Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

EŠTE O NIEKTORÝCH ĎALŠÍCH VLASTNOSTIACH KRIVIEK TRIEDY P A PP

JOZEF OBOŇA, NIKOLAJ PODTJAGIN, Bratislava

(Došlo dňa 20. júna 1970, prepracovane dňa 19. augusta 1971)

V tejto práci sa odvozujú rovnice algebraických kriviek triedy P (definovaných v práci [1]) v ortogonálnych a polárnych súradniciach. Ďalej sa uvádzajú niektoré významné vlastnosti dotyčníc ku krivkám triedy PP (definovaných v práci [2]), ktoré sa odvozujú z rovníc dotyčníc ku týmto krivkám v ich niektorých významných bodoch.

V práci [1] krivky triedy P boli definované parametrickými rovnicami

$$
\begin{aligned}
x &= a \cos q\omega + b \cos (p + q)\, \omega\,, \\
y &= a \sin q\omega + b \sin (p + q)\, \omega\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

kde konštanty p, q sú nesúdeliteľné čísla, ani jedna z konštant a, b, p, q nie je rovná nule, pričom a, b, q sú čísla kladné. Parameter ω sa mení v intervale $[0,2\pi)$.

V menovanej práci bolo ďalej dokázané, že rovnice (1) pre a = b, $p + q > 0$ určujú epicykloidy a hypocykloidy (presnejšie triedenie pozri [1]), pre a = b, $p + 2q \neq 0$ ružice a pre a = b, $p + 2q = 0$ úsečku na osi OX, ktorá sa nepovažuje za krivku triedy P.

KRIVKY TRIEDY P V ORTOGONÁLNYCH SÚRADNICIACH

Rovnice kriviek triedy P sme ľahko stanovili parametrickými rovnicami (1). Aby sme získali ich rovnice v ortogonálnych súradniciach, musíme z rovníc (1) vylúčiť parameter ω. Avšak priama eliminácia parametra nie je vždy možná, pretože tento postup vedie často k riešeniu algebraických rovníc vyššieho stupňa. Ukážeme jeden spôsob riešenia tejto úlohy, ktorý teoretický vždy vedie k želateľnému výsledku, hoci prakticky vyžaduje elementárne, ale veľmi zdĺhavé výpočty.

Položme

$$
\begin{aligned}
x + iy &= \xi\,, \\
x - iy &= \eta\,,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

kde $i = \sqrt{(-1)}$. Z rovníc (1) po úprave dostávame

$$x + iy = a\, e^{iq\omega} + b\, e^{i(p+q)\omega},$$
$$x - iy = a\, e^{-iq\omega} + b\, e^{-i(p+q)\omega},$$

odkiaľ po dosadení rovníc (2) a po úprave bude

$$\xi = a\, t^{q} + b\,.\, t^{p+q},$$
$$\eta = a\, t^{-q} + b\,.\, t^{-(p+q)},$$

kde $t = e^{i\omega}$.

Zapíšme posledné dve rovnice v tvare

(3) $$\xi = t^{q}\,(a + b\,.\,t^{p}),$$
$$\eta = t^{-q}(a + b\,.\,t^{-p})\,.$$

Po vzájomnom prenásobení dostávame

$$\xi\,.\,\eta = (a + b\,.\,t^{p})\,.\,(a + b\,.\,t^{-p}),$$

alebo

$$abt^{2p} + (a^2 + b^2 - \xi\eta)\, t^{p} + ab = 0,$$

odkiaľ

(4) $$t^{p} = \frac{\xi\,.\,\eta - a^2 - b^2 \pm \sqrt{((\xi\,.\,\eta - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2)}}{2ab}\,.$$

Vidíme, že t^p je funkcia premenných ξ, η a nezávisí od parametru ω.

