ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 98 * PRAHA 7. 11. 1973 * ČÍSLO 4

PERIODIC SOLUTIONS OF A WEAKLY NONLINEAR WAVE EQUATION IN ONE DIMENSION

JIŘÍ PEŠL, Valašské Meziříčí

(Received July 16, 1971)

In applications of the theory of partial differential equations the following problem may rise up: The existence and uniqueness of classical (twice continuously differentiable) solutions are to be investigated for the wave equation

$$\tilde{u}_{\tau\tau}(\tau, x) - \tilde{u}_{xx}(\tau, x) = g_1(\tau, x) + \varepsilon F_1(\tilde{u}, \varepsilon)(\tau, x)$$

considered in the domain $\{(\tau, x) \mid \tau \in (-\infty, +\infty), x \in \langle 0, \pi \rangle\}$ under the periodicity condition $\tilde{u}(\tau + 2\pi\omega, x) - \tilde{u}(\tau, x) = 0$ and boundary conditions of various types at the points $x = 0$ and $x = \pi$, where g_1 and F_1 are $2\pi\omega$-periodic in the variable τ. The problem with $\omega = 1$ is solved in [1], the special case of boundary conditions of Dirichlet type for an arbitrary ω in [2]. While the both papers utilize the Poincaré method, in this paper a different method is used – solutions are sought in the form of Fourier series with respect to τ, which guarantees the periodicity of the solutions.

Performing the transformation $\tau = \omega t$ and putting $u(t, x) = \tilde{u}(\tau, x)$, the above equation assumes the form

$$u_{tt}(t, x) - \omega^2 u_{xx}(t, x) = g(t, x) + \varepsilon F(u, \varepsilon)(t, x), \tag{0.1}$$

where g and F are 2π-periodic in the variable t, and the periodicity condition mentioned above reads

$$u(t + 2\pi, x) - u(t, x) = 0, \quad t \in (-\infty, +\infty), x \in \langle 0, \pi \rangle. \tag{0.2}$$

As for the boundary conditions the paper deals with the following three types:

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= {}^0h(t) + \varepsilon\, {}^0X(u, \varepsilon)(t), \\ u(t, \pi) &= {}^1h(t) + \varepsilon\, {}^1X(u, \varepsilon)(t); \end{aligned} \tag{0.3}$$

$$\begin{aligned} u_x(t, 0) + \alpha_0 u(t, 0) &= {}^0h(t) + \varepsilon\, {}^0X(u, \varepsilon)(t), \\ u_x(t, \pi) + \alpha_1 u(t, \pi) &= {}^1h(t) + \varepsilon\, {}^1X(u, \varepsilon)(t); \end{aligned} \tag{0.4}$$

$$(0.5) \qquad \begin{aligned} u(t, 0) &= {}^0h(t) + \varepsilon\, {}^0X(u, \varepsilon)(t)\,, \\ u_x(t, \pi) + \alpha u(t, \pi) &= {}^1h(t) + \varepsilon\, {}^1X(u, \varepsilon)(t)\,. \end{aligned}$$

The paper is divided into three paragraphs. The first, preparatory paragraph contains definitions and lemmas, the second one deals with the linear problem, i.e. with the case where $\varepsilon = 0$. The results obtained are used in the final paragraph to solve the weakly nonlinear problem.

The author's gratitude and acknowledgement is due to O. Vejvoda for his valuable advice and help.

1. SOME DEFINITIONS AND AUXILIARY LEMMAS

$\mathscr{R}$, $\mathscr{N}$ and $\mathscr{M}$ are the symbols for the sets of reals, positive integers and integers, respectively. $\mathscr{C}^{(k)}[a, b]$ (or $\tilde{\mathscr{C}}^{(k)}[a, b]$, if need be) denotes the space of real-valued (or complex-valued) functions the k-th derivative of which is continuous on $\langle a, b\rangle$, the letter $\mathscr{I}$ stands for the closed interval $\langle 0, \pi\rangle$. Finally, let us write $e_k(t) = e^{ikt}$, $t \in \mathscr{R}$, $k \in \mathscr{M}$.

With respect to the method used it is convenient to introduce some functional spaces, derived from Sobolev spaces $\mathscr{W}^k_2(0, 2\pi)$.

Definition 1.1. Let us denote by $\mathscr{H}^r_{2\pi}$ $(r \in \mathscr{N})$ the subspace of real-valued functions $f \in \mathscr{W}^r_2(0, 2\pi)$ fulfilling the relation

$$f^{(k)}_{\text{abs}}(2\pi) = f^{(k)}_{\text{abs}}(0)\,, \quad 0 \leqq k < r\,, \quad k \in \mathscr{M}\,,$$

where $f_{\text{abs}} \in \mathscr{C}^{(r-1)}[0, 2\pi]$ is the absolute continuous representant of f (i.e. $f_{\text{abs}} = f$ almost everywhere in $(0, 2\pi)$). The norm in $\mathscr{H}^r_{2\pi}$ is defined by

$$\|f\|_{\mathscr{H}^r_{2\pi}} = \left[\sum_{k=0}^{r} \int_0^{2\pi} |f^{(k)}(t)|^2 \, dt\right]^{1/2}.$$

Remark 1.1. A function $f \in \mathscr{H}^r_{2\pi}$ will usually be identified with the corresponding $f_{\text{abs}} \in \mathscr{C}^{(r-1)}[0, 2\pi]$.

