Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

REPER SÍTĚ NA PLOŠE

LIBUŠE MARKOVÁ, Olomouc

(Došlo dne 13. prosince 1971)

Studium křivek na ploše v trojrozměrném prostoru patří k základním problémům diferenciální geometrie. R. N. ŠČERBAKOV užitím Cartanových metod konstruuje pohyblivý reper plochy, který je invariantně spojený s libovolnou vrstvou křivek na ploše [2], později charakterizuje obecně metodu reperáže subvariet dané variety pro speciální typy variet [3]. K. SVOBODA, V. HAVEL, I. KOLÁŘ v práci [6] zobecnili Ščerbakovovu metodu a vyložili obecně způsob konstrukce kanonického reperu systému subvariet.

Tento článek navazuje na uvedené výsledky a uvádí další konstrukci reperu sítě křivek na ploše v trojrozměrném ekviafinním prostoru, která je odlišná od konstrukce uvedené v článku [1]. Vychází ze stejných předpokladů o uvažovaných funkcích. Na nerozvinutelné ploše $\boldsymbol{P}$ je dána síť $\boldsymbol{S} = \{\Theta_1, \Theta_2\}$. Vrchol $\boldsymbol{M}$ pohyblivého reperu $\boldsymbol{R}$ je ztotožněn s bodem plochy $\boldsymbol{P}$ a vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ reperu $\boldsymbol{R}$ patří do zaměření tečné roviny plochy v tomto bodě.

V tomto stadiu byl v [1] reper $\boldsymbol{R}$ připojen k síti tím, že se ztotožnily přímky $(\boldsymbol{M}\mathbf{e}_1)$, $(\boldsymbol{M}\mathbf{e}_2)$ v bodě $\boldsymbol{M}$ s tečnami ke křivkám vrstev Θ_1, Θ_2 v tomto bodě. Toto připojení se dělo fixací dvou tzv. význačných parametrů sítě, které odpovídaly formám π_2^1, π_1^2. Reper, který závisí pouze na hlavních, tj. na parametrech plochy, a význačných parametrech sítě nazveme polokanonický.

1. Konstrukce polokanonického reperu R plochy P vzhledem k síti S.

Pro tento reper platí

$$\mathrm{d}\boldsymbol{m} = \omega^i \mathbf{e}_i\,, \quad \mathrm{d}\mathbf{e}_i = \omega_i^k \mathbf{e}_k \quad i, k = 1, 2, 3\,,$$

jednak obvyklé rovnice struktury ekviafinního prostoru a dále

$$(1) \qquad \omega^3 = 0\,, \quad \omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2\,, \quad \omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2\,.$$

Prodloužením rovnic (1) lze získat

$$(2)\qquad \begin{aligned} da - a(3\omega_1^1 + \omega_2^2) - 2b\omega_1^2 &= m\omega^1 + n\omega^2 ,\\ db - 2b(\omega_1^1 + \omega_2^2) - a\omega_2^1 - c\omega_1^2 &= n\omega^1 + p\omega^2 ,\\ dc - c(\omega_1^1 + 3\omega_2^2) - 2b\omega_2^1 &= p\omega^1 + \omega^2 . \end{aligned}$$

Jelikož plocha $\mathbf{P}$ je nerozvinutelná, lze provést fixaci

$$(3)\qquad b^2 - ac = 1 .$$

Užitím (3) dostáváme z (2) rovnici

$$(4)\qquad -2(\omega_1^1 + \omega_2^2) = F\omega^1 + G\omega^2 ,$$

kde

$$F = \tfrac{1}{2}(2bn - ap - cm) , \quad G = \tfrac{1}{2}(2bp - aq - cn) .$$

Pokračujeme-li v prodlužování rovnic (4), můžeme provést další fixaci $F = G = 0$. Nyní reper závisí na třech vedlejších parametrech, které odpovídají třem nezávislým formám $\pi_1^1 = -\pi_2^2, \pi_1^2, \pi_2^1$ a určují polohu vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ v tečné rovině plochy $\mathbf{P}$. Fixujeme jeden ze zbývajících parametrů. Předpokládáme-li, že ani jedna vrstva parametrických křivek není asymptotická, je $a \neq 0, c \neq 0$. Pak vektor $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ volíme za tečný vektor asociované konjugované sítě (viz [1]), což odpovídá volbě