Položme teda

(5) $$t^{p} = w$$

a rovnice (3) nadobudnú tvar

(6) $$\xi^{p} = w^{q}(a + bw)^{p},$$
$$\eta^{p} w^{p+q} = (aw + b)^{p}\,.$$

Tieto rovnice predstavujú krivky triedy P ešte v dvoch rôznych tvaroch: v súradniciach ξ a η a odtiaľ teda aj v reálnych súradniciach x a y. Pretože krivky triedy P sú reálne, rovnice (6) po dosazení za ξ a η zo vzťahov (2), nemôžu obsahovať kompexné veličiny.

Ak vydelíme prvú rovnicu rovníc (6) druhou, dostaneme ešte jeden tvar rovnice kriviek triedy P v pravouhlých súradniciach

(7) $$\xi^{p} = \eta^{p}\,.\,w^{p+2q}\left(\frac{a + bw}{aw + b}\right)^{p}.$$

Táto rovnica mú veľmi jednoduchý tvar pre a = b, teda

$$\xi^p = \eta^p \,.\, w^{p+2q} .$$

Ako príklad uvažujeme prípad, keď v rovniciach (1) položíme $p = 3$, $q = 1$. Krivka triedy P je potom krivkou 8-stupňa. Prvá z rovníc (6) nadobudne tvar

$$\xi^3 = w(\mathrm{a} + \mathrm{b}w)^3 . \tag{8}$$

Ak pre zjednodušenie výpočtov položíme

$$\begin{aligned} u &= \xi \,.\, \eta - \mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2 , \\ v &= \pm\sqrt{(4\mathrm{a}^2\mathrm{b}^2 - u^2)} , \end{aligned} \tag{9}$$

potom na základe vzťahov (4) a (5) máme

$$w = \frac{u + v}{2\mathrm{ab}} . \tag{10}$$

Ak túto hodnotu funkcie w dosadíme do rovnice (8), potom po jednoduchých úpravách dostávame

$$\begin{aligned} 2\mathrm{a}^4\mathrm{b}\xi^3 - u^4 - 3\mathrm{a}^2u^3 - \mathrm{a}^2(3\mathrm{a}^2 - 4\mathrm{b}^2)\,u^2 - \mathrm{a}^4(\mathrm{a}^2 - 9\mathrm{b}^2)\,u + 2\mathrm{a}^4\mathrm{b}^2(3\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2) = \\ = \left[u^3 + 3\mathrm{a}^2u^2 + \mathrm{a}^2(3\mathrm{a}^2 - 2\mathrm{b}^2)\,u + \mathrm{a}^4(\mathrm{a}^2 - 3\mathrm{b}^2)\right] v . \end{aligned}$$

Po dosadení za v, umocnení tejto rovnice na druhú a elementárnych, ale dosť dlhých výpočtoch dostaneme rovnicu tvaru

$$\begin{aligned} \mathrm{a}^4\mathrm{b}\xi^6 - \left[u^4 + 3\mathrm{a}^2u^3 + \mathrm{a}^2(3\mathrm{a}^2 - 4\mathrm{b}^2)\,u^2 + \mathrm{a}^4(\mathrm{a}^2 - 9\mathrm{b}^2)\,u - 2\mathrm{a}^4\mathrm{b}^2(3\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2)\right]\xi^3 + \\ + \mathrm{a}^4\mathrm{b}(u + \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2)^3 = 0 \end{aligned}$$

a po dosazení za u z rovníc (9) a potom za ξ a η z rovníc (2), zdĺhavým výpočtom dostaneme konečný tvar krivky v ortogonálnych súradniciach

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^4 - (\mathrm{a}^2 + 4\mathrm{b}^2)(x^2 + y^2)^3 - \mathrm{b}^2(\mathrm{a}^2 - 6\mathrm{b}^2)(x^2 + y^2)^2 - \\ - 2\mathrm{a}^4\mathrm{b}x(x^2 - 3y^2) + \mathrm{b}^2(5\mathrm{a}^2\mathrm{b}^2 - \mathrm{a}^4 - 4\mathrm{b}^4)(x^2 + y^2) - \\ - \mathrm{b}^2(\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2)^3 = 0 . \end{aligned} \tag{11}$$

Príklad nám potvrdil, že na vyjadrenie kriviek triedy P v ortogonálnych súradniciach treba vykonať veľké množstvo elementárnych operácií.

