

## Werk

**Label:** Article

**Jahr:** 1973

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X\\_0098|log24](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0098|log24)

## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## ÜBER AUTOMORPHISMEN DES ENDOMORPHISMENRINGES EINES VEKTORRAUMES

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Eingelangt am 12. Mai 1971)

Es sei  $A$  ein Vektorraum über einem beliebigen Körper  $F$ ,  $\dim A > 2$ . Der Ring aller Endomorphismen des Raumes  $A$  sei mit  $T$  bezeichnet. Als den Rang  $r(q)$  des Endomorphismus  $q \in T$  benennen wir die Dimension des Bildes  $Aq$  des Raumes  $A$  beim Endomorphismus  $q$ . Alle Endomorphismen, deren Rang kleiner als  $\kappa_v$  ist, wo  $\kappa_v$  eine gewisse unendliche Kardinalzahl ist, bilden einen Ring  $T_v$ . Dieser Ring ist ein beiderseitiges Ideal im Ring  $T$  (vgl. [1]).

**Satz 1.** *Es seien Endomorphismen  $\xi, q$  des Vektorraumes  $A$  gegeben und sei  $\xi q \in T_v$ . Dann existieren  $\xi', q' \in T_v$ , so dass  $\xi q = \xi' q' = \xi q'$  ist.*

**Beweis.** Bezeichnen wir  $P = A\xi \cap \text{Ker}(q)$ , wo  $\text{Ker}(q)$  der Kern des Endomorphismus  $q$  ist. Wählen wir einen Unterraum  $Q \leq A$ , der in  $A\xi$  komplementär zu  $P$  ist, kurz  $P \oplus Q = A\xi$ . Dann ist  $Q \cap \text{Ker}(q) = 0$  und  $\dim Q = \dim Qq$ . Ferner ist  $A\xi q = Qq$ , d. h.  $\dim Q < \kappa_v$ .

Erwägen wir so einen Unterraum  $W \leq A$ , für welchen  $W \oplus \text{Ker}(\xi) = A$  ist. Dann ist  $W\xi = A\xi$  und man kann Unterräume  $U, V \leq W$  derartig wählen, dass  $U\xi = P$ ,  $V\xi = Q$  ist. Es gilt  $A = U \oplus V \oplus \text{Ker}(\xi)$  und jedes Element  $a \in A$  kann in der Form  $a = u + v + k$  geschrieben werden, wobei  $u \in U$ ,  $v \in V$ ,  $k \in \text{Ker}(\xi)$  ist. Wenn man den Endomorphismus  $\alpha$  mittels der Vorschrift  $\alpha a = -u\xi$  angibt, dann ist  $A\alpha = P$  und daher folgt  $A\alpha \leq \text{Ker}(q)$  und  $\alpha q = 0$ . Legen wir  $\xi' = \xi + \alpha$ . Dann ist  $A\xi' = Q$ ,  $r(\xi') < \kappa_v$  und  $\xi' \in T_v$ . Dabei ist  $\xi' q = (\xi + \alpha) q = \xi q$ .

Wählen wir den Unterraum  $S$  derartig, dass  $A = \text{Ker}(q) \oplus Q \oplus S$  ist. Dann kann jedes Element  $a \in A$  in der Form  $a = k + q + s$  geschrieben werden, wobei  $k \in \text{Ker}(q)$ ,  $q \in Q$ ,  $s \in S$  ist. Wenn man den Endomorphismus  $\beta$  durch die Vorschrift  $\beta a = -sq$  angibt, dann ist  $A\xi \leq \text{Ker}(\beta)$  und  $\xi\beta = 0$ . Legen wir  $q' = q + \beta$ . Dann ist  $aq' = qq$  und  $Aq' = Qq$ , d. h.  $q' \in T_v$ . Dabei gilt  $\xi q' = \xi(q + \beta) = \xi q$ .

**Satz 2.** *Es seien  $T_q, \omega T$  die durch die Elemente  $q, \omega \in T$  generierte Hauptideale des Ringes  $T$ . Dann ist  $T_v q = T_q \cap T_v$ ,  $\omega T_v = \omega T \cap T_v$ .*

Beweis. Nachdem  $T_v$  ein beiderseitiges Ideal in  $T$  ist, gilt  $T_v q \leq T_v$ ,  $\omega T_v \leq T_v$  und  $T_v q \leq Tq \cap T_v$ ,  $\omega T_v \leq \omega T \cap T_v$ . Wählen wir beliebig  $\xi q \in T_v$ . Dem Satz 1 zufolge existiert  $\xi' \in T_v$  derartig, dass  $\xi q = \xi' q$  ist, daher also ist  $\xi q \in T_v q$  und  $Tq \cap T_v \leq T_v q$ . Soeben zeigt man, dass auch  $\omega T \cap T_v \leq \omega T_v$  ist.