The following lemma may be easily verified:

Lemma 1.1. *$\mathscr{H}^r_{2\pi}$ $(r \in \mathscr{N})$ is a Banach space.*

Definition 1.2. Let us denote by $\mathscr{C}^{(k)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^r_{2\pi})$ $(r \in \mathscr{N},\ k \in \mathscr{M},\ k \geqq 0)$ the space of mappings $u : \mathscr{I} \to \mathscr{H}^r_{2\pi}$ which are, together with their derivatives $u^{(n)}$, $0 \leqq n \leqq k$, continuous transformations on $\mathscr{I}$ into $\mathscr{H}^r_{2\pi}$. (We shall often write $\mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^r_{2\pi})$ instead of $\mathscr{C}^{(0)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^r_{2\pi})$.) The norm in this space is defined by

$$\|u\|_{\mathscr{C}^{(k)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^r_{2\pi})} = \max_{x \in \mathscr{I}} \left[\sum_{n=0}^{k} \|u^{(n)}(x)\|^2_{\mathscr{H}^r_{2\pi}}\right]^{1/2}.$$

Also the next lemma can be proved easily:

Lemma 1.2. $\mathscr{C}^{(k)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^r_{2\pi})$ $(r \in \mathscr{N},\ k \in \mathscr{M},\ k \geqq 0)$ *is a Banach space.*

Remark 1.2. Analogously to Remark 1.1, the mapping $u \in \mathscr{C}^{(k)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^r_{2\pi})$ may be identified with the function $u(x, t)$ (of two real variables) defined on the rectangle $\mathscr{I} \times \langle 0, 2\pi \rangle$, whose derivatives $\partial^{n+s}u/\partial x^n\, \partial t^s$, $n = 0, 1, \ldots, k$, $s = 0, 1, \ldots, r - 1$, are continuous and fulfil the condition

$$\frac{\partial^{n+s}u}{\partial x^n\, \partial t^s}(x, 0) = \frac{\partial^{n+s}u}{\partial x^n\, \partial t^s}(x, 2\pi)\,, \quad x \in \mathscr{I}\,.$$

Remark 1.3. Any function $h \in \mathscr{H}^r_{2\pi}$ $(r \in \mathscr{N})$ can be extended onto $(-\infty, +\infty)$ 2π-periodically preserving its smoothness (the function extended in this way will be denoted by h as well). This fact enables us to define the "translation of the argument" $(. + t_0) : \mathscr{H}^r_{2\pi} \to \mathscr{H}^r_{2\pi}$ for an arbitrary $t_0 \in \mathscr{R}$ by

$$h(. + t_0)(t) = h(t + t_0)\,, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,\ h \in \mathscr{H}^r_{2\pi}\,.$$

Since $\mathscr{H}^r_{2\pi}$ $(r \in \mathscr{N})$ is a subspace of $\mathscr{L}_2(0, 2\pi)$, any function $h \in \mathscr{H}^r_{2\pi}$ can be expressed in the form of a Fourier series $h = \sum_{n \in \mathscr{M}} h_n e_n$, where $h_n = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} h(t)\, e_{-n}(t)\, dt$. Analogously, each $u \in \mathscr{C}^{(k)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^r_{2\pi})$ can be written as $u(x) = \sum_{n \in \mathscr{M}} u_n(x)\, e_n$, $x \in \mathscr{I}$. On the other hand, provided that the coefficients h_n $(n \in \mathscr{M})$ or $u_n(x)$ $(n \in \mathscr{M},\ x \in \mathscr{I})$ satisfy certain conditions, the corresponding series converges in the space $\mathscr{H}^r_{2\pi}$ or $\mathscr{C}^{(k)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^r_{2\pi})$, respectively.

Definition 1.1'. Let us denote by $\mathfrak{h}^r$ $(r \in \mathscr{N})$ the space of sequences $h = \{h_n\}_{-\infty}^{\infty}$ of complex numbers satisfying the conditions:

(i) $h_{-n} = \bar{h}_n\,, \quad n \in \mathscr{M}\,,$

(ii) $\sum_{n \in \mathscr{M}} n^{2r} |h_n|^2 < +\infty.$

The norm is defined (putting $0^0 = 1$) by

$$\|h\|_{\mathfrak{h}^r} = \sqrt{(2\pi)}\, [\sum_{m=0}^{r} \sum_{n \in \mathscr{M}} n^{2m} |h_n|^2]^{1/2}\,.$$

Definition 1.2'. Let us denote by $\mathscr{C}^{(k)}(\mathscr{I}; \mathfrak{h}^r)$ $(k \geqq 0,\ k \in \mathscr{M},\ r \in \mathscr{N})$ the space of sequences $u = \{u_n\}_{-\infty}^{\infty}$ of complex-valued functions defined on $\mathscr{I}$ with the following properties:

(i) $u_{-n}(x) = \overline{u_n(x)}\,, \quad n \in \mathscr{M},\ x \in \mathscr{I}\,,$

(ii) $u_n \in \tilde{\mathscr{C}}^{(k)}(\mathscr{I})\,, \quad n \in \mathscr{M}\,,$

(iii) the series $\sum_{n \in \mathscr{M}} n^{2r} |u_n^{(s)}(x)|^2\,, \quad s = 0, 1, \ldots, k$, converge uniformly on $\mathscr{I}$.

The norm is defined by

$$\|u\|_{\mathscr{C}^{(k)}(\mathscr{I};\mathfrak{h}^r)} = \sqrt{(2\pi)} \max_{x\in\mathscr{I}} \left[\sum_{s=0}^{k} \sum_{m=0}^{r} \sum_{n\in\mathscr{M}} n^{2m} |u_n^{(s)}(x)|^2\right]^{1/2}.$$

The following important lemma can be proved quite analogously as Lemma 1.3 in [3].

