in \mathscr{L}^1_{n,n}$, $f \in \mathscr{L}^1$, L is a continuous linear mapping of $\mathscr{AC}$ into some B-space Λ and $l \in \Lambda$. In this paragraph we apply his ideas to the boundary value problem $(\mathscr{P})$. The special form of the operator L and the different choice of a dual space to the space $\mathscr{C}$ of continuous functions on J (measures are replaced by functions of bounded variation) enables us to prove that the problem $(\mathscr{P}^*)$ derived in § 3 ((3,16), (3,17)) is equivalent to the true adjoint of $(\mathscr{P})$.

First, we have to introduce some new notations.

$\mathscr{L}^\infty$ denotes the B-space of all row n-vector functions measurable and essentially bounded on J. It is well-known that $\mathscr{L}^\infty$ is a dual B-space to the B-space $\mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1_{n,1}$ of column n-vector functions L-integrable on J. The value of a functional $y' \in \mathscr{L}^\infty$ on $x \in \mathscr{L}^1$ is given by

$$\langle x, y' \rangle_{\mathscr{L}} = \int_a^b y'(s)\,x(s)\,\mathrm{d}s$$

and the norm of y' is $\|y'\|_\infty = \sup\limits_{t \in J} \mathrm{ess}\,\|y'(t)\|$. Functions from $\mathscr{L}^\infty$ which coincide a.e. on J are identified with one another.

$\mathscr{BV}^+$ is the B-space of all row n-vector functions of bounded variation on J and continuous from the right on (a, b) ($\mathscr{BV}^+ \subset \mathscr{BV}_{1,n}$). $\mathscr{C}^*$ denotes the dual B-space to the space $\mathscr{C}$ of column n-vector functions continuous on J, i.e. $\mathscr{C}^*$ is formed by all functions from $\mathscr{BV}^+$ which vanish at a. Given an arbitrary functional $y' \in \mathscr{C}^*$, its value on $x \in \mathscr{C}$ is given by

$$\langle x, y'\rangle_{\mathscr{C}} = \int_a^b [\mathrm{d}y'(t)]\, x(t)$$

and $\|y'\|_{\mathscr{C}^*} = \mathrm{var}_a^b\, y'$. The zero element of $\mathscr{C}^*$ is the function vanishing everywhere on J.

$\mathscr{AC}^*$ denotes the dual B-space to the B-space $\mathscr{AC}$ of column n-vector functions absolutely continuous on J. The value of a functional $y' \in \mathscr{AC}^*$ on $x \in \mathscr{AC}$ is denoted by $\langle x, y'\rangle_{\mathscr{AC}}$. Let us notice that we can consider ([20] 2,1) $\mathscr{C}^* \subset \mathscr{AC}^*$ and $\langle x, y'\rangle_{\mathscr{AC}} = \langle x, y'\rangle_{\mathscr{C}}$ for $x \in \mathscr{AC}$ and $y' \in \mathscr{C}^*$. Moreover, since the topology of $\mathscr{AC}$ is stronger than that induced by $\mathscr{C}(\|x\|_{\mathscr{C}} = \sup_J \|x(t)\|)$ and $\mathscr{AC}$ is dense in $\mathscr{C}$, the zero elements of $\mathscr{AC}^*$ and $\mathscr{C}^*$ coincide.

The operators

$$D : x \in \mathscr{AC} \to \dot{x} \in \mathscr{L}^1\,, \qquad A : x \in \mathscr{AC} \to A(t)\, x(t) \in \mathscr{L}^1\,,$$

$$G : x \in \mathscr{AC} \to \int_a^b [\mathrm{d}_s G(t, s)]\, x(s) \in \mathscr{L}^1\,, \qquad \mathscr{B}_1 : x \in A\mathscr{C} \to Dx - Ax - Gx \in \mathscr{L}^1$$

and

$$\mathscr{B}_2 : x \in \mathscr{AC} \to \int_a^b [\mathrm{d}L(s)]\, x(s) \in \mathscr{R}_m$$

are linear and continuous. Hence the operator

$$\mathscr{B} : x \in \mathscr{AC} \to \begin{pmatrix} \mathscr{B}_1 x \\ \mathscr{B}_2 x \end{pmatrix} \in \mathscr{L}^1 \times \mathscr{R}_m \tag{5,3}$$

is linear and continuous, too. Its adjoint $\mathscr{B}^*$ is a linear continuous operator $\mathscr{L}^\infty \times \mathscr{R}_m^* \to \mathscr{AC}^*$ defined on $(y', \lambda') \in \mathscr{L}^\infty \times \mathscr{R}_m^*$ by

$$\langle \mathscr{B}_1 x, y'\rangle_{\mathscr{L}} + \lambda'(\mathscr{B}_2 x) = \langle x, \mathscr{B}^*(y', \lambda')\rangle_{\mathscr{AC}} \quad \text{for all} \quad x \in \mathscr{AC}\,.$$

The boundary value problem (P) can be now written in the form

$$\mathscr{B}x = \begin{pmatrix} f \\ l \end{pmatrix}. \tag{5,4}$$

Let us derive an explicit form for $\mathscr{B}^*$. For $x \in \mathscr{AC}$ and $(y', \lambda') \in \mathscr{L}^\infty \times \mathscr{R}_m^*$ we have

$$\langle x, \mathscr{B}^*(y', \lambda')\rangle_{\mathscr{AC}} = \langle \mathscr{B}_1 x, y'\rangle_{\mathscr{L}} + \lambda'(\mathscr{B}_2 x) = \langle Dx, y'\rangle_{\mathscr{L}} - \langle Ax, y'\rangle_{\mathscr{L}} -$$
$$- \langle Gx, y'\rangle_{\mathscr{L}} + \lambda'(\mathscr{B}_2 x) = \langle x, D^*y' - A^*y' - G^*y' + \mathscr{B}_2^*\lambda'\rangle_{\mathscr{AC}}$$

and

$$\mathscr{B}^*(y', \lambda') = D^*y' - A^*y' - G^*y' + \mathscr{B}_2^*\lambda'\,,$$

where D^*, A^*, G^* and $\mathscr{B}_2^*$ are adjoint operators to D, A, G and $\mathscr{B}_2$, respectively. Thus the adjoint equation to (5,4) is

$$D^*y' - A^*y' - G^*y' + \mathscr{B}_2^*\lambda' = 0 \tag{5,5}$$

(where 0 means the zero element of $\mathscr{AC}^*$, of course).

Given an arbitrary $x \in \mathscr{AC}$ and $y' \in \mathscr{L}^\infty$, it holds by Lemma 2,7

$$\int_a^b y'(t)\left(\int_a^b [\mathrm{d}_s G(t, s)]\, x(s)\right) \mathrm{d}t = \int_a^b \left[\mathrm{d}_t \int_a^b y'(s)\,(G(s, t) - G(s, a))\, \mathrm{d}s\right] x(t)\,.$$

As a consequence, since $\int_a^b y'(s)\,(G(s, t) - G(s, a))\, \mathrm{d}s \in \mathscr{C}^*$, we have

$$\langle x, G^*y'\rangle_{\mathscr{AC}} = \langle Gx, y'\rangle_{\mathscr{L}} = \left\langle x, \int_a^b y'(s)\,(G(s, t) - G(s, a))\, \mathrm{d}s\right\rangle_{\mathscr{C}}$$

and

$$G^* : y' \in \mathscr{L}^\infty \to \int_a^b y'(s)\,(G(s, t) - G(s, a))\, \mathrm{d}s \in \mathscr{C}^*\,. \tag{5,6}$$

By a similar argument the operators A^* and $\mathscr{B}_2^*$ are defined by

$$A^* : y' \in \mathscr{L}^\infty \to \int_a^t y'(s)\, A(s)\, \mathrm{d}s \in \mathscr{C}^* \tag{5,7}$$

and

$$B_2^* : \lambda' \in \mathscr{R}_m^* \to \lambda'(L(t) - L(a)) \in \mathscr{C}^*\,. \tag{5,8}$$

Furthermore,

$$D^* : y' \in \mathscr{C}^* \to -y'(t) + R(y')(t) \in \mathscr{C}^*\,, \tag{5,9}$$

where

$$R(y')(t) = \begin{cases} y'(a) & \text{for} \quad t = a\,, \\ 0 & \text{for} \quad a < t < b\,, \\ y'(b) & \text{for} \quad t = b\,. \end{cases} \tag{5,10}$$

The operator $Dx - Ax$ maps $\mathscr{AC}$ onto $\mathscr{L}^1$. Hence $y' \in \mathscr{L}^\infty$ being an arbitrary solution to $D^*y' - A^*y' = 0$, $y'(t) = 0$ a.e. on J. Moreover, given an arbitrary $g' \in \mathscr{C}^*$, the equation

$$D^*y' - A^*y' = g' \tag{5,11}$$

has a solution in $\mathscr{L}^\infty$ iff

$$\int_a^b [\mathrm{d}g'(s)]\, X(s) = 0\,, \tag{5,12}$$

where X denotes again the fundamental matrix solution of $Dx - Ax = 0$ (cf. (3,3)). Suppose $g` \in \mathscr{C}^*$ and (5,11) has a solution in $\mathscr{L}^\infty$. Then this solution is unique in $\mathscr{L}^\infty$. Let us put for $t \in J$

$$z`(t) = -\left(\int_a^t [dg`(s)]\, X(s)\right) X^{-1}(t)\,.$$

Since $z` \in \mathscr{C}^*$ and $R(z`)(t) \equiv 0$ by (5,10) and (5,12), we have by (5,7), (5,9), Lemma 1,1 and (3,3)

$$D^*z` - A^*z` = -z`(t) + \int_a^t \left(\int_a^s [dg`(\sigma)]\, X(\sigma)\right) X^{-1}(s)\, A(s)\, ds =$$

$$= -z`(t) + \int_a^t [dg`(s)] \left(X(s) \int_s^t X^{-1}(\sigma)\, A(\sigma)\, d\sigma\right) = g`(t)\,.$$

It follows that $z`$ is the unique solution of (5,11) in $\mathscr{L}^\infty$. Applying this to (5,5) and taking into account (5,6)–(5,8), we obtain that to any solution $(y`, \lambda`) \in \mathscr{L}^\infty \times \mathscr{R}_m^*$ of (5,5) there exists a solution $(\eta`, \lambda`)$ of (5,5) such that $\eta` \in \mathscr{BV}^+$, $\eta`$ is continuous at $a$ from the right and at $b$ from the left and $y`(t) = \eta`(t)$ a.e. on $J$ ($y` = \eta`$ in $\mathscr{L}^\infty$). Consequently, to find all solutions of (5,5) in $\mathscr{L}^\infty \times \mathscr{R}_m^*$, it is sufficient to consider instead of $\mathscr{B}^*$ its restriction $\mathscr{B}_0^*$ on $\mathscr{V} \times \mathscr{R}_m^*$, where $\mathscr{V}$ is formed by all functions from $\mathscr{BV}^+$ which are continuous at a from the right and at b from the left. By (5,6)–(5,9)

$$\mathscr{B}_0^*(y`, \lambda`) = -y`(t) + R(y`)(t) - \int_a^t y`(s)\, A(s)\, ds + \lambda`(L(t) - L(a)) -$$

$$- \int_a^b y`(s)\,(G(s, t) - G(s, a))\, ds \in \mathscr{C}^*\,.$$

In other words, the equation (5,5) for $(y`, \lambda`) \in \mathscr{L}^\infty \times \mathscr{R}_m^*$ is equivalent to the equation

$$-y`(t) + R(y`)(t) - \int_a^t y`(s)\, A(s)\, ds + \lambda`(L(t) - L(a)) - \tag{5,13}$$

$$- \int_a^b y`(s)\,(G(s, t) - G(s, a))\, ds = 0 \quad \text{on} \quad J$$

for $(y`, \lambda`) \in \mathscr{V} \times \mathscr{R}_m^*$. In particular, (5,13) yields

$$y`(a) - y`(a) = 0 \quad \text{for} \quad t = a\,,$$

$$y`(t) = -\int_a^t y`(s)\, A(s)\, ds + \lambda`(L(t) - L(a)) - \int_a^b y`(s)\,(G(s, t) - G(s, a))\, ds \tag{5,14}$$

for $t \in (a, b)$,

and

$$(5,15)\quad 0 = -\int_a^b y'(s)\,A(s)\,\mathrm{d}s + \lambda'(L(b) - L(a)) - \int_a^b y'(s)\,(G(s, b) - G(s, a))\,\mathrm{d}s$$

for $t = b$.
Furthermore, from (5,14) we have

$$(5,16)\quad y'(a) = y'(a+) = \lambda'(L(a+) - L(a)) - \int_a^b y'(s)\,(G(s, a+) - G(s, a))\,\mathrm{d}s$$

and consequently (5,14) becomes

$$(5,17)\qquad y'(t) = y'(a) - \int_a^t y'(s)\,A(s)\,\mathrm{d}s + \lambda'(L(t) - L(a+)) - \\ - \int_a^b y'(s)\,(G(s, t) - G(s, a+))\,\mathrm{d}s \quad \text{for} \quad t \in (a, b)\,.$$

Making use of (5,15), (5,14) can be modified as follows

$$(5,18)\qquad y'(t) = \int_t^b y'(s)\,A(s)\,\mathrm{d}s - \lambda'(L(b) - L(t)) + \\ + \int_a^b y'(s)\,(G(s, b) - G(s, t))\,\mathrm{d}s \quad \text{for} \quad t \in (a, b)\,.$$

Thus

$$(5,19)\quad y'(b) = y'(b-) = -\lambda'(L(b) - L(b-)) + \int_a^b y'(s)\,(G(s, b) - G(s, b-))\,\mathrm{d}s$$

and

$$(5,20)\qquad y'(t) = y'(b) + \int_t^b y'(s)\,A(s)\,\mathrm{d}s + \lambda'(L(t) - L(b-)) - \\ - \int_a^b y'(s)\,(G(s, t) - G(s, b-))\,\mathrm{d}s \quad \text{for} \quad t \in (a, b)\,.$$

Let us define

$$G_0(t, s) = \begin{cases} G(t, a+) & \text{for } t \in J \text{ and } s = a\,, \\ G(t, s) & \text{for } t \in J \text{ and } a < s < b\,, \\ G(t, b-) & \text{for } t \in J \text{ and } s = b\,, \end{cases} \quad L_0(s) = \begin{cases} L(a+) & \text{for } s = a\,, \\ L(s) & \text{for } a < s < b\,, \\ L(b-) & \text{for } s = b\,, \end{cases}$$

$C(t) = G(t, a+) - G(t, a)$ and $D(t) = G(t, b) - G(t, b-)$ for $t \in J$ and

$$M = L(a+) - L(a)\,, \quad N = L(b) - L(b-)\,.$$

Then from (5,16), (5,17), (5,19) and (5,20) we can conclude that the equation (5,13) (and hence also (5,5)) is equivalent to the system of equations for $(y', \gamma') \in \mathscr{L}^\infty \times \mathscr{R}_m^*$ $(\gamma' = -\lambda')$

$$(5{,}21)\qquad y'(t) = y'(a) - \int_a^t y'(s)\, A(s)\, \mathrm{d}s - \gamma'(L_0(t) - L_0(a)) - \\ - \int^b y'(s)\,(G_0(s, t) - G_0(s, a))\, \mathrm{d}s \quad \text{on} \quad J\,,$$

$$(5{,}22)\qquad y'(a) = -\gamma' M - \int_a^b y'(s)\, C(s)\, \mathrm{d}s\,, \quad y'(b) = \gamma' N + \int_a^b y'(s)\, D(s)\, \mathrm{d}s\,.$$

In the introduced notation, the original boundary value problem $(\mathscr{P})$ assumes the form

$$\dot{x} = A(t)\, x + C(t)\, x(a) + D(t)\, x(b) + \int_a^b [\mathrm{d}_s G_0(t, s)]\, x(s) + f(t)\,,$$

$$M\, x(a) + N\, x(b) + \int_a^b [\mathrm{d}L_0(s)]\, x(s) = l$$

and (5,21), (5,22) is exactly its adjoint $(\mathscr{P}^*)$ derived in § 3 ((3,16), (3,17)).

As a consequence we have that *the adjoint* $(\mathscr{P}^*)$ *of* $(\mathscr{P})$ *from* § 3 *and the true adjoint* (5,5) *of* $(\mathscr{P})$ *are equivalent.*

From the fundamental "alternative" theorem concerning linear equations in B-spaces ([5] VI, § 6) and from Theorem 3,1 it follows that the operator $\mathscr{B}$ of the boundary value problem $(\mathscr{P})$ defined by (5,3) has a closed range in $\mathscr{L}^1 \times \mathscr{R}_n$.

Remark. The closedness of the range $\mathscr{B}(\mathscr{AC})$ of the operator $\mathscr{B}$ can be also shown directly in a similar way as D. Wexler did in [20] § 3 for the operator

$$x \in \mathscr{AC} \rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} - A(t)\, x \\ Lx \end{pmatrix} \in \mathscr{L}^1 \times \mathscr{R}_m\,,$$

where L is a continuous linear mapping of $\mathscr{AC}$ into some B-space Λ. In fact, let the matrix B and the operator

$$\Psi : \begin{pmatrix} f \\ l \end{pmatrix} \in \mathscr{L}^1 \times \mathscr{R}_m \rightarrow \Psi(f, l) = w \in \mathscr{R}_{m+n'}$$

be defined by (4,4), (3,9), (3,10) and (3,12). Let us put

$$\Theta : b \in R_{n+n'} \rightarrow Bb \in \mathscr{R}_{m+n'}\,.$$

Given $f \in \mathscr{L}^1$ and $l \in \mathscr{R}_m$, the corresponding boundary value problem $(\mathscr{P})$ possesses a solution (i.e. $(f', l')' \in \mathscr{B}(\mathscr{AC})$) iff $\Psi(f, l) \in \Theta(\mathscr{R}_{n+n'})$. Hence

$$\mathscr{B}(\mathscr{AC}) = \Psi_{-1}(\Theta(\mathscr{R}_{n+n'}))\,.$$

Since Ψ and Θ are continuous linear operators and $\dim \Theta(\mathscr{R}_{n+n'}) < \infty$, the set $\Psi_{-1}(\Theta(\mathscr{R}_{n+n'}))$ is certainly closed.

Acknowledgement. The authors wish to express their gratitude to Prof. A. HALANAY and Dr. D. WEXLER, personal contacts and discussions with whom have given rise to the last paragraph of this paper.

References

[1] *Burkill, J. C.*, The Lebesgue integral, Cambridge University Press, 1951.

[2] *Cameron, R. H.* and *Martin, W. T.*, An unsymmetric Fubini theorem, Bull. A.M.S. *47* (1941), 121—125.

[3] *Conti, R.*, Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations, Boll. U.M.I., (3) Vol. *XXII* (1967), 135—178.

[4] *Cronin, J.*, Fixed points and topological degree in nonlinear analysis, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1964.

[5] *Dunford, N.* and *Schwartz, T.*, Linear operators, part I, Interscience Publishers, New York, London, 1958.

[6] *Halanay, A.*, On a boundary value problem for linear systems with time lag, Journ. Diff. Eq. *2* (1966), 47—56.

[7] *Hildebrandt, T. H.*, Introduction to the theory of integration, Academic Press, New York, London, 1963.

[8] *Kantorovič, L. V.* and *Akilov, G. P.*, Functional analysis in normed spaces, Macmillan, New York, 1964.

[9] *Krall, A. M.*, Differential-boundary operators, Tr. A.M.S. *154* (1971), 429—458.

[10] *Kurzweil, J.*, Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter, Czech. Math. J. *7* (*82*), (1957), 418—449.

[11] *Kwapisz, M.*, On quasilinear differential-functional equations with quasilinear conditions, Math. Nachr. *43* (1970), 215—222.

[12] *Smithies, F.*, Integral equations, Cambridge University Press, 1965.

[13] *Tvrdý, M.*, Boundary value problems for linear generalized differential equations and their adjoints, to appear.

[14] *Urabe, M.*, An existence theorem for multi-point boundary value problems, Funkc. Ekvac. *9* (1966), 43—60.

[15] *Urabe, M.*, The degenerate case of boundary value problems associated with weakly nonlinear differential systems, Publ. Res. Inst. for Math. Sc. Kyoto Univ., ser. A, *4* (1968), 545—584.

[16] *Urabe, M.*, The Newton method and its applications to boundary value problems with nonlinear boundary conditions, Proc. US-Japan Sem. on Diff. and Func. Eq., Univ. of Minnesota, Minneapolis, 1967, W. A. Benjamin (1967), 383—409.

[17] *Vejvoda, O.* and *Tvrdý, M.*, Existence of solutions to a linear integro-boundary-differential equation with additional conditions, Ann. di Mat. pura ed appl., (4), Vol. *LXXXIX* (1971), 169—216.

[18] *Vejvoda, O.*, On perturbed nonlinear boundary value problems, Czech. Math. J. *11* (*86*), (1961), 323—364.

[19] *Vejvoda, O.*, Periodic solutions of a linear and weakly nonlinear wave equation in one dimension I, Czech. Math. J. *14* (*89*), (1964), 341—382.

[20] *Wexler, D.*, On boundary value problems for an ordinary linear differential system, Ann. di Mat. pura ed appl., (4), Vol. *LXXX* (1968), 123—134.

Authors' address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV v Praze).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ON BOUNDEDNESS OF THE WEAK SOLUTION FOR SOME CLASS OF QUASILINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

JOZEF KAČUR, Bratislava

(Received January 28, 1971)

Introduction. This paper is connected with my paper [1]. The main aim of this paper is to find a bounded weak solution of the Dirichlet boundary value problem for the equation of the form

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) + a_0(x, u) = f(x) \tag{1}$$

where the growth of $a_i(x, p)$ in p ($p \equiv (p_1, \ldots, p_N)$) and $a_0(x, u)$ in u satisfies conditions (3), (4) given below.

Let us consider a bounded domain $\Omega \subset \mathsf{E}^N$ (N-dimensional Euclidean space) with the Lipschitzian boundary $\partial\Omega$. We shall suppose

$$f(x) \in \mathsf{L}_\infty(\Omega) . \tag{2}$$

Let us consider real functions $g(u) \in \mathsf{C}^1(-\infty, \infty)$ for which there exists a positive number u_1 so that

I. $u\, g(u)$ is even and convex for $|u| \geqq u_1$ and

$$\lim_{u \to \infty} (u\, g'(u) + g(u)) = \infty .$$

II. For each $l > 1$ there exists a constant $c(l)$ such that

$$g(lu) \leqq c(l)\, g(u) \quad \text{for each} \quad u \geqq u_1 .$$

III. There exists $l > 1$ such that

$$g(u) \leqq \tfrac{1}{2} g(lu) \quad \text{for each} \quad u \geqq u_1 .$$

Now, we shall denote by $\boldsymbol{M}_1$; $\boldsymbol{M}_2$; $\boldsymbol{M}_3$ the classes of the functions $g(u)$ satisfying I; I and II; I, II and III respectively.

The functions $a_i(x, p)$ for $i = 0, 1, \ldots, N$ are real and defined for $x \in \Omega$ and $|p| < \infty$. They are continuous in p for almost all $x \in \Omega$ and measurable in x at fixed p. (If $i = 0$, then $p \in \mathsf{E}^1$).

Let us have $g_i(u) \in \boldsymbol{M}_3$ for $i = 1, 2, \ldots, N$ and suppose $g_i(u) \geqq g_j(u)$ (or $g_i(u) \leqq g_j(u)$) for all $i, j = 1, 2, \ldots, N$ and $u \geqq u_1$. Then, the conditions for the growth of $a_i(x, p)$ in p are of the form

$$(3) \qquad |a_i(x, p)| \leqq c\left(1 + \sum_{j=1}^{N} \min\left(|g_i(p_j)|, |g_j(p_j)|\right)\right) \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, N\,.$$

Now, let $g_0(u) \in \boldsymbol{M}_1$ such that

$$(4) \qquad |a_0(x, u)| \leqq c(1 + g_0(u))\,.$$

In paper [1], the existence of a weak solution of equation (1) is proved – under the assumption of monotonicity and coerciveness – only if $g_0(u) \in \boldsymbol{M}_3$ in the condition (4). In this case a weak solution is found in the space $\mathbf{W}_{1,G}(\Omega)$. In this paper we shall also work in the space $\mathbf{W}_{1,G}(\Omega)$ and therefore we sketch its construction – for details, see [1].

First we construct Orlicz spaces $\mathsf{L}^*_{G_i}(\Omega)$ by means of functions $G_i(u) = u\, g_i(u)$, where $g_i(u)$ for $i = 0, 1, \ldots, N$ are those from conditions (3) and (4). More exactly,

$$G_i(u) = \begin{cases} u\, g_i(u)\,, & \text{for} \quad |u| \geqq u_i \\ c_i |u|^{p_i}\,, & \text{for} \quad |u| \leqq u_i \end{cases}$$

where u_i; c_i; $p_i > 1$ are suitable constants. For the construction of Orlicz spaces, see [3]. Then, we construct the space $\mathbf{W}_{1,G}(\Omega)$ of Sobolev type, see [1], as follows: $\mathbf{W}_{1,G}(\Omega) \equiv \mathbf{W}_{1,G} \equiv \{u \in \mathsf{L}^*_{G_0}(\Omega)$, for which the distributive derivatives $\partial u/\partial x_i \in \mathsf{L}^*_{G_i}(\Omega)$ for $i = 1, 2, \ldots, N\}$. The norm in this space is defined by

$$\|u\|_{\mathbf{W}_{1,G}} = \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{G_i} + |u|_{G_0}\,,$$

where $\|\,.\,\|_{G_i}$ is the norm in the Orlicz space $\mathsf{L}^*_{G_i}(\Omega)$. Let us denote by ${}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$ the subspace of all functions $u \in \mathbf{W}_{1,G}$ satisfying

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

in the sence of traces.

If $g_i(u) \in \boldsymbol{M}_3$ for $i = 0, 1, \ldots, N$, then the corresponding space $\mathbf{W}_{1,G}$ is reflexive (see [1]). In the general case $g_i(u) \in \boldsymbol{M}_1$, for $i = 0, 1, \ldots, N$, $\mathbf{W}_{1,G}$ need not be reflexive (see [5]) and in that case it is impossible to apply the methods known from the reflexive spaces for seeking the weak solution. In this case the functional (potential) is constructed in paper [1] and its minimum is found.

Considering the growth conditions (3) and (4), we shall proceed analogously, even if the conditions are more general, and we shall prove that the minimum of the functional is attained for a bounded function. Then, it will be easy to prove that this minimum is at the same time also the weak solution.

We shall suppose that the Dirichlet's boundary value condition is given by the trace of a function $u_0 \in \mathbf{W}_{1,G}$, where

$$u(s)|_{\partial\Omega} = u_0(s)|_{\partial\Omega} \in \mathsf{L}_\infty(\partial\Omega) \tag{5}$$

in the sense of traces.

$u \in \mathbf{W}_{1,G}$ is called to be a weak solution of the Dirichlet boundary value problem (1), (5), if $u - u_0 \in {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$ and for all $v \in {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\, a_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \mathrm{d}x + \int_\Omega v a_0(x, u)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega vf\, \mathrm{d}x$$

holds.

By means of the class $\boldsymbol{M}_3$ we can describe a growth, which is near to polynomials, e.g. u^3, $u^3 \ln(|u| + 1)$ etc. However, we call the attention to the fact, that the class $\boldsymbol{M}_3$ is essentialy larger then the set of polynomials $|u|^p$. If $g(u) \in \boldsymbol{M}_3$ then there exist $p, q > 1$ and constants c_1, c_2, u_1 such that (see [1], Assertion [1])

$$c_1|u|^p \leqq u\, g(u) \leqq c_2|u|^q \quad \text{for all} \quad |u| \geqq u_1\,.$$

On the contrary, for all $p, q > 1$ with $q > p$ there exists $g_{p,q}(u) \in \boldsymbol{M}_3$ such that previous inequality holds, while this inequality does not take place for any $p', q' > 1$ with $p < p' < q' < q$.

By means of the class $\boldsymbol{M}_1$ we can describe a larger scale of the growths, e.g.

$$\operatorname{sgn} u \,.\, \ln(|u| + 1)\,, \quad u \exp(u^2) \quad \text{etc.}$$

If $g(u) \in \boldsymbol{M}_1$ and $g(u) \notin \boldsymbol{M}_3$, then the Orlicz space $\mathsf{L}^*_G(\Omega)$ $(G(u) = u\, g(u))$ is not reflexive, which requires a different method to find a weak solution then in the case of reflexive spaces.

Let us denote by $\mathsf{E}_G(\Omega)$ the closure of the set of all bounded functions in the norm of the space $\mathsf{L}^*_G(\Omega)$. If $g(u) \in \boldsymbol{M}_1$ and $g(u) \notin \boldsymbol{M}_2$, then $\mathsf{E}_G(\Omega)$ is a nowhere dense set in $\mathsf{L}^*_G(\Omega)$. If $g(u) \in \boldsymbol{M}_3$, then $\mathsf{E}_G(\Omega) \equiv \mathsf{L}^*_G(\Omega)$. Let us denote by $P(v)$ the conjugate function to $G(u)$ (see [3]) and by $\mathsf{L}^*_P(\Omega)$ the Orlicz space constructed by means of the generating function $P(v)$ $(P(v) = \max_u (uv - G(u))$. For $u \in \mathsf{L}^*_G(\Omega)$ and $v \in \mathsf{L}^*_P(\Omega)$ the Hölder inequality $|\int_\Omega u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x| \leqq \|u\|_G \cdot \|v\|_P$ hlods.

The results obtained here can be transferred without essential difficulties to more general boundary value problems.

Let us denote

$$u(x)]^c \equiv u]^c = \begin{cases} u(x) & \text{for } x \text{ such that } |u(x)| \leqq c \\ c \operatorname{sgn} u(x) & \text{for all other } x\,. \end{cases}$$

Lemma 1. *If $u \in \mathbf{W}_{1,G}(\Omega)$, then $u]^c \in \mathbf{W}_{1,G}(\Omega)$ for each constant $c \geqq 0$.*

Proof. As $\mathsf{L}^*_{G_i}(\Omega) \subset \mathsf{L}_1(\Omega)$ algebraically and topologically for $i = 0, 1, \ldots, N$, it is $u \in \mathbf{W}^1_1(\Omega)$. Thus, $u]^c \in \mathbf{W}^1_1(\Omega)$ – see [2] (Theorem 2.2, Lemma 2.3). Let us denote by $\partial u/\partial x_i$ the derivative in the sense of distribution of the function $u(x)$ and by $[\partial u/\partial x_i]$ the derivative in the ordinary sense. From the results of B. LEVI (see [2], Theorem 2.3),

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] \quad \text{almost everywhere in } \Omega\,, \quad i = 1, 2, \ldots, N\,.$$

From this fact easily we deduce the lemma.

On the basis of this lemma it is possible to suppose that $u_0(x)$ is bounded and

$$\sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} |u(x)| \leqq \|u_0\|_{\mathsf{L}_\infty(\partial\Omega)} \tag{6}$$

in the sense of traces.

For the construction of the functional to equation (1), we suppose the symmetry

$$\frac{\partial a_i(x, p)}{\partial p_j} = \frac{\partial a_j(x, p)}{\partial p_i} \tag{7}$$

in the sense of distribution for $i, j = 1, 2, \ldots, N$.

Supposing (3), (7), we define

$$\Phi_1(u) = \int_0^1 \mathrm{d}t \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\, a_i\left(x, t\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) \mathrm{d}x\,.$$

The functional $\Phi_1(u)$ is continuous on the space $\mathbf{W}_{1,G}$ and has a Gatteaux differential at every point equal to

$$\mathsf{D}\Phi_1(u, v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_i}\, a_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \mathrm{d}x\,;$$

for the proof of this assertion see [1] (Lemma 1 and 2, § 2). The functional corresponding to equation (1) is of the form (see [4])

$$\Phi(u) = \Phi_1(u) + \int_0^1 \mathrm{d}t \int_\Omega u a_0(x, tu)\, \mathrm{d}x - \int_\Omega uf\, \mathrm{d}x\,. \tag{8}$$

To obtain the convexity of the functional $\Phi_1(u)$ we shall suppose

$$\sum_{i=1}^N (p_i - q_i)\,[a_i(x, p) - a_i(x, q)] \geqq 0\,. \tag{9}$$

The coerciveness of $\Phi(u)$ will be guaranteed by

$$\sum_{i=1}^{N} p_i a_i(x, p) \geqq c_1 \sum_{i=1}^{N} p_i g_i(p_i) - c_2 \tag{10}$$

and

$$u a_0(x, u) \geqq c_1 u\, g_0(u) - c_2\,, \quad u \in \mathsf{E}^1 \tag{11}$$

where c_1, c_2 are constants and $g_i(u)$ for $i = 0, 1, \ldots, N$ are functions from (3) and (4).

