Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

r-ROZMĚRNÉ KONFIGURACE II

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

(Došlo dne 15. září 1972)

Úvod. Tato práce je pokračováním článku [1], jehož znalost předpokládáme a pokračujeme také v označování vět, poznámek i odstavců.

4. r-rozměrné konfigurace s body U_{ij} a M_{ij}. Označme M_{ij} bod jehož i-tá a j-tá souřadnice je rovna jedné a ostatní jsou rovny nule. Zřejmě platí $M_{ij} \equiv M_{ji}$ a v daném S_r existuje právě $\binom{r+1}{2}$ těchto bodů M_{ij}.

Označme S_s^I s-rozměrný podprostor daného S_r určený rovnicemi:

$$\begin{gathered} a_1 x_{i_1} + a_2 x_{i_2} + \ldots + a_{s+1} x_{i_{s+1}} + a_{s+2} x_{i_{s+2}} = 0\,, \\ x_{i_{s+3}} = 0, \ldots, x_{i_{r+1}} = 0\,, \end{gathered} \tag{5}$$

kde a_i je rovno právě jednomu z čísel 1 a -1 a platí $0 \leqq s \leqq r - 1$.

Z rovnic (5) je ihned vidět: jestliže podprostor S_s^I obsahuje bod U_{ij}, tak neobsahuje bod M_{ij} a obráceně. Součet počtu bodů U_{ij} a M_{ij} obsažených v daném S_s^I je právě $\binom{s+2}{2}$. Dále je vidět, že v daném S_s^I nemusí ležet žádný bod M_{ij}. Naopak v každém S_s^I, kde $s > 0$ leží aspoň jeden bod U_{ij}.

Věta 13. *V daném S_r existuje právě 2^r nadrovin S_{r-1}^I.*

Důkaz. Nadrovina S_{r-1}^I je určena rovnicí:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{r+1} x_{r+1} = 0\,, \tag{6}$$

kde a_i je právě jedno z čísel 1 a -1. Počet různých rovnic (6) je zřejmě $1 + r + 1 + \binom{r+1}{2} + \ldots + \binom{r+1}{r} + 1 = 2^{r+1}$, neboť číslo $\binom{r+1}{s}$ určuje počet rovnic (6), které mají právě s záporných znamének u proměnných x_i. Znásobíme-li rovnici z rovnic (6) číslem -1 dostáváme opět rovnici z rovnic (6) a tyto dvě rovnice určují stejnou nadrovinu. Je tedy počet nadrovin určených rovnicemi (6) právě 2^r.

Věta 14. *V daném S_r existuje právě* $\binom{r+1}{s+1} . 2^{s+1}$ *s-rozměrných podprostorů* S_s^I.

Důkaz. Uvažujme „přípustný" s-rozměrný podprostor, určený soustavou (1). Zřejmě tento podprostor je prostor S_s^I a z důkazu předcházející věty snadno usoudíme, že k podprostorům S_s^I patří další podprostory určené tak, že v prvé rovnici soustavy (1) jsou také záporná znaménka u proměnných. Počet podprostorů S_s^I dostaneme tak, že počet „přípustných" podprostorů znásobíme číslem 2^{s+1}. Z předcházejícícího a z věty 3 vyplývá, že počet S_s^I v daném S_r je právě $\binom{r+1}{s+1} . 2^{s+1}$.

Věta 15. *Nechť $s > k$, potom každým S_k^I prochází právě* $\binom{r-k-1}{s-k} . 2^{s-k}$ *různých podprostorů* S_s^I.

Důkaz. Metodou použitou při důkazu věty 2. zjistíme, že daným S_k^I prochází $\binom{r-k-1}{s-k}$ různých S_s^I, jestliže čísla a_i jsou pevně stanovena. V našem případě se však u $s - k$ proměnných mohou změnit znaménka. Proto je třeba získaný počet násobit číslem 2^{s-k} analogicky jako ve větě 13.