Lemma 1.3. *The spaces $\mathscr{H}^r_{2\pi}$ and $\mathfrak{h}^r$ $(r \in \mathscr{N})$ are isomorphic and isometric. This relation also holds between $\mathscr{C}^{(k)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^r_{2\pi})$ and $\mathscr{C}^{(k)}(\mathscr{I}; \mathfrak{h}^r)$ $(r \in \mathscr{N},\ k \in \mathscr{M},\ k \geqq 0)$.*

Let us introduce the space $\mathscr{U} = \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^3_{2\pi}) \cap \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi}) \cap \mathscr{C}^{(2)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^1_{2\pi})$ with the norm

$$\|u\|_{\mathscr{U}} = \max\left\{\|u\|_{\mathscr{C}(\mathscr{I};\mathscr{H}^3_{2\pi})}, \|u\|_{\mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I};\mathscr{H}^2_{2\pi})}, \|u\|_{\mathscr{C}^{(2)}(\mathscr{I};\mathscr{H}^1_{2\pi})}\right\}.$$

Analogously: $\mathfrak{u} = \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathfrak{h}^3) \cap \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathfrak{h}^2) \cap \mathscr{C}^{(2)}(\mathscr{I}; \mathfrak{h}^1)$,

$$\|u\|_{\mathfrak{u}} = \max\left\{\|u\|_{\mathscr{C}(\mathscr{I};\mathfrak{h}^3)}, \|u\|_{\mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I};\mathfrak{h}^2)}, \|u\|_{\mathscr{C}^{(2)}(\mathscr{I};\mathfrak{h}^1)}\right\}.$$

Then the spaces $\mathscr{U}$ and $\mathfrak{u}$ are isomorphic and isometric as well.

Let $\mathscr{S}$ be a subset of $\mathscr{M}$ and $r \in \mathscr{N}$. Let us denote $\mathfrak{h}^r_{\mathscr{S}} = \{h = \{h_n\}_{-\infty}^{\infty} \in \mathfrak{h}^r \mid h_n = 0$ for all $n \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{S}\}$ and $[\mathfrak{h}^r_{\mathscr{S}}]^{\perp} = \mathfrak{h}^r_{\mathscr{M}\setminus\mathscr{S}}$. Then the decomposition $\mathfrak{h}^r = \mathfrak{h}^r_{\mathscr{S}} \dotplus [\mathfrak{h}^r_{\mathscr{S}}]^{\perp}$ is valid. Analogously: $\mathscr{H}^r_{2\pi} = [\mathscr{H}^r_{2\pi}]_{\mathscr{S}} \dotplus [\mathscr{H}^r_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}}$, $\mathscr{U} = \mathscr{U}_{\mathscr{S}} \dotplus \mathscr{U}^{\perp}_{\mathscr{S}}$.

The two following lemmas, quite analogous to Lemmas 5.3 and 5.4 in [1], enable us to transfer the results obtained in the linear case to the weakly nonlinear problem. First the notation used: $[\mathscr{P}_1 \to \mathscr{P}_2]$ denotes the space of all linear continuous transformations from $\mathscr{P}_1$ into $\mathscr{P}_2$ ($\mathscr{P}_1$ and $\mathscr{P}_2$ being normed linear spaces), $\mathscr{B}(p_0; \delta; \mathscr{P}) = \{p \in \mathscr{P} \mid \|p - p_0\| < \delta\}$ is an open ball in the normed linear space $\mathscr{P}$.

Lemma 1.4. *Let the operator $W = W(u, d)(\varepsilon)$ map $\mathscr{P} \times \mathscr{D} \times \langle 0, \varepsilon_0 \rangle$ into $\mathscr{P}$ ($\mathscr{P}$, $\mathscr{D}$ being Banach spaces), let it be continuous and have continuous Gateaux's derivatives (further only "G-derivatives") W'_u, W'_d on the domain $\mathscr{B}(0; \varrho; \mathscr{P}) \times \mathscr{B}(\bar{d}; \delta_0; \mathscr{D}) \times \langle 0, \varepsilon_0 \rangle$. Let $V \in [\mathscr{D} \to \mathscr{P}]$. Then there exist numbers δ^* and ε^* $(0 < \delta^* < \delta_0,\ 0 < \varepsilon^* \leqq \varepsilon_0)$ such that the equation*

$$u = V(d) + \varepsilon\, W(u, d)(\varepsilon)$$

has a unique solution $u = U(d)(\varepsilon) \in \mathscr{P}$ for each $d \in \mathscr{B}(\bar{d}; \delta^*; \mathscr{D})$ and $\varepsilon \in \langle 0, \varepsilon^* \rangle$ continuous in ε. This solution has the G-derivative U'_d continuous in both variables d and ε.

Lemma 1.5. *Let the operator $P = P(d)(\varepsilon)$ map for every $\varepsilon \in \langle 0, \varepsilon_0 \rangle$ an open set $\mathscr{G} \subset \mathscr{D}_1$ into $\mathscr{D}_2$ ($\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ being Banach spaces), let the following assumptions be fulfilled:*

(i) *The equation* $P(d_0)(0) = 0$ *has a solution* $d_0^* \in \mathcal{G}$.

(ii) *The operator* P *is continuous and has the G-derivative* $P'_d = P'_d(d)(\varepsilon)$ *continuous on the set* $\mathcal{B}(d_0^*; \varrho; \mathcal{G}) \times \langle 0, \varepsilon_0 \rangle$ ($\varrho > 0$ *being a suitably chosen number*).

(iii) *There exists* $Q = [P'_d(d_0^*)(0)]^{-1} \in [\mathcal{D}_2 \to \mathcal{D}_1]$.