KRIVKY TRIEDY P V POLÁRNYCH SÚRADNICIACH

Vyjadrenie kriviek triedy P v polárnych súradniciach budeme hľadať cez diferenciálnu rovnicu týchto kriviek.

Vychádzajme zo vzťahov pre polárne súradnice ϱ, φ

$$\varrho^2 = x^2 + y^2, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

a potom

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}, \tag{12}$$

za predpokladu, že súčasne x a y nenadobúdajú nulové hodnoty.

Z rovníc (1) dostávame

$$\begin{gathered} \varrho^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + 2\mathrm{ab}\cos p\omega, \\ x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = [\mathrm{a}^2 q + \mathrm{b}^2(p+q) + \mathrm{ab}(p+2q)\cos p\omega]\,\mathrm{d}\omega. \end{gathered} \tag{13}$$

Z rovnice (12) potom dostávame

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\varrho^2}[\mathrm{a}^2 q + \mathrm{b}^2(p+q) + \mathrm{ab}(p+2q)\cos p\omega]\,\mathrm{d}\omega.$$

Derivováním rovnice (13) budeme mať

$$\mathrm{d}\varrho = \frac{-\mathrm{ab}p\sin p\omega}{\varrho}\,\mathrm{d}\omega$$

a z posledných dvoch rovníc teda máme

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{\mathrm{ab}p\sin p\omega}{\mathrm{a}^2 q + \mathrm{b}^2(p+q) + \mathrm{ab}(p+2q)\cos p\omega}. \tag{14}$$

Z rovnice (13) môžeme dostať

$$\cos p\omega = \frac{\varrho^2 - \mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2}{2\mathrm{ab}}$$

a potom teda

$$\sin p\omega = \frac{4\mathrm{a}^2\mathrm{b}^2 - (\varrho^2 - \mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2)^2}{2\mathrm{ab}}.$$

Diferenciálnu rovnicu (14) môžeme teda napísať vo tvare

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{p\varrho\sqrt{(4\mathrm{a}^2\mathrm{b}^2 - (\varrho^2 - \mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2)^2)}}{2\mathrm{a}^2 q + 2\mathrm{b}^2(p+q) + (p+2q)(\varrho^2 - \mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2)},$$

alebo vo tvare

$$(15) \qquad \frac{(p + 2q)\,\varrho^2 - p(\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2)}{\sqrt{[\varrho^2 - (\mathrm{a} - \mathrm{b})^2]\,[(\mathrm{a} + \mathrm{b})^2 - \varrho^2]}}\,\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} = -p\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Táto rovnica je teda aj diferenciálnou rovnicou algebraických kriviek triedy P.

Pre a = b (teda pre $p + 2q \neq 0$, pozri [1]), tj. pre ružice, diferenciálna rovnica (15) má veľmi jednoduchý tvar

$$(16) \qquad \frac{p + 2q}{\sqrt{(4\mathrm{a}^2 - \varrho^2)}}\,\mathrm{d}\varrho = -p\,\mathrm{d}\varphi$$

a teda táto diferenciálna rovnica je diferenciálnou rovnicou všetkých ružíc.

Integrál, vyhovujúci diferenciálnej rovnici (16) a splňujúci počiatočnú podmienku (pre $\varphi = 0$ musí byť $\varrho = 2\mathrm{a}$) je

$$(17) \qquad \varrho = 2\mathrm{a}\cos\frac{p}{p + 2q}\,\varphi$$

a táto rovnica súčasne definuje aj rovnice ružíc v polárnych súradniciach.