We shall consider such equations (1) for which there exist $g_i(u) \in \boldsymbol{M}_3$ for $i = 1, 2, \ldots, N$, and $g_0(u) \in \boldsymbol{M}_1$ satisfying (3), (4), (10) and (11).

In general, for the functional

$$\Phi_2(u) = \int_0^1 \mathrm{d}t \int_\Omega u a_0(x, tu)\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

we admit the value $+\infty$ on the space $\mathsf{L}^*_{G_0}(\Omega)$.

We shall look for the minimum of the functional $\Phi(u)$ on the convex and closed set $u_0 + {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$.

Lemma 2. *If* (2), (3), (4), (7), (10) *and* (11) *are satisfied, then*

$$\lim_{\|u\|_{\mathbf{W}_{1,G}} \to \infty} \Phi(u) = \infty\,, \quad \textit{where} \quad u \in u_0 + {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}\,.$$

Proof. First we prove that $\Phi_1(u) \to \infty$, if

$$\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{G_i} \to \infty\,. \tag{13}$$

Let us set

$$\lambda(u) = \left[\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{G_i} \right]^{-1} \cdot \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, a_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \mathrm{d}x\,. \tag{14}$$

Using Hölder's inequality in (14) and regarding [1] (Lemma 1, § 2) we find easily that $\lambda(u)$ is a continuous functional on $\mathbf{W}_{1,G}$, bounded from below on bounded sets. We shall show that $\lambda(u) \to \infty$ if (13) holds. For this purpose it suffices to prove that from every sequence $\{u_n\}$ satisfying (13) a subsequence $\{u_{n_k}\}$ can be extracted such that $\lambda(u_{n_k}) \to \infty$ with $k \to \infty$. From (10) we obtain

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\, a_i\left(x, \frac{\partial u_n}{\partial x}\right) \mathrm{d}x \geqq c_1 \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\, g_i\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right) - c_2\,.$$

As $g_i(u) \in \boldsymbol{M}_3$, for $i = 1, 2, \ldots, N$, it follows from [1] (Theorem 1, Assertion 5) that it is possible to choose a subsequence $\{u_{n_k}\}$ from $\{u_n\}$ such that

$$\left[\sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_i} \right\|_{G_i} \right]^{-1} \cdot \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_i}\, g_i\left(\frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_i}\right) \to \infty \quad \text{with} \quad k \to \infty\,.$$

Thus, we conclude that $\lambda(u_{n_k}) \to \infty$ for $k \to \infty$. Now, let $\{u_n\}$ be an arbitrary sequence satisfying (13). From the definition of $\lambda(u)$ we have

$$\Phi_1(u_n) = \int_0^1 \lambda(tu_n)\,\mathrm{d}t\,.\sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right\|_{G_i}.$$

$\lambda(tu_n)$ is a continuous function in t and so the integral is well-defined. There exists a constant c such that $\lambda(u) \geqq -c$ for all $u \in \mathbf{W}_{1,G}$. Let $\mathsf{K} > 0$. With regard to the properties of $\lambda(u)$, there exists $\mathsf{L} > 0$ such that $\lambda(u) > 2\mathsf{K} + c$ if

$$\sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{G_i} > \mathsf{L}\,.$$

Let us choose N_0 such that

$$\sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right\|_{G_i} > 2\mathsf{L}$$

for $n > N_0$. Then, we conclude

$$\int_0^1 \lambda(tu_n)\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} \lambda(tu_n)\,\mathrm{d}t + \int_{1/2}^1 \lambda(tu_n)\,\mathrm{d}t > -\tfrac{1}{2}c + \mathsf{K} + \tfrac{1}{2}c = \mathsf{K}$$

for $n > N_0$. Thus, $\Phi_1(u_n) \to \infty$ with $n \to \infty$ and hence $\Phi_1(u) \to \infty$ if (13) is satisfied.

Now, we prove that

$$\lim_{\|u\|_{G_0}\to\infty} \left(\int_0^1 \mathrm{d}t \int_\Omega u a_0(x, tu)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega uf\,\mathrm{d}x\right) = \infty\,.$$

For this purpose we prove that there exists a constant c such that

(15) $$\int_0^{|u|} a_0(x, s)\,\mathrm{d}s - c_3|u| \geqq \tfrac{1}{2}c_1 \frac{u}{2}\, g_0\left(\frac{u}{2}\right) - c$$

where $c_3 = \|f\|_{L_\infty(\Omega)}$. Let us suppose that $u > 0$. Then we obtain from (11), (4)

$$\int_0^u a_0(x, s)\,ds - c_3 u \geqq c_1 \int_0^u g_0(s)\,ds - c_4 u\,.$$

Because of $g_0(u) \in \mathbf{M}_1$ there exists $s_0 > u_1$ such that $g_0(u)$ is increasing, odd for $|u| \geqq s_0$ and satisfies $\lim_{u\to\infty} g_0(u) = \infty$. For $u > 2s_0$ we obtain

$$\int_0^u g_0(s)\,\mathrm{d}s - \frac{c_4}{c_1}u \geqq \int_{u/2}^u g_0(s)\,\mathrm{d}s - c_5 u \geqq \frac{u}{2}\, g_0\left(\frac{u}{2}\right) - c_5 u$$

and hence

$$\int_0^u g_0(s)\,\mathrm{d}s - \frac{c_4}{c_1}u \geqq \frac{1}{2}\frac{u}{2}\, g_0\left(\frac{u}{2}\right) - c_6$$

so that (15) is proved for $u > 0$.

If $u < 0$, then conditions (11), (4) imply

$$-a_0(x, -s) \geqq c_1\, g_0(s) - c_7 \quad \text{for all} \quad s > 0\,.$$

Using the above estimates we deduce

$$\int_0^u a_0(x, s)\, \mathrm{d}s - c_3|u| = \int_0^{-u} -a_0(x, -s)\, \mathrm{d}s - c_3|u| \geqq$$

$$\geqq c_1 \int_0^{-u} g_0(s)\, \mathrm{d}s - c_8|u| \geqq \frac{1}{2}\frac{u}{2}\, g_0\left(\frac{u}{2}\right) - c_9\,.$$

Using (15) we deduce

$$\int_0^1 \mathrm{d}t \int_\Omega u a_0(x, tu)\, \mathrm{d}x - \int_\Omega uf\, \mathrm{d}x \geqq \int_\Omega \int_0^{u(x)} a_0(x, s)\, \mathrm{d}s - c_3 \int_\Omega |u|\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_\Omega \left(\int_0^{u(x)} a_0(x, s)\, \mathrm{d}s - c_3|u| \right) \mathrm{d}x \geqq \tfrac{1}{2}c_1 \int_\Omega \frac{u}{2}\, g_0\left(\frac{u}{2}\right) \mathrm{d}x - c\,.$$

Finally,

$$\int_\Omega \frac{u(x)}{2}\, g_0\left(\frac{u(x)}{2}\right) \mathrm{d}x \to \infty\,, \quad \text{if} \quad \|u\|_{G_0} \to \infty$$

holds (see [1]) and the proof is complete.

In the space $\mathbf{W}_{1,G}$ we introduce the *X-convergence as follows (see [1]):

$$u_n \underset{*\mathsf{X}}{\to} u\,, \quad \text{for} \quad u_n, u \in \mathbf{W}_{1,G}\,,$$

if

$$\int_\Omega u_n v^{(0)}\, \mathrm{d}x \to \int_\Omega u v^{(0)}\, \mathrm{d}x \quad \text{and} \quad \int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\, v^{(i)}\, \mathrm{d}x \to \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v^{(i)}\, \mathrm{d}x$$

with $n \to \infty$, for all $v^{(i)}(x) \in \mathsf{E}_{P_i}(\Omega)$ and all $i = 0, 1, 2, \ldots, N$. $\mathsf{P}_i(v)$ is the conjugate function to $\mathsf{G}_i(u)$.

Lemma 3. *Let us suppose* (3), (7) *and* (9). *Then, the functional* $\Phi_1(u)$ *is lower semicontinuous with respect to the* *X*-convergence and it is bounded from below and from above on bounded sets of* $u_0 + {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$.

Proof. Suppose $\{u_n\}$, $u \in u_0 + {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$ and $u_n \underset{*\mathsf{X}}{\to} u$ with $n \to \infty$. From (9) we deduce

$$\Phi_1(u_n) - \Phi_1(u) \geqq \mathrm{D}\Phi_1(u, u_n - u)\,.$$

With regard to the *X-convergence and to $g_i(u) \in \boldsymbol{M}_3$ for $i = 1, 2, \ldots, N$ we conclude that $\partial u_n/\partial x_i \to \partial u/\partial x_i$ with $n \to \infty$ in $\mathsf{L}^*_{G_i}(\Omega)$ (the weak convergence in the space

$L^*_{G_i}(\Omega)$). On the other hand, from [1] (Lemma 1, § 2) and with respect to (3) we conclude

$$a_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \in L^*_{P_i} \equiv (L^*_{G_i})'$$

(the dual space to $L^*_{G_i}$), $i = 1, 2, \ldots, N$. Thus,

$$\lim_{n\to\infty} D\Phi_1(u, u_n - u) = 0 \quad \text{and hence} \quad \liminf_{n\to\infty} \Phi_1(u_n) \geqq \Phi_1(u)\,.$$

The space ${}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$ is closed with respect to the *X-convergence (see [1], Lemma 1, § 3) and hence also $u_0 + {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$ is closed with respect to the *X-convergence. Further, from every bounded sequence from $\mathbf{W}_{1,G}$ we can choose a subsequence convergent with respect to the *X-convergence to some element from $\mathbf{W}_{1,G}$ (see [1], Lemma 1, § 3).

Now, let us assume that $\Phi_1(u_n) \to -\infty$ for some bounded sequence $\{u_n\}$ in $u_0 + {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$. Then, there exist $u \in u_0 + {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$ and a subsequence $\{u_{n_k}\}$ such that $u_{n_k} \underset{*X}{\to} u$. Because of the lower semicontinuity, $\Phi_1(u) = -\infty$, holds. On the other hand, $\Phi_1(u)$ is well-defined on $u_0 + {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$ (see [1], Lemma 1 and Lemma 2, § 2) which is a contradiction. Regarding the Hölder inequality we deduce from [1] (Lemma 1, § 2) that $\Phi_1(u)$ is bounded from above on bounded sets.

Theorem 1. *Let us suppose* (2), (3), (4), (7), (9), (10) *and* (11). *Then, the functional* $\Phi(u)$ *attains its minimum on the set* $u_0 + {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$.

Proof. Evidently, the functional from (15) is bounded from below on $L^*_{G_0}(\Omega)$ $(G_0(u) = u\, g_0(u))$ and with regard to Lemma 2 also $\Phi(u)$ is bounded from below on the set $u_0 + {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$. Let us consider a minimizing sequence $\{u_n\} \in u_0 + {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$. This sequence is bounded in the norm of the space $\mathbf{W}_{1,G}$, because of Lemma 2. There exist a subsequence $\{u_{n_k}\}$ and $u \in u_0 + {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$ such that $u_{n_k} \underset{*X}{\to} u$, if $k \to \infty$. Since $\mathbf{W}_{1,G} \subset \mathbf{W}^1_1(\Omega)$ (algebraically and topologically), we conclude by means of Theorems on imbeddings that there exists a subsequence $\{z_n\}$ from $\{u_{n_k}\}$ such that $z_n \to u$ in the norm of the space $L_1(\Omega)$ and, moreover, $z_n(x) \to u(x)$ almost everywhere in Ω, with $n \to \infty$. There exists a constant c such that $\Phi(z_n) \leqq c$. $\Phi_1(v)$ and $\int_\Omega vf\,dx$ are bounded from below and from above on bounded subsets of $\mathbf{W}_{1,G}$-see Lemma 2 and [1] (Lemma 1, 2 § 2) so that the functional $\Phi_2(v)$ from (12) is bounded on the sequence $\{z_n\}$. As a consequence of Fatou's lemma we obtain

$$\int_0^1 dt \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} z_n a_0(x, tz_n)\,dx \leqq \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 dt \int_\Omega z_n a_0(x, tz_n)\,dx\,.$$

Finally, Lemma 2 implies:

$$\Phi(u) \leqq \liminf_{n\to\infty} \Phi_1(z_n) + \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 dt \int_\Omega z_n a_0(x, tz_n)\,dx - \lim_{n\to\infty} \int_\Omega z_n f\,dx \leqq \liminf_{n\to\infty} \Phi(z_n)\,.$$

Thus, $\Phi(v)$ attains its minimum on the set $u_0 + {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$ at a point u.

In the following theorem we shall prove that every point of the minimum of $\Phi(u)$ is from $L_\infty(\Omega)$. To that end we shall suppose additionally

$$\sum_{i=1}^{N} p_i a_i(x, p) \geqq 0 \quad \text{for all} \quad p\,. \tag{16}$$

Theorem 2. *Let the assumptions of Theorem* 1 *be fulfilled and in addition to it let us suppose* (6) *and* (16). *Then, every point of the minimum of* $\Phi(u)$ *is from* $L_\infty(\Omega)$.

Proof. With regard to Theorem 1, we can suppose that $\Phi(v)$ attains its minimum at a point $u \in u_0 + {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$. We prove the theorem by contradiction. Suppose that u is not from $L_\infty(\Omega)$. Let us consider an increasing sequence $\{C_n\}$, $C_1 > \|u_0\|_{L_\infty(\partial\Omega)}$, with $C_n \to \infty$ for $n \to \infty$. Further, let us consider the sequence $u(x)]^{C_n}$. In accordance with Lemma 1, $u]^{C_n} \in u_0 + {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$. Using the notation from Lemma 1, we get

$$\left[\frac{\partial u]^{C_n}}{\partial x_i}\right] = \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right], \quad \text{or} \quad \left[\frac{\partial u]^{C_n}}{\partial x_i}\right] = 0$$

almost everywhere in Ω, for $i = 1, 2, \ldots, N$.

Let us denote

$$K_{C_n} \equiv \{x \in \Omega;\ |u(x)| > C_n\}\,.$$

From (16) we deduce

$$\Phi_1(u]^{C_n}) = \int_0^1 \mathrm{d}t \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u]^{C_n}}{\partial x_i}\, a_i\left(x, t\,\frac{\partial u]^{C_n}}{\partial x}\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \mathrm{d}t \int_{\Omega - K_{C_n}} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, a_i\left(x, t\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) \mathrm{d}x \leqq \Phi_1(u)\,.$$

Now, it suffices to prove that there exists an N_0 such that

$$\Phi_2(u]^{C_n}) - \int_\Omega u]^{C_n} f\,\mathrm{d}x < \Phi_2(u) - \int_\Omega u f\,\mathrm{d}x \tag{17}$$

holds for all $n \geqq N_0$.

Using the mean value theorem for the integral we deduce

$$\Phi_2(u) - \Phi_2(u]^{C_n}) - \int_\Omega (u - u]^{C_n})\, f\,\mathrm{d}x \geqq \tag{18}$$
$$\geqq \int_\Omega \int_{u]^{C_n}}^{u(x)} a_0(x, s)\,\mathrm{d}s - c\int_\Omega |u - u]^{C_n}|\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_\Omega (u - u]^{C_n})\, a_0(x, u]^{C_n} + \vartheta(x)\,(u - u]^{C_n}))\,\mathrm{d}x - c\int_\Omega |u - u]^{C_n}|\,\mathrm{d}x\,.$$

The function $\vartheta(x)$ satisfying $0 \leqq \vartheta(x) \leqq 1$ can be determined in such a way that it is measurable — see [7] (footnote at the lemma 5,1).

Condition (11) implies that

$$\operatorname{sgn}(u - u]^{C_n}) = \operatorname{sgn} a_0(x, u]^{C_n} + \vartheta(x)(u - u]^{C_n}))$$

for sufficiently large n and

$$|a_0(x, u]^{C_n} + \vartheta(x)(u - u]^{C_n}))| \to \infty \quad \text{with} \quad n \to \infty .$$

From this and from (18) we deduce (17). Thus, for sufficiently large n we obtain

$$\Phi(u]_{C_n}) < \Phi(u)$$

which gives a contradiction with the minimum property of u. Hence the proof is complete.

Theorem 3. *Let the assumptions of Theorem 2 be fulfilled. Then, there exists a bounded weak solution of the boundary value problem* (1), (5)

Proof. Theorem 2 guarantees the existence of the minimum at a point $u \in u_0 + {}^\circ\mathbf{W}_{1,G} \cap \mathsf{L}_\infty(\Omega)$. We shall show that this minimum is the weak solution. Let us take $v \in \mathscr{D}(\Omega)$ ($\mathscr{D}(\Omega)$ is the set of all functions which have all the derivatives in Ω and possess a compact support in Ω.

$\Phi(u + tv)$ is a continuous function in t and has the derivative at the point $t = 0$. As $u + tv \in u_0 + {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$ and u is a point of the minimum,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \Phi(u + tv)\big|_{t=0} = 0$$

must hold. This means that

$$\text{(19)} \qquad \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_i}\, a_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \mathrm{d}x + \int_\Omega v a_0(x, u)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega v f\, \mathrm{d}x$$

for all $v \in \mathscr{D}(\Omega)$. But $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = {}^\circ\mathbf{W}_{1,G} \cap \mathsf{E}_{G_0}$, where the closure is with respect to the norm of the space $\mathbf{W}_{1,G}$ (see [1], [2]). Since $g_0(u)$ is bounded, $g_0(u) \in E_{P_0} \subset L^*_{P_0}$ ($P_0(v)$ is conjugate to $G_0(u)$). Further,

$$a_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \in \mathsf{L}^*_{P_i} \equiv (\mathsf{L}^*_{G_i})'$$

($P_i(v)$ being conjugate to $G_i(v)$).

Thus, we obtain (19) for $v \in {}^\circ\mathbf{W}_{1,G} \cap \mathsf{E}_{G_0}$ by a limiting process (see Hölder's inequality). Now, let us take $v \in {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$. Let us consider the sequence $v]^{C_n}$ (the notation is that from Theorem 2). With regard to Lemma 1, $v]^{C_n} \in {}^\circ\mathbf{W}_{1,G} \cap \mathsf{E}_{G_0}$. It is evident from the definition of the *X-convergence that $v]^{C_n} \underset{*X}{\to} v$. As $a_i(x, \partial u/\partial x) \in \mathsf{E}_{p_i}$ and $g_0(u) \in \mathsf{E}_{p_0}$, we obtain (19) for $v \in {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}$ by a limiting process. It means that u is a weak solution.

In the sequel we replace condition (16) by other conditions. Let us suppose the existence of $\partial a_i(x, p)/\partial x_i$ and

$$\frac{\partial a_i(x, 0)}{\partial x_i} \in \mathsf{L}_\infty(\Omega) \quad \text{for all} \quad i = 1, 2, \ldots, N\,. \tag{20}$$

Theorem 4. *Let us suppose* (2), (3), (4), (6), (7), (9), (10), (11) *and* (20). *Then there exists a bounded weak solution of the boundary value problem* (1), (5).

Proof. Let us consider $a'_i(x, p) = a_i(x, p) - a_i(x, 0)$, $a'_i(x, p)$ satisfying all the assumptions of Theorem 3. Really, condition (9) implies (16). With respect to (20) and Theorem 3, there exists a bounded weak solution of the equation

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a'_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) + a_0(x, u) = f + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a_i(x, 0)}{\partial x_i}\,,$$

i.e.,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} a'_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \mathrm{d}x + \int_\Omega v a_0(x, u)\, \mathrm{d}x = \tag{21}$$

$$= \int_\Omega \left(f + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a_i(x, 0)}{\partial x_i}\right) v\, \mathrm{d}x\,, \quad \text{for all} \quad v \in {}^\circ\mathbf{W}_{1,G}\,.$$

Using Green's theorem, we obtain

$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a_i(x, 0)}{\partial x_i} v\, \mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} a_i(x, 0) \frac{\partial v}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x$$

and then the identity (21) implies the required result.

We give now conditions for the uniqueness of the weak solution.

Assertion 1. *Let us suppose that the assumptions of Theorem* 3, *or Theorem* 4, *are fufilled. Then, there exists a unique weak solution of the problem* (1), (5), *if* (*i*), *or* (*ii*), *is satisfied*:

(i) $$(s_1 - s_2)\left[a_0(x, s_1) - a_0(x, s_2)\right] > 0 \quad \text{for} \quad s_1 \neq s_2\,.$$

(ii) *In condition* (9), *the equality holds only when* $p \equiv q$; *and further* $(s_1 - s_2)\,.$
$.\,[a_0(x, s_1) - a_0(x, s_2)] \geqq 0$.

Proof. If $u_1 \neq u_2$ were two solutions of (1), (5), then

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial x_i} \left[a_i\left(x, \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) - a_i\left(x, \frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\right] \mathrm{d}x +$$

$$+ \int_\Omega (u_1 - u_2)\left[a_0(x, u_1) - a_0(x, u_2)\right] \mathrm{d}x = 0$$

which yields a contradiction in case (i), as well as in case (ii).

Now, we present some consequences of Theorem 3, or Theorem 4, considering the known results about the regularity of the bounded weak solution – see [6], [2].

We shall suppose more special conditions instead of (3), (10)

$$\sum_{i=1}^N p_i a_i(x, p) \geqq c_1 |p|^m - c \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^N |a_i(x, p)| \left(1 + |p|\right) \leqq c_2 \left(1 + |p|\right)^m, \quad \text{where} \quad m > 1\,. \tag{23}$$

$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ is the space of the Hölder functions with the norm

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \max_{x\in\bar{\Omega}} |u(x)| + \sup_{x,y\in\bar{\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}\,.$$

We shall suppose that the boundary value condition is given by the function

$$u_0(x) \in \mathbf{W}_m^1(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \quad \text{for some} \quad 0 < \alpha < 1\,. \tag{24}$$

Assertion 2. *Let the assumptions of Theorem* 3, *or Theorem* 4 *with* (24) *be fulfilled. Let us suppose* (22), (23) *instead of* (3), (10). *Then, there exists* β, $0 < \beta \leqq \alpha$ *such that the weak solution is from* $\mathbf{W}_m^1 \cap C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$.

This assertion is a consequence of [6] (Theorem 1.1, Chap. 4) and Theorem 3, or Theorem 4.

Now, let us consider the equation

$$-\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0(x, u) = f(x)\,. \tag{1'}$$

Let us suppose

$$a_{ij}(x) \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \tag{25}$$

$$f(x) \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})\,. \tag{26}$$

$C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ being the set of all functions the first partial derivatives of which are from $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Further, let us suppose

(27) $$a_0(x, s) \in C^1(\bar{\Omega} \times \langle -K, K \rangle) \quad \text{for each} \quad K > 0\,.$$

Assertion 3. *If the conditions of Theorem* 3, *or Theorem* 4 *are fulfilled and moreover if* (27), (24), (25), (26), (i), *or* (ii), *are satisfied, then there exists a classical solution of the problem* (1′), (5) *from* $C^{2,\gamma}(\bar{\Omega})$, $0 < \gamma \leqq \alpha$.

With regard to Assertion 2, there exists a weak solution $u \in \mathbf{W}_2^1 \cap C^{0,\beta}$ of (1′), (5). Because of (27), $a_0(x, u) \in C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$. Then the assertion 3 is a consequence of Schauder's theorem – see [6] (Theorem 1.1, Chap. 3).

Examples.

1 $$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[l_i(x)\, g_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right] + a_0(x)\, g_0(u) = f$$

where $l_i(x) \geqq c > 0$ for $i = 1, 2, \ldots, N$ and $g_i(u) \in \mathbf{M}_3$ for $i = 1, 2, \ldots, N$, $g_0(u) \in \mathbf{M}_1$.

2 $$-\Delta u + a_0(x, u) = f$$

particularly,

$$-\Delta u + a_0(x)\, u \exp u^2 = f\,.$$

Bibliography

[1] *J. Kačur:* On the existence of the weak solution for non-linear partial differential equations of elliptic type. Comm. Math. Univ. Carolinae *11*, 1 (1970), 137–181.

[2] *J. Nečas:* Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Prague, 1967.

[3] *M. A. Красносельский, Й. Б. Рутицкий:* Выпуклые функции и пространства Орлича. Москва 1965.

[4] *M. M. Вайнберг:* Вариционные методы исследования нелинейных операторов. Москва, 1965

[5] *T. K. Donaldson, Neil S. Trudinger:* Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems. Macquarie University, School of Mathematics and Physics, February, 1970.

[6] *O. A. Ladyzenskaya,* and *Ural'tseva:* Linear and quasi-linear differential equations of elliptic type. Publishing House "Science", Moskow, 1964 (Russian).

[7] *M. A. Красносельский:* Топологические методы в реории нелинейных интегральных уровнений. Москва, 1956.

Author's address: 816 31 Bratislava, Mlynská dolina (Prírodovedecká fakulta UK).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ON SOME GRAPH-THEORETICAL PROBLEMS OF V. G. VIZING

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Received January 28, 1971)

In [2] V. G. VIZING suggests a number of unsolved graph-theoretical problems. Here we shall solve partially two of them.

I.

The first problem we shall investigate is the following one:

Which is the maximal number of edges that a graph with n vertices and with a given Hadwiger number can have?

Here this problem is solved for Hadwiger number 3.

We say that a graph G can be contracted onto a graph H if and only if the graph H can be obtained from G by a finite number of the following operations:

(a) deleting an edge;

(b) deleting an isolated vertex;

(c) identifying two neighbouring vertices, i.e. replacing of two neighbouring vertices x and y by a new vertex neighbouring to exactly all vertices which were neighbouring to at least one of the vertices x and y.

We consider only finite undirected graphs without loops and multiple edges.

The Hadwiger number $\eta(G)$ of a graph G is the maximal number of vertices of a complete graph onto which G can be contracted.

By $\lambda_k(n)$ for any positive integer n we shall denote the maximal number of edges of a graph of Hadwiger number k with n vertices.

The graphs with Hadwiger number 3 are graphs which can be contracted onto a triangle, but not onto a complete graph with four vertices.

If G is a graph, C a circuit in G, then a diagonal arc of C in G is an arc joining two vertices of C whose internal vertices do not belong to C. Two vertex-disjoint diagonal arcs P_1 and P_2 of C will be called topologically crossing if and only if the circuit C and the arcs P_1 and P_2 cannot be drawn in the plane so that the arcs P_1 and P_2 might be drawn in the interior of the drawing of C without crossing each other. (This term is defined only for the use of this paper.)

The following lemma is evident.

Lemma 1. *A graph G has Hadwiger number not exceeding 3 if and only if no circuit C in G has two vertex-disjoint topologically crossing diagonal arcs.*

We shall prove another lemma.

Lemma 2. *For every positive integer $n \geqq 2$ any graph of Hadwiger number 3 with n vertices and maximal possible number of edges is connected and without articulations.*

Proof. Assume that such a graph G is disconnected. Then we join two vertices of different connected components of G by an edge e; the graph thus obtained will be denoted by G'. The edge e is a bridge in G', therefore it belongs neither to a circuit, nor to a diagonal arc of some circuit in G'. This means that all circuits and their diagonal arcs in G' are those of G and G' has also Hadwiger number 3, which is a contradiction with the maximality of G.

Now assume that G is connected and contains an articulation a. Let L_1, L_2 be two lobes whose common vertex is a. Let u_1 and u_2 be vertices of L_1 and L_2 respectively joined by an edge with a. Let G'' be a graph obtained from G by adjoining an edge h joining u_1 and u_2. Let C be a circuit in L_1, let P be a diagonal arc of C in G'' not contained in G and joining the vertices v_1 and v_2 of C. Then P consists of an arc P_1 from v_1 (or v_2) to a, an arc P_2 from a to u_2, the edge h and an arc P_3 from u_1 to v_2 (or v_1). Then there exists an arc P' in G joining v_1 and v_2 and consisting of the path P_1, the edge au_1 and the path P_3. This is either a diagonal arc of C, or an edge of C (if the vertices v_1, v_2 are identical with u_1, a). If some other diagonal arc P'' of c vertex-disjoint with P forms together with P a pair of topologically crossing diagonal arcs of C in G'', then P'' is in L_1, because it contains neither a nor h. This means that P'' forms a pair of topologically crossing diagonal arcs of C also with P' and this pair is also in G, which is a contradiction. Analogously we can consider any circuit in L_2. A circuit in G which is neither in L_1 nor in L_2 evidently cannot have a diagonal arc in G'' not contained in G. We have proved that by adjoining the edge h no pair of topologically crossing diagonal arcs of any circuit of G is obtained. Now consider a circuit C' in G'' not contained in G. Evidently it consists of an arc R_1 from a to u_1 in L_1, the edge h and an arc R_2 from u_2 to a in L_2. Any diagonal arc of C' joins either two vertices of R_1, or two vertices of R_2. As L_1 is a lobe, there exists an arc R_1' joining a and u_1 in L_1 and having no vertex in common with R_1 except for a and u_1. The arcs R_1, R_1' form a circuit C_1 in L_1; any diagonal arc of C joining two vertices of R_1 is also a diagonal arc of C_1 and any two such arcs which would be topologically crossing in G'' would be topologically crossing also in G. Analogously for R_2. Finally, a diagonal arc of C joining two vertices of R_1 and a diagonal arc of C joining two vertices of R_2 cannot evidently be topologically crossing. Therefore G'' has also Hadwiger number 3, which is a contradiction with the maximality of G.

Lemma 3. *Let G be a graph of Hadwiger number 3 with n vertices. Let u be its vertex and G_0 the graph obtained from G by deleting u. Let G_0 be a connected graph with p lobes. Then u is joined in G at most with $p + 1$ vertices.*

Proof. First assume that three vertices of a lobe L of G_0 are joined with u in G. Then there exists a circuit in this lobe containing all of them; it can be contracted onto a triangle, whose vertices are these three vertices. This triangle together with u and the edges joining u with its vertices form a complete graph with four vertices and $\eta(G_0) \geqq 4$, which is a contradiction. Therefore u can be joined at most with two vertices of the same lobe. Now let u be joined with two vertices v_1, v_2 of a lobe L, none of which is a cut-vertex. If there exists at least on vertex v_3 in G_0 which is joined with u in G and different from v_1 and v_2, then let a be the cut-vertex belonging to L and separating v_3 from v_1 and v_2. In L there exists a circuit containing v_1, v_2 and a. The subgraph of G consisting of this circuit, of the edges uv_1, uv_2, uv_3 and of an arc joining a and v_3 in G_0 (none of whose edges is in L) can be contracted onto a complete graph with four vertices. Therefore if G_0 has cut-vertices, at most three vertices of G_0 are joined with u in G and two of them belong to one lobe, not being cut-vertices, the graph G has not the assumed property. We shall continue by induction with respect to p. For $p = 1$ the assertion holds, because G_0 consists of one lobe and we have proved that no three vertices of one lobe can be joined with u in G. Let $r \geqq 2$, let the assertion hold for $p < r$. If we delete one lobe L except for the cut vertices in it from G_0 so that the resulting graph G_1 is connected (this is always possible), then G_1 has $r - 1$ lobes and u is joined in G with at most r vertices of G_1. Now at most one vertex of L which is no cut-vertex may be joined with u. The lobe L contains only one cut-vertex which is in G_1 (because it is a common vertex of L and some other lobe), thus at most $r + 1$ vertices of G_0 can be joined in G with u.

Now we shall prove

Theorem 1. *Let $\lambda_k(n)$ be the maximal number of edges of a graph G of Hadwiger number k with n vertices. Then*

$$\lambda_3(n) = 2n - 3$$

for any positive integer $n \geqq 2$.

Proof. We shall prove the assertion by induction. The graphs with two or three vertices evidently cannot be contracted onto a complete graph with four vertices. The maximal number of edges of a graph with $n = 2$ vertices is $2n - 3 = 1$, the maximal number of edges of a graph with $n = 3$ is $2n - 3 = 3$. For $n = 4$ only the complete graph with 4 vertices has Hadwiger number 4, no other can be contracted onto it.