Then there exists $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0\rangle$ *such that the equation*

$$P(d)(\varepsilon) = 0$$

has for $\varepsilon \in \langle 0, \varepsilon_1 \rangle$ *a unique solution* $d^* = d^*(\varepsilon) \in \mathcal{G}$ *continuous on* $\langle 0, \varepsilon_1 \rangle$ *and such that* $d^*(0) = d_0^*$.

2. THE LINEAR PROBLEM AND ITS SOLUTIONS

2.1. The formulation of the problem. Before solving the weakly nonlinear problem it is convenient to solve the linear one. In accordance with the previous paragraph we shall formulate this problem as follows:

Let functions $g \in \mathcal{C}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^2_{2\pi}) \cup \mathcal{C}^{(1)}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^1_{2\pi})$, ${}^i h \in \mathcal{H}^2_{2\pi}$ $(i = 0, 1)$ and real numbers $\omega > 0$, α_0, α_1, α be given. Every function $u \in \mathcal{U}$ that satisfies the equation

$$-\omega^2 u''(x) + \Delta_t u(x) = g(x), \quad x \in \mathcal{I} \tag{2.1.1}$$

in sense of $\mathcal{C}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^1_{2\pi})$ (where $\Delta_t = \mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2$ means the Laplace operator) and the boundary conditions

$$\begin{aligned} u(0) &= {}^0 h, \\ u(\pi) &= {}^1 h \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

or

$$\begin{aligned} u'(0) + \alpha_0 u(0) &= {}^0 h, \\ u'(\pi) + \alpha_1 u(\pi) &= {}^1 h \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

or

$$\begin{aligned} u(0) &= {}^0 h, \\ u'(\pi) + \alpha u(\pi) &= {}^1 h \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

in sense of $\mathcal{H}^2_{2\pi}$ will be called a solution of the problem $(\mathcal{P}_1^0)$, $(\mathcal{P}_2^0)$ or $(\mathcal{P}_3^0)$, respectively.

The solvability of our problem depends essentially on the number-theoretical character of the parameter ω. With respect to this fact two cases will be investigated separately:

(i) $\omega = p/q$, where p, q are relatively prime natural numbers,

(ii) the number ω satisfies the following assumption with a natural $\varrho \geqq 2$.

$[\mathscr{L}\varrho]$: there exists a constant $C_0 > 0$ such that

$$\left|\frac{1}{\omega} - \frac{m}{n}\right| \geqq C_0 n^{-\varrho} \quad \text{for all} \quad m, n \in \mathscr{N}.$$

Remark 2.1. According to Liouville's theorem (see [4]) the assumption $[\mathscr{L}\varrho]$ is fulfilled e.g. when ω is an algebraic number of the degree ϱ.

Expanding the functions g, ${}^0h$, ${}^1h$ into Fourier series

$$g(x) = \sum_{k \in \mathscr{M}} g_k(x)\, e_k\,, \quad {}^ih = \sum_{k \in \mathscr{M}} {}^ih_k e_k\,, \quad i = 0, 1$$

and assuming the existence of a solution $u \in \mathscr{U}$,

$$u(x) = \sum_{k \in \mathscr{M}} u_k(x)\, e_k\,, \quad x \in \mathscr{I}\,, \tag{2.1.5}$$

the equation (2.1.1) yields the system of differential equations

$$-\omega^2\, u_k''(x) - k^2\, u_k(x) = g_k(x)\,, \quad x \in \mathscr{I},\, k \in \mathscr{M}\,.$$

General solutions of these equations are

$$\begin{aligned} u_k(x) &= {}^0u_k(x) + a_k \cos(kx/\omega) + b_k/k \sin(kx/\omega)\,, \quad k \neq 0\,, \\ u_0(x) &= {}^0u_0(x) + a_0 + b_0 x\,, \qquad\qquad x \in \mathscr{I}\,, \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

where the particular solutions

$$\begin{aligned} {}^0u_k(x) &= {}^0u_k(g)(x) \equiv -(\omega k)^{-1} \int_0^x g_k(\xi) \sin(k(x - \xi)/\omega)\, \mathrm{d}\xi\,, \\ {}^0u_0(x) &= {}^0u_0(g)(x) \equiv -\omega^{-2} \int_0^x g_0(\xi)(x - \xi)\, \mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

are chosen to fulfil the relation ${}^0u_k(0) = {}^0u_k'(0) = 0$. Using Schwarz inequality (if $g \in \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^1_{2\pi})$, then also integrating by parts in (2.1.7)), it is easy to verify that the function ${}^0u(x) = \sum_{k \in \mathscr{M}} {}^0u_k(x)\, e_k$, $x \in \mathscr{I}$, lies in $\mathscr{U}$. Hence, the function u given by the series (2.1.5) belongs to $\mathscr{U}$ if and only if the coefficients a_k, b_k in (2.1.6) satisfy the condition

$$a = \{a_k\}_{-\infty}^{\infty} \in \mathfrak{h}^3\,, \quad b \doteq \{b_k\}_{-\infty}^{\infty} \in \mathfrak{h}^2\,. \tag{2.1.8}$$

Now let us look for such couples $(a, b) \in \mathfrak{h}^3 \times \mathfrak{h}^2$ that the corresponding $u \in \mathscr{U}$ fulfil the boundary conditions required.