**Bemerkung.** Wenn  $q, \omega \in T_v$  ist, dann ist  $Tq = T_v q$ ,  $\omega T = \omega T_v$ .

Wenn man auf der Menge der Linksideale (Rechtsideale) des Ringes  $T$  üblicherweise die Summe  $I_1 + I_2$  zweier Ideale und deren Durchschnitt  $I_1 \cap I_2$  definiert, dann bildet diese Menge zusammen mit den Operationen  $\cap, +$  einen Verband, der mit  $\Phi_L(\Phi_P)$  bezeichnet wird. Nachdem  $T$  ein regulärer Ring ist, bilden die linke (rechte) Hauptideale des Ringes  $T$  einen Teilverband  $\Omega_L(\Omega_P)$  des Verbandes  $\Phi_L(\Phi_P)$ . Ähnlicherweise kann man mit Hilfe der Operationen  $\cap, +$  den Verband  $\Psi_L(\Psi_P)$  definieren, welcher durch alle Linksideale (Rechtsideale) des Ringes  $T_v$  erzeugt wird. Erwägen wir die Menge aller linken (rechten) Annulatoren im Ring  $T_v$ , welche mittels der Inklusion teilgeordnet ist. Auf dieser teilgeordneten Menge kann üblicherweise die Vereinigung  $\cup$  und der Durchschnitt  $\cap$  zweier Elemente definiert werden und man bekommt dann den Verband  $\Pi_L(\Pi_P)$ . Für beliebige  $H_1, H_2 \in \Pi_L(J_1, J_2 \in \Pi_P)$  gilt offenbar  $H_1 + H_2 \leq H_1 \cup H_2$  ( $J_1 + J_2 \leq J_1 \cup J_2$ ).

Wählen wir einen beliebigen Unterraum  $S \leq A$  und bezeichnen  $L(S)$  die Menge aller  $q \in T_v$ , für welche  $Aq \leq S$  und  $R(S)$  die Menge aller  $q \in T_v$ , für welche  $Sq = o$  ist. Nach dem Theorem 2,8 in [4] ist die Abbildung  $S \rightarrow L(S)$  ein Isomorphismus der Verbandes  $\bar{A}$ , welcher durch Unterräume in  $A$  gebildet ist und des Verbandes  $\Pi_L$  und die Abbildung  $S \rightarrow R(S)$  ist ein dualer Isomorphismus des Verbandes  $\bar{A}$  auf den Verband  $\Pi_P$ .

**Satz 3.**  $T_v q$  ist ein linker Annulator im Ring  $T_v$  für jedes Element  $q \in T$ . Es sei  $H$  ein beliebiger linker Annulator im Ring  $T_v$ . Dann existiert ein Hauptideal  $Tq$  des Ringes  $T$ , so dass  $H = T_v q$  ist. Der Annulator  $H = T_v q$  im Ring  $T_v$  ist genau dann ein Hauptideal des Ringes  $T_v$ , wenn  $q \in T_v$  ist.

Beweis. Es sei  $Tq$  ein beliebiges linkes Hauptideal des Ringes  $T$ . Dann ist  $\alpha \in Tq$  genau dann, wenn  $A\alpha \leq Aq$  ist.  $Tq$  ist ein linker Annulator der Menge  $\omega T$ , wo  $Aq = \text{Ker}(\omega)$  ist. Wir zeigen, dass  $T_v q$  ein linker Annulator der Menge  $\omega T_v$  im Ring  $T_v$  ist. Offenbar ist  $(T_v q)(\omega T_v) = o$ . Wählen wir  $\gamma \in T_v$ ,  $\gamma(\omega T_v) = o$  beliebig. Setzen wir voraus, dass  $a \in A$ ,  $a\gamma\omega \neq o$  existiert. Nachdem  $T_v$  dicht im Ring  $T$  ist, existiert  $\alpha \in T_v$ , so dass  $(a\gamma\omega)\alpha = a\gamma\omega \neq o$  ist und dieses liefert einen Widerspruch. Darum ist  $\gamma\omega = o$ ,  $A\gamma \leq \text{Ker}(\omega)$  und  $\gamma \in Tq$ . Nach dem Satz 2 gilt  $\gamma \in T_v q$ .

Es sei  $H$  ein beliebiger Annulator des Ringes  $T_v$ . Dann gibt es genau einen Unterraum  $S \leq A$ , für welchen  $H = L(S)$  ist. Wenn wir ein  $q \in T$  erwägen, für welches  $Aq = S$  ist, dann ist  $H = T_v q$ .

Es sei  $T_v q$ ,  $q \in T$  ein Hauptideal in  $T_v$ , d. h.  $T_v q = T_v \gamma$ ,  $\gamma \in T_v$ . Dann ist  $A\gamma = S$ ,  $\dim S < \kappa_v$ . Setzen wir voraus, dass  $Aq > S$  ist und wählen  $s \in Aq$ ,  $s \notin S$ . Dann

existiert  $a \in A$ ,  $a\varrho = s$ . Da der Ring  $T_v$  dicht in  $T$  ist, existiert  $\xi \in T_v$  derart, dass  $a\xi = a$  ist. Dann ist  $a\xi\varrho = s$ . Es existiert aber  $\alpha \in T_v$ , so dass  $\xi\varrho = \alpha\gamma$  und  $a\alpha\gamma = s$  ist; dieses liefert einen Widerspruch. Es ist also  $A\varrho \subseteq S$  und demzufolge ist  $r(\varrho) < \kappa_v$ , d. h.  $\varrho \in T_v$ .

**Bemerkung.** Vom Beweis des Satzes kommt hervor, dass man für einen beliebigen linken Annulator  $H$  des Ringes  $T_v$  die Gleichheit  $H = L(S) = T_v\varrho$ , wo  $A\varrho = S$  ist, bekommt.

**Satz 4.**  $\varrho T_v$  ist ein rechter Annulator im Ring  $T_v$  für jedes  $\varrho \in T$ . Es sei  $J$  ein beliebiger rechter Annulator im Ring  $T_v$ . Dann existiert ein Hauptideal  $\varrho T$  des Ringes  $T$ , so dass  $J = \varrho T_v$  ist. Der Annulator  $J = \varrho T_v$  im Ring  $T_v$  ist genau dann ein Hauptideal, wenn  $\varrho \in T_v$  ist.