Thus the graph of Hadwiger number 3 with four vertices and the maximal possible number of edges is the graph obtained from the complete graph with four vertices by deleting one edge. Now let $n = r \geqq 5$ and let the assertion hold for $2 \leqq n < k$. Let G be a graph with k vertices and $\lambda_3(r)$ edges for which $\eta(G) = 3$. Delete one vertex u from G and denote the obtained graph by G_0. According to Lemma 2 G_0 is connected. According to Lemma 3 the number of vertices of G_0 joined by edges with u in G is at most $p + 1$, where p is the number of lobes of G_0. Let the lobes of G_0 be $L_1, \ldots, L_p$, let l_i be the number of vertices of L_i for $i = 1, \ldots, p$. For the number $r - 1$ of vertices of G_0 we have

$$r - 1 = \sum_{i=1}^{p} l_i - p + 1 . \tag{1}$$

Any lobe of G_0 is a graph with Hadwiger number not exceeding 3 (because this property is evidently hereditary). According to the induction assumption the number of edges of L_i does not exceed $2l_i - 3$ for $i = 1, \ldots, p$. For the number m_0 of edges of G_0 we have

$$m_0 \leqq \sum_{i=1}^{p} (2l_i - 3) = 2\sum_{i=1}^{p} l_i - 3p .$$

As u is joined with not more than $p + 1$ vertices of G_0, for the number m of edges of G we have

$$m \leqq m_0 + p + 1 \leqq 2\sum_{i=1}^{p} l_i - 2p + 1 .$$

From (1) we have

$$\sum_{i=1}^{p} l_i = r + p - 2 ,$$

therefore

$$m \leqq 2r - 3 .$$

We have proved that $2n - 3$ is the upper bound for the number of edges of a graph with Hadwiger number 3 with n vertices. It remains to prove that for every $n \geqq 2$ this bound is attained. For any given $n \geqq 2$ we construct the "fan graph" F_n as follows. The vertices of F_n are $v_1, \ldots, v_n$ and its edges are $v_i v_{i+1}$ for $i = 1, \ldots, n - 1$ and $v_1 v_j$ for $j = 3, \ldots, n$. If $n > 2$, a contraction of any edge leads either to F_{n-1}, or to the graph with two lobes isomorphic to F_r with $2 \leqq r < n$. If $n = 2$, then F_2 is a graph consisting of two vertices and one edge. Thus by induction one can prove that F_n cannot be contracted onto a complete graph with four vertices, q.e.d.

In the end we shall consider also $\lambda_1(n)$ and $\lambda_2(n)$. Any graph containing at least one edge can be contracted onto a complete graph with two vertices. Thus $\eta(G) = 1$ if and only if G contains no edges and

$$\lambda_1(n) = 0 .$$

Any graph containing at least one circuit can be contracted onto a complete graph with three vertices. Thus $\eta(G) = 2$ if and only if G is a forest with at least in edge and

$$\lambda_2(n) = n - 1 .$$

Comparing $\lambda_1(n)$, $\lambda_2(n)$, $\lambda_3(n)$ leads us to a conjecture.

Conjecture. For the maximal number $\lambda_k(n)$ of edges of a graph of Hadwiger number k with n vertices we have

$$\lambda_k(n) = (k - 1)\, n - \binom{k}{2}$$

for any two positive integers $k, n \geqq 2$.

II.

The other problem which will be studied here is the following one:

Which is the maximal number of edges of a connected undirected graph with n vertices, none of whose spanning trees has more than k terminal edges?

We shall denote this number by $\tau(n, k)$. We shall give the solution for some special cases, namely for $k = 2$, $k = 3$, $k = n - 3$, $k = n - 2$, $k = n - 1$. We study graphs without loops and multiple edges.

Evidently we can define neither $\tau(n, 1)$ nor $\tau(n, n)$, because a spanning tree of a graph with n vertices has at least two and at most $n - 1$ terminal edges.

Before investigating concrete values of k, we shall introduce an auxiliary concept.

If G_0 is a connected subgraph of G, then the degree of G_0 in G is the number of vertices of G not belonging to G_0 which are joined with a vertex of G_0. If G_0 consists only of one vertex, its degree is equal to the degree of this vertex.

Now we shall prove a lemma.

Lemma 4. *Let G be a connected undirected graph. Then the maximal number of terminal edges of a spanning tree of G is equal to the maximal degree of a connected subgraph of G.*

Proof. Let G_0 be a connected subgraph of G with the maximal degree k. Let $u_1, \ldots, u_k$ be the vertices not belonging to G_0 and joined by edges with vertices of G_0. Choose a spanning tree T_0 of G_0. Then for any $i = 1, \ldots, k$ choose an edge e_i joining u_i with a vertex of G_0. The graph T_0' consisting of all vertices of G_0, vertices $u_1, \ldots, u_k$, all edges of G_0 and all edges $e_1, \ldots, e_k$ is a tree in which $e_1, \ldots, e_k$ are terminal edges. This tree T_0' is a subtree of a spanning tree T of G which has also at least k terminal edges. (Evidently the number of terminal edges of a subtree of a tree T is less than or equal to the number of terminal edges of T.) On the other hand, let l

be the maximal number of terminal edges of a spanning tree of G. Let T_1 be a spanning tree of G with l terminal edges. Let G_1 be the subgraph of G generated by all vertices which are not terminal in T_1. Then G_0 has the degree l.

Now we shall prove theorems on the numbers $\tau(n, k)$.

Theorem 2. $\tau(n, 2) = n$ *for every* $n \geqq 3$.

This assertion is evident; we leave the proof to the reader.

Theorem 3. $\tau(n, 3) = n + 2$ *for every* $n \geqq 4$.

Proof. Let G be a graph with n vertices $(n \geqq 4)$ such that none of its spanning trees has more than three vertices. At first assume that G has a Hamiltonian circuit C consisting of the vertices $u_1, \ldots, u_n$ and the edges $u_i u_{i+1}$ for $i = 1, \ldots, n - 1$ and $u_n u_1$. Assume that there exists an edge $u_i u_j$ where $|i - j| \geqq 3$ (the difference is taken modulo n). Without any loss of generality let $i = 1$; then $j \neq 2$, $j \neq 3$, $j \neq n - 1$, $j \neq n$. Let T_0 be a subgraph of G consisting of the vertices $u_1, u_2, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, u_n$ and of the edges $u_1 u_2, u_1 u_n, u_1 u_j, u_{j-1} u_j, u_j u_{j+1}$; it is a tree in which all edges except $u_1 u_j$ are terminal, therefore with four terminal edges. The tree T_0 is a subtree of some spanning tree T of G which has at least four vertices, which is a contradiction. Therefore any edge not belonging to C is $u_i u_{i+2}$ for some i, $1 \leqq i \leqq n$ (the sum $i + 2$ is taken modulo n). Let there exist an edge $u_1 u_3$ (without any loss of generality) and some other edge $u_j u_{j+2}$ (where $j \neq 1$). Evidently $j \neq 3$, $j \neq n - 1$, because otherwise u_j or u_{j+2} would have the degree at least four. Assume $4 \leqq j \leqq n - 2$. The there exists a subgraph T_1 of G consisting of the vertices $u_1, \ldots, u_{j+2}$ and of the edges $u_1 u_3$, $u_j u_{j+2}$ and $u_i u_{i+1}$ for $i = 2, \ldots, j$. It is a tree with four terminal edges $u_1 u_3, u_2 u_3, u_j u_{j+1}, u_j u_{j+2}$ and we obtain a similar contradiction as in the preceding case. Therefore an edge of G not belonging to C and different from $u_1 u_3$ can be only $u_2 u_4$ or $u_n u_2$; they cannot exist both, because u_2 would have the degree at least four. Therefore G has at most $n + 2$ edges. Now assume that G has no Hamiltonian circuit. Let C_0 be the circuit of the maximal length l in G, let its vertices be $v_1, \ldots, v_l$ and its edges $v_i v_{i+1}$ for $i = 1, \ldots, l - 1$ and $v_l v_1$. Let there exist two vertices w_1, w_2 not belonging to C and joined by edges with vertices of C. If the length of C is at least 5, we can choose an edge e of C such that w_1 and w_2 are joined with the vertices v_i, v_j which are consequently not incident with e. The tree whose edges are all edges of C except e and $v_i w_1$, $v_j w_2$ (we may have $v_i = v_j$) is a subtree of G with four terminal edges. Thus if the length of C is at least 5, there may exist only one vertex w not belonging to C and joined with a vertex of C. For the edges joining two vertices of C and not belonging to C the same holds as in the case of a Hamiltonian circuit. So assume that there are two such edges; let one of them (without any loss of generality) be $v_1 v_3$ and the other $v_l v_2$. There exist two subtrees of G with three terminal edges not containing w, namely T_1 with the edges $v_i v_{i+1}$ for $i = 2, \ldots, l - 1$ and $v_1 v_3$ and T_2

with the edges v_iv_{i+1} for $i = 3, \ldots, l - 1$, v_lv_1, v_lv_2. If w is joined with some v_i, where $4 \leqq i \leqq l - 1$, then by adding the vertex w and the edge u_iw to T_1 or to T_2 we obtain a tree with four terminal edges. If w is joined with v_3 or v_l, then by adding w and v_3w or v_lw to T_1 or T_2 respectively we obtain also a tree with four terminal edges. If w is joined with v_1 or v_2, then v_1 or v_2 has the degree at least four. We have proved that if there are two edges joining vertices of C and not belonging to C (for C of the length at least 5), then C must be a Hamiltonian circuit of G. Now assume that there exists one edge joining two vertices of C and not belonging to C; analogously to the case when C is Hamiltonian this edge is (without any loss of generality) v_1v_3. Then there exist two subtrees of G not containing vertices outside of C with three terminal edges, namely T_1 with the edges v_iv_{i+1} for $i = 4, \ldots, l - 1$, v_lv_1, v_1v_2, v_1v_3 and T_2 with the edges v_iv_{i+1} for $i = 2, \ldots, l - 1$, v_1v_3. If w is joined with v_i for $4 \leqq i \leqq$ $\leqq l - 1$, then by adding w and v_iw to T_1 or T_2 we obtain a tree with four terminal edges. If w is joined with v_1 or v_3, then by adding w and v_1w or v_3w to T_1 or T_2 respectively we obtain also a tree with four terminal edges. Thus w can be joined only with u_2. If there are two vertices x_1, x_2 joined with w and not belonging to C, then by adding the edges v_2w, wx_1, wx_2 to T_1 or T_2 we obtain again a tree with four terminal edges. Thus w can be joined only with one vertex w_1 not belonging to C; analogously w_1 can be joined only with one vertex w_2 not belonging to C and different from w etc.; therefore the subgraph of G generated by v_2 and all vertices not belonging to C is an arc. We have proved that the subgraph generated by the vertices of C has at most $l + 2$ edges, if C is Hamiltonian, or at most $l + 1$ edges, if there are some vertices not belonging to C. In the former case C is Hamiltonian and $l = n$, thus $l + 2 = n + 2$. In the latter case the number of vertices not belonging to C is $n - l$ and, as they generate an arc, the number of edges joining vertices not belonging to C is $n - l - 1$ and there is one edge joining a vertex not belonging to C, namely w, with a vertex of C, namely v_2. The total number of edges of G is at most $n + 2$. From the proof it follows that this bound can be always attained. It remains to discuss the case when the length of the longest circuit in G is less than 5. If it is 3, then any circuit of G is a lobe of G, therefore any lobe of G is either a triangle, or a bridge. Assume that two lobes L_1, L_2 of G are triangles. If they have a common vertex, it has the degree at least 4, which is impossible. Otherwise we take an arc joining a vertex v_1 of L_1 with a vertex v_2 of L_2 and having no edge in common with L_1 and L_2. The tree consisting of this arc, of two edges from L_1 incident with v_1 and of two edges of L_2 incident with v_2 has four terminal edges, namely the edges of L_1 and L_2 incident with v_1 or v_2. Therefore G can have at most one lobe which is a triangle, the others being bridges. The cyclomatic number of G is at most 1, thus G has at most n edges. If the length of the longest circuit in G is 4, then any lobe of G is either a bridge or a triangle, or it consists of a system of at least two edge-disjoint arcs of the lengths 1 or 2 joining two vertices a and b. Analogously to the preceding case we can prove that there is at most one lobe which is not a bridge. According to the assumption it cannot be a triangle, thus it is of the last type. The number of paths joining a and b

can be at most three, otherwise a and b would have the degree greater than three. If they are two or three, the cyclomatic number of G is 1 or 2 respectively, and the number of vertices of G is n or $n + 1$, respectively.

Theorem 4. $\tau(n, n - 3) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 5$ *for every* $n \geqq 5$.

Proof. Let G be a graph with n vertices ($n \geqq 5$) such that none of its spanning trees has more than $n - 3$ terminal edges. Investigate the complement $\bar{G}$ of G. The graph $\bar{G}$ has the following properties:

(a) the degree of any vertex of $\bar{G}$ is at least two;
(b) the diameter of $\bar{G}$ is at most two;
(c) the complement G of $\bar{G}$ is connected.

If $\bar{G}$ had not the property (a), there would exist some vertex u of $\bar{G}$ of the degree 0 or 1. This vertex would have the degree $n - 1$ or $n - 2$ in G, therefore the star with the center u would be a subtree of G with more than $n - 3$ terminal edges. If $\bar{G}$ had not the property (b), then there would exist two vertices u_1, u_2 of $\bar{G}$ with the distance greater than two. There would not exist any vertex joined with both u_1 and u_2 and these two vertices also would not be joined together. This means that in G any vertex would be joined at least with one of the vertices u_1, u_2 and there would exist the edge u_1u_2. For any vertex of G different from u_1 and u_2 we choose one edge joining it with u_1 or u_2; these edges together with u_1u_2 would form a spanning tree of G with $n - 2$ terminal edges. The condition (c) follows from the text of the problem, because only connected graphs have spanning trees.

We can construct a graph G_0 satisfying the conditions (a), (b), (c) and having $2n - 5$ edges. This is the graph whose vertex set is $u_1, u_2, v_1, \ldots, v_{n-4}, w_1, w_2$ and whose edges are u_1v_i and u_2v_i for $i = 1, \ldots, n - 4$, and further u_1w_1, w_1w_2, u_2w_2. This graph G_0 contains n vertices and $2n-5$ edges. We shall prove that there does not exist any graph with less than $2n - 5$ edges satisfying the conditions (a), (b), (c). Assume that there exist a graph G_1 with n vertices and less than $2n - 5$ edges ($n \geqq 5$) satisfying the conditions. At least one of the vertices of G_1 must have the degree less than four; in the opposite case G_1 would contain at least $2n$ edges. Thus also the vertex connectivity degree of G_1 is at most 3. Let R be a cut set of G_1 with the minimal number of vertices. At first assume that $|R| = 1$, thus $R = \{a\}$, where a is some cut vertex. If u, v are two vertices of G_1 separated by a, then they must be both joined with a, because their distance cannot be greater than two and any arc joining them must contain a. As these vertices were chosen arbitrarily, this implies that a is joined with all other vertices of G_1. Then a is joined with no other vertex in the complement of G_1 and is an isolated vertex; therefore this complement is not connected, which contradicts (c). Assume $|R| = 2$, thus $R = \{a_1, a_2\}$. Let $K_1, \ldots, K_t$ be the connected components of the graph obtained from G_1 by deleting the vertex set R and all edges incident to it. Assume that in K_1 (without any loss of generality) there exists a vertex u_1 joined with a_1 and not with a_2 and a vertex u_2 joined with a_2 and not with a_1. Let v be a vertex of some K_i for $i \neq 1$. It must have the distance at most 2 from both u_1 and u_2, therefore it must be joined with both a_1 and a_2. As v was chosen quite arbitrarily, any vertex of $\bigcup_{i=2}^{l} K_i$ must be joined with both a_1 and a_2. Let m be the total number of vertices of $\bigcup_{i=2}^{l} K_i$; then the number of edges not incident with vertices of K_1 is at least $2m$. The component K_1 contains $n - m - 2$ vertices. It must be connected, thus it contains at least $n - m - 3$ edges. Each vertex of K_1 must be joined with some vertex of R, therefore there are at least $n - m - 2$ edges joining vertices of K_1 with vertices of R. The graph G_1 has then at least $2m + (n - m - 2) + (n - m - 3) = 2n - 5$ edges. Now assume that in K_1 there is a vertex u_1 joined with a_1 and not with a_2, but all vertices of K_1 are joined with a_1. Then in K_i for each $i = 2, \ldots, l$ also all vertices are joined with a_1 and there may also exist in it some vertices joined with a_1 and not with a_2. Let M be the set of vertices of G_1 not belonging to R joined with a_1 and not joined with a_2. Let M_i for $i = 1, \ldots, l$ be the intersection of M with the vertex set of K_i. Consider a connected component of the subgraph of G_1 generated by the set M_i; let p be its number of vertices. As this component C is connected, it contains at least $p - 1$ edges. As any of its vertices is joined with a_1, we have further p edges incident with vertices of this component. This component C is a subgraph of some K_i and evidently a proper subgraph; otherwise no vertex of K_i would be joined with a_2 and a_1 would be a cut vertex separating vertices of K_i from other vertices of G_1. Therefore there exists at least one edge joining a vertex of C with some other vertex of K_i. We have at least $2p$ edges incident with vertices of C and with no other vertices of M. Therefore if $|M| = q$, then there exist $2q$ edges incident with vertices of M (this number was obtained as a sum over all such components C). Any of the vertices not belonging to $M \cup R$ are joined with both a_1 and a_2. As the number of vertices not belonging to $M \cup R$ is $n - q - 2$, we have $2n - 2q - 4$ edges joining these vertices with the vertices of R. Thus G_1 has at least $2q + (2n - 2q - 4) = 2n - 4$ edges. If all vertices not belonging to R are joined with both a_1 and a_2, the graph G_1 has evidently also at least $2n - 4$ edges.

Finally assume that $|R| = 3$, thus $R = \{a_1, a_2, a_3\}$. We shall prove that in each of the components $K_1, \ldots, K_l$, except at most one, either there exists a vertex joined with all vertices of R, or there exist two vertices, each of which is joined with two vertices of R. Assume that K_1 has not this property; i.e. that at most one vertex of K_1 is joined with two vertices of R, any other vertex being joined exactly with one vertex of R. If each vertex of K_1 is joined only with one vertex of R, there must exist three vertices u_1, u_2, u_3 of K_1 so that u_i is joined with a_i for $i = 1, 2, 3$, and with no other vertex of R (otherwise the vertex connectivity degree of G_1 would be less than three). Any vertex of K_i for $i = 2, \ldots, l$ must have the distance at most two from all three vertices u_1, u_2, u_3, therefore it must be joined with all the vertices a_1, a_2, a_3. If there exists a vertex v of K_1 joined with two vertices a_1, a_2 (without any loss of generality) of R and not with a_3 and all other vertices are joined only with one vertex of R each, then there exists a vertex u_3 of K_1 joined with a_3 and with no other vertex of R. Any vertex of K_i $(i = 2, \ldots, l)$ must have the distance from both v and u_3 at most 2, therefore it must be joined with a_3 and one of the vertices a_1, a_2. If this K_i contains only one vertex, it must be joined with all vertices of R, because we have assumed that the vertex connectivity degree of G_1 is 3 and therefore each vertex has the degree at least 3. If K_i contains two different vertices w_1, w_2, any of them must be joined with a_3 and one of the vertices a_1, a_2. Any of the components K_i $(i = 1, \ldots, l)$ must contain at least $k_i - 1$ edges, where k_i is the number of its vertices, and there are at least k_i edges joining its vertices with vertices of R; therefore there are at least $2k_i - 1$ edges incident with vertices of K_i. But if for some K_i this number is exactly $2k_i - 1$, this means that any vertex of K_i is joined exactly with one vertex of R; then any vertex of K_j for $j \neq i$ is joined with all vertices of R. Then the graph G_1 contains at least $3(n - k_i - 3) + 2k_i - 1 = 3n + k_i - 10$ vertices, which is more than $2n - 5$, because $n \geqq 5$. If exactly one vertex of K_i is joined with two vertices of R and any other vertex of K_i is joined only with one vertex of R, then there are at least $2k_i$ edges incident with vertices of K_i and any vertex of K_j for $j \neq i$ must be joined at least with two vertices of R; if such K_j consists only of one vertex, it is joined with all vertices of R, otherwise there exists at least one edge of K_j. Thus there are at least $2k_j + 1$ edges incident with vertices of K_j for $j \neq i$ (k_j is the number of vertices of K_j) and the total number of edges of G_1 is at least $2n - 5$. If in each K_i either there are two vertices joined with two vertices of R, or there is a vertex joined with all vertices of R, then there are $2k_i + 1$ edges incident with vertices of K_i and G_1 has at least $2n - 4$ edges. We have proved that there does not exist any graph satisfying (a), (b), (c) and having less than $2n - 5$ edges. The existence of such a graph with exactly $2n - 5$ edges had been proved before. The graph G with the property that none of its spanning trees has more than $n - 3$ terminal edges and with the maximal possible number of edges is a complement of such a graph. Therefore its number of edges is $\frac{1}{2}n(n - 1) - (2n - 5) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 5$, q.e.d.

Theorem 5. *$\tau(n, n - 2) = \frac{1}{2}n^2 - n$ for n even, $\tau(n, n - 2) = \frac{1}{2}n^2 - n - \frac{1}{2}$ for n odd, $n \geqq 4$.*

Proof. The only tree with n vertices and $n - 1$ terminal edges is a star. A star can be a spanning tree of a graph G if and only if G contains a vertex u joined with all other vertices, i.e. of the degree $n - 1$. Therefore we look for a graph G with n vertices with the maximal number of edges, in which no vertex has the degree $n - 1$. For n even such a graph is a regular graph of the degree $n - 2$; it contains $\frac{1}{2}n^2 - n$ edges. For n odd such a graph does not exist, but there exists a graph, one of whose vertices has the degree $n - 3$ while all others have the degree $n - 2$. This is evidently the required graph and its number of edges is $\frac{1}{2}n^2 - n - \frac{1}{2}$.

Theorem 6. $\tau(n, n - 1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ *for every* $n \geqq 3$.

Proof is easy, it is left to the reader.

Remark. The English terminology of the graph theory used in this paper is that of [1].

References

[1] *O. Ore:* Theory of Graphs. Providence 1962.

[2] *В. Г. Визинг:* Некоторые нерешенные задачи в теории графов. Успехи мат. наук *23* (1968), 117—134.

Author's address: 461 17 Liberec, Studentská 5 (Vysoká škola strojní a textilní).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

DEGENEROVANÁ n-ROZMĚRNÁ CENTRÁLNÍ AXONOMETRIE

VÁCLAV PECINA, Liberec

(Došlo dne 2. dubna 1971)

Budeme se zabývat některými vlastnostmi degenerované centrální axonometrie, zejména pak tím, zda pro degenerovanou axonometrii platí existenční věty obdobné známým existenčním větám centrální axonometrie nedegenerované. Některé základní úvahy týkající se uvedené problematiky jsou provedeny L. DRSEM v práci [1].

Označme E^k k-rozměrný rozšířený eukleidovský prostor a $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ lineární obal lineárních prostorů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Konfiguraci navzájem různých bodů O, A_i, B_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nazveme *n-ramenná, k-rozměrná polyedrická konfigurace* a označíme $K_n^k \equiv \{O, A_i, B_i\}$, jestliže každá trojice O, A_i, B_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ je tvořena kolineárními body, jestliže body O, A_i jsou vlastní a jestliže pro přímky $x_i = OA_i$ platí $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathsf{E}^k$ $(k, n, r$ jsou přirozená čísla, $2 \leqq k \leqq n)$.

Konfiguraci $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i\}$ nazveme *kartézská*, jestliže body B_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jsou nevlastní a soustava vektorů $\overrightarrow{OA_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ je ortonormální.

Konfiguraci bodů O, A_i, B_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nazveme *degenerovaná n-ramenná, k-rozměrná konfigurace* $(k < n)$ a označíme $D_n^k \equiv \{O, A_i, B_i\}$, jestliže $O = A_1 = B_1$ a body O, A_i, B_i $(i = 2, 3, \ldots, n)$ tvoří $(n - 1)$-ramennou, k-rozměrnou polyedrickou konfiguraci.

Analogicky jako v případě nedegenerované centrální axonometrie budeme dále zkoumat, zda lze danou degenerovanou konfiguraci ${}^0D_n^m$ (podrobenou eventuelně nějaké lineární transformaci) uvést do perspektivní polohy s danou polyedrickou konfigurací K_n^n.

Věta 1. *Nechť je dána polyedrická konfigurace $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i\} \subset \mathsf{E}^n$ a degenerovaná konfigurace ${}^0D_n^{n-1} \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\} \subset {}^0\mathsf{E}^{n-1}$ $(n \geqq 3)$. Nechť $S \neq O$ je libovolný bod přímky $x_1 = OA_1$ a ${}^1\mathsf{E}^{n-1} \subset \mathsf{E}^n$ libovolná nadrovina neprocházející bodem S. Pak existuje centrální projekce $\mathscr{P}$ s basí $[S, {}^1\mathsf{E}^{n-1}]$ a projektivní transformace $\mathscr{R} : {}^0\mathsf{E}^{n-1} \to {}^1\mathsf{E}^{n-1}$ tak, že $\mathscr{P}K_n^n = \mathscr{R}\,{}^0D_n^{n-1}$.*

Důkaz. Nechť $\Pi : {}^0\mathsf{E}^{n-1} \to \mathsf{E}^{n-1} = L(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ je projektivní transformace, pro kterou ${}^0A_i \to A_i$, ${}^0B_i \to B_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$; pak je $O = \Pi\,{}^0O$. V každé centrální projekci $\mathscr{P}$ s basí $[S, {}^1E^{n-1}]$, kde $S \in x_1 = OA_1$ je vlastní bod $(S \neq O)$ a ${}^1E^{n-1}$ libovolná vlastní nadrovina $(S \notin {}^1E^{n-1})$, je $\mathscr{P}K_n^n = \mathscr{P}\Pi^0D_n^{n-1}$, tj. $\mathscr{P}K_n^n = \mathscr{R}^0D_n^{n-1}$, kde $\mathscr{R} = \mathscr{P}\Pi : {}^0E^{n-1} \to {}^1E^{n-1}$ je projektivní transformace.

Věta 2. *Nechť je dána polyedrická konfigurace* $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i\} \subset E^n$ *a degenerovaná konfigurace* ${}^0D_n^{n-1} \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\} \subset {}^0E^{n-1}$ $(n \geq 3)$. *Pak existuje centrální projekce* $\mathscr{P}$ *s basí* $[S, {}^1E^{n-1}]$ $(S \in x_1 = OA_1$ *je vlastní bod,* $S \neq O)$ *a afinita* $\mathscr{A} : {}^0E^{n-1} \to {}^1E^{n-1}$ *s libovolným kladným modulem tak, že* $\mathscr{P}K_n^n = \mathscr{A}^0D_n^{n-1}$.

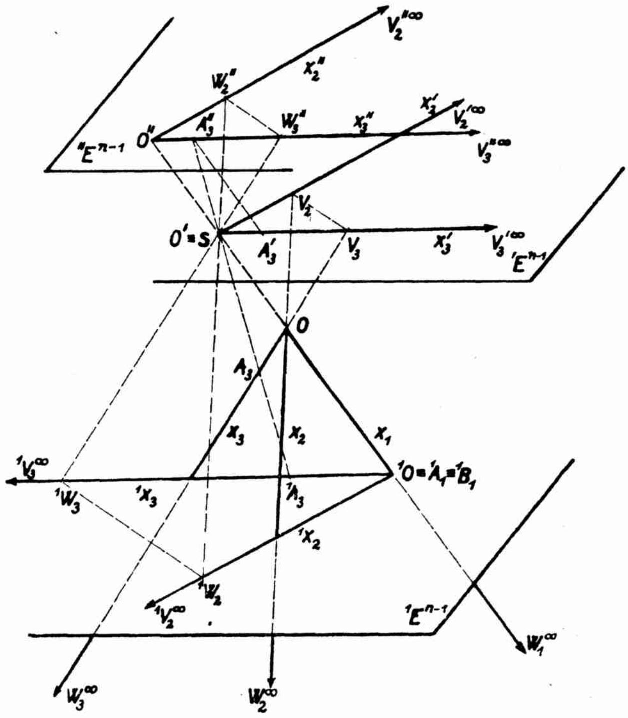
Důkaz. Přiřazením ${}^0O \to O$, ${}^0A_i \to A_i$, ${}^0B_i \to B_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ je stanovena projektivní transformace $\Pi : {}^0E^{n-1} \to E^{n-1} = L(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, kde $x_i = OA_i$. Je-li ${}^0V_i^\infty$ nevlastní bod přímky ${}^0x_i = {}^0O^0A_i\,(i = 2, 3, \ldots, n)$ a $V_i = \Pi^0V_i\,(i = 2, 3, \ldots$ $\ldots, n)$, pak je $L(V_2, V_3, \ldots, V_n) = E^{n-2}$. Zvolíme-li libovolně vlastní bod $S \in x_1 =$ $= OA_1(S \neq O)$, pak v důsledku $S \notin E^{n-2}$ je $L(S, E^{n-2}) = {}'E^{n-1}$. V centrální projekci $\mathscr{P}$ s basí $[S, {}^1E^{n-1}]$, kde ${}^1E^{n-1}$ je libovolná nadrovina rovnoběžná s nadrovinou ${}'E^{n-1}(S \notin {}^1E^{n-1})$, je (podle věty 1) $\mathscr{P}K_n^n = \mathscr{R}^0D_n^{n-1}$, kde $\mathscr{R} : {}^0E^{n-1} \to {}^1E^{n-1}$ je projektivní transformace. Z rovnoběžnosti ${}'E^{n-1} \parallel {}^1E^{n-1}$ nadrovin ${}'E^{n-1}$, ${}^1E^{n-1}$ plyne, že podprostor ${}^1E^{n-2} = \mathscr{P}E^{n-2}$ je nevlastním podprostorem nadroviny ${}^1E^{n-1}$ a poněvadž ${}^1E^{n-2} = \mathscr{R}^0E^{n-2}$, kde ${}^0E^{n-2} = L({}^0V_2^\infty, {}^0V_3^\infty, \ldots, {}^0V_n^\infty)$ je nevlastní podprostor nadroviny ${}^0E^{n-1}$, je $\mathscr{R}$ afinita. Bude-li při pevném S průmětna ${}^1E^{n-1}$ nabývat všech možných poloh rovnoběžných s ${}'E^{n-1}$ $(S \notin {}^1E^{n-1})$ budou si centrální projekce konfigurace K_n^n odpovídat v homotetii $\mathscr{H} : E^n \to E^n$, a tedy $\mathscr{P}K_n^n = \mathscr{H}\mathscr{R}^0D_n^{n-1}$. Poněvadž koeficient homotetie $\mathscr{H}$ nabývá všech nenulových hodnot, nabývá modul afinity $\mathscr{A} = \mathscr{H}\mathscr{R}$ všech kladných hodnot.