V prípade, keď a $\neq$ b (epicykloidy a hypocykloidy) všeobecným integrálom rovnice (15) je rovnica

$$(18) \qquad \int \frac{(p + 2q)\,\varrho^2 - p(\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2)}{\sqrt{[\varrho^2 - (\mathrm{a} - \mathrm{b})^2]\,[(\mathrm{a} + \mathrm{b})^2 - \varrho^2]}}\,\frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} = -p\varphi + C\,.$$

Označme integrál na ľavej strane tejto rovnice ako I a položme $z = \varrho^2 - \mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2$ a potom budeme mať

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{(p + 2q)(\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + z) - p(\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2)}{(\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + z)\sqrt{(4\mathrm{a}^2\mathrm{b}^2 - z^2)}}\,\mathrm{d}z\,,$$

alebo po čiastočnej integrácii

$$(19) \qquad I = -\frac{p + 2q}{2}\arccos\frac{z}{2\mathrm{ab}} - \frac{p(a^2 - b^2)}{2}\,I_1\,,$$

kde

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}z}{(\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + z)\sqrt{(4\mathrm{a}^2\mathrm{b}^2 - z^2)}}\,.$$

Tento integrál vypočítame opäť substitúciou $1/v = \mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + z$ a po dosazení, výpočte integrálu dostávame v pôvodných premenných

$$I_1 = \frac{1}{\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2}\arccos\frac{(\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2)^2 - (\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2)\,\varrho^2}{2\mathrm{ab}\varrho^2}\,.$$

Pre integrál I na základe vzťahu (19) potom budeme mať výraz

$$I = -\frac{p + 2q}{2} \arccos \frac{\varrho^2 - a^2 - b^2}{2ab} - \frac{p}{2} \arccos \frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)\varrho^2}{2ab\varrho^2}.$$

Všeobecné riešenie (18) diferenciálnej rovnice (15) môžeme teda napísať vo tvare

$$(p + 2q) \arccos \frac{\varrho^2 - a^2 - b^2}{2ab} + p \arccos \frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)\varrho^2}{2ab\varrho^2} = 2p\varphi + C.$$

Ľubovoľnú konštantu C určíme z počiatočnej podmienky: pre $\varphi = 0$ musí byť $\varrho = a + b$. Ak dosadíme tieto hodnoty ϱ a φ do poslednej rovnice, ľahko vypočítame $C = p\pi$.

Rovnica krivky triedy P v polárnych súradniciach nadobúda konečný tvar

$$(20) \quad (p + 2q) \arccos \frac{\varrho^2 - a^2 - b^2}{2ab} + p \arccos \frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)\varrho^2}{2ab\varrho^2} = \\ = p(2\varphi + \pi).$$

Poznamenávame, že táto rovnica platí aj pre $a = b$. Skutočne, v tom prípade nadobúda tvar

$$(p + 2q) \arccos \frac{\varrho^2 - 2a^2}{2a^2} = 2p\varphi,$$

odkiaľ dostávame

$$\varrho^2 = 2a^2 \left(1 + \cos \frac{2p}{p + 2q} \varphi\right),$$

a tedy aj

$$\varrho = 2a \cos \frac{p}{p + 2q} \varphi,$$

čo sa zhoduje so vzťahom (17) pre ružice.

Podobne ako v práci [3] môžeme skúmať vlastnosti dotyčníc ku krivkám triedy P, vyjadrených v ortogonálnych súradniciach, kedy je vhodné použiť tvaru (10), pre funkciu w. Analogicky je možné skúmať vlastnosti dotyčníc aj v polárnych súradniciach.

Niektoré významné vlastnosti dotyčníc kriviek triedy PP.

V práci [2] krivky triedy PP boli definované rovnicami

$$(21) \quad \begin{aligned} x &= a \cos qq'\omega + b \cos (p + q) q'\omega + c \cos (p'q + pq' + qq')\omega \\ y &= a \sin qq'\omega + b \sin (p + q) q'\omega + c \sin (p'q + pq' + qq')\omega, \end{aligned}$$

kde ω je parameter, meniaci sa v intervale $[0, 2\pi/\bar{q})$; p, q, p', q' sú nesúdeliteľné čísla, pričom q, q' sú čísla kladné; $\bar{q}$ je najväčší spoločný deliteľ čísel q a q'; a, b, c, sú ľubovoľné kladné čísla.