**Beweis.** Es sei  $\varrho T$  ein beliebiges rechtes Hauptideal des Ringes  $T$ . Dann ist  $\alpha \in \varrho T$  genau dann, wenn  $\text{Ker}(\varrho) \subseteq \text{Ker}(\alpha)$ . Das Ideal  $\varrho T$  ist ein rechter Annulator der Menge  $T_v\omega$ , wo  $A\omega = \text{Ker}(\varrho)$ . Wir zeigen, dass  $\varrho T_v$  ein rechter Annulator der Menge  $T_v\omega$  ist. Offensichtlich ist  $(T_v\omega)(\varrho T_v) = o$ . Wählen wir beliebig  $\gamma \in T_v$ , für welches  $T_v\omega\gamma = o$  ist. Dann ist  $\omega\gamma = o$ ,  $A\omega \subseteq \text{Ker}(\gamma)$  und  $\gamma \in \varrho T$ . Zuzufolge des Satzes 2 ist dann  $\gamma \in \varrho T_v$ .

Es sei  $J$  ein beliebiger rechter Annulator des Ringes  $T_v$ . Es existiert genau ein Unterraum  $S \subseteq A$ , so dass  $J = R(S)$  ist. Wenn wir  $\varrho \in T$  so wählen, dass  $\text{Ker}(\varrho) = S$  ist, dann ist  $J = \varrho T_v$ .

Es sei  $\varrho T_v$ ,  $\varrho \in T$  ein Hauptideal des Ringes  $T_v$ . Dann existiert  $\gamma \in T_v$ , so dass  $\varrho T_v = \gamma T_v$  ist. Wenn wir  $S = \text{Ker}(\gamma)$  bezeichnen, dann ist für jedes  $\omega \in \gamma T_v$   $\text{Ker}(\gamma) \subseteq \text{Ker}(\omega)$ . Nach der Voraussetzung ist  $\dim A/S = \dim A\gamma < \kappa_v$ . Es sei  $\text{Ker}(\varrho) < S$ . Wählen wir  $s \in S$ ,  $s \notin \text{Ker}(\varrho)$ . Nachdem  $T_v$  dicht in  $T$  ist, existiert  $\xi \in T_v$ , so dass  $s\varrho\xi = s\varrho$  ist. Da  $\varrho\xi \in \gamma T_v$  ist, gibt es ein  $\alpha \in T_v$ , so dass  $\varrho\xi = \gamma\alpha$  gilt. Dann ist  $s\varrho\xi = s\gamma\alpha \neq o$  und dieses ist ein Widerspruch. Es gilt also  $S \subseteq \text{Ker}(\varrho)$  und  $\dim A\varrho \leq \dim A\gamma$ , d. h.  $\varrho \in T_v$ .

**Bemerkung.** Vom Beweis ergibt sich, dass für einen beliebigen rechten Annulator  $J$  im Ring  $T_v$  die Gleichheit  $J = R(S) = \varrho T_v$  gilt, wobei  $\text{Ker}(\varrho) = S$  ist.

**Satz 5.** Die Abbildungen  $T\varrho \rightarrow T_v\varrho$ ,  $\omega T \rightarrow \omega T_v$  sind Isomorphismen der Verbände  $\Omega_L, \Pi_L$  und  $\Omega_P, \Pi_P$ .

**Beweis.** Die Abbildung  $T\varrho \rightarrow S$ , wo  $S = A\varrho$  ist, ist nach [1] ein Isomorphismus der Verbände  $\Omega_L, \bar{A}$  und die Abbildung  $S \rightarrow L(S)$  ist ein Isomorphismus der Verbände  $\bar{A}, \Pi_L$ . Nach dem Satz 3 ist  $L(S) = T_v\varrho$  und daher ist die Abbildung  $T\varrho \rightarrow T_v\varrho$  ein Isomorphismus der Verbände  $\Omega_L, \Pi_L$ .

Ähnlicherweise ist nach [1] die Abbildung  $\omega T \rightarrow S$ , wo  $S = \text{Ker}(\omega)$  ein dualer Isomorphismus der Verbände  $\Omega_P, \bar{A}$  und  $S \rightarrow R(S)$  ist ein dualer Isomorphismus der

Verbände  $\bar{A}, \Pi_P$ . Nach dem Satz 4 ist  $R(S) = \omega T_v$  und demzufolge ist die Abbildung  $\omega T \rightarrow \omega T_v$  ein Isomorphismus der Verbände  $\Omega_P, \Pi_P$ .

**Bemerkung.** Bezeichnen wir der Reihe nach  $P(\Phi_L), P(\Phi_P), P(\Omega_L), P(\Omega_P), P(\Pi_L), P(\Pi_P), A(T)$  die Gruppen der Automorphismen der Verbände  $\Phi_L, \Phi_P, \Omega_L, \Omega_P, \Pi_L, \Pi_P$  und die Gruppe der Automorphismen des Ringes  $T$ . Nach [3] und dem Satz 5 sind alle angeführten Gruppen isomorph.