Věta 3. *Nechť je dána polyedrická konfigurace* $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i\} \subset E^n$ $(n \geq 3)$ *a degenerovaná konfigurace* ${}^0D_n^{n-1} \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\} \subset {}^0E^{n-1}$. *Nechť* $(OA_iB_i) \neq$ $\neq ({}^0O^0A_i{}^0B_i)$, $i = 2, 3, \ldots, n$, *a nechť* $V_i({}^0W_i)$ *je úběžník přímky* $x_i({}^0x_i)$ *v projektivnosti bodových řad* $x_i(O, A_i, B_i, \ldots) \barwedge {}^0x_i({}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i, \ldots)$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

Nutná a postačující podmínka pro existenct centrální projekce $\mathscr{P}$ *s basí* $[S, {}^1E^{n-1}]$, *v níž* $\mathscr{P}K_n^n \cong {}^0D_n^{n-1}$, *je existence vlastního bodu* $S \in x_1 = OA_1$ $(S \neq O)$ *takového, že simplexy* $S^{n-1}(S, V_2, V_3, \ldots, V_n)$, ${}^0S^{n-1}({}^0O, {}^0W_2, {}^0W_3, \ldots, {}^0W_n)$ *jsou podobné.*

Důkaz. (obr. 1 pro $n = 3$; v obr. nejsou vyznačeny všechny body A_i, B_i a není vyznačena daná ${}^0E^{n-1}$). Nejprve ukážeme, že podmínka je postačující. Nechť tedy existuje vlastní bod $S \in x_1$ $(S \neq O)$ tak, že $S^{n-1} \sim {}^0S^{n-1}$. Přiřazením ${}^0O \to S$, ${}^0W_i \to V_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ je stanovena podobnost $\Pi : {}^0E^{n-1} \to {}'E^{n-1}$ $({}'E^{n-1} =$ $= L(S, V_2, V_3, \ldots, V_n))$. Sestrojme konfiguraci ${}'D_n^{n-1} \equiv \{O', A_i', B_i'\}$ tak, aby ${}'D_n^{n-1} =$ $= \Pi^0D_n^{n-1}$. Uvažujme nyní translaci $\mathscr{T} : E^n \to E^n$, určenou vektorem $\overrightarrow{OS}$, označme ${}''D_n^{n-1} \equiv \{O'', A_i'', B_i''\}$ degenerovanou konfiguraci $\mathscr{T}{}'D_n^{n-1}$ a zvolme centrální projekci $\mathscr{P}$ s basí $[S, {}^1E^{n-1}]$, kde ${}^1E^{n-1}$ je nadrovina rovnoběžná s nadrovinou ${}'E^{n-1}$ $({}^1E^{n-1} \neq {}'E^{n-1})$.

Ukážeme nejprve, že je $\mathscr{P}K_n^n = \mathscr{P}''\mathrm{D}_n^{n-1}$. Označme $\mathscr{P}K_n^n = {}^1\mathrm{D}_n^{n-1} \equiv \{{}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i\}$. Je $\mathscr{P}O'' = \mathscr{P}O = \mathscr{P}A_1 = \mathscr{P}B_1 = {}^1O$. $\mathscr{P}x_i = {}^1W_i{}^1V_i^\infty$, kde ${}^1W_i = \mathscr{P}W_i^\infty$, ${}^1V_i^\infty = \mathscr{P}V_i$, $i = 2, 3, \dots, n$. Je-li $W_i'' = \mathscr{T}V_i$ $(i = 2, 3, \dots, n)$, je $W_i''S = \mathscr{T}x_i$, a tedy $W_i''S \parallel x_i$; odtud plyne $\mathscr{P}W_i^\infty = \mathscr{P}W_i'' = {}^1W_i$ $(i = 2, 3, \dots, n)$. Je-li dále $V_i''^\infty(V_i'^\infty)$ nevlastní



Obr. 1.

bod přímky $x_i'' = O''A_i''$ $(x_i' = SA_i')$, $i = 2, 3, \dots, n$, pak v důsledku $O''W_i'' = \mathscr{T}SV_i$ a $''\mathrm{E}^{n-1} \parallel {}'\mathrm{E}^{n-1}$ je $\mathscr{P}V_i = V_i'^\infty = {}^1V_i^\infty$, kde ${}^1V_i^\infty$ je nevlastní bod přímky ${}^1x_i = {}^1O{}^1A_i$ $(i = 2, 3, \dots, n)$; je tedy $\mathscr{P}x_i'' = \mathscr{P}x_i = {}^1x_i$ $(i = 2, 3, \dots, n)$. Qznačme ${}^1A_i^* = \mathscr{P}A_i''$ $(i = 2, 3, \dots, n)$. V důsledku $\mathscr{P}O'' = {}^1O$, $\mathscr{P}W_i'' = {}^1W_i$, $\mathscr{P}V_i''^\infty = {}^1V_i^\infty$ $(i = 2, 3, \dots, n)$ platí

(1) $$(O''W_i''V_i''^\infty A_i'') = ({}^1O{}^1W_i{}^1V_i^{\infty 1}A_i^*)\,, \quad i = 2, 3, \dots, n\,.$$

Poněvadž $O'' = \mathscr{T}\Pi^0O$, $W_i'' = \mathscr{T}\Pi^0W_i$, $V_i''^\infty = \mathscr{T}\Pi^0V_i^\infty$ a $A_i'' = \mathscr{T}\Pi^0A_i$, $i = 2, 3, \dots, n$, je (v důsledku $S^1W_i \parallel x_i$, $i = 2, 3, \dots, n$)

(2) $$(O''W_i''V_i''^\infty A_i'') = ({}^0O{}^0W_i{}^0V_i^{\infty 0}A_i)\,, \quad i = 2, 3, \dots, n\,.$$

Poněvadž body ${}^0W_i(V_i)$ jsou úběžníky v projektivnosti bodových řad ${}^0x_i \barwedge x_i$ $(i = 2, 3, \dots, n)$ a centrální projekcí $\mathscr{P}$ se zachová dvojpoměr, platí

(3) $$({}^0O{}^0W_i{}^0V_i^{\infty 0}A_i) = (OW_i^\infty V_iA_i) = ({}^1O{}^1W_i{}^1V_i^{\infty 1}A_i)\,, \quad i = 2, 3, \dots, n\,.$$

Z (1), (2) a (3) plyne $({}^1O{}^1W_i{}^1V_i^{\infty}{}^1A_i) = ({}^1O{}^1W_i{}^1V_i^{\infty}{}^1A_i^*)$, a odtud ${}^1A_i = {}^1A_i^*$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Je tedy $\mathscr{P}A_i = \mathscr{P}A_i''$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$. Analogicky ukážeme, že též $\mathscr{P}B_i = \mathscr{P}B_i''$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$. Pak je ovšem $\mathscr{P}K_n^n = \mathscr{P}''D_n^{n-1}$.

Poněvadž konfigurace $''D_n^{n-1}$ a ${}^1D_n^{n-1}$ leží v rovnoběžných nadrovinách, jsou podobné. Bude-li průmětna ${}^1E^{n-1}$ nabývat při pevném S všech možných poloh $(S \notin {}^1E^{n-1})$ rovnoběžných s $'E^{n-1}$, pak centrální projekce ${}^1D_n^{n-1}$ konfigurace K_n^n ze středu S do nadrovin ${}^1E^{n-1}$ budou homotetické (koeficient homotetie bude nabývat všech nenulových hodnot), a poněvadž $''D_n^{n-1} \sim {}^0D_n^{n-1}$, lze vybrat ${}^1E^{n-1}$ tak, že ${}^1D_n^{n-1} \cong {}^0D_n^{n-1}$.

Nyní dokážeme nutnost podmínky. Nechť existuje projekce $\mathscr{P}$ s basí $[S, {}^1E^{n-1}]$ tak, že $\mathscr{P}K_n^n = {}^1D_n^{n-1} \equiv \{{}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i\}$, ${}^1D_n^{n-1} \cong {}^0D_n^{n-1}$. Pak nutně $S \in x_1 = OA_1$ $(S \neq O)$. Nadrovina ${}^1E^{n-1}$ je rovnoběžná s nadrovinou $'E^{n-1} = L(S, V_2, V_3, \ldots, V_n)$ a nevlastní body W_i^{∞} přímek $x_i = OA_i$ se promítají přímkami $S^1W_i \parallel x_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$, přičemž ${}^1W_i = \mathscr{P}W_i$ (V_i) je úběžník přímky ${}^1x_i = \mathscr{P}x_i$ (x_i) v projektivnosti bodových řad ${}^1x_i({}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i, \ldots) \barwedge x_i(O, A_i, B_i, \ldots)$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Poněvadž simplexy ${}^1S^{n-1}({}^1O, {}^1W_2, {}^1W^3, \ldots, {}^1W_n)$, $S^{n-1}(S, V_2, V_3, \ldots, V_n)$ jsou řezy trsů přímek $S(x_1, S^1W_2, S^1W_3, \ldots, S^1W_n)$, $O(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rovnoběžnými nadrovinami ${}^1E^{n-1}, 'E^{n-1}$, je (v důsledku $S^1W_i \parallel x_i$) ${}^1S^{n-1} \sim S^{n-1}$. Z ${}^1S^{n-1} \cong {}^0S^{n-1}$ pak plyne $S^{n-1} \sim {}^0S^{n-1}$.

Věta 4. *Nechť je dána kartézská konfigurace $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i^{\infty}\} \subset E^n$ a degenerovaná konfigurace ${}^0D_n^{n-1} \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\} \subset {}^0E^{n-1}$ $(n \geqq 3)$, a nechť ${}^0B_i$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ jsou vlastní body. Označme $\lambda_i = 1 - ({}^0O{}^0A_i{}^0B_i)$, $i = 2, 3, \ldots, n$.*

Nutná a postačující podmínka pro existenci takového bodu $S \in x_1 = OA_1$ $(S \neq O)$ a takové nadroviny ${}^1E^{n-1} \subset E^n$, že v centrální projekci $\mathscr{P}$ s basí $[S, {}^1E^{n-1}]$ platí $\mathscr{P}K_n^n \cong {}^0D_n^{n-1}$ je: existují reálná čísla $\mu > 0$, $k > 0$ taková, že ${}^0O{}^0B_i = k\sqrt{(\mu^2 + (1/\lambda_i^2))}$, ${}^0B_i{}^0B_j = k\sqrt{((1/\lambda_i^2) + (1/\lambda_j^2))}$, $i \neq j$; $i, j = 2, 3, \ldots, n$.

Důkaz. Nejprve ukážeme nutnost podmínky. Nechť v centrální projekci $\mathscr{P}$ s basí $[S, {}^1E^{n-1}]$ je $\mathscr{P}K_n^n \cong {}^0D_n^{n-1}$. Pak v důsledku věty 3 je S vlastní bod takový, že $S \in x_1 = OA_1$ $(S \neq O)$ a simplexy $S^{n-1}(S, V_2, V_3, \ldots, V_n)$, ${}^0S^{n-1}({}^0O, {}^0B_2, {}^0B_3, \ldots, {}^0B_n)$ jsou podobné, přičemž V_i $({}^0B_i)$ je úběžník přímky x_i $({}^0x_i)$ v projektivnosti bodových řad $x_i(O, A_i, B_i^{\infty}, V_i, \ldots) \barwedge {}^0x_i({}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i, {}^0V_i^{\infty}, \ldots)$, $i = 2, 3, \ldots, n$. Z rovnosti dvojpoměrů $(OA_iB_i^{\infty}V_i) = ({}^0O{}^0A_i{}^0B_i{}^0V_i^{\infty})$ pak plyne

$$\frac{1}{(OA_iV_i)} = ({}^0O{}^0A_i{}^0B_i) = 1 - \lambda_i\,,$$

a odtud

$$1 - \lambda_i = \frac{\overrightarrow{A_iV_i}}{\overrightarrow{OV_i}} = \frac{\overrightarrow{OV_i} - \overrightarrow{OA_i}}{\overrightarrow{OV_i}} = 1 - \frac{\overrightarrow{OA_i}}{\overrightarrow{OV_i}}\,,$$

$i = 2, 3, \ldots, n$. Z předchozí rovnosti pak plyne $\lambda_i = \overrightarrow{OA_i}/\overrightarrow{OV_i}$ a odtud v důsledku $|\overrightarrow{OA_i}| = 1$ je $|\overrightarrow{OV_i}| = 1/|\lambda_i|$ pro $i = 2, 3, \ldots, n$. Poněvadž K_n^n je kartézská konfigurace, musí být $V_iV_j = \sqrt{((1/\lambda_i^2) + (1/\lambda_j^2))}$ a z podobnosti simplexů $S^{n-1} \sim {}^0S^{n-1}$ plyne existence čísla $k > 0$ takového, že ${}^0B_i{}^0B_j = k\sqrt{((1/\lambda_i^2) + (1/\lambda_j^2))}$, $i \neq j$; $i, j = 2, 3, \ldots, n$. Označíme-li $|\overrightarrow{OS}| = \mu > 0$, je $SV_i = \sqrt{(\mu^2 + (1/\lambda_i^2))}$, $i = 2, 3, \ldots, n$, a v důsledku $S^{n-1} \sim {}^0S^{n-1}$ je tedy ${}^0O{}^0B_i = k\sqrt{(\mu^2 + (1/\lambda_i^2))}$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

Nyní dokážeme, že podmínka je postačující. Nechť existují reálná čísla $\mu > 0$, $k > 0$ tak, že

$$(1) \qquad {}^0O{}^0B_i = k\sqrt{(\mu^2 + (1/\lambda_i^2))}$$

$$(2) \qquad {}^0B_i{}^0B_j = k\sqrt{((1/\lambda_i^2) + (1/\lambda_j^2))}\,, \quad i \neq j\,; \quad i, j = 2, 3, \ldots, n\,.$$

Zvolme bod $S \in x_1 = OA_1$ tak, aby $|\overrightarrow{OS}| = \mu$ a sestrojme úběžníky V_i přímek x_i v projektivnostech bodových řad $x_i(O, A_i, B_i^\infty, \ldots) \barwedge {}^0x_i({}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i, \ldots)$, $i = 2, 3, \ldots, n$ (zřejmě je přitom ${}^0B_i$ úběžníkem přímky ${}^0x_i$ v téže projektivnosti). Poněvadž K_n^n je podle předpokladu kartézská konfigurace, nalezneme (analogicky jako v prvé části důkazu) $V_iV_j = \sqrt{((1/\lambda_i^2) + (1/\lambda_j^2))}$, $SV_i = \sqrt{(\mu^2 + (1/\lambda_i^2))}$, $i \neq j$; $i, j = 2, 3, \ldots, n$. Pak v důsledku (1) a (2) platí ${}^0O{}^0B_i = k\,SV_i$, ${}^0B_i{}^0B_j = k\,V_iV_j$ ($k > 0$, $i \neq j$; $i, j = 2, 3, \ldots, n$) a simplexy $S^{n-1}(S, V_2, V_3, \ldots, V_n)$, ${}^0S^{n-1}({}^0O, {}^0B_2, {}^0B_3, \ldots, {}^0B_n)$ sou podobné. Pak v důsledku věty 3 existuje centrální projekce $\mathscr{P}$ (s basí $[S, {}^1\mathsf{E}^{n-1}]$) tak, že $\mathscr{P}K_n^n \cong {}^0\mathsf{D}_n^{n-1}$.

Věta 5. *Nechť je dána polyedrická konfigurace* $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i\} \subset \mathsf{E}^n$ *a degenerovaná konfigurace* ${}^0\mathsf{D}_n^m \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\} \subset {}^0\mathsf{E}^m$ $(2 \leqq m < n)$. *Pak existuje centrální projekce* $\mathscr{P}$ *v* E^n *s basí* $[\mathsf{E}^{n-m-1}, {}^1\mathsf{E}^m]$ *a afinita* $\mathscr{A} : {}^0\mathsf{E}^m \to {}^1\mathsf{E}^m$ *s libovolným kladným modulem tak, že* $\mathscr{P}K_n^n = \mathscr{A}{}^0\mathsf{D}_n^m$.

Důkaz. a) Nechť $n > m + 1$. Vzhledem k rozměru konfigurace ${}^0\mathsf{D}_n^m$ musí existovat takové číslo i z posloupnosti $2, 3, \ldots, n - m + 1$, že $L({}^0x_i, {}^0x_{i+1}, \ldots, {}^0x_{m+i-1}) = {}^0\mathsf{E}^m$, kde ${}^0x_i = {}^0O{}^0A_i$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $i = 2$, a tedy ${}^0\mathsf{E}^m = L({}^0x_2, {}^0x_3, \ldots, {}^0x_{m+1})$. Uvažujme konfiguraci $K_{m+1}^{m+1} \equiv \{O, A_i, B_i\}$, která je částí[1]) konfigurace K_n^n a konfiguraci ${}^0\mathsf{D}_{m+1}^m \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\}$, která je částí konfigurace ${}^0\mathsf{D}_n^m$. Podle věty 2 existuje v prostoru $\mathsf{E}^{m+1} = L(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})$ $(x_i = OA_i)$ centrální projekce $\overline{\mathscr{P}}$ s basí $[S, {}^1\mathsf{E}^m]$ $(S \in x_1 = OA_1,\ S \neq O)$ a afinita $\mathscr{A} : {}^0\mathsf{E}^m \to {}^1\mathsf{E}^m$ s libovolným kladným modulem tak, že $\overline{\mathscr{P}}K_{m+1}^{m+1} = \mathscr{A}{}^0\mathsf{D}_{m+1}^m = {}^1\mathsf{D}_{m+1}^m \equiv \{{}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i\}$.

Sestrojme nejprve v ${}^1\mathsf{E}^m$ konfiguraci $\mathscr{A}{}^0\mathsf{D}_n^m = {}^1\mathsf{D}_n^m \equiv \{{}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i\}$ (obsahuje zřejmě ${}^1\mathsf{D}_{m+1}^m$ jako svoji část), zvolme ${}^1\mathsf{E}^m$ za průmětnu centrální projekce $\mathscr{P}$ v E^n a hledejme střed projekce $\mathscr{P}$ tak, aby $\mathscr{P}K_n^n = {}^1\mathsf{D}_n^m$. Dvojice přímek ${}^1A_{m+\alpha}A_{m+\alpha}$, ${}^1B_{m+\alpha}B_{m+\alpha}$, $\alpha = 2, 3, \ldots, n - m$, jsou tvořeny mimoběžnými přímkami, ležícími

---

[1]) Konfigurace $K_v^r \equiv \{O, A_i, B_i\}$ je částí konfigurace $K_q^s \equiv \{O, A_i, B_i\}$ $(v < q,\ r \leqq s)$, jestliže obě konfigurace mají společné body O, A_i, B_i, $i = 1, 2, \ldots, v$; analogicky pro degenerované konfigurace.

vždy v témž trojrozměrném prostoru s bodem S a lze tedy sestrojit jejich příčky q_α ($\alpha = 2, 3, \ldots, n - m$), procházející bodem S. Pro $n - m - 1$ přímek $q_2, q_3, \ldots, q_{n-m}$ platí (jak se snadno přesvědčíme) $L(q_2, q_3, \ldots, q_{n-m}) = \mathsf{E}^{n-m-1}$ (kdyby totiž $q_{n-m} \subset L(q_2, q_3, \ldots, q_{n-m-1})$, pak v důsledku $L(q_2, q_3, \ldots, q_{n-m-1}) \subset L(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \mathsf{E}^{n-1}$ by též ${}^1A_nA_n \subset \mathsf{E}^{n-1}$ a tedy i $A_n \subset \mathsf{E}^{n-1}$, což je ve sporu s předpokladem o rozměru konfigurace K_n^n; analogicky ani žádná jiná přímka q_α nemůže ležet v prostoru vytvořeném zbývajícími). Vezmeme-li nyní centrální projekci $\mathscr{P}$ v E^n s basí $[\mathsf{E}^{n-m-1}, {}^1\mathsf{E}^m]$, je nejprve v důsledku $S \subset \mathsf{E}^{n-m-1}$ $\mathscr{P}K_{m+1}^{m+1} = \overline{\mathscr{P}}K_{m+1}^{m+1} = {}^1D_{m+1}^m$. Označíme-li $A_{m+\alpha}^c = {}^1A_{m+\alpha}A_{m+\alpha} \cap q_\alpha$, $B_{m+\alpha}^c = {}^1B_{m+\alpha}B_{m+\alpha} \cap q_\alpha$ ($\alpha = 2, 3, \ldots, n - m$), je $\mathscr{P}A_{m+\alpha} = A_{m+\alpha}^cA_{m+\alpha} \cap {}^1\mathsf{E}^m = {}^1A_{m+\alpha}$, $\mathscr{P}B_{m+\alpha} = B_{m+\alpha}^cB_{m+\alpha} \cap {}^1\mathsf{E}^m = {}^1B_{m+\alpha}$, $\alpha = 2, 3, \ldots, n - m$. Je tedy $\mathscr{P}K_n^n = {}^1D_n^m = \mathscr{A}\,{}^0D_n^m$.

b) Je-li $n = m + 1$, plyne tvrzení bezprostředně z věty 2.

Věta 6. *Nechť je dána kartézská konfigurace* $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i^\infty\} \subset \mathsf{E}^n$ *a degenerovaná konfigurace* ${}^0D_n^m \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\} \subset {}^0\mathsf{E}^m$ $(2 \leqq m < n)$. *Nechť* ${}^0B_i$ $(i = 2, 3, \ldots, m + 1)$ *jsou vlastní body a nechť* $L({}^0O{}^0B_2, {}^0O{}^0B_3, \ldots, {}^0O{}^0B_{m+1}) = {}^0\mathsf{E}^m$. *Označme* $\lambda_i = 1 - ({}^0O{}^0A_i{}^0B_i)$, $i = 2, 3, \ldots m + 1$.

Postačující podmínkou pro existenci centrální projekce $\mathscr{P}$ *v* E^n *s basí* $[\mathsf{E}^{n-m-1}, {}^1\mathsf{E}^m]$, *v níž* $\mathscr{P}K_n^n \cong {}^0D_n^m$, *je existence reálných čísel* $\mu > 0$, $k > 0$ *takových, že v konfiguraci* ${}^0D_n^m$ *platí* ${}^0O{}^0B_i = k\sqrt{(\mu^2 + (1/\lambda_i^2))}$, ${}^0B_i{}^0B_j = k\sqrt{((1/\lambda_i^2) + (1/\lambda_j^2))}$, $i \neq j$; $i, j = 2, 3, \ldots, m + 1$.

Důkaz. a) Nechť $n > m + 1$. Uvažujme konfiguraci $K_{m+1}^{m+1} \equiv \{O, A_i, B_i\}$, která je částí konfigurace K_n^n a konfiguraci ${}^0D_{m+1}^m \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\}$, která je částí konfigurace ${}^0D_n^m$. Poněvadž podle předpokladu existují čísla $k > 0$, $\mu > 0$ tak, že ${}^0O{}^0B_i = k\sqrt{(\mu^2 + (1/\lambda_i^2))}$, ${}^0B_i{}^0B_j = k\sqrt{((1/\lambda_i^2) + (1/\lambda_j^2))}$, $i \neq j$; $i, j = 2, 3, \ldots, m + 1$, lze na konfigurace K_{m+1}^{m+1} a ${}^0D_{m+1}^m$ užít větu 4 a v prostoru $\mathsf{E}^{m+1} = L(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})$ $(x_i = OA_i)$ existuje tedy centrální projekce $\overline{\mathscr{P}}$ s basí $[S, {}^1\mathsf{E}^m]$ $(S \in x_1,\ S \neq O)$ tak, že ${}^0D_{m+1}^m \cong \overline{\mathscr{P}}K_{m+1}^{m+1} = {}^1D_{m+1}^m \equiv \{{}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i\}$. Sestrojme v ${}^1\mathsf{E}^m$ konfiguraci ${}^1D_n^m \equiv \{{}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i\}$ shodnou s ${}^0D_n^m$ tak, aby obsahovala ${}^1D_{m+1}^m$ jako svoji část. Analogicky jako v důkazu předchozí věty pak nalezneme, že v centrální projekci $\mathscr{P}$ s basí $[\mathsf{E}^{n-m-1}, {}^1\mathsf{E}^m]$, kde $\mathsf{E}^{n-m-1} = L(q_2, q_3, \ldots, q_{n-m})$ je prostor vytvořený příčkami q_α mimoběžek ${}^1A_{m+\alpha}A_{m+\alpha}$, ${}^1B_{m+\alpha}B_{m+\alpha}$ ($\alpha = 2, 3, \ldots, n - m$) vedenými bodem S, je $\mathscr{P}K_n^n = {}^1D_n^m \cong {}^0D_n^m$.

b) Je-li $n = m + 1$, plyne tvrzení bezprostředně z věty 4.

Literatura

[1] *L. Drs:* Centrální axonometrie v n-rozměrném prostoru. Časopis pro pěstování matematiky, *85* (1960), 274—290.

[2] *V. Havel:* O základních větách vícerozměrné centrální axonometrie I, II, III. Matem. fys. časopis SAV, *VII*, 2 — 1957 a *VIII*, 2 — 1958.

[3] *V. Pecina:* K základní větě n-rozměrné centrální axonometrie. Časopis pro pěstování matematiky *96* (1971), 81—85.

Adresa autora: 461 17 Liberec, Studentská 5 (VŠST).

Zusammenfassung

DEGENERIERTE n-DIMENSIONALE ZENTRALAXONOMETRIE

VÁCLAV PECINA, Liberec

Im Artikel werden einige Existenztheoreme der degenerierten Zentralaxonometrie gefunden. Gegeben sind notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz der Zentralprojektion $\mathscr{P}$ aus einem Punkt in eine Hyperebene (im n-dimensionalen, erweiterten euklidischen Raum E^n ($n \geqq 3$)), bei der die Projektion der n-schenkeligen, n-dimensionalen polyedrischen Konfiguration K_n^n mit der gegebenen degenerierten Konfiguration ${}^0D_n^{n-1}$ kongruent ist. Die hinreichenden Bedingungen sind dann für den Fall der Zentralprojektion von dem $(n - m - 1)$-dimensionalem Zentrum im m-dimensionalen Unterraum E^m ($2 \leqq m < n$) verallgemeinert.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ON THE RELATION OF SOLUTIONS AND COEFFICIENTS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

JIŘÍ JARNÍK, Praha

(Received April 8, 1971)

0. Let be given k functions

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t) \tag{1}$$

with continuous derivatives up to the n-th order in the interval $I = (a, b)$, $k < n$. Denote

$$H(t) = \begin{pmatrix} x_1(t), & \ldots, & x_k(t) \\ x_1'(t), & \ldots, & x_k'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n-1)}(t), & \ldots, & x_k^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

for $t \in I$ and assume

$$\operatorname{rank} H(t) = k \tag{3}$$

for all $t \in I$. The following theorem is proved in [1], p. 210 and in [2] by different methods: There is a differential equation

$$y^{(n)} + p_1(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(t)\, y' + p_n(t)\, y = 0 \tag{4}$$

with coefficients $p_1(t), \ldots, p_n(t)$ continuous in I such that functions (1) are its solutions. It can be easily verified step by step that the method presented in [2] (i.e., completing the family of functions (1) to a system of n functions whose wronskian is different from zero for all $t \in I$) yields all such equations. On the other hand, Ascoli in [1] constructs just one equation. It is the aim of this paper to show that by an obvious generalization of Ascoli's method it is possible to obtain again all the equations of the required properties provided there is no $t \in I$ such that $x_i^{(n)}(t) = 0$ holds simultaneously for $i = 1, 2, \ldots, k$.

1. Theorem. *Let functions* (1) *be defined and have continuous n-th derivative in the interval* $I = (a, b)$. *For every* $t \in I$ *let there exist* $i \in (1, 2, \ldots, k)$ *such that* $x_i^{(n)}(t) \neq$

$\neq 0$. *Let* (3) *hold. Then functions* (1) *are solutions of equation* (4) *if and only if there exists a positive definite* $(n \times n)$*-matrix* $A(t)$ *defined and continuous for all* $t \in I$ *so that*

$$p = -AH(H^*AH)^{-1}\, x^{(n)} \tag{5}$$

where $p = p(t) = (p_n(t), \ldots, p_1(t))$, $x^{(n)} = x^{(n)}(t) = (x_1^{(n)}(t), \ldots, x_k^{(n)}(t))$ *and the asterisk denotes transposition of the matrix.* (All vectors occuring in the paper are to be considered column vectors.)

Remark 1. Matrix H^*AH is obviously regular, even positive definite:

$$(H^*AHu, u) = (AHu, Hu) = (Av, v) > 0\,, \quad v = Hu\,.$$

Remark 2. Let us mention the relation of Theorem to the result of Ascoli [1]. If φ is the solution of $H^*H\varphi = -x^{(n)}$ (which is unique), then putting $p = H\varphi$ we obtain an equation (4) with solutions (1). (This is Ascoli's result.) Taking the solution of $H^*AH\varphi = -x^{(n)}$ instead, then p is expressed by (5).

Proof. If (5) holds, then $H^*p = -x^{(n)}$, i.e.

$$p_n x_j + p_{n-1} x_j' + \ldots + p_1 x_j^{(n-1)} = -x_j^{(n)}$$

for $j = 1, 2, \ldots, k$. Hence functions (1) are solutions of (4).

To prove that (5) is a necessary condition, let us establish

2. Lemma. *If* u, v *are* n*-vectors,* $(u, v) > 0$, *then there is a symmetrical positive definite matrix* A *such that* $v = Au$.

Proof. Consider first $n = 2$, $u = (u_1, 0)$, $v = (v_1, v_2)$. By an elementary calculation we obtain from $v = Au$ that

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{v_1}{u_1}, & \dfrac{v_2}{u_1} \\ \dfrac{v_2}{u_1}, & c \end{pmatrix} \tag{6}$$

with an arbitrary c. Since in this case $(u, v) = u_1 v_1 > 0$, $\det A = v_1 c/u_1 - (v_2/u_1)^2$, it is sufficient to choose $c > v_2^2/(u_1 v_1) > 0$ in order that the matrix A be positive definite.

If now u, v are general n-vectors, then a rotation maps them onto vectors $p = (p_1, 0, \ldots, 0)$, $q = (q_1, q_2, 0, \ldots, 0)$. The matrix B of the rotation is orthonormal i.e. $B^{-1} = B^*$ and hence $(p, q) = (Bu, Bv) = (u, B^*Bv) = (u, v) > 0$.

According to the first part of the proof there is a symmetrical positive definite (2×2)-matrix C, $\tilde{q} = C\tilde{p}$ where $\tilde{p} = (p_1, 0)$, $\tilde{q} = (q_1, q_2)$. Put

$$M = \begin{bmatrix} C & \begin{matrix} 0, & \dots, & 0 \\ 0, & \dots, & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0, & 0, \\ \dots & \\ 0, & 0, \end{matrix} & D \end{bmatrix}$$

where D is an arbitrary symmetrical positive definite matrix of order $n - 2$. Then obviously $q = Mp$. As $B^{-1} = B^*$, the matrix $A = B^{-1}MB = B^*MB$ is symmetrical positive definite and $v = Au$ which completes the proof.

3. Proof of Theorem (continuation). Now let $p(t) = (p_n(t), \dots, p_1(t))$ be the vector of coefficients of equation (4) which is satisfied by functions (1). We shall show that there is a matrix A with the required properties such that the equation

$$H\varphi = A^{-1}p \tag{7}$$

has a solution and hence (5) holds.

Denote by $\mathscr{H}$ the space of all n-vectors $H(t)\,\varphi(t)$ where $\varphi(t)$ is an arbitrary k-vector. Obviously $H^*(t)\,p(t) = -x^{(n)}(t)$ (cf. the preceding part of the proof). Hence $p(t)$ is not orthogonal to $\mathscr{H}$ since

$$(p, H\varphi) = (H^*p, \varphi) = (-x^{(n)}, \varphi)$$

and $x^{(n)} = x^{(n)}(t) \neq 0$. We can write $p = \xi + \eta$ where η is orthogonal to $\mathscr{H}$ and $0 \neq \xi \in \mathscr{H}$ is the orthogonal projection of p to $\mathscr{H}$. Consequently

$$(p, \xi) = (\xi, \xi) + (\eta, \xi) = (\xi, \xi) > 0$$

and according to Lemma there exists a positive definite matrix $A = A(t)$ such that $p = A\xi$. Hence $A^{-1}p \in \mathscr{H}$ which means that (7) has a solution $\varphi = \varphi(t)$. It holds $H^*AH\varphi = H^*p = -x^{(n)}$, $p = AH\varphi = -AH(H^*AH)^{-1}\,x^{(n)}$ and (5) is established.

It remains to prove that the matrix $A(t)$ (which is not uniquely determined) may be chosen so that it is continuous in I. Since the matrix $H(t)$ is continuous in I, there exists a continuous basis of the space $\mathscr{H}$. It is evident that the continuity of $p(t)$ then implies the continuity of the projection $\xi(t)$.

From the proof of Lemma it is easy to see that the matrix $A(t)$ mapping $\xi(t)$ onto $p(t)$ may now be chosen as a continuous function. In fact, this is obvious for the matrices B (representing a rotation) and D (which need not depend on t at all). The continuity of the matrix C follows from (6) and from the fact that $u_1(t) \neq 0$. Hence the proof is complete.

R e m a r k 3. If $x_i^{(n)}(\tau) = 0$ for some $\tau \in I$ and for all $i = 1, 2, \ldots, k$, then only those vectors $p(t)$ satisfying $p_j(\tau) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ can be written in the form (5) (with a positive definite matrix A). Particularly, if $x_i^{(n)}(t) = 0$ in I, $i = 1, 2, \ldots, k$, then the single equation $y^{(n)} = 0$ is obtained independently of the choice of the matrix A.