$$(5)\qquad a = c .$$

Polokanonický reper $\mathbf{R}$ plochy $\mathbf{P}$ vzhledem k síti $\mathbf{S}$ je pak dán následující soustavou rovnic

$$(6)\qquad \begin{aligned} d\mathbf{m} &= \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2 ,\\ d\mathbf{e}_1 &= \omega_1^1\mathbf{e}_1 + \omega_1^2\mathbf{e}_2 + (a\omega^1 + b\omega^2)\,\mathbf{e}_3 ,\\ d\mathbf{e}_2 &= \omega_2^1\mathbf{e}_1 - \omega_1^1\mathbf{e}_2 + (b\omega^1 + a\omega^2)\,\mathbf{e}_3 ,\\ d\mathbf{e}_3 &= (M_1\omega^1 + M_2\omega^2)\,\mathbf{e}_1 + (N_1\omega^1 + N_2\omega^2)\,\mathbf{e}_2 , \end{aligned}$$

kde $M_1 = ha - bk$, $M_2 = ka - lb$, $N_1 = ka - bh$, $N_2 = la - kb$, $b^2 - a^2 = 1$. $aM_2 - aN_1 - bM_1 + bN_2 = 0$,

$$\omega_1^1 = \frac{1}{4a}\{(p - m)\,\omega^1 + (q - n)\,\omega^2 + 2b(\omega_2^1 - \omega_1^2)\} .$$

Soustava příslušných vnějších rovnic je pak

$$(7)\quad (da - 2a\omega_1^1 - 2b\omega_1^2) \wedge \omega^1 + (db - a\omega_1^2 - a\omega_2^1) \wedge \omega^2 = 0\,,$$

$$(db - a\omega_1^2 - a\omega_2^1) \wedge \omega^1 + (da + 2a\omega_1^1 - 2b\omega_2^1) \wedge \omega^2 = 0\,,$$

$$(dM_1 + N_1\omega_2^1 - M_2\omega_1^2) \wedge \omega^1 + (dM_2 + 2M_2\omega_1^1 + N_2\omega_2^1 - M_2\omega_2^1) \wedge \omega^2 = 0,$$

$$(dN_1 - 2N_1\omega_1^1 - M_1\omega_1^2 - N_2\omega_1^2) \wedge \omega^1 + (dN_2 - N_1\omega_2^1 + M_2\omega_1^2) \wedge \omega^2 = 0.$$

Libovůle řešení soustavy (6) závisí na třech funkcích dvou argumentů.

2. Geometrická charakteristika reperu *R*.

Z předchozí volby vyplynulo, že směry $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ jsou tečné ke křivkám sítě ***S***. Zbývá stanovit směr vektora $\mathbf{e}_3$. V knize [2] kap. III. § 21. je sestrojen kanonický reper plochy **P**. Jeho vektory ε_1, ε_2 jsou tečnými vektory asymptotických křivek. Vektor ε_3 určuje směr afinní normály plochy. Určíme vztah mezi kanonickým reperem a naším reperem **R**. Z rovnic asymptotických křivek obou reperů lze odvodit následující relace mezi formami obou reperů

$$(8)\qquad \omega^1 = k_1(-b - 1)\, v^1 + k_2(-b + 1)\, v^2\,,$$

$$\omega^2 = k_1 a v^1 + k_2 a v^2\,,$$

kde v^1, v^2 jsou Pfaffovy formy příslušné kanonickému reperu. Mezi vektory obou reperů pak platí následující transformační rovnice

$$(9)\qquad \varepsilon_1 = k_1\{(-b - 1)\,\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2\}\,,$$

$$\varepsilon_2 = k_2\{(-b + 1)\,\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2\}\,,$$

$$\varepsilon_3 = S_1\mathbf{e}_1 + S_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3\,.$$

Diferencujeme-li (9) a bereme-li v úvahu (6) a soustavu diferenciálních rovnic kanonického reperu, získáme řadu vztahů mezi koeficienty a invarianty obou reperů, z nichž lze vyjmout

$$(10)\qquad k_3^2 = 1\,,\quad S_1 = S_2 = 0\,,$$

a dále

$$k_1^6 = \frac{1}{8a^3k_3^3}\,\frac{Z_2}{Z_1}\,,\quad k_2^6 = \frac{1}{8a^3k_3^3}\,\frac{Z_1}{Z_2}\,,$$

kde $Z_1 = 2an(b + 1) - m(b + 1)^2 - a^2p$, $Z_2 = 2an(b - 1) - m(b - 1)^2 - a^2p$.