V spomenutej práci bolo ďalej dokázané, že pre

$$\mathrm{a}qq' - \mathrm{b}(p + q)\, q' + \mathrm{c}(p'q + pq' + qq') = 0$$

rovnice (21) určujú prostú epiepicykloidu, pre

$$\mathrm{a}qq' + \mathrm{b}(p + q)\, q' - \mathrm{c}(p'q + pq' + qq') = 0$$

prostú epihypocykloidu, pre

$$\mathrm{a}qq' - \mathrm{b}(p + q)\, q' - \mathrm{c}(p'q + pq' + qq') = 0$$

prostú hypoepicykloidu a pre

$$\mathrm{a}qq' + \mathrm{b}(p + q)\, q' + \mathrm{c}(p'q + pq' + qq') = 0$$

prostú hypohypocykloidu.

V práci [2] bolo tiež dokázané, že pre $p = \bar{p} \cdot p_1$, $p' = \bar{p} \cdot p_2$, $q = \bar{q} \cdot q_1$, $q' = \bar{q} \cdot q_2$, kde $\bar{p}$ je najväčší spoločný deliteľ čísel p a p', potom:

1. Na každej krivke triedy PP existuje práve p bodov, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť $\varrho = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$, určených vzťahom

$$\omega = \frac{2k\pi}{\bar{p} \cdot \bar{q}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \bar{p} - 1 . \tag{22}$$

2. Pre $|p_2|\, q_1$ párne na každej krivke triedy PP existuje $\bar{p}$ rôznych bodov, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť $\varrho = |a - b - c| > 0$, určených vzťahom

$$\omega = \frac{(2k + 1)\, \pi}{\bar{p}\bar{q}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \bar{p} - 1 . \tag{23}$$

3. Pre $|p_1|$, $|p_2|$, q_1, q_2 nepárne na každej krivke triedy *PP* existuje p rôznych bodov, ktorých vzdialenosť od počiatku súradnicovej sústavy je $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b} + \mathrm{c}| > 0$ a ktoré sú definované vzťahom (23).

4. Pre $|p_1| \cdot q_2$ párne na každej krivke triedy PP existuje $\bar{p}$ rôznych bodov, ktorých vzdialenosť od počiatku súradnicovej sústavy je $\varrho = |\mathrm{a} + \mathrm{b} - \mathrm{c}| > 0$ a ktoré sú opäť určené vzťahom (23).

Z rovníc (21) vyplýva, že všetky krivky triedy PP sú súmerné vzhľadom na os OX. Ak $\bar{p}$ je párne číslo, tieto krivky sú súmerné aj vzhľadom na os OY.

2. Pre smernicu dotyčnice ku krivke triedy PP v jej ľubovoľnom bode (x, y) máme

$$(24) \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = - \frac{\begin{array}{c} \mathrm{a}qq' \cos qq'\omega + \mathrm{b}(p+q)\, q' \cos (p+q)\, q'\omega + \\ + \mathrm{c}(p'q + pq' + qq') \cos (p'q + pq' + qq')\, \omega \end{array}}{\begin{array}{c} \mathrm{a}qq' \sin qq'\omega + \mathrm{b}(p+q)\, q' \sin (p+q)\, q'\omega + \\ + \mathrm{c}(p'q + pq' + qq') \cos (p'q + pq' + qq')\, \omega \end{array}}.$$

Smernica dotyčnice v bode $\omega = 0$ môže byť konečná len pre

$$\mathrm{a}qq' + \mathrm{b}(p+q)\, q' + \mathrm{c}(p'q + pq' + qq') = 0\,,$$

z toho vyplýva, že dotyčnica ku každej krivke triedy PP v jej počiatočnom bode $\omega = 0$, s výnimkou prostých hypohypocykloid, je vždy kolmá na os OX.

Počiatočný bod $\omega = 0$ prostej hypohypocykloidy je singulárny bod zvratu, v ktorom dotyčnicou je os OX. Ak $\bar{p}$ je číslo párne, aj dotyčnica v bode súmernom s bodom $\omega = 0$ vzhľadom na os OY, je tiež os OX.