References

[1] *Ascoli, G.*: Sulla decomposizione degli operatori differenziali lineari. Revista (Univ. Nac. Tucuman), Ser. A, *1* (1940), pp. 189—215.
[2] *Jarník, J.*: A note to the construction of a linear differential equation with given solutions. Čas. pěst. mat. *95* (1970), pp. 269—277.

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV v Praze).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ÜBER AUTOMORPHISMEN DES ENDOMORPHISMENRINGES EINES VEKTORRAUMES

František Machala, Olomouc

(Eingelangt am 12. Mai 1971)

Es sei A ein Vektorraum über einem beliebigen Körper F, $\dim A > 2$. Der Ring aller Endomorphismen des Raumes A sei mit T bezeichnet. Als den Rang $r(\varrho)$ des Endomorphismus $\varrho \in T$ benennen wir die Dimension des Bildes $A\varrho$ des Raumes A beim Endomorphismus ϱ. Alle Endomorphismen, deren Rang kleiner als $\varkappa_\nu$ ist, wo $\varkappa_\nu$ eine gewisse unendliche Kardinalzahl ist, bilden einen Ring T_ν. Dieser Ring ist ein beiderseitiges Ideal im Ring T (vgl. [1]).

Satz 1. *Es seien Endomorphismen ξ, ϱ des Vektorraumes A gegeben und sei $\xi\varrho \in T_\nu$. Dann existieren ξ', $\varrho' \in T_\nu$, so dass $\xi\varrho = \xi'\varrho = \xi\varrho'$ ist.*

Beweis. Bezeichnen wir $P = A\xi \cap \operatorname{Ker}(\varrho)$, wo $\operatorname{Ker}(\varrho)$ der Kern des Endomorphismus ϱ ist. Wählen wir einen Unterraum $Q \leqq A$, der in $A\xi$ komplementär zu P ist, kurz $P \oplus Q = A\xi$. Dann ist $Q \cap \operatorname{Ker}(\varrho) = o$ und $\dim Q = \dim Q\varrho$. Ferner ist $A\xi\varrho = Q\varrho$, d. h. $\dim Q < \varkappa_\nu$.

Erwägen wir soeinen Unterraum $W \leqq A$, für welchen $W \oplus \operatorname{Ker}(\xi) = A$ ist. Dann ist $W\xi = A\xi$ und man kann Unterräume $U, V \leqq W$ derartig wählen, dass $U\xi = P$, $V\xi = Q$ ist. Es gilt $A = U \oplus V \oplus \operatorname{Ker}(\xi)$ und jedes Element $a \in A$ kann in der Form $a = u + v + k$ geschrieben werden, wobei $u \in U$, $v \in V$, $k \in \operatorname{Ker}(\xi)$ ist. Wenn man den Endomorphismus α mittels der Vorschrift $a\alpha = -u\xi$ angibt, dann ist $A\alpha = P$ und daher folgt $A\alpha \leqq \operatorname{Ker}(\varrho)$ und $\alpha\varrho = o$. Legen wir $\xi' = \xi + \alpha$. Dann ist $A\xi' = Q$, $r(\xi') < \varkappa_\nu$ und $\xi' \in T_\nu$. Dabei ist $\xi'\varrho = (\xi + \alpha)\varrho = \xi\varrho$.

Wählen wir den Unterraum S derartig, dass $A = \operatorname{Ker}(\varrho) \oplus Q \oplus S$ ist. Dann kann jedes Element $a \in A$ in der Form $a = k + q + s$ geschrieben werden, wobei $k \in \operatorname{Ker}(\varrho)$, $q \in Q$, $s \in S$ ist. Wenn man den Endomorphismus β durch die Vorschrift $a\beta = -s\varrho$ angibt, dann ist $A\xi \leqq \operatorname{Ker}(\beta)$ und $\xi\beta = o$. Legen wir $\varrho' = \varrho + \beta$. Dann ist $a\varrho' = q\varrho$ und $A\varrho' = Q\varrho$, d. h. $\varrho' \in T_\nu$. Dabei gilt $\xi\varrho' = \xi(\varrho + \beta) = \xi\varrho$.

Satz 2. *Es seien $T\varrho$, ωT die durch die Elemente ϱ, $\omega \in T$ generierte Hauptideale des Ringes T. Dann ist $T_\nu\varrho = T\varrho \cap T_\nu$, $\omega T_\nu = \omega T \cap T_\nu$.*

Beweis. Nachdem T_ν ein beiderseitiges Ideal in T ist, gilt $T_\nu \varrho \leqq T_\nu$, $\omega T_\nu \leqq T_\nu$ und $T_\nu \varrho \leqq T\varrho \cap T_\nu$, $\omega T_\nu \leqq \omega T \cap T_\nu$. Wählen wir beliebig $\xi\varrho \in T_\nu$. Dem Satz 1 zufolge existiert $\xi' \in T_\nu$ derartig, dass $\xi\varrho = \xi'\varrho$ ist, daher also ist $\xi\varrho \in T_\nu\varrho$ und $T\varrho \cap \cap T_\nu \leqq T_\nu\varrho$. Soeben zeigt man, dass auch $\omega T \cap T_\nu \leqq \omega T_\nu$ ist.

Bemerkung. Wenn $\varrho, \omega \in T_\nu$ ist, dann ist $T\varrho = T_\nu\varrho$, $\omega T = \omega T_\nu$.

Wenn man auf der Menge der Linksideale (Rechtsideale) des Ringes T üblicherweise die Summe $I_1 + I_2$ zweier Ideale und deren Durchschnitt $I_1 \cap I_2$ definiert, dann bildet diese Menge zusammen mit den Operationen $\cap$, $+$ einen Verband, der mit $\Phi_L(\Phi_P)$ bezeichnet wird. Nachdem T ein regulärer Ring ist, bilden die linke (rechte) Hauptideale des Ringes T einen Teilverband $\Omega_L(\Omega_P)$ des Verbandes $\Phi_L(\Phi_P)$. Ähnlicherweise kann man mit Hilfe der Operationen $\cap$, $+$ den Verband $\Psi_L(\Psi_P)$ definieren, welcher durch alle Linksideale (Rechtsideale) des Ringes T_ν erzeugt wird. Erwägen wir die Menge aller linken (rechten) Annulatoren im Ring T_ν, welche mittels der Inklusion teilgeordnet ist. Auf dieser teilgeordneten Menge kann üblicherweise die Vereinigung $\cup$ und der Durchschnitt $\cap$ zweier Elemente definiert werden und man bekommt dann den Verband $\Pi_L(\Pi_P)$. Für beliebige $H_1, H_2 \in \Pi_L(J_1, J_2 \in \Pi_P)$ gilt offenbar $H_1 + H_2 \leqq H_1 \cup H_2(J_1 + J_2 \leqq J_1 \cup J_2)$.

Wählen wir einen beliebigen Unterraum $S \leqq A$ und bezeichnen $\mathrm{L}(S)$ die Menge aller $\varrho \in T_\nu$, für welche $A\varrho \leqq S$ und $\mathrm{R}(S)$ die Menge aller $\varrho \in T_\nu$ für welche $S\varrho = o$ ist. Nach dem Theorem 2,8 in [4] ist die Abbildung $S \to \mathrm{L}(S)$ ein Isomorphismus der Verbandes $\bar{A}$, welcher durch Unterräume in A gebildet ist und des Verbandes Π_L und die Abbildung $S \to \mathrm{R}(S)$ ist ein dualer Isomorphismus des Verbandes $\bar{A}$ auf den Verband Π_P.

Satz 3. *$T_\nu\varrho$ ist ein linker Annulator im Ring T_ν für jedes Element $\varrho \in T$. Es sei H ein beliebiger linker Annulator im Ring T_ν. Dann existiert ein Hauptideal $T\varrho$ des Ringes T, so dass $H = T_\nu\varrho$ ist. Der Annulator $H = T_\nu\varrho$ im Ring T_ν ist genau dann ein Hauptideal des Ringes T_ν, wenn $\varrho \in T_\nu$ ist.*

Beweis. Es sei $T\varrho$ ein beliebiges linkes Hauptideal des Ringes T. Dann ist $\alpha \in T\varrho$ genau dann, wenn $A\alpha \leqq A\varrho$ ist. $T\varrho$ ist ein linker Annulator der Menge ωT, wo $A\varrho = \mathrm{Ker}(\omega)$ ist. Wir zeigen, dass $T_\nu\varrho$ ein linker Annulator der Menge ωT_ν im Ring T_ν ist. Offenbar ist $(T_\nu\varrho)(\omega T_\nu) = o$. Wählen wir $\gamma \in T_\nu$, $\gamma(\omega T_\nu) = o$ beliebig. Setzen wir voraus, dass $a \in A$, $a\gamma\omega \neq o$ existiert. Nachdem T_ν dicht im Ring T ist, existiert $\alpha \in T_\nu$, so dass $(a\gamma\omega)\alpha = a\gamma\omega \neq o$ ist und dieses liefert einen Widerspruch. Darum ist $\gamma\omega = o$, $A\gamma \leqq \mathrm{Ker}(\omega)$ und $\gamma \in T\varrho$. Nach dem Satz 2 gilt $\gamma \in T_\nu\varrho$.

Es sei H ein beliebiger Annulator des Ringes T_ν. Dann gibt es genau einen Unterraum $S \leqq A$, für welchen $H = \mathrm{L}(S)$ ist. Wenn wir ein $\varrho \in T$ erwägen, für welches $A\varrho = S$ ist, dann ist $H = T_\nu\varrho$.

Es sei $T_\nu\varrho$, $\varrho \in T$ ein Hauptideal in T_ν, d. h. $T_\nu\varrho = T_\nu\gamma$, $\gamma \in T_\nu$. Dann ist $A\gamma = S$, $\dim S < \varkappa_\nu$. Setzen wir voraus, dass $A\varrho > S$ ist und wählen $s \in A\varrho$, $s \notin S$. Dann existiert $a \in A$, $a\varrho = s$. Da der Ring T_ν dicht in T ist, existiert $\xi \in T_\nu$ derart, dass $a\xi = a$ ist. Dann ist $a\xi\varrho = s$. Es existiert aber $\alpha \in T_\nu$, so dass $\xi\varrho = \alpha\gamma$ und $a\alpha\gamma = s$ ist; dieses liefert einen Widerspruch. Es ist also $A\varrho \leqq S$ und demzufolge ist $\mathrm{r}(\varrho) < \varkappa_\nu$, d. h. $\varrho \in T_\nu$.

Bemerkung. Vom Beweis des Satzes kommt hervor, dass man für einen beliebigen linken Annulator H des Ringes T_ν die Gleichheit $H = \mathrm{L}(S) = T_\nu\varrho$, wo $A\varrho = S$ ist, bekommt.

Satz 4. *ϱT_ν ist ein rechter Annulator im Ring T_ν für jedes $\varrho \in T$. Es sei J ein beliebiger rechter Annulator im Ring T_ν. Dann existiert ein Hauptideal ϱT des Ringes T, so dass $J = \varrho T_\nu$ ist. Der Annulator $J = \varrho T_\nu$ im Ring T_ν ist genau dann ein Hauptideal, wenn $\varrho \in T_\nu$ ist.*

Beweis. Es sei ϱT ein beliebiges rechtes Hauptideal des Ringes T. Dann ist $\alpha \in \varrho T$ genau dann, wenn $\mathrm{Ker}(\varrho) \leqq \mathrm{Ker}(\alpha)$. Das Ideal ϱT ist ein rechter Annulator der Menge $T\omega$, wo $A\omega = \mathrm{Ker}(\varrho)$. Wir zeigen, dass ϱT_ν ein rechter Annulator der Menge $T_\nu\omega$ ist. Offensichtlich ist $(T_\nu\omega)(\varrho T_\nu) = o$. Wählen wir beliebig $\gamma \in T_\nu$, für welches $T_\nu\omega\gamma = o$ ist. Dann ist $\omega\gamma = o$, $A\omega \leqq \mathrm{Ker}(\gamma)$ und $\gamma \in \varrho T$. Zufolge des Satzes 2 ist dann $\gamma \in \varrho T_\nu$.

Es sei J ein beliebiger rechter Annulator des Ringes T_ν. Es existiert genau ein Unterraum $S \leqq A$, so dass $J = \mathrm{R}(S)$ ist. Wenn wir $\varrho \in T$ so wählen, dass $\mathrm{Ker}(\varrho) = S$ ist, dann ist $J = \varrho T_\nu$.

Es sei ϱT_ν, $\varrho \in T$ ein Hauptideal des Ringes T_ν. Dann existiert $\gamma \in T_\nu$, so dass $\varrho T_\nu = \gamma T_\nu$ ist. Wenn wir $S = \mathrm{Ker}(\gamma)$ bezeichnen, dann ist für jedes $\omega \in \gamma T_\nu$ $\mathrm{Ker}(\gamma) \leqq \mathrm{Ker}(\omega)$. Nach der Voraussetzung ist $\dim A/S = \dim A\gamma < \varkappa_\nu$. Es sei $\mathrm{Ker}(\varrho) < S$. Wählen wir $s \in S$, $s \notin \mathrm{Ker}(\varrho)$. Nachdem T_ν dicht in T ist, existiert $\xi \in T_\nu$, so dass $s\varrho\xi = s\varrho$ ist. Da $\varrho\xi \in \gamma T_\nu$ ist, gibt es ein $\alpha \in T_\nu$, so dass $\varrho\xi = \gamma\alpha$ gilt. Dann ist $s\varrho\xi = s\gamma\alpha \neq o$ und dieses ist ein Widerspruch. Es gilt also $S \leqq \mathrm{Ker}(\varrho)$ und $\dim A\varrho \leqq \dim A\gamma$, d. h. $\varrho \in T_\nu$.

Bemerkung. Vom Beweis ergibt sich, dass für einen beliebigen rechten Annulator J im Ring T_ν die Gleichheit $J = \mathrm{R}(S) = \varrho T_\nu$ gilt, wobei $\mathrm{Ker}(\varrho) = S$ ist.

Satz 5. *Die Abbildungen $T\varrho \to T_\nu\varrho$, $\omega T \to \omega T_\nu$ sind Isomorphismen der Verbände Ω_L, Π_L und Ω_P, Π_P.*

Beweis. Die Abbildung $T\varrho \to S$, wo $S = A\varrho$ ist, ist nach [1] ein Isomorphismus der Verbände Ω_L, $\bar{A}$ und die Abbildung $S \to \mathrm{L}(S)$ ist ein Isomorphismus der Verbände $\bar{A}, \Pi_L$. Nach dem Satz 3 ist $\mathrm{L}(S) = T_\nu\varrho$ und daher ist die Abbildung $T\varrho \to T_\nu\varrho$ ein Isomorphismus der Verbände Ω_L, Π_L.

Ähnlicherweise ist nach [1] die Abbildung $\omega T \to S$, wo $S = \mathrm{Ker}(\omega)$ ein dualer Isomorphismus der Verbände Ω_P, $\bar{A}$ und $S \to \mathrm{R}(S)$ ist ein dualer Isomorphismus der

Verbände $\bar{A}, \Pi_P$. Nach dem Satz 4 ist $\mathrm{R}(S) = \omega T_v$ und demzufolge ist die Abbildung $\omega T \to \omega T_v$ ein Isomorphismus der Verbände Ω_P, Π_P.

Bemerkung. Bezeichnen wir der Reihe nach $P(\Phi_L)$, $P(\Phi_P)$, $P(\Omega_L)$, $P(\Omega_P)$, $P(\Pi_L)$, $P(\Pi_P)$, $A(T)$ die Gruppen der Automorphismen der Verbände Φ_L, Φ_P, Ω_L, Ω_P, Π_L, Π_P und die Gruppe der Automorphismen des Ringes T. Nach [3] und dem Satz 5 sind alle angeführten Gruppen isomorph.

Satz 6. *Der Verband $\Pi_L(\Pi_P)$ ist ein Teilverband des Verbandes $\Psi_L(\Psi_P)$.*

Beweis. Wir wählen zwei linke Annulatoren $H_1, H_2 \in \Pi_L$ und beweisen, dass $H_1 + H_2 \in \Pi_L$, $H_1 \cap H_2 \in \Pi_L$ ist. Nach dem Satz 3 existieren $\varrho, \omega \in T$ derart, dass $H_1 = T_v\varrho$, $H_2 = T_v\omega$ ist. Nachdem T ein regulärer Ring ist, existieren $\gamma, \delta \in T$ derartig, dass $T\varrho + T\omega = T\gamma$, $T_\varrho \cap T\omega = T\delta$ ist. Wir zeigen zuerst, dass $T_v\varrho + T_v\omega = T_v\gamma$ gilt. Wählen wir beliebig $\eta = \xi_1\varrho + \xi_2\omega \in T_v\varrho + T_v\omega$. Dann ist $\eta \in T_v$ und zugleich $\eta \in T\varrho + T\omega$, d. h. $\eta \in T\gamma$. Nach dem Satz 2 ist $\eta \in T_v\gamma$ und $T_v\varrho + T_v\omega \leqq T_v\gamma$. Wählen wir umgekehrt $\alpha = \xi\gamma \in T_v\gamma$ beliebig. Nach dem Satz 1 kann vorausgesetzt werden, dass $\xi \in T_v$ ist. Es existieren $\varrho' \in T\varrho$, $\omega' \in T\omega$, so dass $\varrho' + \omega' = \gamma$ ist. Dann ist $\alpha = \xi\varrho' + \xi\omega'$. Offenbar ist $\xi\varrho' \in T_v \cap T\varrho$, $\xi\omega' \in T_v \cap T\omega$ und daher ist $\alpha \in T_v\varrho + T_v\omega$. Es gilt also $T_v\gamma \leqq T_v\varrho + T_v\omega$ und $T_v\gamma = T_v\varrho + T_v\omega$. Nach dem Satz 3 ist $T_v\gamma = H$ ein linker Annulator des Ringes T_v und es gilt $H_1 + H_2 = H$. Ähnlich zeigt man, dass $H_1 \cap H_2 = T_v\delta = H'$ ist. Gleicherweise zeigt man, dass auch Π_P ein Teilverband des Verbandes Ψ_P ist.

Bemerkung. Nach dem Satz 5 folgt von der Beziehung $T\varrho + T\omega = T\gamma$ die Beziehung $T_v\varrho \cup T_v\omega = T_v\gamma$, vom Beweis des Satzes 6 ergibt sich $T_v\varrho + T_v\omega = T_v\gamma$ und daher ist $T_v\varrho \cup T_v\omega = T_v\varrho + T_v\omega$. Ähnliches gilt auch für die rechten Annulatoren.

Satz 7. *Es sei H ein Linksideal des Ringes T_v. Dann ist AH ein Unterraum des Raumes A.*

Beweis. Jede zwei Elemente von AH können in der Form $a'i'$, $a''i''$ geschrieben werden, wobei $a', a'' \in A$, $i', i'' \in H$ ist. Bezeichnen wir mit H' das durch die Elemente i', i'' generierte Linksideal. Nach dem Theorem 4,4 in [4] ist H' ein linker Annulator. Nach dem Lemma 2,7 in [4] ist AH' ein Unterraum des Raumes A. Nachdem $H' \leqq H$ ist, gilt $a'i' \pm a''i'' \in AH$. Nachdem ferner noch $AH = FAH$ gilt, ist AH ein Unterraum des Raumes A.

Satz 8. *Das Linksideal H des Ringes T_v ist genau dann ein linker Annulator, wenn ein Linksideal H' so existiert, dass $H \oplus H' = T_v$ ist.*

Beweis. 1. Setzen wir voraus, dass $H \leqq T_v$ ein linker Annulator ist. Dann ist $H = \mathrm{L}(S) = T_v\varrho$, wo $A\varrho = S$ ist. Wählen wir den Unterraum $U \leqq A$, $S \oplus U = A$ und $\omega \in T$, so dass $A\omega = U$ ist. Dann ist $T\varrho \oplus T\omega = T$ und nach den Sätzen 5,6 ist $T_v\varrho \oplus T_v\omega = T_v$.

2. Es seien Linksideale $H, H' \leqq T_v$ derartig gegeben, dass $H \oplus H' = T_v$ ist. Nach dem Satz 7 sind $S = AH$, $S' = AH'$ Unterräume des Raumes A. Es existiere $s \neq o \in S \cap S'$. Dann existieren $\varrho \in H$, $\varrho' \in H'$; $a, a' \in A$, so dass $a\varrho = a'\varrho' = s$ ist. Das bedeutet, dass $A\varrho \cap A\varrho' \neq o$ und $L(A\varrho \cap A\varrho') = T_v\varrho \cap T_v\varrho' \neq o$ ist und auch $H \cap H' \neq o$; dieses ist ein Widerspruch und darum ist $S \cap S' = o$. Wählen wir $\omega, \omega' \in T$, so dass $A\omega = S$, $A\omega' = S'$ ist. Dann ist $L(S) = T_v\omega$, $L(S') = T_v\omega'$ und

$$L(S \cap S') = T_v\omega \cap T_v\omega' = o\,. \tag{1}$$

Es sei $\alpha \in H$. Von der Definition des Raumes S folgt, dass $A\alpha \leqq A\omega$ ist. Daher ist $T_v\alpha \leqq T_v\omega$ und darum ist $H \leqq T_v\omega$. Soeben zeigt man, dass auch $H' \leqq T_v\omega'$ ist. Nachdem $H \oplus H' = T_v$ ist, gilt auch $T_v\omega + T_v\omega' = T_v$. Von der Beziehung (1) bekommen wir dann $T_v\omega \oplus T_v\omega' = T_v$ und demzufolge ist $H = T_v\omega$, $H' = T_v\omega'$. Die Ideale H, H' sind nach dem Satz 3 linke Annulatoren des Ringes T_v.

Satz 9. *Das Rechtsideal J des Ringes T_v ist genau dann ein rechter Annulator, wenn ein Rechtsideal J' so existiert, dass $J \oplus J' = T_v$ gilt.*

Beweis. 1. Setzen wir voraus, dass J ein rechter Annulator des Ringes T_v ist. Dann ist $J = R(S) = \varrho T_v$, wo $\operatorname{Ker}(\varrho) = S$ ist. Wählen wir einen Unterraum $U \leqq A$, $S \oplus U = A$ und $\omega \in T$, so dass $\operatorname{Ker}(\omega) = U$ ist. Dann ist $\varrho T_v \oplus \omega T_v = T_v$.

2. Es sei $J \leqq T$ ein beliebiges Rechtsideal und bezeichnen wir $K(J)$ die Menge aller $x \in A$, für welche $xJ = o$ ist. $K(J)$ ist ein Unterraum des Raumes A. Setzen wir zuerst voraus, dass $K(J) = o$ ist und es existiere $\xi T \neq o$, so dass $\xi T \cap J = o$ gilt. Offensichtlich ist $J \neq o$. Wenn für die Rechtsideale $I_1, I_2 \leqq T$ die Beziehung $I_1 \oplus I_2 = T$ gilt, dann sind I_1, I_2 Hauptideale, da T der Ring mit einem Einselement ist. Es existiert also ein Hauptideal ϱT, $J \leqq \varrho T$, so dass $\xi T \oplus \varrho T = T$ ist. Dann ist $K(J) \geqq \operatorname{Ker}(\varrho)$, also $K(J) \neq o$, was einen Widerspruch liefert und darum ist $\xi T = o$. Wenn $J \oplus J' = T_v$, $K(J) = o$ ist, dann ist $\omega T_v = \omega T$, $\omega T \cap J = o$ für ein beliebiges $\omega \in J'$ und daher ist $\omega T_v = o$. Es gilt darum $J = T_v$ und $J = R(o)$. Es sei nun $J \oplus J' = T_v$, $K(J) \neq o$, $K(J') \neq o$. Es existiert soein $\alpha \in J$, dass $\operatorname{Ker}(\alpha) \leqq K(J) + K(J')$ ist. Im umgekehrten Fall würde $K(J) + K(J') < \operatorname{Ker}(\alpha)$ für alle $\alpha \in J$ gelten, aber dieses widerspricht der Definition des Raumes $K(J)$. Gleicherweise kann gezeigt werden, dass ein $\alpha' \in J'$ so existiert, dass $\operatorname{Ker}(\alpha') \leqq K(J) + K(J')$ gilt. Wählen wir $\varrho \in T_v$ beliebig, so dass $(K(J) + K(J'))\,\varrho = o$ ist. Dann ist $\operatorname{Ker}(\alpha) \leqq \operatorname{Ker}(\varrho)$, $\operatorname{Ker}(\alpha') \leqq \operatorname{Ker}(\varrho)$ und $\varrho \in \alpha T_v$, $\varrho \in \alpha' T_v$, oder auch $\varrho \in \alpha T_v \cap \alpha' T_v$. Der Voraussetzung nach ist $J \cap J' = o$ und darum ist $\varrho = o$. Daher folgt, dass $K(J) + K(J') = A$ ist. Bezeichnen wir $R[K(J)] = \omega T_v$, $R[K(J')] = \omega' T_v$. Dann $\omega T_v \cap \omega' T_v = o$. Offenbar ist $J \leqq \omega T_v$, $J' \leqq \omega' T_v$ und demzufolge auch $\omega T_v \oplus \omega' T_v = T_v$ und $\omega T_v = J$, $\omega' T_v = J'$.

Satz 10. *Es sei ein Automorphismus σ des Ringes T_v gegeben und $\varphi, \psi \in T_v$. Dann ist $A\varphi \leqq \operatorname{Ker}(\psi)$ genau dann, wenn $A\varphi^\sigma \leqq \operatorname{Ker}(\psi^\sigma)$ ist.*

Beweis. Die folgenden Behauptungen sind äquivalent: $A\varphi \leqq \operatorname{Ker}(\psi)$, $A\varphi\psi = o$, $\varphi\psi = o$, $(\varphi\psi)^\sigma = o$, $\varphi^\sigma\psi^\sigma = o$, $A\varphi^\sigma\psi^\sigma = o$, $A\varphi^\sigma \leqq \operatorname{Ker}(\psi^\sigma)$.

Satz 11. *Es sei σ ein Automorphismus des Ringes T_v. Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:*

a) *Alle linken Hauptideale des Ringes T_v sind σ-zulässig.*
b) *Alle rechten Hauptideale des Ringes T_v sind σ-zulässig.*
c) *Für jedes idempotentes Element $\varkappa \in T_v$ gilt $\varkappa^\sigma = \varkappa$.*

Beweis. a) $\rightarrow$ b). Für ein beliebiges $\varrho \in T_v$ gilt nach der Voraussetzung $(T_v\varrho)^\sigma = T_v\varrho^\sigma \leqq T_v\varrho$. Von der Tatsache, dass σ ein Automorphismus ist, folgt $T_v\varrho^\sigma = T_v\varrho$. Nach der dem Satz 3 folgenden Bemerkung ist $A\varrho^\sigma = A\varrho$. Wählen wir $\omega \in T_v$ $a \in \operatorname{Ker}(\omega)$ beliebig. Es existiert $\varphi \in T_v$ so, dass $A\varphi = Fa$ ist. Nachdem $A\varphi \leqq \operatorname{Ker}(\omega)$ ist, ist auch $A\varphi^\sigma \leqq \operatorname{Ker}(\omega^\sigma)$. Es ist aber $A\varphi^\sigma = A\varphi = Fa$ und $a \in \operatorname{Ker}(\omega^\sigma)$, d. h. es ist auch $\operatorname{Ker}(\omega) \leqq \operatorname{Ker}(\omega^\sigma)$. Wählen wir umgekehrt $a \in \operatorname{Ker}(\omega^\sigma)$ beliebig. Wenn wir $\varphi \in T_v$ so wählen, dass $A\varphi = Fa$ ist, dann ist auch $A\varphi^\sigma = Fa \leqq \operatorname{Ker}(\omega^\sigma)$ und $A\varphi \leqq \operatorname{Ker}(\omega)$, d. h. es ist $a \in \operatorname{Ker}(\omega)$. Darum ist $\operatorname{Ker}(\omega^\sigma) \leqq \operatorname{Ker}(\omega)$ und $\operatorname{Ker}(\omega^\sigma) = \operatorname{Ker}(\omega)$. Nach der dem Satz 4 nachfolgenden Bemerkung gilt $\omega T_v = \omega^\sigma T_v = (\omega T_v)^\sigma$ und jedes rechte Hauptideal des Ringes T_v ist σ – zulässig.

b) $\rightarrow$ a). Der Voraussetzung zufolge ist $(\varrho T_v)^\sigma = \varrho^\sigma T_v \leqq \varrho T_v$ und daher ist $\varrho^\sigma T_v = \varrho T_v$ für jedes $\varrho \in T_v$, d. h. $\operatorname{Ker}(\varrho) = \operatorname{Ker}(\varrho^\sigma)$. Wählen wir beliebig $\omega \in T_v$. Setzen wir voraus, dass $a \in A\omega^\sigma$, $a \notin A\omega$ ist und wählen wir einen Unterraum Q, so dass $Fa \oplus A\omega \oplus Q = A$ ist. Betrachten wir ferner den Endomorphismus $\varphi \neq o$, für welchen $\operatorname{Ker}(\varphi) = A\omega + Q$ ist. Offensichtlich ist $\varphi \in T_v$. Nachdem $A\omega \leqq \operatorname{Ker}(\varphi)$ ist, ist auch $A\omega^\sigma \leqq \operatorname{Ker}(\varphi)$ und dieses ist ein Widerspruch. Es gilt also $A\omega^\sigma \leqq A\omega$. Setzen wir umgekehrt voraus, dass $a \in A\omega$, $a \notin A\omega^\sigma$ ist, betrachten wir den Unterraum Q, für welchen $Fa \oplus A\omega^\sigma \oplus Q = A$ ist und den Endomorphismus $\varphi \neq o$, für welchen $\operatorname{Ker}(\varphi) = A(\omega^\sigma) + Q$ gilt. Dann ist $\varphi \in T_v$ und $A\omega^\sigma \leqq \operatorname{Ker}(\varphi^\sigma)$ oder auch $A\omega \leqq \operatorname{Ker}(\varphi)$, und so ergibt sich ein Widerspruch. Also gilt $A\omega \leqq A\omega^\sigma$. Von den angeführten Beziehungen folgt $A\omega = A\omega^\sigma$ und $T_v\omega = T_v\omega^\sigma = (T_v\omega)^\sigma$. Jedes linke Hauptideal ist also σ – zulässig.

a) $\rightarrow$ c). Es sei $\varkappa \in T_v$ ein beliebiger idempotenter Endomorphismus. Da a) gilt, gilt zugleich auch b) und es ist $A\varkappa = A\varkappa^\sigma$, $\operatorname{Ker}(\varkappa) = \operatorname{Ker}(\varkappa^\sigma)$. Daher folgt schon $\varkappa = \varkappa^\sigma$.

c) $\rightarrow$ a). Setzen wir voraus, dass $\varkappa = \varkappa^\sigma$ für einen beliebigen idempotenten Endomorphismus gilt. Nach [4] ist jedes linke Hauptideal des Ringes T_v durch einen idempotenten Endomorphismus generiert. Sei also beliebig $T_v\varkappa$ gegeben, wo $\varkappa$ ein idempotenter Endomorphismus ist. Dann ist $(T_v\varkappa)^\sigma = T_v\varkappa^\sigma = T_v\varkappa$ und a) gilt.

Satz 12. *Wenn der Automorphismus σ des Ringes T_v die äquivalenten Bedingungen vom Satz 11 erfüllt, dann ist dieser identisch.*

Beweis. Der Beweis kann soeben wie der Beweis des Lemmas 2, S. 231 in [1] durchgeführt werden.

Satz 13. *Jeder Automorphismus σ' des Ringes T induziert einen Automorphismus σ des Ringes T_ν.*

Beweis. Nachdem T_ν ein beiderseitiges Ideal des Ringes T ist, ist auch $T_\nu^{\sigma'}$ ein beiderseitiges Ideal diesen Ringes. Von der Struktur der beiderseitigen Ideale des Ringes T folgt, dass im Falle $T_\nu \neq T_\nu^{\sigma'}$ entweder $T_\nu < T_\nu^{\sigma'}$, $T_\nu^{\sigma'} = T_{\nu'}$ oder $T_\nu^{\sigma'} < T_\nu$, $T_\nu^{\sigma'} = T_{\nu''}$ gilt. Die Kardinalzahlen $\varkappa_\nu$, $\varkappa_{\nu'}$, $\varkappa_{\nu''}$ sind dann voneinander verschieden und die Mengen T_ν, $T_{\nu'}$, $T_{\nu''}$ sind nicht äquivalent. Da σ' ein Automorphismus des Ringes T ist, gilt $T_\nu = T_\nu^{\sigma'}$ und σ' induziert einen Automorphismus des Ringes T_ν.