**Satz 6.** Der Verband  $\Pi_L(\Pi_P)$  ist ein Teilverband des Verbandes  $\Psi_L(\Psi_P)$ .

**Beweis.** Wir wählen zwei linke Annulatoren  $H_1, H_2 \in \Pi_L$  und beweisen, dass  $H_1 + H_2 \in \Pi_L, H_1 \cap H_2 \in \Pi_L$  ist. Nach dem Satz 3 existieren  $q, \omega \in T$  derart, dass  $H_1 = T_v q, H_2 = T_v \omega$  ist. Nachdem  $T$  ein regulärer Ring ist, existieren  $\gamma, \delta \in T$  derartig, dass  $Tq + T\omega = T\gamma, Tq \cap T\omega = T\delta$  ist. Wir zeigen zuerst, dass  $T_v q + T_v \omega = T_v \gamma$  gilt. Wählen wir beliebig  $\eta = \xi_1 q + \xi_2 \omega \in T_v q + T_v \omega$ . Dann ist  $\eta \in T_v$  und zugleich  $\eta \in Tq + T\omega$ , d. h.  $\eta \in T\gamma$ . Nach dem Satz 2 ist  $\eta \in T_v \gamma$  und  $T_v q + T_v \omega \leq T_v \gamma$ . Wählen wir umgekehrt  $\alpha = \xi \gamma \in T_v \gamma$  beliebig. Nach dem Satz 1 kann vorausgesetzt werden, dass  $\xi \in T_v$  ist. Es existieren  $q' \in Tq, \omega' \in T\omega$ , so dass  $q' + \omega' = \gamma$  ist. Dann ist  $\alpha = \xi q' + \xi \omega'$ . Offenbar ist  $\xi q' \in T_v \cap Tq, \xi \omega' \in T_v \cap T\omega$  und daher ist  $\alpha \in T_v q + T_v \omega$ . Es gilt also  $T_v \gamma \leq T_v q + T_v \omega$  und  $T_v \gamma = T_v q + T_v \omega$ . Nach dem Satz 3 ist  $T_v \gamma = H$  ein linker Annulator des Ringes  $T_v$  und es gilt  $H_1 + H_2 = H$ . Ähnlich zeigt man, dass  $H_1 \cap H_2 = T_v \delta = H'$  ist. Gleicherweise zeigt man, dass auch  $\Pi_P$  ein Teilverband des Verbandes  $\Psi_P$  ist.

**Bemerkung.** Nach dem Satz 5 folgt von der Beziehung  $Tq + T\omega = T\gamma$  die Beziehung  $T_v q \cup T_v \omega = T_v \gamma$ , vom Beweis des Satzes 6 ergibt sich  $T_v q + T_v \omega = T_v \gamma$  und daher ist  $T_v q \cup T_v \omega = T_v q + T_v \omega$ . Ähnliches gilt auch für die rechten Annulatoren.

**Satz 7.** Es sei  $H$  ein Linksideal des Ringes  $T_v$ . Dann ist  $AH$  ein Unterraum des Raumes  $A$ .

**Beweis.** Jede zwei Elemente von  $AH$  können in der Form  $a'i', a''i''$  geschrieben werden, wobei  $a', a'' \in A, i', i'' \in H$  ist. Bezeichnen wir mit  $H'$  das durch die Elemente  $i', i''$  generierte Linksideal. Nach dem Theorem 4,4 in [4] ist  $H'$  ein linker Annulator. Nach dem Lemma 2,7 in [4] ist  $AH'$  ein Unterraum des Raumes  $A$ . Nachdem  $H' \leq H$  ist, gilt  $a'i' \pm a''i'' \in AH$ . Nachdem ferner noch  $AH = FAH$  gilt, ist  $AH$  ein Unterraum des Raumes  $A$ .

**Satz 8.** Das Linksideal  $H$  des Ringes  $T_v$  ist genau dann ein linker Annulator, wenn ein Linksideal  $H'$  so existiert, dass  $H \oplus H' = T_v$  ist.

**Beweis.** 1. Setzen wir voraus, dass  $H \leq T_v$  ein linker Annulator ist. Dann ist  $H = L(S) = T_v q$ , wo  $Aq = S$  ist. Wählen wir den Unterraum  $U \leq A, S \oplus U = A$  und  $\omega \in T$ , so dass  $A\omega = U$  ist. Dann ist  $Tq \oplus T\omega = T$  und nach den Sätzen 5,6 ist  $T_v q \oplus T_v \omega = T_v$ .

2. Es seien Linksideale  $H, H' \leq T_v$  derartig gegeben, dass  $H \oplus H' = T_v$  ist. Nach dem Satz 7 sind  $S = AH, S' = AH'$  Unterräume des Raumes  $A$ . Es existiere  $s \neq o \in S \cap S'$ . Dann existieren  $q \in H, q' \in H'; a, a' \in A$ , so dass  $aq = a'q' = s$  ist. Das bedeutet, dass  $Aq \cap Aq' \neq o$  und  $L(Aq \cap Aq') = T_v q \cap T_v q' \neq o$  ist und auch  $H \cap H' \neq o$ ; dieses ist ein Widerspruch und darum ist  $S \cap S' = o$ . Wählen wir  $\omega, \omega' \in T$ , so dass  $A\omega = S, A\omega' = S'$  ist. Dann ist  $L(S) = T_v \omega, L(S') = T_v \omega'$  und

$$(1) \quad L(S \cap S') = T_v \omega \cap T_v \omega' = o.$$

Es sei  $\alpha \in H$ . Von der Definition des Raumes  $S$  folgt, dass  $A\alpha \leq A\omega$  ist. Daher ist  $T_v \alpha \leq T_v \omega$  und darum ist  $H \leq T_v \omega$ . Soeben zeigt man, dass auch  $H' \leq T_v \omega'$  ist. Nachdem  $H \oplus H' = T_v$  ist, gilt auch  $T_v \omega + T_v \omega' = T_v$ . Von der Beziehung (1) bekommen wir dann  $T_v \omega \oplus T_v \omega' = T_v$  und demzufolge ist  $H = T_v \omega, H' = T_v \omega'$ . Die Ideale  $H, H'$  sind nach dem Satz 3 linke Annulatoren des Ringes  $T_v$ .