Z (10) okamžitě vyplývá:

*Vektor $\mathbf{e}_3$ reperu **R** patří směru, který určuje afinní normálu plochy v bodě **M** a je stejně normovaný jako ε_3 u kanonického reperu plochy.*

3. Kanonický reper sítě na ploše.

Rozhodneme-li se nyní pro síť se speciálními vlastnostmi, lze kanonizaci dokončit pouze prodlužováním rovnic (2) nebo rovnic

$$\omega_3^1 = M_1\omega^1 + M_2\omega^2\,, \quad \omega_3^2 = N_1\omega^1 + N_2\omega^2$$

a získáme pro variace koeficientů podle význačných parametrů vztahy

$$\begin{aligned} 2a\delta m &= 3mb\pi_2^1 + (6an - 3mb)\,\pi_1^2\,, & \delta M_1 &= N_1\pi_2^1 + M_2\pi_1^2\,,\\ 2a\delta n &= (nb + 2am)\,\pi_2^1 + (4ap - nb)\,\pi_1^2\,, & \delta M_2 &= -2M_1\pi_1^1 - N_2\pi_2^1 + M_1\pi_1^2\,,\\ 2a\delta p &= (4an - pb)\,\pi_2^1 + (2aq + pb)\,\pi_1^2\,, & \delta N_1 &= 2N_1\pi_1^1 + (N_2 - M_1)\,\pi_1^2\,,\\ 2a\delta q &= (6ap - 3bq)\,\pi_2^1 + 3bq\pi_1^2\,, & \delta N_2 &= N_1\pi_2^1 - M_2\pi_1^2\,. \end{aligned}$$

Pak je možné volit:

a) $m = 0$, $q = 0$ za předpokladu, že $np \neq 0$,

b) $m = a$, $q = a$ za předpokladu, že $b^2 - (5b - 2an)(5b - 6ap) \neq 0$,

c) $M_2 = N_2 = 0$ za předpokladu, že $M_1N_1 \neq 0$,

d) $M_1 = N_2 = 0$ za předpokladu, že $N_1M_2 \neq 0$.

Geometrické vlastnosti zvolených sítí ukážeme v dalším.

Pokud další speciální požadavky na síť neklademe, stačí předpokládat, že jsme tuto síť již vybrali, což ve skutečnosti znamená pokládat formy ω_1^2, ω_2^1 za hlavní, tj. položit

$$\omega_1^2 = t\omega^1 + u\omega^2\,, \quad \omega_2^1 = f\omega^1 + g\omega^2\,.$$

Pak reper je určen soustavou

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{m} &= \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2\,,\\ \mathrm{d}\mathbf{e}_1 &= (r\omega^1 + s\omega^2)\,\mathbf{e}_1 + (t\omega^1 + u\omega^2)\,\mathbf{e}_2 + (a\omega^1 + b\omega^2)\,\mathbf{e}_3\,,\\ \mathrm{d}\mathbf{e}_2 &= (f\omega^1 + g\omega^2)\,\mathbf{e}_1 - (r\omega^1 + s\omega^2)\,\mathbf{e}_2 + (b\omega^1 + a\omega^2)\,\mathbf{e}_3\,,\\ \mathrm{d}\mathbf{e}_3 &= (M_1\omega^1 + M_2\omega^2)\,\mathbf{e}_1 + (N_1\omega^1 + N_2\omega^2)\,\mathbf{e}_2\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Soustava vnějších rovnic je pak