Satz 14. *Jeder Automorphismus des Ringes T_ν induziert einen Automorphismus des Verbandes $\Pi_L(\Pi_P)$ und umgekehrt jeder Automorphismus des Verbandes $\Pi_L(\Pi_P)$ ist durch einen Automorphismus des Ringes T_ν induziert.*

Beweis. Es sei σ ein Automorphismus des Ringes T_ν. Wenn $H \in \Pi_L$ ein linker Annulator der Menge M im Ring T_ν ist, dann ist H^σ ein linker Annulator der Menge M^σ und es ist $H^\sigma \in \Pi_L$. Daher ist $\Pi_L^\sigma \leqq \Pi_L$. Ferner ist $H^{\sigma^{-1}}$ ein Annulator der Menge $M^{\sigma^{-1}}$ und es gilt $H = (H^{\sigma^{-1}})^\sigma$. Darum ist $\Pi_L^\sigma = \Pi_L$. Der Automorphismus σ induziert einen Automorphismus $\bar{\sigma}$ des Verbandes Ψ_L. Nach dem Satz 6 ist der Verband Π_L ein Unterverband des Verbandes Ψ_L und nachdem $\Pi_L^{\bar{\sigma}} = \Pi_L$ ist, induziert σ auch einen Automorphismus des Verbandes Π_L. Das gleiche kann für den Verband Π_P gezeigt werden.

Es sei $\bar{\sigma}$ ein beliebiger Automorphismus des Verbandes Π_L. Dem Satz 3 zufolge kann man $T_\nu\varrho \to (T_\nu\varrho)^{\bar{\sigma}}$ für $T_\nu\varrho \in \Pi_L$ schreiben. Betrachten wir nach dem Satz 5 den Isomorphismus $\varkappa$ der Verbände Π_L, Ω_L, welchen ist durch die Vorschrift $(T_\nu\varrho)^\varkappa = T\varrho$ bestimmt. Die Abbildung $\bar{\sigma}'$: $(T\varrho)^{\bar{\sigma}'} = (T_\nu\varrho)^{\bar{\sigma}\varkappa}$ ist dann ein Automorphismus des Verbandes Ω_L. Der Vektorraum ist ein homogener total zerlegbarer Modul, der Körper F ist ein Ring mit der Eigenschaft (V) von [3] und ein Vektorraum mit der Dimension grösser als drei ist ein zulässiger Modul. Für den Verband Ω_L, welcher dem Raum A gehört, gilt also der Satz 1 von [3]. Nachdem sich der Beweis diesen Satzes nur auf den sog. Fundamentalsatz der projektiven Geometrie stützt, gilt dieser auch für Vektorräume der Dimension grösser als zwei. Es existiert also ein einziger Automorphismus σ', des Ringes T, welcher den Automorphismus $\bar{\sigma}'$ des Verbandes Ω_L induziert, oder mit anderen Worten es gilt $(T\varrho)^{\bar{\sigma}'} = (T\varrho)^{\sigma'}$ für jedes $\varrho \in T$. Nach dem Satz 13 induziert σ' einen Automorphismus σ des Ringes T_ν mittels der Vorschrift $\varrho^\sigma = \varrho^{\sigma'}$ für jedes $\varrho \in T_\nu$. Für beliebiges $\omega \in T$ gilt $(T_\nu\omega)^\sigma = T_\nu\omega^{\sigma'}$: Wählen wir beliebig $(\xi\omega)^\sigma \in (T_\nu\omega)^\sigma$. Dann ist $(\xi\omega)^\sigma = (\xi\omega)^{\sigma'} = \xi^{\sigma'}\omega^{\sigma'}$ und $(\xi\omega)^\sigma \in T_\nu\omega^{\sigma'}$. Wählen wir umgekehrt $\xi\omega^{\sigma'} \in T_\nu\omega^{\sigma'}$. Dann existiert $\gamma \in T_\nu$, so dass $\gamma^{\sigma'} = \xi$ ist und wir bekommen $\xi\omega^{\sigma'} = \gamma^{\sigma'}\omega^{\sigma'} = (\gamma\omega)^{\sigma'} = (\gamma\omega)^\sigma$ und also auch $(\xi\omega)^\sigma \in (T_\nu\omega)^\sigma$. Daher ist $(T_\nu\omega)^\sigma = T_\nu\omega^{\sigma'}$. Für ein beliebiges $H \in \Pi_L$ ergibt sich: $H^{\sigma\varkappa} = (T_\nu\omega)^{\sigma\varkappa} =$

$= (T_v\omega^{\sigma'})^{\varkappa} = T\omega^{\sigma'} = (T\omega)^{\sigma'} = (T\omega)^{\bar{\sigma}'} = (T_v\omega)^{\bar{\sigma}\varkappa} = H^{\bar{\sigma}\varkappa}$. Da $\varkappa$ ein Isomorphismus ist, ist $H^{\bar{\sigma}} = H^{\sigma}$ für jedes $H \in \Pi_L$ und der Automorphismus $\bar{\sigma}$ des Verbandes Π_L ist durch den Automorphismus σ des Ringes T_v induziert. Gleicherweise kann gezeigt werden, dass jeder Automorphismus des Verbandes Π_P durch einen Automorphismus des Ringes T_v induziert wird.

Folgerung 1. Die Gruppe $P(\Pi_L)$ der Automorphismen des Verbandes Π_L ist mit der Gruppe $A(T_v)$ der Automorphismen des Ringes T_v isomorph: Nach dem Satz 14 induziert jeder Automorphismus $\sigma \in A(T_v)$ einen Automorphismus $\bar{\sigma} \in P(\Pi_L)$ und die Abbildung $\sigma \to \bar{\sigma}$ ist ein Homomorphismus der Gruppe $A(T_v)$ auf die Gruppe $P(\Pi_L)$. Es sei $\sigma \to \bar{\iota}$, wo $\bar{\iota}$ der identische Automorphismus des Verbandes Π_L ist. Dann gilt $H^{\bar{\iota}} = H = H^{\sigma}$ für jedes linke Hauptideal des Ringes T_v und dieses Ideal ist σ-zulässig. Nach dem Satz 12 ist σ der identische Automorphismus des Ringes T_v und die erwägte Abbildung ist ein Isomorphismus der Gurppen $P(\Pi_L)$, $A(T_v)$. Soeben kann gezeigt werden, dass die Gruppe $P(\Pi_P)$ der Automorphismen des Verbandes Π_P mit der Gruppe $A(T_v)$ isomorph ist.

Folgerung 2. Die Gruppen $A(T)$, $A(T_v)$ sind isomorph und jeder Automorphismus des Ringes T_v kann in genau einen Automorphismus des Ringes T erweitert werden: Nach der dem Satz 5 folgenden Bemerkung sind die Gruppen $A(T)$, $P(\Pi_L)$ isomorph, nach der Folgerung 1 sind dann die Gruppen $A(T)$, $A(T_v)$ isomorph. Wenn wir die Bezeichnung vom Satz 14 behalten, dann sind die Abbildungen $\sigma \to \bar{\sigma}$, $\bar{\sigma} \to \bar{\sigma}'$, $\bar{\sigma}' \to \sigma'$ Isomorphismen der zugehörigen Gruppen und die Abbildung $\sigma \to \sigma'$ ist ein Isomorphismus der Gruppen $A(T_v)$, $A(T)$. Setzen wir voraus, dass $\sigma' \in A(T)$ den Automorphismus $\eta \in A(T_v)$ induziert, d. h. dass $\varrho^{\sigma'} = \varrho^{\eta}$ für $\varrho \in T_v$ gilt. Wählen wir beliebig $\omega \in T_v$. Dann ist $(T\omega)^{\bar{\sigma}'} = (T_v\omega)^{\bar{\sigma}\varkappa} = (T_v\omega)^{\sigma\varkappa} = (T_v\omega^{\sigma})^{\varkappa} = (T\omega^{\sigma}) = T_v\omega^{\sigma} = (T\omega)^{\sigma'} = T\omega^{\sigma'} = T\omega^{\eta} = T_v\omega^{\eta}$. Daher ist $(T_v\omega)^{\sigma} = (T_v\omega)^{\eta}$ und $(T_v\omega)^{\sigma\eta^{-1}} = T_v\omega$. Nach dem Satz 12 ist $\sigma\eta^{-1}$ ein identischer Automorphismus und daher ist $\sigma = \eta$. Der Automorphismus $\sigma' \in A(T)$ ist eine Erweiterung des Automorphismus $\sigma \in A(T_v)$. Nachdem die Abbildung $\sigma \to \sigma'$ ein Isomorphismus der Gruppen $A(T_v)$, $A(T)$ ist, ist σ' die einzige Erweiterung des Automorphismus σ.

Folgerung 3. Der Automorphismus σ' des Ringes T, in welchem $\varkappa^{\sigma} = \varkappa$ für ein beliebiges idempotentes Element endlichen Ranges gilt, ist identisch (eine Verallgemeinerung des Lemmas 2, S. 231 in [1]): Der Automorphismus σ' induziert einen Automorphismus σ des Ringes T_o aller Endomorphismen endlichen Ranges, wobei $\varkappa^{\sigma'} = \varkappa^{\sigma} = \varkappa$ für ein beliebiges idempotentes Element $\varkappa \in T_o$ gilt. Nach dem Satz 12 ist σ ein identischer Automorphismus des Ringes T_o. Der Folgerung 2 zufolge ist dann σ' ein identischer Automorphismus des Ringes T.

Satz 15. *Jeder Automorphismus des Verbandes $\Psi_L(\Psi_P)$ induziert einen Automorphismus des Verbandes $\Pi_L(\Pi_P)$.*

Beweis. Es sei $\tilde{\sigma}$ ein Automorphismus des Verbandes Ψ_L. Wählen wir beliebig $H \in \Pi_L$. Nach dem Satz 8 existiert $H' \in \Pi_L$, so dass $H \oplus H' = T_v$ ist und nach dem Satz 6 ist $H^{\tilde{\sigma}} \oplus H'^{\tilde{\sigma}} = T_v$. Nach dem Satz 8 ist dann $H^{\tilde{\sigma}} \in \Pi_L$, d. h. $\Pi_L^{\tilde{\sigma}} \subseteqq \Pi_L$. Nachdem $(H^{\tilde{\sigma}^{-1}})^{\tilde{\sigma}} = H$ gilt, ist $\Pi_L^{\tilde{\sigma}} = \Pi_L$ und der Automorphismus $\tilde{\sigma}$ induziert einen Automorphismus des Verbandes Π_L. Mit Hilfe des Satzes 9 kann ähnliches auch für die Verbände Ψ_P, Π_P gezeigt werden.

Satz 16. *Jeder Automorphismus des Verbandes $\Psi_L(\Psi_P)$ ist durch einen Automorphismus des Ringes T_v induziert. Die Gruppen $P(\Psi_L)$, $P(\Psi_P)$ der Automorphismen der Verbände Ψ_L, Ψ_P sind mit der Gruppe $A(T_v)$ isomorph.*

Beweis. Es sei ein Automorphismus $\tilde{\sigma}$ des Verbandes Ψ_L gegeben. Dieser induziert nach dem Satz 15 einen Automorphismus $\bar{\sigma}$ des Verbandes Π_L, welcher ist ferner nach dem Satz 14 durch einen Automorphismus σ des Ringes T_v induziert. Es gilt $H^{\tilde{\sigma}} = H^{\bar{\sigma}} = H^{\sigma}$ für jedes $H \in \Pi_L$. Wähle man beliebig $J \in \Psi_L$. Dann kann man $J = \sum_{\mu \in J} T_v \varrho_\mu$ schreiben, wobei $\varrho_\mu \in T_v$, $T_v \varrho_\mu \in \Pi_L$ ist. Nachdem Ψ_L ein vollständiger Verband ist, gilt nach [2]: $J^{\tilde{\sigma}} = (\sum_{\mu \in J} T_v \varrho_\mu)^{\tilde{\sigma}} = \sum_{\mu \in J} (T_v \varrho)^{\sigma} = J^{\sigma}$. Der Automorphismus $\tilde{\sigma}$ ist durch den Automorphismus σ des Ringes T_v induziert. Wenn $\sigma \in A(T_v)$ ist, dann induziert σ einen Automorphismus $\tilde{\sigma}$ des Verbandes Ψ_L und die Abbildung $\sigma \to \tilde{\sigma}$ ist nach dem Satz 12 ein Isomorphismus der Gruppen $P(\Psi_L)$, $A(T_v)$. Der Folgerung 1 nach sind die Gruppen $P(\Pi_L)$, $A(T_v)$ isomorph und darum sind dann auch die Gruppen $P(\Pi_L)$, $P(\Psi_L)$ isomorph. Soeben auch für den Verband Ψ_P.

Literatur

[1] *Р. Бэр*: Линейная алгебра и проективная геометрия. Москва 1955.

[2] *H. Hermes:* Einführung in die Verbandstheorie. 2. Auflage. Springer-Verlag, 1967.

[3] *F. Machala:* O automorfismech definovaných na okruhu endomorfismů homogenního totálně rozložitelného modulu. Časopis pro pěstování matematiky, *96* (1971), 353—359.

[4] *K. G. Wolfson:* An ideal-theoretic characterisation of the ring of all linear transformations. Amer. Journ. Math., *75* (1953), 358—386.

Anschrift des Verfassers: 771 46 Olomouc, Leninova 26.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

INDEFINITE HARMONIC CONTINUATION

JOSEF KRÁL and JAROSLAV LUKEŠ, Praha

(Received May 24, 1971)

The purpose of this note is to characterize harmonic spaces whose harmonic functions admit indefinite harmonic continuation.

In the classical potential theory harmonic functions are defined as continuous solutions of the Laplace differential equation. In the one-dimensional case these functions reduce to locally affine functions and any harmonic (=affine) function on an interval of the real line R^1 can thus be harmonically continued onto the whole of R^1. We are going to describe all topological spaces which have a similar exceptional property (analoguous to that of the real line in the classical case) in the framework of the Brelot axiomatic theory of harmonic functions.

By a Brelot space we mean a locally compact and locally connected Hausdorff topological space X which is equipped with a sheaf $\mathscr{H}$ associating with each open set $U \subset X$ a real vector – space $\mathscr{H}(U)$ of continuous functions, termed harmonic functions on U, such that the sheaf axiom, the basis axiom and the Brelot convergence axiom are satisfied. We shall say that a Brelot space $(X, \mathscr{H})$ has the continuation property CP if and only if each point $x \in X$ is contained in a domain (=open and connected set) $D \subset X$ such that each harmonic function defined on an arbitrary subdomain of D can be harmonically continued onto D. More precisely: Whenever $D_0 \subset D$ is a domain and $h_0 \in \mathscr{H}(D_0)$, then there is an $h \in \mathscr{H}(D)$ such that $h_0 = \operatorname{Rest}_{D_0} h$ (= the restriction of h to D_0). It is known that if X is a 1-dimensional manifold, then every Brelot space $(X, \mathscr{H})$ has CP (cf. [5]), and one may naturally ask whether there are other Brelot spaces possessing CP, besides those defined on 1-dimensional manifolds. We are going to show that such spaces can be completely described and, as shown by the following theorem, cannot topologically deviate much from 1-dimensional manifolds.

Theorem. *A Brelot space $(X, \mathscr{H})$ enjoys CP if and only if for every $x \in X$ there is a finite number $n \geqq 2$ (depending on x) of arcs*[1]) *$C_1, \dots, C_n$ in X such that $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$*

[1]) By an arc in X we mean a subspace $C \subset X$ which is homeomorphic with the segment $\{a;\ a \in R^1, 0 \leqq a \leqq 1\}$.

is a neighborhood of x in X and

$$C_i \cap C_j = \{x\} \quad \textit{whenever} \quad 1 \leqq i < j \leqq n\,.$$

We shall see that the sufficiency of the above condition can be proved quite easily. Its necessity, however, requires some preliminary investigations (note that X is a general locally compact and locally connected space which is not assumed to have a countable base).

We shall first assume in sections 1–5 that $(X, \mathscr{H})$ is a Brelot space with a connected X satisfying the following condition:

(C) For every domain $D_0 \subset X$ and every $h_0 \in \mathscr{H}(D_0)$ there is an $h \in \mathscr{H}(X)$ such that $\text{Rest}_{D_0} h = h_0$.

We shall prove several auxiliary results describing properties of such an X. For $M \subset X$ we denote by $\overline{M}$ and M^* the closure and the boundary of M, respectively. $\mathscr{C}(M)$ will stand for the Banach space of all bounded continuous real-valued functions on M with the usual supremum norm. The number (possibly zero or infinite) of all points in M will be denoted by $n(M)$ $(0 \leqq n(M) \leqq \infty)$. Let us recall that an open set $U \subset X$ is termed regular if it is relatively compact, $U^* \neq \emptyset$ and for each $f \in \mathscr{C}(U^*)$ there is a uniquely determined $H_f^U \in \mathscr{C}(\overline{U})$ such that $\text{Rest}_U H_f^U \in \mathscr{H}(U)$, $\text{Rest}_{U^*} H_f^U = f$ and, besides that, $H_f^U \geqq 0$ whenever $f \geqq 0$.

1. Lemma. *If D_0, D_1 are regular domains such that*

$$D_0 \subset D_1\,, \tag{1}$$

then $n(D_0^*) \leqq n(D_1^*)$. If, moreover,

$$\overline{D}_0 \subset D_1\,, \tag{2}$$

then $n(D_0^*) < \infty$.

Proof. Assuming (1) we define the mapping T of $\mathscr{C}(D_1^*)$ into $\mathscr{C}(D_0^*)$ by

$$\mathrm{T}f = \text{Rest}_{D_0^*} H_f^{D_1}\,, \quad f \in \mathscr{C}(D_1^*)\,.$$

Clearly, T is a continuous linear mapping. Given an arbitrary $g \in \mathscr{C}(D_0^*)$ we may apply to $h_0 = \text{Rest}_{D_0} H_E^{D_0}$ the process of harmonic continuation described in (C) so as to get an $h \in \mathscr{H}(X)$ with $\text{Rest}_{D_0} h = h_0$. Clearly, $g = \text{Rest}_{D_0^*} h = \mathrm{T}f$, where $f = \text{Rest}_{D_1^*} h \in \mathscr{C}(D_1^*)$. We see that T maps $\mathscr{C}(D_1^*)$ onto $\mathscr{C}(D_0^*)$. The assumption $n(D_1^*) < n(D_0^*)$ would mean that D_1^* is finite and the dimension of $\mathscr{C}(D_1^*)$ is less than the dimension of $\mathscr{C}(D_0^*)$ (which is the image of $\mathscr{C}(D_1^*)$ under T) – a contradiction. Now assume (2) and denote by

$$B_1 = \{f : f \in \mathscr{C}(D_1^*),\ |f| < 1\}$$

the unit ball in $\mathscr{C}(D_1^*)$. By the Harnack principle, the image of B_1 under T is a relatively compact set $\mathrm{T}B_1$ in $\mathscr{C}(D_0^*)$. On the other hand, the Banach theorem assures that T is open, because it maps $\mathscr{C}(D_1^*)$ onto $\mathscr{C}(D_0^*)$. We conclude that the unit ball in $\mathscr{C}(D_0^*)$ is relatively compact and this implies $n(D_0^*) < \infty$.

2. Lemma. *If D is a regular domain, then $1 < n(D^*) < \infty$ and $\bar{D}$ is contained in a domain on which there exists a positive potential.*

Proof. Fix a regular domain D, $y \in D$ and another regular domain D_0 such that $y \in D_0$, $\bar{D}_0 \subset D$. Suppose that $n(D^*) = 1$. By preceding lemma also $n(D_0^*) = 1$, say $D_0^* = \{z\}$. Choose $x \in D \setminus \bar{D}_0$ and denote by C_x and C_y that component of $D \setminus \{z\}$ which contains x and y, respectively. The equality $C_x = C_y = C$ would mean that $C \cap D_0 = C \cap \bar{D}_0$ is open and closed in C and $y \in C \cap D_0$, $x \in C \setminus D_0$, which is a contradiction. We have thus

$$C_x \cap C_y = \emptyset\,, \quad z \in \bar{C}_x \cap \bar{C}_y\,.$$

Next choose a regular domain D_z such that $z \in D_z$, $\bar{D}_z \subset D \setminus \{x, y\}$. Then $C_x \cap D_z \neq \emptyset \neq C_y \cap D_z$ and $x \in C_x \setminus D_z$, $y \in C_y \setminus D_z$, so that the boundary of D_z must meet both C_x and C_y. Consequently, $n(D_z^*) \geqq 2 > n(D^*)$, which violates lemma 1. This contradiction proves the inequality $n(D^*) > 1$.

Since D^* contains at least two points, we may fix two strictly positive linearly independent functions $f_1, f_2 \in \mathscr{C}(D^*)$ and employ (C) to continue $\mathrm{H}_{f_1}^D$ and $\mathrm{H}_{f_2}^D$ harmonically onto the whole of X obtaining thus h_1 and h_2 in $\mathscr{H}(X)$, respectively. Both h_1 and h_2 being positive on $\bar{D}$ we may fix a domain $D_1 \supset \bar{D}$ such that h_1 and h_2 remain positive on D_1. Since h_1 and h_2 are non-proportional on D_1, we conclude that there is a positive potential on the harmonic space $(D_1, \mathrm{Rest}_{D_1} \mathscr{H})$ ($=$ the restriction of the harmonic space $(X, \mathscr{H})$ to D_1). Applying proposition 7.1 of R. M. Hervé [4] (cf. p. 440) we get a regular domain $D_2 \subset D_1$ such that $\bar{D} \subset D_2$ which, by lemma 1, guarantees $n(D^*) < \infty$.

3. Lemma. *Let $D \neq \emptyset$ be a relatively compact domain, $F \in \mathscr{C}(\bar{D})$, $\mathrm{Rest}_D F \in \mathscr{H}(D)$ and suppose that the constant functions are harmonic on D. If real numbers u, v do not belong to $F(D^*)$ and satisfy the inequalities*

$$\min F(D^*) < u < v < \max F(D^*)\,,$$

then the system S of all components of

$$D_{uv} = \{z : z \in D,\ u < F(z) < v\}$$

is finite.

Proof. Denote by d_u the distance of u from $E_v = \{v\} \cup F(D^*)$. Similarly, let d_v denote the distance of v from $E_u = \{u\} \cup F(D^*)$. With each $x \in \bar{D}_{uv}$ we associate an open neighborhood D_x as follows. If $x \in D_{uv}$ then D_x is the component of D_{uv} containing x. If $x \in D^*_{uv}$ then D_x will be an open set containing x such that the diameter of $F(\bar{D} \cap D_x)$ is less than $\frac{1}{2} \min (d_u, d_v)$. The system

$$(3) \qquad \{D_x; x \in \bar{D}_{uv}\}$$

must contain a finite subcover

$$(4) \qquad D_{x_1}, \ldots, D_{x_p}$$

of the compact $\bar{D}_{uv}$. Suppose that there is a component C of D_{uv} such that $F(C^*) \cap \cap \{u, v\} = \emptyset$. Then C is closed in D and, consequently, $C = D = D_{uv}$, which is impossible, because the inequalities $\min F(D^*) < u, v < \max F(D^*)$ guarantee that D_{uv} is a proper subset of D.

We have thus

$$F(C^*) \cap \{u, v\} \neq \emptyset$$

for every $C \in S$. Consider now an arbitrary $C \in S$ and suppose, for definiteness, that $v \in F(C^*)$ (the case $u \in F(C^*)$ may be settled by a symmetric argument). Since $F(C) \subset F(D_{uv}) \subset \{a; a \in R^1, a < v\}$, F cannot be constant on C and the minimum principle together with the inclusions $F(C^*) \subset \{u, v\} \cup F(D^*)$ imply $F(C^*) \cap E_u \neq \emptyset$. C being connected we conclude that there is a $z \in C$ with

$$|F(z) - v| = \tfrac{1}{2} d_v \, .$$

If $x \in D^*_{uv} (\subset D^* \cup \{y; y \in D, F(y) = u \text{ or } F(y) = v\})$, then $F(x) \in \{v\} \cup E_u$ and $|F(x) - F(z)| \geqq \frac{1}{2} d_v$, so that $z \notin D_x$. We see that C is the only element of (3) containing z. Thus C must occur in (4) and $S \subset \{D_{x_1}, \ldots, D_{x_p}\}$.

4. Lemma. *Every regular domain (considered as a subspace of X) has a countable basis.*

Proof. Let D be a regular domain. Then there is a (strictly) positive $h_0 \in \mathscr{C}(\bar{D})$ which is harmonic on D. Employing the harmonic continuation (see (C)) we get an $h \in \mathscr{H}(X)$ with $\mathrm{Rest}_{\bar{D}}\, h = h_0$. There is a domain $D_1 \supset \bar{D}$ such that h remains positive on D_1. Passing from the Brelot space $(D_1, \mathrm{Rest}_{D_1} \mathscr{H})$ to the new space whose harmonic functions are obtained by the standard procedure of dividing the original harmonic functions by h, we get a connected Brelot space enjoying (C) on which constant functions are harmonic; besides that, D is again a regular domain in the new space. This consideration shows that we may assume for the proof of our lemma that the constant functions are harmonic on X. We know from lemma 2 that $D^* = = \{x_1, \ldots, x_n\}$ is finite.

With each n-tuple of rational numbers $[r_1, \ldots, r_n] = r$ we associate an $F_r \in \mathscr{C}(\bar{D})$ which is harmonic on D and satisfies

$$F_r(x_j) = r_j \, , \quad 1 \leqq j \leqq n \, .$$

If, besides that, the rational numbers u, v satisfy the conditions

(5) $$\min_j r_j < u < v < \max_j r_j\,,$$

(6) $$\{u, v\} \cap \{r_1, \ldots, r_n\} = \emptyset\,,$$

then we denote by S^r_{uv} the system of all components of $\{z; z \in D, u < F_r(z) < v\}$. In view lemma 3, S^r_{uv} is finite, so that the system

$$S = \bigcup S^r_{uv}$$

(where $r = [r_1, \ldots, r_n]$ runs over all n-tuples of rational numbers and u, v run over all pairs of rational numbers satisfying the corresponding conditions (5), (6)) is countable. We are going to prove that S is a basis of D. Let z be an arbitrary point in D and let U be an arbitrary regular domain such that $z \in U \subset \overline{U} \subset D$. According to lemmas 1 and 2, $U^* = \{y_1, \ldots, y_s\}$, where $2 \leqq s \leqq n$. Define $g \in \mathscr{C}(U^*)$ by

$$g(y_1) = 1\,, \quad g(y_k) = 0 \quad \text{for} \quad 2 \leqq k \leqq s\,.$$

Then

$$0 < H^U_g(z) < 1\,,$$

because constants are harmonic on $D \supset \overline{U}$. Fix $\varepsilon > 0$ small enough to secure

$$2\varepsilon < H^U_g(z) < 1 - 2\varepsilon$$

and apply harmonic continuation to get an $h \in \mathscr{C}(\overline{D})$ with $\mathrm{Rest}_D\, h \in \mathscr{H}(D)$ and $\mathrm{Rest}_U\, h = H^U_g$. Noting that $h = H^D_h$ on $\overline{D}$ and making use of the fact that the values attained by H^D_f at the points $y_1, \ldots, y_s$, z depend continuously on $f \in \mathscr{C}(D^*)$, we choose rational numbers r_j approximating the values $h(x_j)$ $(1 \leqq j \leqq n)$ in such a way that the following inequalities hold for F_r corresponding to $r = [r_1, \ldots, r_n]$:

$$|F_r(z) - H^U_g(z)| < \varepsilon\,, \quad |F_r(y_k) - g(y_k)| < \varepsilon\,, \quad 1 \leqq k \leqq s\,.$$

Then

(7) $$F_r(y_1) > 1 - \varepsilon > F_r(z) > \varepsilon > \max\{F_r(y_k); 2 \leqq k \leqq s\}\,.$$

Further choose rational numbers u, v satisfying (6) and

(8) $$\varepsilon < u < F_r(z) < v < 1 - \varepsilon\,,$$

so that $u, v \in F_r(\overline{D}) = \{a; a \in R^1, \min_j r_j \leqq a \leqq \max_j r_j\}$. Let C be the component of $\{w; w \in D, u < F_r(w) < v\}$ containing z. In view of (7), (8), $F_r(U^*)$ does not meet $F_r(C) \subset \{a; a \in R^1, u < a < v\}$. Consequently, $U^* \cap C = \emptyset$ and $C \subset U$, because $z \in C \cap U$. We have thus found a $C \in S$ with $z \in C \subset U$, which shows that S is a basis.

5. Lemma. *If D_1, D_2 are arbitrary domains contained in a regular domain, then*

$$D_1 \subset D_2 \Rightarrow n(D_1^*) \leqq n(D_2^*)\,.$$

Proof. Suppose that $n(D_1^*) > n(D_2^*)$ for a couple of domains $D_1 \subset D_2$ contained in a regular domain D. Let $D_2^* = \{z_1, \ldots, z_s\}$, choose an $(s+1)$-tuple of points $x_1, \ldots, x_{s+1} \in D_1^*$ and associate with every i a connected neighborhood V_i of x_i such that $V_1, \ldots, V_{s+1}$ are mutually disjoint. Further choose $y_i \in V_i \cap D_1$ $(i = 1, \ldots, s+1)$ and consider the compact $K = \{y_1, \ldots, y_{s+1}\}$. By lemma 2, $\bar{D}$ is contained in a Brelot space carrying a positive potential. This permits us to apply proposition 7.1 of R. M. Hervé [4] guaranteeing the existence of a regular domain D_0 with $K \subset D_0$, $\bar{D}_0 \subset D_1$. In view of lemma 2, $n(D_0^*) < \infty$. Since every V_i meets both D_0 (note that $y_i \in V_i \cap D_0$) and its complement (note that $x_i \in V_i \setminus D_1$), we conclude that $V_i \cap D^* \neq \emptyset$ so that D_0^* must contain at lest $s+1$ different points $u_1, \ldots, u_{s+1}$.

Define $f_i \in \mathscr{C}(D_0^*)$ by

$$f_i(u_i) = 1\,, \quad f_i(D_0^* - \{u_i\}) = \{0\}$$

and apply harmonic continuation (see (C)) to $H_{f_i}^{D_0}$ so as to obtain an $h_i \in \mathscr{H}(X)$ with $\mathrm{Rest}_{D_0^*} h_i = f_i$ $(i = 1, \ldots, s+1)$. Since D_2^* contains only s elements, we may fix real constants $a_1, \ldots, a_{s+1}$, not all zero, such that

$$h = a_1 h_1 + \ldots + a_{s+1} h_{s+1}$$

vanishes identically on D_2^*. By the minimum principle (which is applicable, because $D_2 \subset D$ and D is regular) we conclude that $h = 0$ on D_2. In particular, $0 = h(u_i) = a_i$ $(i = 1, \ldots, s+1)$, which is a contradiction.