1° Body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť $\varrho = a + \mathrm{b} + \mathrm{c}$, sú určené hodnotami (22) parametra ω, pre ktoré máme

$$\cos p'q\omega = \cos pq'\omega = 1\,.$$

Vzťah (24) v nich nadobúda tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{[\mathrm{a}qq' + \mathrm{b}(p+q)\, q' + \mathrm{c}(p'q + pq' + qq')] \cos qq'\omega}{[\mathrm{a}qq' + \mathrm{b}(p+q)\, q' + \mathrm{c}(p'q + pq' + qq')] \sin qq'\omega}$$

a nemá zmysel pre prosté hypohypocykloidy. Pre všetky ostatné krivky triedy PP v uvedených bodoch platí

$$(25) \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos q\, q'\omega}{\sin q\, q'\omega}.$$

Pre rovnice dotyčníc v týchto bodoch potom máme

$$(26) \qquad X \cos q\, q'\omega + Y \sin q\, q'\omega = x \cos q\, q'\omega + y \sin q\, q'\omega\,,$$

kde x, y sú súradnice dotykového bodu krivky PP, vzdialeného od počiatku O na $\varrho = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$; X, Y sú premenné súradnice bodov dotyčnice. Ak dosadíme hodnoty (22) parametra ω, potom pre všetky krivky triedy PP, s výnimkou prostých hypohypocykloid, dostaneme rovnice dotyčníc

$$(27) \qquad X \cos qq_2 \frac{2k\pi}{\bar{p}} + Y \sin qq_2 \frac{2k\pi}{\bar{p}} = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, \bar{p} - 1\,.$$

Pre $\bar{p}$ nepárne ani jedna z týchto dotyčníc, okrem dotyčnice v počiatočnom bode $\omega = 0$, nemôže byť kolmá ani na jednu zo súradnicových osí.

Pretože čísla qq_2, $\bar{q}$ nemajú spoločných deliteľov, pre $\bar{p}$ párne ($\bar{p} = 2k_1$) dotyčnica v uvažovaných bodoch je kolmá na os OX len v tom prípade, keď číslo $t = k/k_1$ je celé. Pretože $k \leqq \bar{p} - 1$, musí byť $t \leqq (2k_1 - 1)/k_1 = 2 - 1/k_1 < 2$ a teda t môže nadobúdať len dve hodnoty 0 a 1. To znamená, že pre $\bar{p}$ párne každá krivka triedy PP, s výnimkou prostých hypohypocykloid, má len dva body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$, v ktorých dotyčnice sú kolmé na os OX. Tieto dotyčnice sú dané rovnicami (25). Pretože číslo qq_2 je nepárne, sú teda dané rovnicami $X = \pm(\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c})$.

Ak aj $\bar{p}/2$ je číslo párne ($\bar{p} = 4k_2$), dotyčnica v bode, vzdialenom od počiatku súradnicovej sústavy má $\varrho = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$ je kolmá na os OY vtedy a len vtedy, keď $t = k/k_2$ je celé nepárne číslo. Pretože $k \leqq \bar{p} - 1$ musíme mať $t \leqq (4k_2 - 1)/k_2 = 4 - 1/k_2 < 4$ a teda t môže mať len hodnoty 1 a 3. V prípade, keď $\bar{p}/2$ je číslo párne, každá krivka triedy PP, s výnimkou prostých hypohypocykloid, má dva body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$, v ktorých dotyčnice sú kolmé na os OY. Sú dané rovnicami (25) pre $k = k_2$ a $k = 3k_2$, teda $Y = \pm(\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c})$.