2.2. Problem ($\mathscr{P}_1^0$). Substituting (2.1.5) and (2.1.6) for u, the boundary condition (2.1.2$_1$) assumes the form

$$a_k = {}^0h_k\,, \quad k \in \mathscr{M}\,. \tag{2.2.1}$$

In this way, the sequence $a = \{a_k\}_{-\infty}^{\infty} \in \mathfrak{h}^3$ is determined by ${}^0h \in \mathscr{H}_{2\pi}^3$ uniquely and the condition (2.1.2$_2$) gives

$$\begin{aligned} b_k \sin(k\pi/\omega) &= k\, B_k(g, {}^0h, {}^1h)\,, \quad k \in \mathscr{M} \setminus \{0\}\,, \\ b_0 &= \pi^{-1}\, B_0(g, {}^0h, {}^1h)\,, \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

where

$$B_k(g, {}^0h, {}^1h) = {}^1h_k - {}^0h_k \cos(k\pi/\omega) - {}^0u_k(g)(\pi)\,, \quad k \in \mathscr{M}\,. \tag{2.2.3}$$

First, let us investigate the rational case with $\omega = p/q$, where p, q are relatively prime natural numbers. Then $\sin(k\pi/\omega) = 0$ if and only if $k \in \mathscr{S}(1) = \{k \in \mathscr{M} \mid k/p \in \mathscr{M}\}$. Therefore, equations (2.2.2) are equivalent to the system

$$\begin{aligned} b_0 &= \pi^{-1}\, B_0(g, {}^0h, {}^1h)\,, \\ b_k &= k(\sin(k\pi q/p))^{-1}\, B_k(g, {}^0h, {}^1h)\,, \quad k \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{S}(1)\,, \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

$$B_k(g, {}^0h, {}^1h) = 0\,, \quad k \in \mathscr{S}(2) = \mathscr{S}(1) \setminus \{0\}\,. \tag{2.2.5}$$

Here the relations (2.2.4) define the coefficients b_k, $k \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{S}(2)$, whereas (2.2.5) represents a solvability condition.

To fulfil (2.1.8) let us assume that $g \in \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}_{2\pi}^2) \cup \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}_{2\pi}^1)$ and ${}^ih \in \mathscr{H}_{2\pi}^3$, $i = 0, 1$. Then, if the condition (2.2.5) is satisfied, all solutions of our problem are given by

$$u = V_1(d) + W_1(g, {}^0h, {}^1h)\,, \tag{2.2.6}$$

where the sequence $d = \{d_k\}_{-\infty}^{\infty}$ ranges over $\mathfrak{h}_{\mathscr{S}(2)}^2$ and the operators V_1, W_1 are defined by

$$V_1(d)(x) = \sum_{k \in \mathscr{S}(2)} k^{-1} d_k \sin(kx/\omega)\, e_k\,, \quad x \in \mathscr{I}\,, \tag{2.2.7}$$

$$\begin{aligned} W_1(g, {}^0h, {}^1h)(x) = {} & \sum_{k \in \mathscr{M}} [{}^0u_k(g)(x) + {}^0h_k \cos(kx/\omega)]\, e_k + \\ & + \sum_{k \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{S}(1)} B_k(g, {}^0h, {}^1h) \frac{\sin(kx/\omega)}{\sin(k\pi/\omega)}\, e_k + \\ & + \pi^{-1}\, B_0(g, {}^0h, {}^1h)\, x e_0\,, \quad x \in \mathscr{I}\,. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

It is easy to verify that $V_1 \in [\mathfrak{h}_{\mathscr{S}(2)}^2 \to \mathscr{U}]$ and

$$W_1 \in [\mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}_{2\pi}^2) \times (\mathscr{H}_{2\pi}^3)^2 \to \mathscr{U}] \cap [\mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}_{2\pi}^1) \times (\mathscr{H}_{2\pi}^3)^2 \to \mathscr{U}]\,.$$

Defining an operator $Z_1 = Z_1(g, {}^0h, {}^1h)$, $Z_1 : (\mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi}) \cup \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^1_{2\pi})) \times \times (\mathscr{H}^3_{2\pi})^2 \to \mathscr{H}^3_{2\pi}$ by

$$(2.2.9)\quad Z_1(g, {}^0h, {}^1h) = {}^1h(. + \pi q/p) - {}^0h + \\ + \frac{q^2}{2p^2}\int_0^\pi\int_0^\xi [g(\vartheta)(. + \xi q/p) + g(\vartheta)(. - \xi q/p)]\, d\vartheta\, d\xi$$

and integrating by parts, the condition (2.2.5) may be modified into the form

$$\int_0^{2\pi} Z_1(g, {}^0h, {}^1h)(t)\, e_{-k}(t)\, dt = 0\,, \quad k \in \mathscr{S}(2)\,.$$

Hence, denoting by $R_1 = R_1(g, {}^0h, {}^1h)$ the operator given by

$$(2.2.10)\quad R_1(g, {}^0h, {}^1h)(t) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{d}{dt} Z_1(g, {}^0h, {}^1h)(t + 2\pi j/p)\,, \quad t \in (0, 2\pi)\,,$$

$$R_1 \in [\mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi}) \times (\mathscr{H}^3_{2\pi})^2 \to \mathscr{H}^2_{2\pi}] \cap [\mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^1_{2\pi}) \times (\mathscr{H}^3_{2\pi})^2 \to \mathscr{H}^2_{2\pi}]$$

and performing the following arrangements

$$R_1(g, {}^0h, {}^1h)(t) = \sum_{k\in\mathscr{M}} (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} R_1(g, {}^0h, {}^1h)(\tau)\, e^{-ik\tau}\, d\tau\, e_k(t) =$$
$$= \sum_{k\in\mathscr{M}} \frac{ik}{2\pi} \sum_{j=0}^{p-1} \int_0^{2\pi} Z_1(g, {}^0h, {}^1h)(\tau + 2\pi j/p)\, e_{-k}(\tau)\, d\tau\, e_k(t) =$$
$$= \sum_{k\in\mathscr{M}} \frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z_1(g, {}^0h, {}^1h)(\eta)\, e_{-k}(\eta)\, d\eta \sum_{j=0}^{p-1} e^{2\pi ikj/p}\, e_k(t) =$$
$$= \sum_{k\in\mathscr{S}(2)} \frac{ikp}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z_1(g, {}^0h, {}^1h)(\eta)\, e_{-k}(\eta)\, d\eta\, e_k(t)\,,$$