Poznámka 4. Věta 15 platí i pro bod tj. prostor dimenze nula. Platí tedy: Každým bodem U_{ij} a M_{ij} prochází právě $\binom{r-1}{s} . 2^s$ různých podprostorů S_s^I.

Věta 16. *Nechť $s > k$. V podprostoru S_s^I daného prostoru S_r leží právě* $\binom{s+2}{k+2}$ *k-rozměrných podprostorů S_k^I prostoru* S_s^I.

Důkaz. Tato věta je zcela obdobná větě 4. Je-li $S_k^I \subset S_s^I$, potom v prvé rovnici soustavy (5), která dané S_k^I a S_s^I určuje, musí být u příslušných proměnných stejná znaménka. Můžeme tedy zde aplikovat důkaz věty 4.

Věta 17. *Nechť M' je množina, která jako své prvky obsahuje všechny podprostory $S_s^I \subset S_r$, $0 \leqq s \leqq r - 1$. Potom množina M' je r-rozměrnou konfigurací typu:*

$$(7) \qquad \begin{bmatrix} 2\binom{r+1}{2}, & 2(r-1), & \dots, & \binom{r-1}{r-2} . 2^{r-2}, & 2^{r-1} \\ 3, & \binom{r+1}{3} . 2^2, & \dots, & \binom{r-2}{r-3} . 2^{r-3}, & 2^{r-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{r+1}{2}, & \binom{r+1}{3}, & \dots, & \binom{r+1}{r}, & 2^r \end{bmatrix}.$$

Důkaz. Tato věta plyne z předcházejících vět. Na hlavní diagonále matice (7) jsou čísla podle věty 14, pod hlavní diagonálou jsou čísla určená větou 16 a nad hlavní diagonálou jsou čísla, která dostaneme užitím věty 15.

Označme S_s^{II} s-rozměrný podprostor daného S_r určený rovnicemi:

(8) $$x_{i_m} = 0\,, \quad \text{kde} \quad m = s + 2, s + 3, \ldots, r + 1$$

Věta 18. *V daném S_r existuje právě $\binom{r+1}{r-s}$ s-rozměrných podprostorů S_s^{II}.*

Důkaz. Jedná se zde zřejmě o kombinace $r - s$-té třídy z $r + 1$ prvků.

Věta 19. *Nechť $s > k$. Každým podprostem S_k^{II} prostoru S_r prochází právě $\binom{r-k}{r-s}$ různých podprostorů S_s^{II}.*

Důkaz. Nechť S_s^{II} je dán soustavou (8) a S_k^{II} soustavou:

(9) $$x_{i_n} = 0\,, \quad n = k + 2,\ k + 3, \ldots, r + 1\,.$$

Zřejmě musí platit, že množina $\{x_{i_{s+2}}, x_{i_{s+3}}, \ldots, x_{i_{r+1}}\}$ je podmnožinou množiny $\{x_{i_{k+2}}, x_{i_{k+3}}, \ldots, x_{i_{r+1}}\}$. Protože prvá množina má $r - k$ prvků, druhá množina $r - s$ prvků a protože se jedná o kombinace je počet uvažovaných prostorů S_s^{II} dán číslem $\binom{r-k}{r-s}$.

Věta 20. *Nechť $s > k$. V každém podprostoru S_s^{II} prostoru S_r leží právě $\binom{s+1}{s-k}$ k-rozměrných podprostorů S_k^{II}.*

Důkaz. Nechť S_s^{II} je dán soustavou (8) a S_k^{II} soustavou (9). Množina $\{x_{i_{s+2}}, x_{i_{s+3}}, \ldots, x_{i_{r+1}}\}$ musí být podmnožinou množiny $\{x_{i_{k+2}}, x_{i_{k+3}}, \ldots, x_{i_{r+1}}\}$. Protože $r - s$ proměnných bylo již zvoleno, můžeme měnit pouze $r - k - (r - s) = s - k$ proměnných. Těchto $s - k$ proměnných budeme vybírat z $r + 1 - (r - s) = s + 1$ proměnných. Jsou to opět kombinace a počet prostorů S_k^{II}, které leží v daném S_s^{II}, je dán číslem $\binom{s+1}{s-k}$.

