covej sústavy. Dotyčnice v tomto prípade sú určené pre všetky uvedené prípady jediným tvarom rovníc

$$X \cos qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} + Y \sin qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots, \bar{p} - 1\,.$$

Pri vyšetrovaní podmienok, pri ktorých sú dotyčnice kolmé na súradnicové osi v prípadoch 2°, 3° a 4° vychádzame zo spoločného tvaru rovníc dotyčníc (31) a postupujúc analogicky ako v prípade 1° avšak presne tak, ako to bolo uvedené v práci [3] pre krivky triedy P, môžeme dokázať, že:

1. Pre $\bar{p}$ párne dotyčnice v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = \mathrm{m}$ nemôžu byť kolmé na os OY. Každá krivka triedy PP, s výnimkou hore vymenovaných prípadov, má len v jednom z uvedených bodov dotyčnicu kolmú na os OX, a to pre qq_2 párne jej rovnica je

$$X = \mathrm{m} \tag{32}$$

a pre qq_2 nepárne

$$\mathrm{X} = -\mathrm{m}\,. \tag{33}$$

2. Pre $\bar{p}$ párne dotyčnica v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = m$ nemôže byť kolmá na os OX. Každá krivka triedy PP, s vynimkou hore vymenovaných prípadov, má dva a len dva z uvedených bodov, v ktorých dotyčnice sú kolmé na os OY, ak $\bar{p}$ je párne a $\frac{1}{2}\bar{p}$ nepárne číslo.

Ich rovnice sú $\mathrm{Y} = \pm \mathrm{m}$.

Literatúra

[1] *Podtjagin N.:* O jednej triede racionálnych kriviek, Časop. pěst. mat., *90* (1965), 181—190.

[2] *Podtjagin N.:* Ešte o jednej triede racionálnych kriviek, Čas. pěst. mat., *92* (1967), 294—312.

[3] *Podtjagin N., Oboňa J.:* O niektorých ďalších vlastnostiach kriviek triedy P, Časop. pěst. mat., *96* (1971), 398—405.

Adresa autora: 884 20 Bratislava, Gottwaldovo nám. 2 (Stavebná fakulta SVŠT).

Résumé

ENCORE SUR QUELQUES PROPRIETES NOUVELLES DES COURBES DES CLASSES P ET PP

NIKOLAJ PODTJAGIN, JOZEF OBOŇA, Bratislava

Les courbes algébriques en question ont été définies dans l'article [1] par les équations (1) où ω est un paramètre réel, $\omega \in [0, 2\pi)$, a et b sont deux constantes positives arbitraires, et p, q deux nombres entiers sans diviseur commun, q étant de plus positif.

Dans le présent arrticle, nous démontrons que les équations paramétriques (1) des courbes de la classe P deviennent les équations (6) en coordonnées ξ, η par la substitution (3), tandis que la substitution (2) les transforme en équations en coordonnées rectangulaires. Nous trouvons les équations (20) de ces courbes en coordonnées polaires; (15) est l'équation différentielle des courbes de la classe P.

Nous étudions aussi des propriétés nouvelles des courbes de la classe PP, dont la définition a été donnée dans [2] au moyen des équations (21) où ω est un paramètre réel, $\omega \in [0, 2\pi/\bar{q})$, p, q et p', q' sont deux paires de nombres entiers sans diviseurs communs, q et q' étant positifs; $\bar{q}$ est le PGCD des nombres q et q'; a, b, c sont des constantes positives arbitraires.

Nous trouvons les équations des tangentes aux points situés à une distance de a + + b + c de l'origine

$$X \cos qq_2(2k\pi)/\bar{p} + Y \sin qq_2(2k\pi)/\bar{p} = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, \bar{p} - 1\;;$$

ici, $\bar{p}$ est le PGCD des nombres $|p|$ et p'; q_2 étant défini par l'égalité $q' = \bar{q}q_2$. Ces équations sont valides pour toutes les courbes de la classe PP à l'exception des hypohypocloïdes. Il en résulte que dans le cas où $\bar{p}$ est impair, ces tangentes (à l'exception de la tangente en $\omega = 0$) ne peuvent pas être perpendiculaires aux axes des coordonnées. Si $\bar{p}$ est pair, les courbes de la classe PP — excepté les hypohypocycloïdes simples — ont chacune deux points distants de a + b + c de l'origine, avec des tangentes perpendiculaires à l'axe OX. Mais si $\bar{p}/2$ est pair aussi, la courbe a de plus deux points situés à une distance de a + b + c de l'origine et où les tangentes sont perpendiculaires à l'axe OY.

Nous trouvons les équations des tangents en des points distants de m = a − b − c, soit de m = a − b + c, soit encore de m = a + b − c de l'origine

$$X \cos qq_2(2k + 1)\,\pi/\bar{p} + Y \sin qq_2(2k + 1)\,\pi/\bar{p} = m\,, \quad k = 0, 1, \ldots, \bar{p} - 1\,.$$

Ces équations sont valides pour toutes les courbes de la classe PP, à l'exception des hypoépicycloïdes simples pour m = a − b − c, des épiépicyloïdes simples pour m = a − b + c et des épihypocycloïdes simples pour m = a + b − c. On en voit que dans le cas où $\bar{p}$ est impair, les tangentes en question ne peuvent pas être perpendiculaires à l'axe OY. Cependant, la tangente en un de ces points est perpendiculaire à l'axe OX.

Dans le cas où $\bar{p}$ est pair, les tangentes en ces points ne peuvent pas être perpendiculaires à l'axe OX. Mais si $\bar{p}$ est pair et $\bar{p}/2$ impair, la courbe de la classe PP a deux points distants de m de l'origine et où les tangentes sont perpendiculaires a l'axe OY.