we obtain the solvability condition (2.2.5) in a more closed form

$$(2.2.11)\qquad R_1(g, {}^0h, {}^1h) = 0\,.$$

Theorem 2.2.1. *Let the problem $(\mathscr{P}^0_1)$ with $\omega = p/q$ be given, where p, q are relatively prime natural numbers. Let $g \in \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi}) \cup \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^1_{2\pi})$, ${}^ih \in \mathscr{H}^3_{2\pi}$, $i = 0, 1$. Then the problem has a solution if and only if*

$$R_1(g, {}^0h, {}^1h) = 0 \quad (\textit{equality in the space } \mathscr{H}^2_{2\pi})\,.$$

In the affirmative case every solution of $(\mathscr{P}^0_1)$ is given by

$$u = V_1(d) + W_1(g, {}^0h, {}^1h)\,,$$

where d is an arbitrary element of $\mathfrak{h}^2_{\mathscr{S}(2)}$.

Further, let ω be an irrational number satisfying the assumption $[\mathscr{L}\varrho]$ for a natural $\varrho \geqq 2$. Then equations (2.2.2) determine the coefficients b_k, $k \in \mathscr{M}$, uniquely and so the uniqueness of the solution of $(\mathscr{P}_1^0)$ is proved. Supposing $g \in \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}_{2\pi}^{\varrho+1}) \cup \cup \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}_{2\pi}^{\varrho})$ and ${}^ih \in \mathscr{H}_{2\pi}^{\varrho+2}$, $i = 0, 1$, the requirement (2.1.8) is fulfilled as the assumption $[\mathscr{L}\varrho]$ gives the estimate

$$|\sin(k\pi/\omega)| \geqq 2C_0 k^{1-\varrho}, \quad k \in \mathscr{N}. \tag{2.2.12}$$

$$\left(\text{Indeed, } |\sin(k\pi/\omega)| = \frac{|\sin(k\pi/\omega - n\pi)|}{|k\pi/\omega - n\pi|}\, k\pi|1/\omega - n/k| \geqq 2kC_0k^{-\varrho}.\right)$$

In this case, our problem has a solution

$$u = W_2(g, {}^0h, {}^1h), \tag{2.2.13}$$

where the operator

$$W_2 \in [\mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}_{2\pi}^{\varrho+1}) \times (\mathscr{H}_{2\pi}^{\varrho+2})^2 \to \mathscr{U}] \cap [\mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}_{2\pi}^{\varrho}) \times (\mathscr{H}_{2\pi}^{\varrho+2})^2 \to \mathscr{U}]$$

is defined by

$$\begin{aligned} W_2(g, {}^0h, {}^1h)(x) = {} & \sum_{k \in \mathscr{M}} [{}^0u_k(g)(x) + {}^0h_k \cos(kx/\omega)]\, e_k + \\ & + \sum_{k \in \mathscr{M} \setminus \{0\}} B_k(g, {}^0h, {}^1h)\, \frac{\sin(kx/\omega)}{\sin(k\pi/\omega)}\, e_k + \\ & + \pi^{-1} B_0(g, {}^0h, {}^1h)\, x e_0, \quad x \in \mathscr{I}. \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Theorem 2.2.2. *Let the problem $(\mathscr{P}_1^0)$ with ω satisfying the assumption $[\mathscr{L}\varrho]$ for a natural $\varrho \geqq 2$ be given. Let $g \in \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}_{2\pi}^{\varrho+1}) \cup \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}_{2\pi}^{\varrho})$ and ${}^ih \in \mathscr{H}_{2\pi}^{\varrho+2}$, $i = 0, 1$. Then the problem has a unique solution*

$$u = W_2(g, {}^0h, {}^1h).$$

2.3. Problem $(\mathscr{P}_2^0)$. Inserting (2.1.5) and (2.1.6) into $(2.1.3_1)$ we obtain

$$\begin{aligned} b_k &= \omega({}^0h_k - \alpha_0 a_k), \quad k \in \mathscr{M} \setminus \{0\}, \\ b_0 &= {}^0h_0 - \alpha_0 a_0. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Considering these equations as definitions of coefficients b_k, the boundary condition $(2.1.3_2)$ gives

$$\begin{aligned} & a_0[\alpha_1 - \alpha_0 - \alpha_0\alpha_1\pi] = A_0(g, {}^0h, {}^1h), \\ & a_k\left[(\alpha_1 - \alpha_0)\cos(k\pi/\omega) - \frac{k^2 + \omega^2\alpha_0\alpha_1}{k\omega}\sin(k\pi/\omega)\right] = A_k(g, {}^0h, {}^1h), \quad k \in \mathscr{M} \setminus \{0\}, \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

where

$$(2.3.3)\quad A_0(g, {}^0h, {}^1h) = {}^1h_0 - {}^0h_0(1 + \alpha_1\pi) + \omega^{-2}\int_0^\pi g_0(\pi - \xi)(1 + \alpha_1\xi)\,d\xi\,,$$

$$A_k(g, {}^0h, {}^1h) = {}^1h_k - {}^0h_k[\cos(k\pi/\omega) + \alpha_1\omega k^{-1}\sin(k\pi/\omega)] +$$
$$+ \omega^{-2}\int_0^\pi g_k(\pi - \xi)[\cos(k\xi/\omega) +$$
$$+ \alpha_1\omega k^{-1}\sin(k\xi/\omega)]\,d\xi\,,\quad k \in \mathcal{M} \setminus \{0\}\,.$$