**Satz 9.** Das Rechtsideal  $J$  des Ringes  $T_v$  ist genau dann ein rechter Annulator, wenn ein Rechtsideal  $J'$  so existiert, dass  $J \oplus J' = T_v$  gilt.

**Beweis.** 1. Setzen wir voraus, dass  $J$  ein rechter Annulator des Ringes  $T_v$  ist. Dann ist  $J = R(S) = qT_v$ , wo  $\text{Ker}(q) = S$  ist. Wählen wir einen Unterraum  $U \leq A, S \oplus U = A$  und  $\omega \in T$ , so dass  $\text{Ker}(\omega) = U$  ist. Dann ist  $qT_v \oplus \omega T_v = T_v$ .

2. Es sei  $J \leq T$  ein beliebiges Rechtsideal und bezeichnen wir  $K(J)$  die Menge aller  $x \in A$ , für welche  $xJ = o$  ist.  $K(J)$  ist ein Unterraum des Raumes  $A$ . Setzen wir zuerst voraus, dass  $K(J) = o$  ist und es existiere  $\xi T \neq o$ , so dass  $\xi T \cap J = o$  gilt. Offensichtlich ist  $J \neq o$ . Wenn für die Rechtsideale  $I_1, I_2 \leq T$  die Beziehung  $I_1 \oplus I_2 = T$  gilt, dann sind  $I_1, I_2$  Hauptideale, da  $T$  der Ring mit einem Einselement ist. Es existiert also ein Hauptideal  $qT, J \leq qT$ , so dass  $\xi T \oplus qT = T$  ist. Dann ist  $K(J) \geq \text{Ker}(q)$ , also  $K(J) \neq o$ , was einen Widerspruch liefert und darum ist  $\xi T = o$ . Wenn  $J \oplus J' = T_v, K(J) = o$  ist, dann ist  $\omega T_v = \omega T, \omega T \cap J = o$  für ein beliebiges  $\omega \in J'$  und daher ist  $\omega T_v = o$ . Es gilt darum  $J = T_v$  und  $J = R(o)$ . Es sei nun  $J \oplus J' = T_v, K(J) \neq o, K(J') \neq o$ . Es existiert so ein  $\alpha \in J$ , dass  $\text{Ker}(\alpha) \leq K(J) + K(J')$  ist. Im umgekehrten Fall würde  $K(J) + K(J') < \text{Ker}(\alpha)$  für alle  $\alpha \in J$  gelten, aber dieses widerspricht der Definition des Raumes  $K(J)$ . Gleicherweise kann gezeigt werden, dass ein  $\alpha' \in J'$  so existiert, dass  $\text{Ker}(\alpha') \leq K(J) + K(J')$  gilt. Wählen wir  $q \in T_v$  beliebig, so dass  $(K(J) + K(J'))q = o$  ist. Dann ist  $\text{Ker}(\alpha) \leq \text{Ker}(q), \text{Ker}(\alpha') \leq \text{Ker}(q)$  und  $q \in \alpha T_v, q \in \alpha' T_v$ , oder auch  $q \in \alpha T_v \cap \alpha' T_v$ . Der Voraussetzung nach ist  $J \cap J' = o$  und darum ist  $q = o$ . Daher folgt, dass  $K(J) + K(J') = A$  ist. Bezeichnen wir  $R[K(J)] = \omega T_v, R[K(J')] = \omega' T_v$ . Dann  $\omega T_v \cap \omega' T_v = o$ . Offenbar ist  $J \leq \omega T_v, J' \leq \omega' T_v$  und demzufolge auch  $\omega T_v \oplus \omega' T_v = T_v$  und  $\omega T_v = J, \omega' T_v = J'$ .

**Satz 10.** Es sei ein Automorphismus  $\sigma$  des Ringes  $T_v$  gegeben und  $\varphi, \psi \in T_v$ . Dann ist  $A\varphi \leq \text{Ker}(\psi)$  genau dann, wenn  $A\varphi^\sigma \leq \text{Ker}(\psi^\sigma)$  ist.

**Beweis.** Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:  $A\varphi \leq \text{Ker}(\psi)$ ,  $A\varphi\psi = 0$ ,  $\varphi\psi = 0$ ,  $(\varphi\psi)^\sigma = 0$ ,  $\varphi^\sigma\psi^\sigma = 0$ ,  $A\varphi^\sigma\psi^\sigma = 0$ ,  $A\varphi^\sigma \leq \text{Ker}(\psi^\sigma)$ .

**Satz 11.** Es sei  $\sigma$  ein Automorphismus des Ringes  $T_v$ . Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:

- a) Alle linken Hauptideale des Ringes  $T_v$  sind  $\sigma$ -zulässig.
- b) Alle rechten Hauptideale des Ringes  $T_v$  sind  $\sigma$ -zulässig.
- c) Für jedes idempotentes Element  $\kappa \in T_v$  gilt  $\kappa^\sigma = \kappa$ .