2°. V bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}|$, tj. pre $|p_2| \,.\, q_1$ párne, určených vzťahom (23) máme

$$\cos pq'\omega = -1\,, \quad \cos p'q\omega = 1\,.$$

Vzťah (24) pre tieto body nadobúda tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{[\mathrm{a}qq' - \mathrm{b}(p + q)\,q' - \mathrm{c}(p'q + pq' + qq')]\cos qq'\omega}{[\mathrm{a}qq' - \mathrm{b}(p + q)\,q' - \mathrm{c}(p'q + pq' + qq')]\sin qq'\omega}$$

a nemá zmysel pre prosté hypoepicykloidy. Pre všetky ostatné krivky triedy PP pre uvedené body platí vzťah (25).

Pre dotyčnice v týchto bodoch potom platí rovnica (26). Ak do nej dosadíme hodnoty (23) parametra ω pre dotyčnice v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}|$ u všetkých kriviek triedy PP, s výnimkou prostých hypoepicykloid, dostaneme konečne rovnice

$$X \cos qq_2 \frac{(2k + 1)\,\pi}{\bar{p}} + Y \sin qq_2 \frac{(2k + 1)\,\pi}{\bar{p}} = \mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, \bar{p} - 1\,. \tag{28}$$

3°. Pre $|p_1|$, $|p_2|$, q_1, q_2 nepárne, máme v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}|$, určených vzťahom (21)

$$\cos pq'\omega = -1\,, \quad \cos p'q\omega = -1\,.$$

Vzťah (24) pre tieto body nadobúda tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{[\mathrm{a}qq' - \mathrm{b}(p + q)\,q' + \mathrm{c}(p'q + pq' + qq')]\cos qq'\omega}{[\mathrm{a}qq' - \mathrm{b}(p + q)\,q' + \mathrm{c}(p'q + pq' + qq')]\sin qq'\omega}$$

a nemá zmysel pre prosté epiepicykloidy. Pre ostatné krivky triedy PP v uvedených bodoch znovu platí vzťah (25).

Pre rovnice dotyčníc v týchto bodoch platí zase rovnica (25) a po dosadení do nej hodnôt (23) pre dotyčnice v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |a - b - c| > 0$, pre všetky krivky triedy PP, s výnimkou prostých epiepicykloid dostaneme teraz rovnice

$$(29) \qquad X \cos qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} + Y \sin qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} = a - b + c\,,$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, \bar{p} - 1\,.$$

4°. Pre $|p_1| \,.\, q_2$ párne v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |a + b - c|$, určených vzťahom (23), máme

$$\cos pq'\omega = 1\,, \quad \cos p'q\omega = -1\,.$$

Vzťah (24) potom nadobúda tvar

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{[aqq' + b(p+q)\,q' - c(p'q + pq' + qq')] \cos qq'\omega}{[aqq' + b(p+q)\,q' - c(p'q + pq' + qq')] \sin qq'\omega}.$$

Nemá zmysel pre prosté epihypocykloidy. Pre ostatné krivky triedy PP, pre uvedené body platia znovu vzťahy (25) a (26). Ak dosadíme do rovnice (26) hodnoty (23) parametra ω, pre dotyčnice v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |a + b - c| > 0$, pre všetky krivky triedy PP, s výnimkou prostých epihypocykloid, dostaneme rovnice

$$(30) \qquad X \cos qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} + Y \sin qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} = a + b - c\,,$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, \bar{p} - 1\,.$$

Ak porovnáme rovnice (28), (29) a (30) vidíme, že sa líšia len ich pravými stranami. Môžeme ich teda zapísať v spoločnom tvare

$$(31) \quad X \cos qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} + Y \sin qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} = m\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \bar{p} - 1\,.$$

kde u kriviek triedy PP v prípade 2° $m = a - b - c$, v prípade 3° $m = a - b + c$, v prípade 4° $m = a + b - c$.

Rovnice (31) platia pre všetky krivky triedy PP, s výnimkou prostých hypoepicykloid v prípade 2°, prostých epiepicykloid v prípade 3° a prostých epihypocykloid v prípade 4°.

Pre $a - b - c = 0$ v prípade 3°, pre $a - b + c = 0$ v prípade 3° a pre $a + b - c = 0$ v prípade 4° máme tedy $m = 0$. Krivka prechádza počiatkom súradni-