Firstly, let us investigate the particular case when $\alpha_0 = \alpha_1$ and $\omega = p/q$, p, q – natural, relatively prime. Consequently, equations (2.3.2) reduce to

$$(2.3.4)\quad a_0\alpha_0^2 = -\pi^{-1} A_0(g, {}^0h, {}^1h)\,,$$

$$a_k \sin(k\pi/\omega) = \frac{-k\omega}{k^2 + \omega^2\alpha_0^2} A_k(g, {}^0h, {}^1h)\,,\quad k \in \mathcal{M} \setminus \{0\}\,.$$

(A): Let $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$. Then the equations (2.3.4) are fulfilled if and only if

$$(2.3.5)\qquad a_k = \frac{-\omega}{k\sin(k\pi/\omega)} A_k(g, {}^0h, {}^1h)\,,\quad k \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}(1)\,,$$

$$(2.3.6)\qquad A_k(g, {}^0h, {}^1h) = 0\,,\quad k \in \mathcal{S}(1)\,.$$

(Here $\mathcal{S}(1)$ is the same set as in Section 2.2.)

The solvability condition (2.3.6) can be written after certain arrangements (analogous with those used to derive (2.2.11)) as

$$(2.3.6')\qquad R_3(g, {}^0h, {}^1h) \equiv \sum_{j=0}^{p-1} Z_3(g, {}^0h, {}^1h)(\cdot + 2\pi j/p) = 0\,,$$

where the operator $Z_3\colon (\mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi}) \cup \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^1_{2\pi})) \times (\mathscr{H}^2_{2\pi})^2 \to \mathscr{H}^2_{2\pi}$ is defined by

$$(2.3.7)\quad Z_3(g, {}^0h, {}^1h) = {}^1h(\cdot + \pi q/p) - {}^0h +$$
$$+ \frac{1}{2}(q/p)^2\int_0^\pi [g(x)(\cdot - qx/p) + g(x)(\cdot + qx/p)]\,dx\,.$$

Provided that the condition (2.3.6′) is fulfilled, every solution of our problem has the form

$$(2.3.8)\qquad u = V_3(d) + W_3(g, {}^0h, {}^1h)\,,\quad d = \{d_k\}_{-\infty}^{\infty} \in \mathfrak{h}^3_{\mathcal{S}(1)}\,,$$

where

$$(2.3.9)\qquad V_3(d)(x) = \sum_{k\in\mathcal{S}(1)} d_k\cos(kx/\omega)\,e_k\,,\quad x \in \mathscr{I}\,,$$

$$(2.3.10)\quad W_3(g, {}^0h, {}^1h)(x) = \sum_{k \in \mathcal{M} \setminus \{0\}} \left[{}^0u_k(g)(x) + {}^0h_k \frac{p}{kq} \sin(kx/\omega) \right] e_k + $$
$$+ \left[{}^0u_0(g)(x) + {}^0h_0 x \right] e_0 - $$
$$- \sum_{k \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}(1)} A_k(g, {}^0h, {}^1h) \frac{p \cos(kx/\omega)}{kq \sin(k\pi/\omega)} e_k, \quad x \in \mathcal{I}.$$

Obviously:

$$V_3 \in [\mathfrak{h}^3_{\mathcal{S}(1)} \to \mathcal{U}], \quad W_3 \in [\mathcal{C}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^2_{2\pi}) \times (\mathcal{H}^2_{2\pi})^2 \to \mathcal{U}] \cap$$
$$\cap [\mathcal{C}^{(1)}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^1_{2\pi}) \times (\mathcal{H}^2_{2\pi})^2 \to \mathcal{U}], \quad R_3 \in [\mathcal{C}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^2_{2\pi}) \times (\mathcal{H}^2_{2\pi})^2 \to \mathcal{H}^2_{2\pi}] \cap$$
$$\cap [\mathcal{C}^{(1)}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^1_{2\pi}) \times (\mathcal{H}^2_{2\pi})^2 \to \mathcal{H}^2_{2\pi}].$$

(B): Let $\alpha_0 = \alpha_1 \neq 0$. Then conditions (2.3.5), (2.3.6) from the case (A) are to be replaced by

$$(2.3.11)\quad a_k = \frac{-k\omega}{k^2 + \omega^2\alpha_0^2} [\sin(k\pi/\omega)]^{-1} A_k(g, {}^0h, {}^1h), \quad k \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}(1),$$
$$a_0 = -\pi^{-1}\alpha_0^{-2} A_0(g, {}^0h, {}^1h),$$

$$(2.3.12)\qquad A_k(g, {}^0h, {}^1h) = 0, \quad k \in \mathcal{S}(2) = \mathcal{S}(1) \setminus \{0\}.$$

Defining the operator Z_4: $(\mathcal{C}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^2_{2\pi}) \cup \mathcal{C}^{(1)}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^1_{2\pi})) \times (\mathcal{H}^2_{2\pi})^2 \to \mathcal{H}^1_{2\pi}$ by

$$(2.3.13)\quad Z_4(g, {}^0h, {}^1h)(t) = \frac{d}{dt} Z_3(g, {}^0h, {}^1h)(t) + $$
$$+ (\alpha_0\, q/2p) \int_0^\pi [g(\xi)(t - \xi q/p) - g(\xi)(t + \xi q/p)]\, d\xi,$$

the solvability condition (2.3.12) is equivalent to

$$(2.3.12')\qquad R_4(g, {}^0h, {}^1h) \equiv \sum_{j=0}^{p-1} Z_4(g, {}^0h, {}^1h)(. + 2\pi j/p) = 0.$$