**Beweis.** a)  $\rightarrow$  b). Für ein beliebiges  $\varrho \in T_v$  gilt nach der Voraussetzung  $(T_v\varrho)^\sigma = T_v\varrho^\sigma \leq T_v\varrho$ . Von der Tatsache, dass  $\sigma$  ein Automorphismus ist, folgt  $T_v\varrho^\sigma = T_v\varrho$ . Nach der dem Satz 3 folgenden Bemerkung ist  $A\varrho^\sigma = A\varrho$ . Wählen wir  $\omega \in T_v$ ,  $a \in \text{Ker}(\omega)$  beliebig. Es existiert  $\varphi \in T_v$  so, dass  $A\varphi = Fa$  ist. Nachdem  $A\varphi \leq \text{Ker}(\omega)$  ist, ist auch  $A\varphi^\sigma \leq \text{Ker}(\omega^\sigma)$ . Es ist aber  $A\varphi^\sigma = A\varphi = Fa$  und  $a \in \text{Ker}(\omega^\sigma)$ , d. h. es ist auch  $\text{Ker}(\omega) \leq \text{Ker}(\omega^\sigma)$ . Wählen wir umgekehrt  $a \in \text{Ker}(\omega^\sigma)$  beliebig. Wenn wir  $\varphi \in T_v$  so wählen, dass  $A\varphi = Fa$  ist, dann ist auch  $A\varphi^\sigma = Fa \leq \text{Ker}(\omega^\sigma)$  und  $A\varphi \leq \text{Ker}(\omega)$ , d. h. es ist  $a \in \text{Ker}(\omega)$ . Darum ist  $\text{Ker}(\omega^\sigma) \leq \text{Ker}(\omega)$  und  $\text{Ker}(\omega^\sigma) = \text{Ker}(\omega)$ . Nach der dem Satz 4 nachfolgenden Bemerkung gilt  $\omega T_v = \omega^\sigma T_v = (T_v\omega)^\sigma$  und jedes rechte Hauptideal des Ringes  $T_v$  ist  $\sigma$ -zulässig.

b)  $\rightarrow$  a). Der Voraussetzung zufolge ist  $(\varrho T_v)^\sigma = \varrho^\sigma T_v \leq \varrho T_v$  und daher ist  $\varrho^\sigma T_v = \varrho T_v$  für jedes  $\varrho \in T_v$ , d. h.  $\text{Ker}(\varrho) = \text{Ker}(\varrho^\sigma)$ . Wählen wir beliebig  $\omega \in T_v$ . Setzen wir voraus, dass  $a \in A\omega^\sigma$ ,  $a \notin A\omega$  ist und wählen wir einen Unterraum  $Q$ , so dass  $Fa \oplus A\omega \oplus Q = A$  ist. Betrachten wir ferner den Endomorphismus  $\varphi \neq 0$ , für welchen  $\text{Ker}(\varphi) = A\omega + Q$  ist. Offensichtlich ist  $\varphi \in T_v$ . Nachdem  $A\omega \leq \text{Ker}(\varphi)$  ist, ist auch  $A\omega^\sigma \leq \text{Ker}(\varphi)$  und dieses ist ein Widerspruch. Es gilt also  $A\omega^\sigma \leq A\omega$ . Setzen wir umgekehrt voraus, dass  $a \in A\omega$ ,  $a \notin A\omega^\sigma$  ist, betrachten wir den Unterraum  $Q$ , für welchen  $Fa \oplus A\omega^\sigma \oplus Q = A$  ist und den Endomorphismus  $\varphi \neq 0$ , für welchen  $\text{Ker}(\varphi) = A(\omega^\sigma) + Q$  gilt. Dann ist  $\varphi \in T_v$  und  $A\omega^\sigma \leq \text{Ker}(\varphi^\sigma)$  oder auch  $A\omega \leq \text{Ker}(\varphi)$ , und so ergibt sich ein Widerspruch. Also gilt  $A\omega \leq A\omega^\sigma$ . Von den angeführten Beziehungen folgt  $A\omega = A\omega^\sigma$  und  $T_v\omega = T_v\omega^\sigma = (T_v\omega)^\sigma$ . Jedes linke Hauptideal ist also  $\sigma$ -zulässig.

a)  $\rightarrow$  c). Es sei  $\kappa \in T_v$  ein beliebiger idempotenter Endomorphismus. Da a) gilt, gilt zugleich auch b) und es ist  $A\kappa = A\kappa^\sigma$ ,  $\text{Ker}(\kappa) = \text{Ker}(\kappa^\sigma)$ . Daher folgt schon  $\kappa = \kappa^\sigma$ .

c)  $\rightarrow$  a). Setzen wir voraus, dass  $\kappa = \kappa^\sigma$  für einen beliebigen idempotenten Endomorphismus gilt. Nach [4] ist jedes linke Hauptideal des Ringes  $T_v$  durch einen idempotenten Endomorphismus generiert. Sei also beliebig  $T_v\kappa$  gegeben, wo  $\kappa$  ein idempotenter Endomorphismus ist. Dann ist  $(T_v\kappa)^\sigma = T_v\kappa^\sigma = T_v\kappa$  und a) gilt.

**Satz 12.** Wenn der Automorphismus  $\sigma$  des Ringes  $T_v$  die äquivalenten Bedingungen vom Satz 11 erfüllt, dann ist dieser identisch.

**Beweis.** Der Beweis kann soeben wie der Beweis des Lemmas 2, S. 231 in [1] durchgeführt werden.

**Satz 13.** *Jeder Automorphismus  $\sigma'$  des Ringes  $T$  induziert einen Automorphismus  $\sigma$  des Ringes  $T_v$ .*

**Beweis.** Nachdem  $T_v$  ein beiderseitiges Ideal des Ringes  $T$  ist, ist auch  $T_v^{\sigma'}$  ein beiderseitiges Ideal diesen Ringes. Von der Struktur der beiderseitigen Ideale des Ringes  $T$  folgt, dass im Falle  $T_v \neq T_v^{\sigma'}$  entweder  $T_v < T_v^{\sigma'}$ ,  $T_v^{\sigma'} = T_v$ , oder  $T_v^{\sigma'} < T_v$ ,  $T_v^{\sigma'} = T_v$  gilt. Die Kardinalzahlen  $\kappa_v, \kappa_v', \kappa_{v''}$  sind dann voneinander verschieden und die Mengen  $T_v, T_v', T_{v''}$  sind nicht äquivalent. Da  $\sigma'$  ein Automorphismus des Ringes  $T$  ist, gilt  $T_v = T_v^{\sigma'}$  und  $\sigma'$  induziert einen Automorphismus des Ringes  $T_v$ .