Now we are in position to prove the following

6. Proposition. *If the space X is connected and the Brelot space $(X, \mathscr{H})$ satisfies (C), then every $x \in X$ has a neighborhood of the form $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$, where $n \geqq 2$ and $C_1, \ldots, C_n$ are arcs in X (whose number depends on the choice of $x \in X$) such that*

$$C_i \cap C_j = \{x\} \quad \text{whenever} \quad 1 \leqq i < j \leqq n\,. \tag{9}$$

Proof. Consider an arbitrary point $x \in X$ and fix a regular domain $D_1 \ni x$. It follows easily from lemma 5 that there is a regular domain D with $x \in D \subset \bar{D} \subset D_1$ such that $n(D_0^*) = n(D^*)$ for every domain D_0 satisfying $x \in D_0 \subset D$. In view of lemma 4, $\bar{D}$ is a metrizable continuum. Let y be an arbitrary point in D^* and let D_2 be an arbitrary regular domain containing y. Since $n(D^*) + n(D_2^*) < \infty$, the boundary of $\bar{D} \cap D_2$ in the space $\bar{D}$ is finite. We see that y has in $\bar{D}$ arbitrarily small neighbourhoods with a finite boundary, whence it follows (see [6], p. 209) that $\bar{D}$ is locally connected at y. Thus $\bar{D}$ is a locally connected metrizable continuum such that every sufficiently small neighborhood of x in $\bar{D}$ has at least $n = n(D^*) \geqq 2$ boundary points. Employing the so-called "n-Beinsatz" of K. MENGER (cf. [6], p. 203) we conclude that there are arcs $C_1, \dots, C_n$ in $\bar{D}$ satisfying (9). Denote by y_i the end-point of C_i different from x and choose a domain $U \subset D$ containing x such that

$$U \cap \{y_1, \dots, y_n\} = \emptyset .$$

Order C_i naturally from x to y_i and denote by x_i the first point on C_i belonging to $C_i \setminus U$ $(i = 1, \dots, n)$. Assuming $U \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset$ we fix $x_0 \in U \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ and choose an arc C_0 connecting x and x_0 in U; this is possible, because U is arc-wise connected (see [6], § 45, pp. 182, 184). Let $\hat{U}$ be the component of $U \setminus \{x_0\}$ containing x and denote by $\hat{C}_j$ the component of $C_j \setminus \{x_j\}$ containing x $(0 \leqq j \leqq n)$. Then

$$\bigcup_{j=0}^{n} \hat{C}_j \subset \hat{U}$$

and $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset \hat{U}^*$, which contradicts lemma 5, because the domain $\hat{U} \subset D$ cannot have more than n boundary points. Thus $U \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ and $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ is a neighborhood of x.

Now it is easy to present a proof of the theorem. Applying proposition 6 locally one immediately obtains the "only if" part of the theorem. In order to prove the "if" part of the theorem consider an arbitrary point $x \in X$ and fix the arcs $C_1, \dots, C_n$ satisfying (9) such that $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ is a neighborhood of x. We may clearly suppose that the interior D of $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ is a regular domain; the proof will be complete if we show that every $h_0 \in \mathscr{H}(D_0)$ defined on a subdomain $D_0 \supset D$ can be harmonically continued so as to yield an $h \in \mathscr{H}(D)$. This is celar if $x \in D_0$, because then $\tilde{C}_i = C_i \cap D \setminus \{x\}$ are one-dimensional manifolds and, by [5] (see lemma 1.21), h_0 can be continued harmonically from $C_i \cap D_0 \setminus \{x\}$ onto $\tilde{C}_i$ for $i = 1, \dots, n$. If $x \notin D_0$, then D_0 can meet only one of the arcs, say C_1, and we may continue h_0 harmonically onto $\tilde{C}_1$. Let $C_i \setminus D = \{x_i\}$ $(i = 1, \dots, n)$ and define $f_0, f_1 \in \mathscr{C}(D^*)$ by

$$f_1(D^*) = \{1\} = f_0(D^* \setminus \{x_1\}), \quad f_0(x_1) = 0 .$$

Then $H^D_{f_0}(x) > 0$ and $H^D_{f_0}, H^D_{f_1}$ are easily seen to be linearly independent on $\tilde{C}_1$. Consequently, one may choose real constants a_1, a_2 such that $h_0 = a_1 H^D_{f_0} + a_2 H^D_{f_1}$ on C_1 (see [5], lemma 1.6) and $a_1 H^D_{f_0} + a_2 H^D_{f_1}$ yields the required extension of h_0.

Corollary. *In order that a Brelot space $(X, \mathscr{H})$ possess the following property*

UCP: *every $x \in X$ is contained in a domain $D \subset X$ such that for every subdomain $D_0 \subset D$ and every $h_0 \in \mathscr{H}(D_0)$ there exists a uniquely determined $h \in \mathscr{H}(D)$ with* $\operatorname{Rest}_{D_0} h = h_0$,

it is necessary and sufficient that X be a one-dimensional manifold.

Proof. It is known that Brelot spaces defined on one-dimensional manifolds possess UCP (see [5], lemma 1.21). If $(X, \mathscr{H})$ is a Brelot space enjoying UCP then, by the above theorem, every $x \in X$ has a neighborhood of the form $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$, where $n \geqq 2$ and $C_1, \ldots, C_n$ are arcs in X satisfying (9). We have to show that $n = 2$. We may clearly suppose that the interior D of $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ is a regular domain. Let $C_i \setminus D = \{x_i\}$, $1 \leqq i \leqq n$. Assume that $n > 2$ and define functions $h, g \in \mathscr{C}(\bar{D})$ harmonic on D by the boundary conditions

$$h(x_1) = 0 = h(x_2)\,, \quad h(x_j) = 1 \quad \text{for} \quad 2 < j \leqq n\,,$$
$$g(x_1) = 0\,, \quad g(x_2) = 1\,, \quad g(x_j) = 0 \quad \text{for} \quad 2 < j \leqq n\,.$$

Then $h(x) > 0$ and if we put $f = (g(x)/h(x))\, h$, we get $f(x_1) = 0 = g(x_1)$, $f(x) = g(x)$, so that $f = g$ on $\tilde{C}_1 = C_1 \setminus \{x, x_1\}$. Since $f(x_2) = 0 \neq g(x_2)$ we see that UCP is violated, because the restriction of g to $\tilde{C}_1$ has two different harmonic extensions to D.

Remark. Consider a Brelot space $(X, \mathscr{H})$ possessing CP. The above corollary shows that X must be a one-dimensional manifold provided harmonic functions satisfy the condition of quasi-analycity of A. De La Pradelle [3].

References

[1] *M. Brelot:* Axiomatique des fonctions harmoniques, Université de Montréal 1969.

[2] *M. Brelot:* Lectures on potential theory, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1960.

[3] *A. De La Pradelle:* Approximation et caractère de quasi-analycité dans la théorie axiomatique des fonctions harmoniques, Annales de l'Institut Fourier Grenoble, *XVII* (1967), 383—399.

[4] *R. M. Hervé:* Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potential, Annales de l'Institut Fourier Grenoble *XII* (1962), 415—571.

[5] *J. Král, J. Lukeš, I. Netuka:* Elliptic points in one-dimensional harmonic spaces, Comment. Math. Univ. Carolinae *12* (1971), 453—483.

[6] *C. Kuratowski:* Topologie II, Warszawa 1952.

Authors' addresses: J. Král, 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV v Praze), J. Lukeš, 186 00 Praha 8, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).

ON THE MINIMUM NUMBER OF VERTICES AND EDGES IN A GRAPH WITH A GIVEN NUMBER OF SPANNING TREES

LADISLAV NEBESKÝ, Praha

(Received May 31, 1971)

By a graph we shall mean a finite connected undirected graph without loops and multiple edges (for notions and results of graph theory see, for example, [1] or [2]). If p, q and r are integers such that $1 \leqq p \leqq q \leqq r$ and $2 \leqq q$ then by $D(p, q, r)$ we shall denote the graph with cyclomatic number 2 and with no separating vertex and such that its two vertices of degree 3 are connected to each other by arcs ([2]) of length p, q and r; the graph $D(p, q, r)$ has of course $p + q + r - 1$ vertices, $p + q + r$ edges and $pq + qr + pr$ spanning trees.

In the following, by x we shall denote a positive integer other than 2. By $\alpha(x)$ we denote the smallest number y_1 such that there is a graph having y_1 vertices and x spanning trees; by $\beta(x)$ we denote the smallest number y_2 such that there is a graph having y_2 edges and x spanning trees. Obviously $\alpha(x) \leqq \beta(x) \leqq x$, for any $x \geqq 3$. The function α has been studied by J. SEDLÁČEK [3], who also gave an impulse to the rise of the present paper.

The very simple generalization of one of the procedures used in [3] for the estimate of the function α leads to the following estimate of the function β which is given by graphs with at least one separating vertex: if x_1 and x_2 are integers and $x_1, x_2 \geqq 3$, then

$$\beta(x_1 x_2) \leqq \beta(x_1) + \beta(x_2)\,. \tag{1}$$

By making use of the graph $D(1, 2, (x - 2)/3)$ and a graph with no separating edge and with two circuits of length 3 and $x/3$, J. Sedláček [3] found an upper estimate of the function α for almost all $x \equiv 2, 3 \pmod 3$. By using the same graphs it is quite readily possible to find an estimate of the function β for the same values of the argument:

$$\text{if } x \equiv 2 \pmod 3\,, \quad x \geqq 8\,, \quad \text{then} \quad \beta(x) \leqq (x + 7)/3\,; \tag{2}$$

$$\text{if } x \equiv 3 \pmod 3\,, \quad x \geqq 9\,, \quad \text{then} \quad \beta(x) \leqq (x + 9)/3\,. \tag{3}$$

Estimate (3) of course also follows from estimate (1). Upper estimates of the function β (and hence also the function α) for almost all $x \equiv 1 \pmod 3$ are given by the following lemma.

Lemma. *It holds that:*

(4) *if* $x \equiv 1 \pmod{30}$, $x \geqq 91$, *then* $\beta(x) \leqq (x + 269)/30$;

(5) *if* $x \equiv 16 \pmod{30}$, $x \geqq 106$, *then* $\beta(x) \leqq (x + 254)/30$;

(6) *if* $x \equiv 4 \pmod{30}$, $x \geqq 64$, *then* $\beta(x) \leqq (x + 206)/30$;

(7) *if* $x \equiv 19 \pmod{30}$, $x \geqq 79$, *then* $\beta(x) \leqq (x + 221)/30$;

(8) *if* $x \equiv 7 \pmod{15}$, $x \geqq 37$, *then* $\beta(x) \leqq (x + 98)/15$;

(9) *if* $x \equiv 10 \pmod{15}$, $x \geqq 40$, *then* $\beta(x) \leqq (x + 110)/15$;

(10) *if* $x \equiv 13 \pmod{15}$, $x \geqq 43$, *then* $\beta(x) \leqq (x + 92)/15$.

Proof. By G_1 we denote the graph with 10 vertices $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, c_0$ and 11 edges $c_0a_1, a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, a_4c_0, c_0b_1, b_1b_2, b_2b_3, b_3b_4, b_4b_5, b_5c_0$; G_1 obviously has 30 spanning trees. By G_2 we denote the graph with 6 vertices $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ and with 8 edges $a_1a_2, a_2a_3, a_3a_1, b_1b_2, b_2b_3, b_3b_1, a_1b_1, a_3b_3$; G_2 obviously has 30 spanning trees. By G_3 we denote the graph with 7 vertices $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, c_0$ and 8 edges $c_0a_1, a_1a_2, a_2c_0, c_0b_1, b_1b_2, b_2b_3, b_3b_4, b_4c_0$; G_3 obviously has 15 spanning trees. We now construct graphs $G_4, \ldots, G_{10}$ such that in any one of the graphs G_i, $i = 1, 2, 3$, we select vertices v and w, and then complete the respective graph G_i by $j - 1$ vertices and j edges so that the vertices v and w are connected to each other by an arc of length j of which every inner vertex is different from all vertices of the graph G_i. We obtain the graph $G_4, \ldots, G_{10}$, by selecting i, v, w and j as follows (j is, of course, always an integer):

$$G_4:\ i = 1,\quad v = a_2,\quad w = b_1,\quad j = (x - 61)/30 \geqq 1;$$
$$G_5:\ i = 1,\quad v = a_2,\quad w = b_2,\quad j = (x - 76)/30 \geqq 1;$$
$$G_6:\ i = 2,\quad v = a_1,\quad w = b_2,\quad j = (x - 34)/30 \geqq 1;$$
$$G_7:\ i = 2,\quad v = a_1,\quad w = a_2,\quad j = (x - 19)/30 \geqq 2;$$
$$G_8:\ i = 3,\quad v = a_1,\quad w = b_1,\quad j = (x - 22)/15 \geqq 1;$$
$$G_9:\ i = 3,\quad v = a_1,\quad w = a_2,\quad j = (x - 10)/15 \geqq 2;$$
$$G_{10}:\ i = 3,\quad v = a_1,\quad w = b_2,\quad j = (x - 28)/15 \geqq 1.$$

There is little difficulty in seeing that the numbers of edges of the graphs $G_4, \ldots, G_{10}$ give successively estimations (4)–(10).

Theorem 1. *If* $x = 1$, *then* $\alpha(x) = 1$, $\beta(x) = 0$; *if x is one of the numbers* 3, 4, 5, 6, 7, 10, 13, 22, *then*

(11) $$\alpha(x) = \beta(x) = x;$$

if $x = 8$, *then* $\alpha(x) = 4$, $\beta(x) = 5$; *if* $x = 9$, *then* $\alpha(x) = 5$, $\beta(x) = 6$. *Otherwise*

$$\alpha(x) < \beta(x) \leqq \frac{x + 1}{2}\,. \tag{12}$$

Proof. The cases $x \leqq 10$ are easily verifiable; the value of the function α for $x \leqq 9$ have been given by J. Sedláček [3]. From (2) it follows that (12) holds for $x = 11$. The graph $D(2, 2, 2)$ leads to estimate (12) for $x = 12$. There is no graph with cyclomatic number 2 which has 13 spanning trees, and any graph with a greater cyclomatic number has more than 13 spanning trees; hence (11) holds for $x = 13$. There is no graph with cyclomatic number 2 or 3 which has 22 spanning trees, and any graph with a greater cyclomatic number has more than 22 spanning trees; hence (11) holds for $x = 22$. If $x \geqq 106$ it is possible to use exactly one of the estimates (2)–(10) for it; this one estimate then leads to estimate (12).

Now, let us assume that $14 \leqq x < 106$, $x \neq 22$. In so far as it is possible to use for such an x any of estimates (1)–(10), we obtain estimate (12) for it. There remain the cases $x = 19, 31, 34, 46$ and 61; for these x it is possible to obtain estimate (12) by graphs $D(1, 3, 4)$, $D(1, 3, 7)$, $D(1, 4, 6)$, $D(2, 3, 8)$ and $D(3, 4, 7)$ in turn. The proof is complete.

Now we shall turn to other relationship between the functions α and β.

Theorem 2. *Let z be an integer such that $z \geqq 11$ and $z \neq 13, 22$. Then there is no graph having simultaneously $\alpha(z^{z-2})$ vertices, $\beta(z^{z-2})$ edges and z^{z-2} spanning trees.*

Proof. The only graph having $\alpha(z^{z-2})$ vertices and z^{z-2} spanning trees is the complete graph having z vertices; it has $z(z-1)/2$ edges. From (1) and (12) it follows that $\beta(z^{z-2}) \leqq (z-2)\,\beta(z) \leqq (z-2)(z+1)/2 < z(z-1)/2$. The proof is complete.

References

[1] *R. G. Busacker, T. L. Saaty:* Finite Graphs and Networks: An Introduction with Applications, McGraw-Hill, New York 1965.

[2] *O. Ore:* Theory of Graphs, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. *38*, Providence 1962.

[3] *J. Sedláček:* On the minimal graph with a given number of spanning trees, Canad. Math. Bull. *13* (1970), 515–517.

Author's address: 116 38 Praha 1, nám. Krasnoarmějců 2 (Filosofická fakulta Karlovy university).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

CORRECTIONS TO MY PAPERS "SOME REMARKS ON MENGER'S THEOREM" AND "ALTERNATING CONNECTIVITY OF DIGRAPHS"

BOHDAN ZELINKA, Liberec

Theorems 4, 5, 6 and 8 from the paper „*Some remarks to Menger's theorem*" (Čas. pěst. mat. *96* (1971), 145–150) and Theorems 9 and 9′ from the paper „*Alternating connectivity of digraphs*" (Čas. pěst. mat. *96* (1971), 151–163) do not hold (the proofs are incorrect).

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

FRANTIŠEK PÚCHOVSKÝ, Žilina: *On the zeros of generalized Jacobi's orthogonal polynomials.* (O nulových bodoch zobecnenych Jacobiho ortonormálnych polynómov.)

V tomto pojednaní sa dokazujú niektoré vety o nulových bodoch polynómov $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^{n-k}$, $a_0^{(n)} > 0$ ortonormálnych vzhľadom k funkcii $Q(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta e^{u(x)}$.

MILAN TVRDÝ, OTTO VEJVODA, Praha: *General boundary value problem for an integrodifferential system and its adjoint* (Obecná okrajová úloha pro integrodiferenciální soustavu a k ní adjungovaná úloha.)

V práci je odvozen adjungovaný problém k okrajovému problému $\dot{x} = A(t)\,x + \int_a^b [\mathrm{d}_s G(t,s)] \,.\, x(s) + f(t)$, $\int_a^b [\mathrm{d}L(s)]\,x(s) = l$ tak, že platí Fredholmova alternativa. Dále je uvedeno několik existenčních vět pro příslušný slabě nelineární problém. (Přitom je také zahrnut tzv. kritický případ.)

JOZEF KAČUR, Bratislava: *On boundedness of the weak solution for some class of quasilinear partial differential equations.* (Ohraničenosť slabého riešenia pre kvazilineárne parciálne diferenciálne rovnice.)

V práci sa študuje existencia, jednoznačnosť a ohraničenosť slabého riešenia Dirichletovho okrajového problému pre nelineárne eliptické rovnice typu

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) + a_0(x,u) = f$$

v ohraničenej oblasti $\Omega \subset \mathsf{E}^N$. Rasty $a_i(x,p)$ v $p \equiv (p_1, \ldots, p_N)$ sú popísané pomocou funkcií istej triedy M_3, ktorá je podstatne širšia ako trieda všetkých polynómov $|u|^p$. Funkcia $a_0(x,u)$ splňuje následovné obecné podmienky rastu: $|a_0(x,u)| \leqq c(1 + |g_0(u)|)$ a $u a_0(x,u) \geqq c_1 u\, g_0(u) - c_2$ pre všetky $u \in \mathsf{E}^1$, pričom $g_0(u) \in \mathsf{C}^1(-\infty, \infty)$ a $u\, g_0(u)$ je konvexná, párna pre dostatečne veľké u a $\lim_{u \to \infty} (u\, g_0(u))' = \infty$. Ak $\mathbf{A}$ je samoadjungovaný lineárny eliptický operátor druhého rádu, ktorého koeficienty sú hölderovské funkcie, $a_0(x,u) \in \mathsf{C}^1(\bar{\Omega} \times \langle -\mathsf{K}, \mathsf{K} \rangle)$ pre všetky $\mathsf{K} > 0$ a $(u_1 - u_2)\,[a_0(x,u_1) - a_0(x,u_2)] \geqq 0$ pre všetky $u_1, u_2 \in \mathsf{E}^1$, potom Dirichletov okrajový problém $\mathbf{A}u + a_0(x,u) = f$ má klasické riešenie.

BOHDAN ZELINKA, Liberec: *On some graph-theoretical problems of V. G. Vizing.* (O některých Vizingových problémech z teorie grafů.)

V článku jsou částečně rozřešeny dva Vizingovy problémy. V prvé části je určen největší počet hran grafu s daným počtem uzlů a s Hadwigerovým číslem 3. Druhá část se týká počtu hran grafu s daným počtem uzlů, jehož kostra má daný počet koncových hran.

JIŘÍ JARNÍK, Praha: *On the relation of solutions and coefficients of linear differential equation.* (O vztahu mezi řešeními a koeficienty lineární diferenciální rovnice.)

Buď dáno k funkcí se spojitými derivacemi n-tého řádu, $n > k$, jejichž Wronského ($n \times k$)-matice má v intervalu I stále hodnost k. Pak existuje lineární diferenciální rovnice n-tého řádu taková, že dané funkce jsou její řešení. V článku je udána metoda (zobecňující výsledek Ascoliho), jak nalézt všechny takové rovnice.

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc: *Über Automorphismen des Endomorphismenringes eines Vektorraumes.* (O automorfismech okruhu endomorfismů vektorového prostoru.)

Všechny endomorfismy vektorového prostoru, jejichž hodnost je menší než jisté nekonečné kardinální číslo, vytvářejí okruh T_ν. V článku je dokázáno, že každý automorfismus svazu levých (pravých) ideálů okruhu T_ν je indukován automorfismem okruhu T_ν. Příslušné grupy automorfismů jsou isomorfní. Z toho pak vyplývají některé algebraické důsledky.

JOSEF KRÁL a JAROSLAV LUKEŠ, Praha: *Indefinite harmonic continuation.* (Indefinitní harmonické prodloužení.)

Je dána charakterisace všech souvislých Brelotových prostorů X, pro něž každá harmonická funkce h definovaná na libovolné oblasti $D \subset X$ se dá harmonicky prodloužit na celý prostor X.

LADISLAV NEBESKÝ, Praha: *On the minimum number of vertices and edges in a graph with a given number of spanning trees.* (O minimálním počtu uzlů a hran v grafu s daným počtem koster.)

Grafem rozumíme konečný souvislý neorientovaný graf bez smyček a násobných hran. Nechť x je celé kladné číslo, $x \neq 2$, jako $\alpha(x)$ označíme nejmenší číslo y_1 takové, že existuje graf mající y_1 uzlů a x koster; jako $\beta(x)$ označíme nejmenší číslo y_2 takové, že existuje graf mající y_2 hran a x koster. Funkci α studoval J. Sedláček. V článku je dokázáno, že $\alpha(x) < \beta(x) \leqq (x + 1)/2$ pro skoro všechna celá kladná x a že pro skoro žádné celé kladné z neexistuje graf mající současně $\alpha(z^{z-2})$ uzlů, $\beta(z^{z-2})$ hran a z^{z-2} koster.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

POZNÁMKA K JEDNOMU PROBLÉMU K. KARTÁKA

K. KARTÁK položil v [1] následující problém:

Buď f konečná funkce na $\langle 0, 1\rangle$ a nechť $N = \{t, f(t) > 0\}$ má Lebesgueovu míru nula. Rozhodněte, zda ke každému $\varepsilon > 0$ existuje taková newtonovsky integrovatelná funkce g na $\langle 0, 1\rangle$, že $g \geqq f$ a $\int_0^1 g < \varepsilon$.

Následující příklad ukazuje, že se může stát dokonce i v případě, když N je spočetná množina, že taková funkce g neexistuje.

Příklad. Je-li $x = (2k + 1) . 2^{-n}$, $(n = 1, 2, \ldots; k = 0, 1, \ldots, 2^{n-1} - 1)$, položme $f(x) = n$; není-li x uvedeného tvaru, položme $f(x) = 0$. Ukažme, že vůbec neexistuje newtonovsky integrovatelná funkce g na $\langle 0, 1\rangle$, tak, aby $g \geqq f$. Kdyby totiž taková funkce existovala, byla by nutně funkcí první třídy na $\langle 0, 1\rangle$, a tedy pro každé přirozené n by $\{x \in \langle 0, 1\rangle; g(x) \geqq n\}$ byla typu G_δ (viz [2]). Z nerovnosti $g \geqq f$ snadno zjistíme, že tato množina by byla též hustá v $\langle 0, 1\rangle$, a tedy $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \langle 0, 1\rangle; g(x) \geqq n\}$ by byla neprázdná množina (viz [2]). Snadno ovšem zjistíme, že pro $x \in G$ je $g(x) = +\infty$, což je spor.

Vzniká otázka, jaká je nutná a postačující podmínka na funkci f, aby problém měl již řešení. Abychom odpověděli na tuto otázku, musíme nejdříve mít možnost, jak sestrojit funkce (pokud možno s „hodně" body nespojitosti), které mají Newtonův integrál. Uspokojivé řešení tohoto problému podal Z. ZAHORSKI v práci [3], kde dokázal, kromě jiného, následující tvrzení. (Na citovanou práci Z. Zahorského lze též odkázat čtenáře, který by měl zájem o podrobnější informace o funkcích majících primitivní funkci).

Lemma. *Nechť $H \subset E_1$ je G_δ množina a nechť $G \subset E_1$ je taková otevřená množina, že $G \supset H$. Pak existuje taková funkce g definovaná na E_1, že platí*

(a) $g(x) = 0$ *pro* $x \notin G$,
(b) $g(x) = 1$ *pro* $x \in H$,
(c) $0 < g(x) < 1$ *pro* $x \in G \setminus H$,
(d) $g(x)$ *má Lebesgueův i Newtonův integrál na libovolném omezeném intervalu.*

Pomocí tohoto tvrzení nyní snadno dokážeme následující větu.

Věta. *Nechť f je libovolná funkce definovaná na $\langle 0, 1\rangle$, nechť $f = 0$ s.v. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) *Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje newtonovsky integrovatelná funkce g na $\langle 0, 1\rangle$, $g \geqq f$ tak, že $\int_0^1 g < \varepsilon$.*

(ii) *Existuje konečná funkce φ první třídy na $\langle 0, 1\rangle$ taková, že $\varphi \geqq f$.*

Důkaz. Implikace (i) $\Rightarrow$ (ii) je zřejmá, neboť funkce mající Newtonův integrál je první třídy. Dokažme, že (ii) $\Rightarrow$ (i). Nechť φ je konečná funkce první třídy taková, že $\varphi \geqq f$. Položme $H_n = f^{-1}((n-1, n\rangle)$ pro n přirozená a nechť F_m^k (m, k přirozená) jsou takové uzavřené množiny, že $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_m^k = \varphi^{-1}((-\infty, m))$. Buď $\Phi_n = \bigcup_{\substack{m<n \\ k<n}} F_m^k$. Pak Φ_n je uzavřená množina, $\Phi_n \cap H_n = \emptyset$ a množina H_n má míru nula. Z toho lze snadno dokázat, že existuje otevřená množina G_n tak, že $\Phi_n \cap G_n = \emptyset$, $G_n \supset H_n$ a $\mu(G_n \cap \cap (x, x_0)) \leqq (\varepsilon/n \,.\, 2^n)(x - x_0)^2$ pro všechna $x_0 \in \Phi_n$ (μ značí Lebesgueovu míru a pokládáme $(x, x_0) = (x_0, x)$ pro $x > x_0$).

Podle lemmatu nyní zvolme funkce g_n tak, že

(a) $g_n(x) = 0$ pro $x \notin G_n$,
(b) $g_n(x) = 1$ pro $x \in H_n$,
(c) $0 < g_n(x) \leqq 1$ pro $x \in G_n \setminus H_n$,
(d) g_n má Lebesgueův i Newtonův integrál na libovolném omezeném intervalu.

Položme $g = \sum_{n=1}^{\infty} n \,.\, g_n$. Buď $G_n(x) = n \int_0^x g_n(t)\,dt$ a buď $G = \sum_{n=1}^{\infty} G_n$. Z vlastností Lebesgueova integrálu ihned plyne, že G je neurčitým Lebesgueovým integrálem funkce g. Je-li $x_0 \in \langle 0, 1\rangle$, existuje takové přirozené n_0, že $x_0 \in \Phi_n$ pro všechna $n \geqq n_0$. Pak

$$\left| \int_{x_0}^{x} \sum_{n=n_0}^{\infty} n g_n(t)\,dt \right| = \left| \sum_{n=n_0}^{\infty} n \int_{x_0}^{x} g_n(t)\,dt \right| \leqq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}(x - x_0)^2 \leqq \varepsilon(x - x_0)^2,$$

a tedy $\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} G_n\right)'(x_0) = 0 = \sum_{n=n_0}^{\infty} n g_n(x_0)$. Jelikož $G_n' = n g_n$, plyne z toho, že $G' = g$. Jelikož g je všude konečná, je tvrzení dokázáno.

Literatura

[1] *K. Karták:* Úlohy a problémy, Čas. pěst. mat. *91* (1966), str. 104.
[2] *E. Čech:* Bodové množiny, Praha 1966.
[3] *Z. Zahorski:* Sur la première dérivée, Trans. Amer. Math. Soc., *69* (1950) 1—54.

David Preiss, Praha

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

RECENSE

James W. Daniel, Ramon E. Moore: COMPUTATION AND THEORY IN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS. Freeman and comp., San Francisco 1970. Stran VIII + 172, cena $ 7,50. (Edice A Series of Books in Mathematics.)

Moderní programovací jazyky zjednodušují programování do té míry, že dnes může prakticky kdokoliv použít samočinný počítač k několikahodinovému výpočtu souboru čísel, jež jsou určitým druhem „numerického řešení" diferenciální rovnice. Obecná praxe je bohužel taková, že se nadbytečným počítáním nahrazuje matematická analýza problému. Daniel a Moore ve své knize ukazují, jak asi má matematicky fundované počítání vypadat a jak lze využitím informací, které jsou o dané úloze k dispozici, snížit náklady vynaložené na výpočet řešení.

Autoři si vytkli jako cíl vyložit stručně základy teorie obyčejných diferenciálních rovnic, podat přehled moderních výpočetních metod pro řešení takových rovnic a klást přitom důraz na interakci obou těchto oblastí matematiky. Na prvním místě stojí přitom vždy počítání; nejde tedy o knihu teoretickou či knihu pro teoretiky.

Recenzovaná kniha má tři části. První část je přehled některých teoretických výsledků, které podle mínění autorů mají vztah k numerickému řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Kapitola 1 popisuje geometrické pojmy v knize dále užívané (vektorová pole, integrální křivky). V kapitole 2 se vyšetřují některé aspekty počátečních úloh, jako existence a jednoznačnost řešení, vyjádření řešení vzorci a jeho asymptotické chování. Je zde též několik poznámek o periodických řešeních. Kapitola 3 pojednává o existenci, jednoznačnosti a vyjádření řešení okrajových úloh. Popisuje se převedení na integrální rovnici nebo variační úlohu; rovněž je zde zmínka o vlastnostech monotónních úloh.

Druhá část knihy tvoří stručnou příručku obsahující některé druhy numerických metod, které se dnes užívají nebo které autoři považují za perspektivní. Jednotlivé metody nejsou detailně popisovány, důraz se klade spíše na filosofii a důležité společné rysy metod daného typu. Kapitola 4 popisuje standardní diferenční metody pro počáteční a okrajové úlohy, řešení okrajových úloh převedením na integrální rovnici a stručně se zabývá stabilitou podle Dahlquista a metodami pro periodická řešení. Méně běžné metody pro počáteční úlohy (užití Lieových řad, metody poskytující hranice pro chybu) jsou shrnuty v kapitole 5. Speciální metody pro řešení okrajových úloh (variační metody, využití monotónie) jsou uvedeny v kapitole 6. Každá ze dvou posledně jmenovaných kapitol končí komentářem k výběru metody pro daný problém.

Víceméně neorganicky je připojena závěrečná část pojednávající o transformacích souřadnic nebo záměnách proměnných, které mohou být prováděny před vlastním výpočtem, během výpočtu a po něm tak, abychom obdrželi přesnější výsledky (nebo výsledky s větší *zaručenou* přesností) s menším úsilím. V kapitole 7 se autoři zabývají globálními transformacemi, které mají být prováděny před výpočtem; jde zde především o snižování řádu systému využitím informací o prvních integrálech. V kapitole 8 se vyšetřují transformace lokálního charakteru, to jest takové, které mění v různých částech prostoru řešení svůj tvar. Krátká kapitola 9 stručně probírá transformace závislé na čase. Desátá kapitola se svým přístupem poněkud liší od tří předchozích kapitol, neboť popisuje transformace, které se provádějí až *po* výpočtu; metody zde uvedené mají svůj význam zejména při hledání hranic chyby.

Kniha není učebnicí teorie obyčejných diferenciálních rovnic ani jejich numerického řešení, ale spíše přehledem současného stavu těchto oborů (většina uváděných tvrzení není dokazována). Čtenář by proto měl mít základní znalosti z obou výše uvedených oblastí matematiky. Průběžně v textu jsou zařazována cvičení, která v prvních dvou částech knihy obsahují ilustrativní příklady a rutinní výpočty, v části třetí také řadu příkladů pro výpočet na počítači, jimiž autoři demonstrují účelnost navrhovaných postupů. Podotkněme, že tyto příklady i celý text jsou psány s vědomím všech možností, které poskytují moderní počítače a programy, jež jsou v USA k dispozici. Mám zde na mysli zejména programy pro manipulaci se symboly umožňující například formální derivování matematických výrazů a pohodlný výpočet hodnot derivací. To má za následek, že do popředí opět vystupují metody založené na přímém užití Taylorova rozvoje, které jsou v ČSSR prakticky nepoužitelné. Z tohoto důvodu mají také některé části knihy pro československého čtenáře význam spíše teoretický.

V knize je celkem běžné množství nezávažných tiskových chyb. Pouze jedna z nich by snad mohla čtenáře zmást — na str. 54 v definici D-stability má všude být z_i místo z_1. Bibliografie obsahuje přes sto položek převážně z posledních deseti let.