$$\begin{aligned} \mathrm{d}r \wedge \omega^1 + \mathrm{d}s \wedge \omega^2 &= (rf - su - fu + gt - 2rs - M_1b + M_2a)\,\omega^1 \wedge \omega^2\,,\\ \mathrm{d}t \wedge \omega^1 + \mathrm{d}u \wedge \omega^2 &= (-3st + ru + tf - u^2 - N_1b + N_2a)\,\omega^1 \wedge \omega^2\,,\\ \mathrm{d}a \wedge \omega^1 + \mathrm{d}b \wedge \omega^2 &= (-2as - 2bn + af + at)\,\omega^1 \wedge \omega^2\,,\\ \mathrm{d}b \wedge \omega^1 + \mathrm{d}a \wedge \omega^2 &= (-as - 2ar - au + br + ft)\,\omega^1 \wedge \omega^2\,,\\ \mathrm{d}f \wedge \omega^1 + \mathrm{d}g \wedge \omega^2 &= (f^2 - 2gr - gu - M_1a + M_2b)\,\omega^1 \wedge \omega^2\,, \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}M_1 \wedge \omega^1 + \mathrm{d}M_2 \wedge \omega^2 = (M_1 f - M_2 u - 2M_2 r - N_2 f + N_1 g)\,\omega^1 \wedge \omega^2\,,$$
$$\mathrm{d}N_1 \wedge \omega^1 + \mathrm{d}N_2 \wedge \omega^2 = (-M_2 t + M_1 u - 2N_1 s + 2N_1 f - N_2 u)\,\omega^1 \wedge \omega^2\,.$$

Mezi 12 funkcemi na levé straně rovnic vnějšího systému jsou tři závislosti $-ru + ts = -fu + gt$, (3), (6) a podle Bachvalovy věty ([2] kap. III. § 21.) libovůle řešení závisí na dvou funkcích dvou argumentů.

4. Geometrický význam invariantů kanonického reperu sítě.

Ze zadání repera je zřejmé, že obě vrstvy křivek Θ_1, Θ_2 jsou vzájemně rovnocenné a že přechod od vrstvy Θ_1 k vrstvě Θ_2 se děje následující záměnou

$$\left\downarrow\begin{array}{cccccccc} 1 & r & t & a & f & b & M_1 & N_1 \\ 2 & -s & g & a & u & b & N_2 & M_2 \end{array}\right.$$

K určení geometrického významu invariantů stačí tedy určit význam invariantů jednoho řádku.

Koeficient b. Rovina $z = 1$ protne paraboloid svazku základních kvadrik v hyperbole, jejíž vrcholy jsou $(\pm 1/\sqrt{b},\ \pm 1/\sqrt{b})$.

Koeficient a. Charakteristika obálky rovin $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0$ při pohybu $\omega^1 = 0$ je proťata průmětem hořejší hyperboly do roviny $z = 0$ rovnoběžně s $\mathbf{e}_3$ v bodech $(\pm\sqrt{-a/b},\ \pm 1/\sqrt{-a})$.

Koeficient f. $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} - (1/f)\,\mathbf{e}_2$ je ohniskem kongruence $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} + \alpha\mathbf{e}_2$.

Koeficient t. Oskulační rovina křivky $\omega^2 = 0$ je určena vektory $\mathbf{e}_1$, $t\mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3$.

Koeficient r. Průsečnice roviny $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{E}_3, \mathbf{e}_1, d\mathbf{e}_2)_{\omega^2=0} = 0$ kde $\boldsymbol{E}_3 = M + \mathbf{e}_3$ s rovinou $x = 0$ má směr určený vektorem $(0, -r, b)$.

Koeficient M_1. Charakteristika obálky rovin $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0$ při $\omega^2 = 0$ je směru $(0, M_1, -f)$.

Koeficient N_1. Charakteristika obálky rovin $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 0$ při $\omega^2 = 0$ je směru $(N_1, 0, -t)$.

Fixace (a). Za souřadné křivky sítě jsou zvoleny takové křivky, pro které průsečné křivky plochy s rovinami $y = 0$, $x = 0$ měly s parabolami $z = \frac{1}{2}ax^2$, $z = \frac{1}{2}ay^2$ v daném bodě $\boldsymbol{M}$ plochy $\boldsymbol{P}$ dotyk aspoň třetího řádu.

Fixace (b) volí za souřadné křivky takové, pro něž příslušné průsečné křivky mají afinní normály určené směry $(1, 0, -3a)$, $(0, 1, -3a)$ (viz [2] kap. I. § 8.).

Fixace (c), (d). Fixace (c) určuje takové souřadné křivky, pro které charakteristika obálky tečných rovin $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0$ při $\omega^1 = 0$ a $\omega^2 = 0$ je směru $\mathbf{e}_3$. Analo-