**Satz 14.** *Jeder Automorphismus des Ringes  $T_v$  induziert einen Automorphismus des Verbandes  $\Pi_L(\Pi_P)$  und umgekehrt jeder Automorphismus des Verbandes  $\Pi_L(\Pi_P)$  ist durch einen Automorphismus des Ringes  $T_v$  induziert.*

**Beweis.** Es sei  $\sigma$  ein Automorphismus des Ringes  $T_v$ . Wenn  $H \in \Pi_L$  ein linker Annulator der Menge  $M$  im Ring  $T_v$  ist, dann ist  $H^\sigma$  ein linker Annulator der Menge  $M^\sigma$  und es ist  $H^\sigma \in \Pi_L$ . Daher ist  $\Pi_L^\sigma \subseteq \Pi_L$ . Ferner ist  $H^{\sigma^{-1}}$  ein Annulator der Menge  $M^{\sigma^{-1}}$  und es gilt  $H = (H^{\sigma^{-1}})^\sigma$ . Darum ist  $\Pi_L^\sigma = \Pi_L$ . Der Automorphismus  $\sigma$  induziert einen Automorphismus  $\bar{\sigma}$  des Verbandes  $\Psi_L$ . Nach dem Satz 6 ist der Verband  $\Pi_L$  ein Unterverband des Verbandes  $\Psi_L$  und nachdem  $\Pi_L^{\bar{\sigma}} = \Pi_L$  ist, induziert  $\sigma$  auch einen Automorphismus des Verbandes  $\Pi_L$ . Das gleiche kann für den Verband  $\Pi_P$  gezeigt werden.

Es sei  $\bar{\sigma}$  ein beliebiger Automorphismus des Verbandes  $\Pi_L$ . Dem Satz 3 zufolge kann man  $T_v q \rightarrow (T_v q)^{\bar{\sigma}}$  für  $T_v q \in \Pi_L$  schreiben. Betrachten wir nach dem Satz 5 den Isomorphismus  $\kappa$  der Verbände  $\Pi_L, \Omega_L$ , welchen ist durch die Vorschrift  $(T_v q)^\kappa = T_v q$  bestimmt. Die Abbildung  $\bar{\sigma}': (T_v q)^{\bar{\sigma}'} = (T_v q)^{\bar{\sigma}\kappa}$  ist dann ein Automorphismus des Verbandes  $\Omega_L$ . Der Vektorraum ist ein homogener total zerlegbarer Modul, der Körper  $F$  ist ein Ring mit der Eigenschaft (V) von [3] und ein Vektorraum mit der Dimension grösser als drei ist ein zulässiger Modul. Für den Verband  $\Omega_L$ , welcher dem Raum  $A$  gehört, gilt also der Satz 1 von [3]. Nachdem sich der Beweis diesen Satzes nur auf den sog. Fundamentalsatz der projektiven Geometrie stützt, gilt dieser auch für Vektorräume der Dimension grösser als zwei. Es existiert also ein einziger Automorphismus  $\sigma'$  des Ringes  $T$ , welcher den Automorphismus  $\bar{\sigma}'$  des Verbandes  $\Omega_L$  induziert, oder mit anderen Worten es gilt  $(T_v q)^{\bar{\sigma}'} = (T_v q)^{\sigma'}$  für jedes  $q \in T$ . Nach dem Satz 13 induziert  $\sigma'$  einen Automorphismus  $\sigma$  des Ringes  $T_v$  mittels der Vorschrift  $q^\sigma = q^{\sigma'}$  für jedes  $q \in T_v$ . Für beliebiges  $\omega \in T$  gilt  $(T_v \omega)^\sigma = T_v \omega^{\sigma'}$ : Wählen wir beliebig  $(\xi \omega)^\sigma \in (T_v \omega)^\sigma$ . Dann ist  $(\xi \omega)^\sigma = (\xi \omega)^{\sigma'} = \xi^{\sigma'} \omega^{\sigma'}$  und  $(\xi \omega)^\sigma \in T_v \omega^{\sigma'}$ . Wählen wir umgekehrt  $\xi \omega^{\sigma'} \in T_v \omega^{\sigma'}$ . Dann existiert  $\gamma \in T_v$ , so dass  $\gamma^{\sigma'} = \xi$  ist und wir bekommen  $\xi \omega^{\sigma'} = \gamma^{\sigma'} \omega^{\sigma'} = (\gamma \omega)^{\sigma'} = (\gamma \omega)^\sigma$  und also auch  $(\xi \omega)^\sigma \in (T_v \omega)^\sigma$ . Daher ist  $(T_v \omega)^\sigma = T_v \omega^{\sigma'}$ . Für ein beliebiges  $H \in \Pi_L$  ergibt sich:  $H^{\sigma\kappa} = (T_v \omega)^{\sigma\kappa} =$



$= (T_v \omega^{\sigma'})^{\kappa} = T \omega^{\sigma'} = (T \omega)^{\sigma'} = (T \omega)^{\bar{\sigma}} = (T_v \omega)^{\bar{\sigma} \kappa} = H^{\bar{\sigma} \kappa}$ . Da  $\kappa$  ein Isomorphismus ist, ist  $H^{\bar{\sigma}} = H^{\sigma}$  für jedes  $H \in \Pi_L$  und der Automorphismus  $\bar{\sigma}$  des Verbandes  $\Pi_L$  ist durch den Automorphismus  $\sigma$  des Ringes  $T_v$  induziert. GleichermäÙen kann gezeigt werden, dass jeder Automorphismus des Verbandes  $\Pi_P$  durch einen Automorphismus des Ringes  $T_v$  induziert wird.