Věta 21. *Nechť M_1 je množina, která jako své prvky obsahuje všechny podprostory $S_s^{II} \subset S_r$, $0 \leqq s \leqq r - 1$. Potom množina M_1 je r-rozměrnou konfigurací typu:*

(10) $$\begin{bmatrix} r+1\,, & \binom{r}{r-1}, & \binom{r}{r-2}, & \ldots, & \binom{r}{2}, & r \\ 2\,, & \binom{r+1}{r-1}, & \binom{r-1}{r-2}, & \ldots, & \binom{r-1}{2}, & \binom{r-1}{1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{r}{r-1}, & \binom{r}{r-2}, & \binom{r}{r-3}, & \ldots, & \binom{r}{2}, & r+1 \end{bmatrix}.$$

Důkaz této věty vyplývá z předcházejících vět a proto ho nebudeme provádět.

Poznámka 5. Čtenář si jistě uvědomil, že množina M_1 z věty 21 je „souřadnicový simplex". Použijeme ho však k odvození dalších konfigurací.

Věta 22. *Nechť M_2 je množina, která jako své prvky obsahuje body M_{ij}, U_{ij} (tj. podprostory S_0^I) a všechny podprostory $S_s^{II} \subset S_r$, kde $0 < s \leqq r - 1$. Potom množina M_2 je r-rozměrnou konfigurací typu:*

$$\begin{bmatrix} 2\binom{r+1}{2}, & 1, & \binom{r-1}{r-2}, & \ldots, & \binom{r-1}{2}, & r-1 \\ 2, & \binom{r+1}{r-1}, & \binom{r-1}{r-2}, & \ldots, & \binom{r-1}{2}, & r-1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2\binom{r}{2}, & \binom{r}{r-2}, & \binom{r}{r-3}, & \ldots, & \binom{r}{2} & , r+1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Důkaz. Matice (11) se liší od matice (10) v prvém řádku a v prvém sloupci. Počet bodů U_{ij} a M_{ij} je zřejmě $2\binom{r+1}{2}$ a dále je z rovnic (8) vidět, že každý $S_s^{II}(0 < s \leqq \leqq r - 1)$ obsahuje právě $\binom{s+1}{2}$ bodů U_{ij} a $\binom{s+1}{2}$ bodů M_{ij}. Tedy ostatní čísla v prvém sloupci matice (11) jsou $2\binom{s+1}{2}$. Z rovnic (8) je také vidět, že každý bod U_{ij} a M_{ij} leží na jediné přímce S_1^{II}. Z toho vyplývá, že v prvém řádku matice (11) je druhé číslo jedna a další čísla jsou stejná jako v druhém řádku.

Věta 23. *Nechť M_3 je množina, která jako své prvky obsahuje podprostory S_s^I pro $s = 0, 1$ a podprostory S_s^{II} pro $s = 2, 3, \ldots, r - 1$. Potom množina M_3 je r-rozměrnou konfigurací typu:*

$$\begin{bmatrix} 2\binom{r+1}{2}, & 2(r-1), & \binom{r-1}{r-2}, & \ldots, & \binom{r-1}{2}, & r-1 \\ 3, & \binom{r+1}{3}.2^2, & 1, & \ldots, & \binom{r-2}{r-4}, & r-2 \\ 6, & 4, & \binom{r+1}{r-2}, & \ldots, & \binom{r-2}{2}, & r-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2\binom{r}{2}, & \binom{r}{3}.2^2, & \binom{r}{r-3}, & \ldots, & \binom{r}{2}, & r+1 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Důkaz. Matice (12) se liší od matice (11) v druhém řádku a v druhém sloupci. Prvá dvě čísla v uvažovaném řádku a sloupci jsou již známa. Jestliže daná přímka S_1^I