Autorům se podařilo napsat knihu moderní a velmi živou. Obsažený materiál zahrnuje snad vše, co může být při přibližném řešení obyčejných diferenciálních rovnic důležité. Jedinou mezeru vidím v tom, že do metod pro okrajové úlohy nejsou zahrnuty faktorizační metody založené na přesunu podmínek. Recenzovaná práce může sloužit jako kompendium i jako zdroj poučení pro ty, kdo na počítačích řeší diferenciální rovnice.

Petr Přikryl, Praha

Leopold Fejér: GESAMMELTE ARBEITEN. Vydavatel Pál Turán, člen Maďarské Akademie Věd, Akadémiai kiadó, Budapest 1970. Svazek I. 872 stran, svazek II. 850 stran.

Leopold Fejér (1880—1959) byl nesporně jednou z vůdčích postav matematiky v první polovině tohoto století. Základní matematické vzdělání získal na technice a později na universitě v Budapešti. Studoval v Berlíně (L. Fuchs, Frobenius, H. A. Schwarz), Göttingenu (Hilbert, Minkowski), Paříži (Picard, Hadamard). Působil na universitě v Kluži a Budapešti — od roku 1911 jako řádný profesor. V této své činnosti setrval — s výjimkou roku 1944 — až do své smrti 15. 10. 1959. Od roku 1908 byl členem Maďarské akademie věd.

Vydavatel Fejérova matematického díla, akademik P. Turán, ve stručném životopise L. Fejéra, který předchází úplný soubor jeho matematických prací, uvádí zásadu, kterou si L. Fejér postavil v mládí: „Udělat z komplikovaných problémů včerejška triviality zítřka". Tuto svoji zásadu Fejér vyplnil do písmene. Jeho zásadní výsledek o sčitatelnosti Fourierových řad se stal pro matematiky triviální samozřejmostí. Abychom ozřejmili význam a pronikavost Fejérova objevu, uveďme stručně situaci, jaká byla počátkem tohoto století v teorii konvergence Fourierových řad. Bylo známo, že Fourierova řada

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n(\alpha - x)\,d\alpha \tag{1}$$

konverguje bodově k $f(x)$ pro spojitou 2π-periodickou funkci f s konečnou variací (Dirichlet 1829). O konvergenci řady (1) pro obecnou spojitou funkci nebylo víc známo; známé byly ovšem explicitní příklady spojitých 2π-periodických funkcí f takových, že Fourierova řada (1) v nějakém bodě x diverguje (tyto poměrně složité příklady pocházely od du Bois-Reymonda 1873 a H. A. Schwarze 1880). Tyto příklady byly důvodem značné skepse v otázkách konvergence řady (1) pro spojitou funkci; nebylo např. jasné ani jak souvisí funkční hodnota spojité 2π-periodické funkce $f(x)$ se součtem řady (1) v případě, že tato konverguje, nemluvě o otázce reprezentovatelnosti spojité 2π-periodické funkce její Fourierovou řadou (1). V této situaci Fejér jako student

7. semestru university (po návratu z Berlína) formuluje svoji větu a v témže roce 1900 zveřejňuje svůj výsledek v krátké podobě v Comptes Rendus v Paříži. Tímto se stává rázem proslulým. Úplná verze této práce vychází v roce 1902 v Matematikai és Fiz. Lapok maďarsky ve dvou pokračováních (v pořadí 5. Fejérova publikace); je obsahem Fejérovy doktorské disertace.

Fejér si klade tuto otázku: *Nechť f je spojitá 2π-periodická funkce. Existuje jednoduchá souvislost posloupnosti funkcí*

$$s_0(x), s_1(x), \dots, s_n(x), \dots, \tag{2}$$

kde

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos k(\alpha - x)\,d\alpha\right] \tag{3}$$

s funkční hodnotou $f(x)$ i když např. limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$ *neexistuje?* Jeho odpověď je tato: *Buď f konečná a integrovatelná funkce v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$. Nechť x je buď bodem spojitosti nebo bodem nespojitosti 1. druhu funkce f. Otázka konvergence posloupnosti* (2) *v těchto bodech je obecně nejasná, posloupnost*

$$S_0(x), S_1(x), \dots, S_n(x), \dots, \tag{4}$$

kde

$$S_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_{n-1}(x)}{n}$$

v těchto bodech ovšem vždy konverguje k hodnotě $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$.

Z toho, co bylo řečeno výše, je zřejmé, že Fejér tímto rázem odpověděl na řadu otázek, do jisté míry „vyčistil stůl" a dal teorii Fourierových řad a tím také teorii reálných funkcí nový impuls. V životopise Fejéra je citován výrok G. C. Hardyho, který v roce 1922 o tomto výsledku napsal: „... this fundamental result has been the starting point of a mass of modern research".

Vstup dvacetiletého Fejéra do matematiky byl, jak je vidět, vskutku impozantní. Před čtenářem je celoživotní dílo, sestávající ze 103 vědeckých publikací L. Fejéra; je svědectvím o mimořádné vědecké aktivitě a vysoké matematické kultuře autora.

I v dalších pracech zůstává Fejér věrný své zásadě jasně a jednoduše formulovat a dokazovat poměrně složité otázky. Zmínili jsme se už o du Bois-Reymondově a Schwarzově příkladu spojité 2π-periodické funkce, pro kterou řada (1) v některém bodě diverguje. Fejér se v 31. práci z roku 1910 (Journal für die reine u. angew. Math.) vrací k příkladům tohoto typu a ukazuje, že: *funkce*

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^{n^3} + 1)\,\frac{1}{2}x}{n^2}$$

je v $\langle 0, 2\pi\rangle$ spojitá a její Fourierova řada diverguje pro $x = 0$, funkce

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n^3} x}{n^2}$$

je v $\langle 0, \pi\rangle$ spojitá a její kosinová Fourierova řada v bodě $x = 0$ diverguje.

V práci 37. z roku 1911 (Ann. École Normale Sup.) udává Fejér mimo jiné příklad Fourierovy řady spojité funkce, která diverguje ve všech bodech $x = m\pi/n$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Odvození těchto příkladů je velmi jednoduché, lze je uvést např. v universitní přednášce bez nebezpečí přílišné ztráty času i se všemi detaily důkazu. Možno říci, že téměř vše plyne bezprostředně z divergence harmonické řady $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$.

Pro Fejérovy práce je příznačné, že své výsledky, mnohdy formulované velmi jednoduše, používá při aplikacích na složité problémy v různých odvětvích matematiky a zodpovídá otevřené otázky v těchto oborech. Účinně se zapojil do vyšetřování dalších otázek sčitatelnosti Fourierových řad, trigonometrických polynomů a teorie aproximace. Napsal práce o lokalizaci kořenů algebraických rovnic, o speciálních funkcích, konformním zobrazení. Velká série jeho prací se týká teorie interpolace (tyto jsou práce z „druhé poloviny" jeho vědecké dráhy, tj. práce od roku 1916). Zajímavé jsou jeho příspěvky k mechanice a stabilitě pohybu — habilitační spis z kolozsvárské university (Kluž, 1908).

Chronologické rozložení Fejérových prací je příznačné pro první polovinu našeho století: 50 prací napsal v období 1900—1914; v období 1915—1924 vychází 10 prací, v letech 1925—1938 napsal Fejér 36 prací, v období 1939—1948 nevychází žádná jeho práce a svých posledních 8 prací zveřejňuje Fejér v období 1949—1955.

Z celkového počtu 103 prací napsal Fejér 26 článků maďarsky. 11 z těchto prací uveřejnil také v cizím jazyku; zbylých 15 maďarsky psaných článků opatřili vydavatelé těchto sebraných spisů německým překladem.

Vedle stručného životopisu je k vydání připojen ještě dodatek, ve kterém jsou uvedeny Fejérovy výsledky objevující se v pracích jiných autorů; toto jsou výsledky, které Fejér sám nezveřejnil. Vydavatel rovněž připojil k některým článkům poznámky týkající se ohlasu těchto článků, resp. popsal další vývoj dané disciplíny.

Vydáním těchto sebraných spisů se čtenáři dostává ucelený obraz o jednom z pronikavých analytiků tohoto století, odkrývá se zázemí maďarské analytické školy, ze které vyrostli např. G. Szegő, G. Pólya, P. Erdős a vydavatel tohoto díla P. Turán.

Štefan Schwabik, Praha

J. Neveu: BASES MATHÉMATIQUES DU CALCUL DES PROBABILITÉS (Matematické základy počtu pravděpodobnosti). Vyšlo v nakladatelství Masson et Cie v Paříži 1970; druhé, opravené vydání, 220 stran.

Každý, kdo chce dnes studovat počet pravděpodobnosti jako matematickou disciplínu, musí se nutně seznámit s některými partiemi matematické analýzy — zvláště teorie míry a integrálu — a to nejen důkladněji a podrobněji nežli obecně zaměřený matematik, avšak zároveň i z jistého speciálního hlediska, s přihlédnutím k potřebám právě teorie pravděpodobnosti. Opatřovat si tyto znalosti studiem knih psaných bez tohoto zvláštního zřetele a určených buď specialistům jiných oborů anebo jen k obecné orientaci není právě ekonomické. Neveuova kniha plní proto právě zde velmi užitečnou úlohu: je to totiž výtečný učební text těchto vybraných partií matematiky, psaný pro příští odborníky v teorii pravděpodobnosti. Celková úroveň výkladu odpovídá přibližně požadavkům kladeným u nás na aspiranty. Je to dílo ve svém oboru skutečně zdařilé, psané stručným, leč čtivým slohem; metodické zpracování probírané látky svědčí o autorových pedagogických zkušenostech. Není možná právě nejvhodnější ke zcela samostatnému studiu bez možnosti konsultací, předpokládá totiž určité předběžné znalosti (resp. možnost případného poučení) z příbuzných oborů (zvláště topologie, funkcionální analýzy a algebry), jejichž rozsah není explixitně předem určen. Jako literatura pro aspiranty je však Neveuova kniha bezpochyby velmi vhodná.

O kvalitách Neveuovy knihy svědčí mj. i to, že její první vydání (vyšlo v r. 1964) bylo přeloženo do angličtiny, ruštiny a němčiny; ruský překlad (Ж. Невё: Математические основы теории вероятностей; Мир, Москва 1969) je u nás běžně dostupný a našim čtenářům jistě dobře znám.

Druhé vydání se od prvního liší jen nepříliš podstatně. Sám autor označuje za největší změnu připojení nového paragrafu ke IV. kapitole; v ruském vydání, které bralo vedle originálu v úvahu i anglický překlad, je však tento paragraf už obsažen. Naproti tomu se zdá, že autor nezareagoval na všechny připomínky překladatele do ruštiny, ač v předmluvě tvrdí, že při přípravě druhého vydání zkušeností z překladů své knihy využil. To je jistě škoda, i když celková vysoká hodnota knihy tím zůstává nedotčena.

František Zítek, Praha

A. Rényi: PROBABILITY THEORY (Teorie pravděpodobnosti). Akadémiai Kiadó, Budapest 1970, stran 666.

Zmíním se nejprve o historii knihy A. Rényiho, neboť její dřívější verze nebyly v tomto časopise recenzovány. Kniha vznikla ze záznamu universitních přednášek a její první verze vyšla maďarsky r. 1954. Zcela přepracované vydání vyšlo pak německy (Wahrscheinlichkeitsrechnung, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962). Německý text byl základem pro francouzské vydání (Calcul des Probabilités, Dunod, Paris 1966) a pro další maďarské vydání (Valószínüségszámítás, Tankönyvkiadó, Budapest 1966). Recenzované anglické vydání vzniklo z německého připojením několika nových odstavců. Zcela nedávno vyšlo také české vydání, (nakladatelství Academia, Praha 1972); je zamýšleno jako standardní vysokoškolská učebnice a proto zkráceno o kapitolu o teorii informace a o několik odstavců s příliš speciálním zaměřením.

Nyní podrobněji k obsahu knihy.

V kapitole I je jevové pole vybudováno jako interpretace Booleovy algebry (podobně jako ve známé knize Glivenkově). Je vyšetřena struktura jevových polí a dokázána Stoneova věta (zde: o reprezentaci jevového pole množinovou algebrou).

V kapitole II je zavedena pravděpodobnost, nejprve jako konečná aditivní funkce definovaná na jevovém poli. Podrobně jsou vyšetřeny její vlastnosti zejména na konečných polích. Je propočtena řada příkladů z kombinatorické pravděpodobnosti. Pak je teprve podána Kolmogorovova definice pravděpodobnosti (a pravděpodobnostního prostoru), s kterou se nadále pracuje v celé knize. Při té příležitosti je uvedena věta o rozšíření míry a některé příbuzné výsledky. Je zavedena podmíněná pravděpodobnost a nezávislost jevů. Jeden odstavec je věnován tzv. geometrickým pravděpodobnostem. V závěru kapitoly jsou definovány podmíněné pravděpodobnostní prostory, jejichž teorie byla vypracována autorem v řadě prací.

V kapitole III je nejprve zaveden pojem rozdělení pravděpodobností (příslušného k nějakému rozkladu jistého jevu) a jsou probrána klasická rozdělení (binomické, hypergeometrické, Pólyovo atd.). Teprve pak je zaveden pojem diskrétní náhodné veličiny a jejích charakteristik. Podrobně je vyšetřeno Poissonovo rozdělení a je odvozen aparát vytvořujících funkcí. Závěrem je dokázána Laplace-Moivreova lokální i integrální věta se zbytkem a Bernoulliova věta.

V kapitole IV je zavedena obecná náhodná veličina a její charakteristiky; totéž vícerozměrně. Jsou probrána důležitá spojitá rozdělení (zejména normální a z něho odvozená).

Kapitola V představuje dodatky ke kapitole IV. Jsou definovány náhodné veličiny na podmíněných pravděpodobnostních prostorech, je zavedena podmíněná pravděpodobnost a podmíněná střední hodnota na základě Radonovy-Nikodymovy věty. V odstavci věnovaném měrám stochastické vazby jde výklad až k velmi netradičním výsledkům (např. věta 3). V závěru je dokázána Kolmogorovova základní věta o existenci posloupnosti náhodných veličin s danými konečněrozměrnými rozděleními (není zde tedy vyslovena pro nespočetně mnoho náhodných veličin).

Kapitola VI je věnována charakteristickým funkcím. Kromě tradičních výsledků (zejména vět o vzájemné jednoznačnosti a spojitosti vztahu mezi distribučními a charakteristickými funkcemi) jsou zde odvozeny i méně běžné věty o charakteristických vlastnostech normálního rozdělení (Cramérova, Lukacsova, Linnikova-Zingerova aj.). Dále jsou vyšetřovány charakteristické funkce náhodných veličin definovaných na podmíněných pravděpodobnostních prostorech; k tomuto cíli bylo nutno zařadit určitý úvod do teorie zobecněných funkcí (dle Mikusinského).

Kapitola VII obsahuje slabý a silný zákon velkých čísel, včetně vět pomocných, jako je Borelova-Cantelliho lemma či Kolmogorovova nerovnost; dále větu Glivenkovu, zákon iterovaného logaritmu, kritérium tří řad, zákon nula-jedničkový a opět několik netradičních témat: posloupnosti promíchaných jevů (mixing sets), stabilní posloupnosti jevů, posloupnosti permutovatelných jevů (exchangeable events) a zákony velkých čísel na podmíněných pravděpodobnostních prostorech.

Rozsáhlá kapitola VIII se týká limitních vět v teorii pravděpodobnosti. Přitom centrálnímu limitnímu problému obecně je věnováno poměrně málo místa — chybí např. limitní věty založené na kanonickém rozkladu logaritmu charakteristické funkce nekonečně dělitelných rozdělení; zato je však probrána řada speciálních limitních vět, které mají praktickou důležitost: např. limitní věta pro výběry z konečných populací, limitní věta pro součty náhodného počtu náhodných veličin, limitní rozdělení v homogenních Markovových řetězcích s konečně mnoha stavy (zde je také zařazen úvod do jejich teorie), limitní rozdělení pořádkových statistik, limitní věty pro empirické distribuční funkce, limitní rozdělení náhodných procházek. V posledním odstavci je vyložena operátorová metoda důkazů limitních vět.

Jako kapitola IX je zařazen dodatek — úvod do teorie informace. Zde se výklad soustřeďuje jen na základní pojmy; nestudují se tedy např. jejich aplikace v přenosu zpráv šumovými kanály.

Kniha obsahuje téměř 300 cvičení, zařazených vždy na konci každé kapitoly; některá jsou opatřena podrobnými návody. Do těchto cvičení jsou zařazeny teoretické doplňky k hlavnímu výkladu, ilustrativní příklady i pravděpodobnostní problémy z jiných vědních oborů. Jen málo cvičení lze vyřešit přímočarou aplikací vyložených pouček; většina cvičení je dosti obtížných a nutí čtenáře k důkladnému promyšlení prostudované látky.

Na konci knihy jsou připojeny tabulky některých rozdělení a historické a bibliografické poznámky k jednotlivým kapitolám.

Pokud jde o koncepci knihy, snažil se autor zřejmě spojit tradiční kurs teorie pravděpodobnosti s výkladem některých speciálních témat, která vybíral především z oblasti své vlastní vědecké práce. Vzhledem k úctyhodné šíři vědeckých zájmů A. Rényiho neznamená ovšem tento výběr žádnou jednostrannost knihy. (K pracem A. Rényiho a jeho spolupracovníků se vztahuje i řada cvičení). Matematická náročnost knihy je asi uprostřed mezi učebnicí Gněděnkovou a monografií Loèvovou; zdá se mi zvlášť vhodná jako učebnice pro matematicko-fyzikální fakulty — je ovšem velmi dobře použitelná i pro širší okruh zájemců. Výklad je přesný a jasný; zejména témata, k nimž měl autor bezprostřední vztah, mi připadají brilantně podána.

Profesor Rényi, který v únoru 1970 zemřel ve věku 48 let, byl znám na celém světě nejen jako vynikající vědec, ale také jako vynikající pedagog a přednášející. Jeho kniha, do níž shrnul své bohaté pedagogické zkušenosti, tuto pověst plně potvrzuje.

Václav Dupač, Praha

Alois Kufner, Jan Kadlec: FOURIER SERIES. Iliffe Books Ltd. in co-edition with Academia-Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague 1971, 358 stran, 52 obrázky. Cena Kčs 50.— (v jiných měnách neuvedena).

Vzhledem k ceně anglického vydání čtenář v našich krajích sáhne asi po české versi této knihy (vyšla v nakladatelství Academia, edice Cesta k vědění, Praha 1969). České vydání se za krátkou dobu stalo neocenitelnou pomůckou pro techniky a studijním materiálem pro posluchače nižších ročníků MFF UK.

Po úvodní kapitole (Basic Concepts) je zaveden pojem trigonometrické řady pomocí řešení rovnice struny Fourierovou metodou. Třetí kapitola se zabývá Hilbertovými prostory a obecnými ortogonálními systémy. (V dodatku je vyšetřován prostor lebesgueovsky integrovatelných funkcí.)

Ve čtvrté kapitole se na konkrétních Hilbertových prostorech (např. L_2, L_2 s vahou) ilustrují výsledky předcházející kapitoly. Praktickým příkladům je věnována pátá a šestá kapitola.

Chování a vlastnosti Fourierových řad funkcí absolutně spojitých, funkcí s konečnou variací a funkcí ze Sobolevových prostorů jsou vyšetřovány v kapitole sedmé. Kapitola osmá potom čtenáře seznamuje s pojmem Fourierova transformace.

Autoři si zřejmě vytkli za cíl, aby kniha byla napsána formou, která nevyžaduje hluboké předběžné znalosti, a aby tak byla vhodná nejen pro ty, kteří se chtějí seznámit se základy teorie Fourierových řad, ale i pro praktiky. Toto se jim plně podařilo splnit, snad až na jedinou výjimku: Celá teorie důsledně užívá Lebesgueova integrálu a paragraf čtvrtý první kapitoly, kde jsou shrnuta potřebná tvrzení (v podstatě se jedná o limitní přechod za znamením integrálu, závislost integrálu na parametru a Fubiniovu větu), se vymyká z koncepce knihy. Autoři totiž (z pochopitelných důvodů) Lebesgueův integrál nedefinují a naskýtá se otázka, zda by nebylo vhodnější, obšírněji vyložit podstatu a význam Lebesgueova integrálu.

Ke kladům knihy jistě patří, že obsahuje celou řadu příkladů (99), cvičení početních a teoretických (132) a příklady, které varují před formálním použitím dokázaných vět bez ověření všech předpokladů.

Typografická úroveň je na výši, tiskových chyb je velmi málo a nebrání porozumění textu. Jistý zmatek vznikl v kapitole první zavedením pojmů „integrál existuje" a „integrál konverguje" (např. v Theorem 1.12, str. 11, řádek 9 zdola má znít takto: Let the integral $F(\alpha)$ exist and be convergent at least for one $\alpha \in A$).

Výše zmíněný odstavec 1.4 obsahuje několik dalších drobných nedostatků, které čtenář jistě bez námahy opraví.

Ještě je třeba upozornit, že vztah (7.33) na str. 254 není dobře a tudíž důkazy následujících vět odstavce 7.9 vyžadují úprav.

Závěrem je možno říci, že publikace A. Kufnera a J. Kadlece patří do skupiny mála knih o Fourierových řadách, které vyplňují mezeru mezi vyloženě praktickými knihami a monografiemi typu A. Zygmund: Trigonometrical series a G. H. Hardy - W. W. Rogosinski: Fourier series (nedávno vyšel český překlad), které obsahují matematicky korektní základ pro aplikace.

Svatopluk Fučík, Praha

ZPRÁVY

E. C. MILNER PŘEDNÁŠEL V PRAZE

Na své cestě na kongres v Maďarsku se zastavil v červnu 1972 v Praze E. C. MILNER, profesor university v Calgary (Kanada) hostující na universitě v Cambridge (Anglie). V Matematickém ústavě ČSAV v Praze přednesl 12. června 1972 přednášku s názvem „*Embedding of tournaments in simple tournaments*", v níž informoval o výsledcích, k nimž dospěl spolu s maďarskými matematiky P. Erdösem a A. Hajnalem. Turnaj je úplný asymetrický digraf. Podmnožinu K turnaje T nazval autor konvexní právě tehdy, obsahuje-li K spolu s každou dvojicí uzlů též každý uzel, jenž leží mezi nimi (ve smyslu orientace). Turnaj je jednoduchý, neobsahuje-li kromě triviálních žádnou další konvexní podmnožinu. Přitom triviální jsou jednobodové množiny a množina složená ze všech uzlů turnaje. Hlavním účelem přednášky bylo dokázat, že až na několik vymezených výjimek lze každý turnaj vnořit do jednoduchého tím, že se přidá právě jeden další uzel.

Přednášku vyslechlo asi třicet posluchačů. V diskusi upozornili studenti MFF, že ve svém semináři došli též k pojmu jednoduchý turnaj (říkají mu křehký) a uvedli některé své výsledky.

Jiří Sedláček, Praha

XXI. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

XXI. ročník matematické olympiády proběhl letos ve čtyřech kategoriích, z nichž A, B a C byly jako obvykle určeny pro žáky škol II. cyklu a kategorie Z pro žáky ZDŠ. Účast v tomto ročníku byla opět vyšší zvláště v obnovené kategorii C. Rovněž vyšší byl i počet úspěšných řešitelů II. kola, především v kategorii A. Po dlouhé době se opět přiblížil počet pozvaných účastníků v soutěži III. kola ke stanovené horní hranici — celostátního III. kola v dubnu roku 1972 se na Kladně zúčastnilo celkem 73 žáků. Z 33 úspěšných řešitelů bylo vyhlášeno 19 vítězů. Jako první se umístil MIROSLAV KMOŠEK z Brna, druhý byl KAREL HORÁK ze Strakonic, IMRICH VRťO z Rimavské Soboty byl třetí. Z vítězů bylo vybráno osmičlenné družstvo pro XIV. mezinárodní matematickou olympiádu.

Tradiční celostátní soustředění úspěšných řešitelů kategorie B a C MO a FO proběhlo tentokráte na Slovensku v Trenčíně. Odbornou náplň zajistili členové ÚVMO pod vedením dr. I. KORCE, CSc.

Pokračovalo rovněž vydávání dalších svazků edice Škola mladých matematiků v Mladé Frontě. Pod číslem 29 vyšly „*Vytvořující funkce*" dr. Františka Zítka, CSc. a pod číslem 30 „*Malý výlet do moderní matematiky*", který připravili dr. Milan Koman, CSc. a doc. Jan Vyšín, CSc. podle materiálů experimentálních matematických škol, řízených Kabinetem pro modernisaci matematiky při Matematickém ústavu ČSAV.

Vlastimil Macháček, Praha

MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

XIV. Mezinárodní matematická olympiáda (MMO) se konala ve dnech 5.—18. července 1972 v Polsku. Zúčastnila se jí žákovská družstva ze 14 zemí: Rakouska, Bulharska, Kuby, Československa, NDR, Velké Británie, Maďarska, Mongolska, Holandska, Polska, Rumunska, Švédska, SSSR a Jugoslávie; celkem bylo 107 soutěžících.

Vlastní soutěž probíhala ve dnech 10. a 11. července v Toruni. Žáci řešili jako obvykle ve dvou půldnech po třech úlohách. Jejich řešení byla bodována; za úplné a správné řešení všech šesti úloh mohl žák získat maximálně 40 bodů. Úspěšní řešitelé byli odměněni cenami: bylo uděleno celkem 7 prvních cen (za maximální výkon 40 bodů), 16 druhých cen (za 30—39 bodů) a 30 třetích cen (za 19—29 bodů).

Nejlépe si vedli jako obvykle žáci z Maďarska, SSSR a NDR. Českoslovenští žáci získali čtyři třetí ceny: JAN BRYCHTA z Prahy, IMRICH VRŤO z Rimavské Soboty, JAROMÍR ŠIMŠA z Ostravy a MIROSLAV KMOŠEK z Brna. Celkem získali naši žáci 130 bodů a žařadili se tak v neoficiální klasifikaci družstev na deváté místo.

Vedle ryze odborného programu měli účastníci XIV. MMO možnost seznámit se též s krásami Polska a s historickými památkami, a to jednak ve Varšavě a v Toruni, kde se soutěž konala, jednak o výletech uspořádaných do severního Polska (Olštýn, Malbork, Frombork) a do Poznaně (s návštěvou Hnězdna a praslovanské osady v Biskupíně).

Podrobnější zpráva o XIV. MMO bude otištěna jednak v brožurce o XXI. ročníku naší MO (vyjde v SPN v r. 1973), jednak v časopise Pokroky MFY.

František Zítek, Praha

LETNÍ ŠKOLA Z TEORIE REÁLNÝCH FUNKCÍ

Pobočka JSMF v Košicích uspořádala ve dnech 5.—9. června 1972 v Dedinkách ve Slovenském ráji Letní školu z teorie reálných funkcí. Na programu bylo šest tříhodinových přednášek a pět referátů.

V úvodní přednášce „*Vývoj pojmu integrálu*" K. KARTÁK nejprve stručně připomenul předlebesguesovské definice integrálu, pak popsal hlavní výsledky Lebesguesových Leçons sur l'intégration a jejich vliv na rozvoj teorie integrálu a funcionální analýzy. Dále podal přehled neabsolutně konvergentních integrálů v R^1 a jejich aplikací v teorii trigonometrických řad. Na závěr připomenul výsledky našich autorů v oboru neabsolutně konvergentních integrálů v R^n ($n \geqq 2$) a položil některé problémy.

Prof. J. KURZWEIL v přednášce „*Rehabilitace součtové definice integrálu*" uvedl součtovou definici integrálu, která vznikne nevelkou modifikací Riemannovy definice, a definici tzv. variačního integrálu, které jsou obě ekvivalentní s Perronovým integrálem, a ukázal, jak se rozvíjí teorie integrálu na základě těchto definicí.

Na tuto přednášku navázal Š. SCHWABIK, který v přednášce „*O aplikaci zobecněného integrálu v teorii zobecněných diferenciálních a integrálních rovnic*" naznačil, jak se dá využít zobecněné Perronovy definice integrálu při vyšetřování systémů diferenciálních a integrálních rovnic s nespojitými řešeními. V části o integrálních rovnicích uvedl větu z funkcionální analýzy, která umožňuje vyslovit věty typu Fredholmovy alternatívy také pro případ, kdy není znám duální prostor.

V další přednášce „*Teorie analytických množin a reálných funkcí*" I. VRKOČ objasnil základní vlastnosti analytických množin v euklidovských prostorech a zvláště pak problém uniformizace analytické množiny pomocí měřitelných funkcí a naznačil použití této teorie při řešení problémů representace Carathéodoryho operátoru pomocí operátorů Nemyckého.

J. JARNÍK v přednášce „*Některé vlastnosti konvoluce*" seznámil posluchače s integrálními transformacemi s konvolučním jádrem, které lze invertovat diferenciálním operátorem nekonečného řádu. Ukázal též příklad spojité funkce, jejíž k-krát iterovaná konvoluce nemá nikde derivaci.

V závěrečné přednášce D. PREISS podal nový důkaz Maximovovy věty.

Dále byly předneseny tyto referáty: Š. SCHWABIK: „*O integrálních rovnicích se stieltjesovskými jádry*"; U. DOBRAKOV: „*O subaditivních operátorech na $C(T)$*"; L. ZAJÍČEK: „*Limitní množiny libo-*

volných reálných funkcí"; D. PREISS: „*Poznámka k polospojitým funkcím*" a F. ZÍTEK: „*O aditivizaci funkcí intervalu*".

Letní školu navštívil též prof. SIKORSKI z Varšavy, který ve své přednášce podal nový důkaz existence analytické funkce, která není borelovská, použitím věty o pevném bodu.

Srdečné prostředí, které se na letní škole vytvořilo a v neposlední řadě i hezké počasí a okolní příroda, přispěly k dobré pohodě účastníků a k úspěchu této letní školy.

Vladimír Doležal, Praha

OBHAJOBY A DISERTAČNÍ PRÁCE KANDIDÁTŮ VĚD

Před komisemi pro obhajoby kandidátských disertačních prací obhájili dne 24. dubna 1972 JAROLÍM BUREŠ práci na téma: „Deformace a ekvivalence G-struktur", dne 24. května 1972 vietnamský státní příslušník NGUYEN VAN HO práci na téma: „Probabilities of large deviations and asymptotic efficiency in the Bahadur sense for the signed rank tests" a inž. JOSEF MACHEK práci na téma: „Transfer of gas to water flowing in open channel under the conditions of macroturbulent surface renewal", dne 28. června 1972 FRANTIŠEK KRÁL práci na téma: „Stochastické aproximativní metody se znáhodněnou nezávisle proměnnou", dne 4. července 1972 HANA PETZELTOVÁ práci na téma: „Periodická řešení dvou typů slabě nelineárních evolučních rovnic" a VÁCLAV VÍTEK práci na téma: „Periodické řešení slabě nelineární hyperbolické rovnice v E_2 a E_3" a dne 5. července 1972 IVAN NETUKA práci na téma: „Třetí okrajová úloha v teorii potenciálu".

Redakce

OZNÁMENÍ

Matematický ústav ČSAV ve spolupráci s Matematicko-fyzikální fakultou UK a Laboratoří počítacích strojů VUT Brno uspořádají v Praze ve dnech 27.—31. srpna 1973

III. KONFERENCI
O ZÁKLADNÍCH PROBLÉMECH NUMERICKÉ MATEMATIKY

s mezinárodní účastí.

Tato konference navazuje na konference pořádané v Liblicích v letech 1964 a 1967.

Adresa organizačního výboru: Matematický ústav ČSAV, Opletalova 45, 110 00 Praha 1.

*

Mezinárodní matematické centrum S. Banacha ve Varšavě uspořádá od 15. září 1973 do 15. ledna 1974 semestr o matematických otázkách teorie regulace. Tématikou semestru budou 1. Otázky optimální regulace pro soustavy diferenciálních rovnic, pro soustavy parciálních diferenciálních rovnic a pro soustavy se zpožděním, 2. Teorie diferenciálních her lineárních i nelineárních, 3. Otázky stochastické regulace. Účast bude možná jen na pozvání. Informace poskytne Matematický ústav ČSAV, 115 67 Praha 1, Žitná 25.

Redakce