**Folgerung 1.** Die Gruppe  $P(\Pi_L)$  der Automorphismen des Verbandes  $\Pi_L$  ist mit der Gruppe  $A(T_v)$  der Automorphismen des Ringes  $T_v$  isomorph: Nach dem Satz 14 induziert jeder Automorphismus  $\sigma \in A(T_v)$  einen Automorphismus  $\bar{\sigma} \in P(\Pi_L)$  und die Abbildung  $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$  ist ein Homomorphismus der Gruppe  $A(T_v)$  auf die Gruppe  $P(\Pi_L)$ . Es sei  $\sigma \rightarrow \bar{\iota}$ , wo  $\bar{\iota}$  der identische Automorphismus des Verbandes  $\Pi_L$  ist. Dann gilt  $H^{\bar{\iota}} = H = H^{\sigma}$  für jedes linke Hauptideal des Ringes  $T_v$  und dieses Ideal ist  $\sigma$ -zulässig. Nach dem Satz 12 ist  $\sigma$  der identische Automorphismus des Ringes  $T_v$  und die erwägte Abbildung ist ein Isomorphismus der Gruppen  $P(\Pi_L)$ ,  $A(T_v)$ . Soeben kann gezeigt werden, dass die Gruppe  $P(\Pi_P)$  der Automorphismen des Verbandes  $\Pi_P$  mit der Gruppe  $A(T_v)$  isomorph ist.

**Folgerung 2.** Die Gruppen  $A(T)$ ,  $A(T_v)$  sind isomorph und jeder Automorphismus des Ringes  $T_v$  kann in genau einen Automorphismus des Ringes  $T$  erweitert werden: Nach der dem Satz 5 folgenden Bemerkung sind die Gruppen  $A(T)$ ,  $P(\Pi_L)$  isomorph, nach der Folgerung 1 sind dann die Gruppen  $A(T)$ ,  $A(T_v)$  isomorph. Wenn wir die Bezeichnung vom Satz 14 behalten, dann sind die Abbildungen  $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$ ,  $\bar{\sigma} \rightarrow \bar{\sigma}'$ ,  $\bar{\sigma}' \rightarrow \sigma'$  Isomorphismen der zugehörigen Gruppen und die Abbildung  $\sigma \rightarrow \sigma'$  ist ein Isomorphismus der Gruppen  $A(T_v)$ ,  $A(T)$ . Setzen wir voraus, dass  $\sigma' \in A(T)$  den Automorphismus  $\eta \in A(T_v)$  induziert, d. h. dass  $q^{\sigma'} = q^{\eta}$  für  $q \in T_v$  gilt. Wählen wir beliebig  $\omega \in T_v$ . Dann ist  $(T \omega)^{\bar{\sigma}'} = (T_v \omega)^{\bar{\sigma} \kappa} = (T_v \omega)^{\sigma \kappa} = (T_v \omega^{\sigma})^{\kappa} = (T \omega^{\sigma})^{\kappa} = T_v \omega^{\sigma} = (T \omega)^{\sigma'} = T \omega^{\sigma'} = T \omega^{\eta} = T_v \omega^{\eta}$ . Daher ist  $(T_v \omega)^{\sigma} = (T_v \omega)^{\eta}$  und  $(T_v \omega)^{\sigma \eta^{-1}} = T_v \omega$ . Nach dem Satz 12 ist  $\sigma \eta^{-1}$  ein identischer Automorphismus und daher ist  $\sigma = \eta$ . Der Automorphismus  $\sigma' \in A(T)$  ist eine Erweiterung des Automorphismus  $\sigma \in A(T_v)$ . Nachdem die Abbildung  $\sigma \rightarrow \sigma'$  ein Isomorphismus der Gruppen  $A(T_v)$ ,  $A(T)$  ist, ist  $\sigma'$  die einzige Erweiterung des Automorphismus  $\sigma$ .

**Folgerung 3.** Der Automorphismus  $\sigma'$  des Ringes  $T$ , in welchem  $\kappa^{\sigma} = \kappa$  für ein beliebiges idempotentes Element endlichen Ranges gilt, ist identisch (eine Verallgemeinerung des Lemmas 2, S. 231 in [1]): Der Automorphismus  $\sigma'$  induziert einen Automorphismus  $\sigma$  des Ringes  $T_o$  aller Endomorphismen endlichen Ranges, wobei  $\kappa^{\sigma'} = \kappa^{\sigma} = \kappa$  für ein beliebiges idempotentes Element  $\kappa \in T_o$  gilt. Nach dem Satz 12 ist  $\sigma$  ein identischer Automorphismus des Ringes  $T_o$ . Der Folgerung 2 zufolge ist dann  $\sigma'$  ein identischer Automorphismus des Ringes  $T$ .

**Satz 15.** Jeder Automorphismus des Verbandes  $\Psi_L(\Psi_P)$  induziert einen Automorphismus des Verbandes  $\Pi_L(\Pi_P)$ .