If this condition is fulfilled, every solution of $(\mathcal{P}^0_2)$ has the form

$$(2.3.14)\qquad u = V_4(d) + W_4(g, {}^0h, {}^1h), \quad d = \{d_k\}_{-\infty}^{\infty} \in \mathfrak{h}^3_{\mathcal{S}(2)},$$

where

$$(2.3.15)\qquad V_4(d)(x) = \sum_{k \in \mathcal{S}(2)} d_k \left[\cos(kx/\omega) - \frac{\alpha_0 p}{kq} \sin(kx/\omega) \right] e_k,$$

$$(2.3.16)\quad W_4(g, {}^0h, {}^1h)(x) = \sum_{k\in\mathcal{M}} {}^0u_k(g)(x)\, e_k + {}^0h_0 x e_0 +$$

$$+ \sum_{k\in\mathcal{M}\setminus\{0\}} {}^0h_k p/(kq) \sin(kx/\omega)\, e_k +$$

$$+ \sum_{k\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{S}(1)} \Big\{-kpq\, A_k(g, {}^0h, {}^1h)\,[\sin(k\pi/\omega)\,(k^2q^2 +$$

$$+ \alpha_0^2 p^2)]^{-1}\Big[\cos(kx/\omega) - \frac{\alpha_0 p}{kq}\sin(kx/\omega)\Big]\, e_k\Big\} -$$

$$- \pi^{-1}\alpha_0^{-2} A_0(g, {}^0h, {}^1h)\,(1 - \alpha_0 x)\, e_0\,, \quad x \in \mathcal{I}\,.$$

Obviously:

$$V_4 \in [\mathfrak{h}^3_{\mathcal{S}(2)} \to \mathcal{U}]\,, \quad W_4 \in [\mathcal{C}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^2_{2\pi}) \times (\mathcal{H}^2_{2\pi})^2 \to \mathcal{U}] \cap$$

$$\cap\, [\mathcal{C}^{(1)}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^1_{2\pi}) \times (\mathcal{H}^2_{2\pi})^2 \to \mathcal{U}]\,, \quad R_4 \in [\mathcal{C}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^2_{2\pi}) \times (\mathcal{H}^2_{2\pi})^2 \to \mathcal{H}^1_{2\pi}] \cap$$

$$\cap\, [\mathcal{C}^{(1)}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^1_{2\pi}) \times (\mathcal{H}^2_{2\pi})^2 \to \mathcal{H}^1_{2\pi}]\,.$$

Theorem 2.3.1. *Let the problem $(\mathcal{P}^0_2)$ with $\alpha_0 = \alpha_1$ and $\omega = p/q$ be given, where p, q are relatively prime natural numbers. Let $g \in \mathcal{C}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^2_{2\pi}) \cup \mathcal{C}^{(1)}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^1_{2\pi})$ and ${}^ih \in \mathcal{H}^2_{2\pi}$, $i = 0, 1$.*

(A): *Let $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$. Then the problem has a solution if and only if*

$$R_3(g, {}^0h, {}^1h) = 0 \quad (\textit{equality in the space } \mathcal{H}^2_{2\pi})\,.$$

In the affirmative case every solution of $(\mathcal{P}^0_2)$ is given by

$$u = V_3(d) + W_3(g, {}^0h, {}^1h)\,,$$

where d is an arbitrary element of $\mathfrak{h}^3_{\mathcal{S}(1)}$.

(B): *Let $\alpha_0 = \alpha_1 \neq 0$. Then the problem has a solution if and only if*

$$R_4(g, {}^0h, {}^1h) = 0 \quad (\textit{equality in the space } \mathcal{H}^1_{2\pi})\,.$$

If this condition is satisfied, every solution of the problem is given by

$$u = V_4(d) + W_4(g, {}^0h, {}^1h)\,,$$

where d is an arbitrary element of $\mathfrak{h}^3_{\mathcal{S}(2)}$.

Further, let $\alpha_0 = \alpha_1$ and let ω be an irrational number satisfying the assumption $[\mathcal{L}\varrho]$ for a natural $\varrho \geqq 2$. Since in this case $\sin(k\pi/\omega) \neq 0$ for all $k \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$, the coefficients a_k, $k \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$, are determined by (2.3.4) uniquely.

(A): Let $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$. Then equations (2.3.4) give the solvability condition

$$(2.3.17)\qquad R_5(g, {}^0h, {}^1h) \equiv A_0(g, {}^0h, {}^1h) = 0$$

and every solution of the problem can be written as

$$u = V_5(d) + W_5(g, {}^0h, {}^1h), \quad d \in \mathscr{R}, \tag{2.3.18}$$

where the operators V_5 and W_5 are given by

$$V_5(d)(x) = de_0, \quad x \in \mathscr{I}, \tag{2.3.19}$$

$$\begin{aligned} W_5(g, {}^0h, {}^1h)(x) = \sum_{k \in \mathscr{M} \setminus \{0\}} \{&{}^0u_k(g)(x) + {}^0h_k \omega k^{-1} \sin(kx/\omega) - \\ &- \omega[k \sin(k\pi/\omega)]^{-1} A_k(g, {}^0h, {}^1h) \cos(kx/\omega)\} e_k + \\ &+ [{}^0u_0(g)(x) + {}^0h_0 x] e_0, \quad x \in \mathscr{I}. \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

Using the estimate (2.2.12), it is easy to verify that

$$W_5 \in [\mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^{\varrho+1}_{2\pi}) \times (\mathscr{H}^{\varrho+1}_{2\pi})^2 \to \mathscr{U}] \cap [\mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^{\varrho}_{2\pi}) \times (\mathscr{H}^{\varrho+1}_{2\pi})^2 \to \mathscr{U}].$$

(B): Let $\alpha_0 = \alpha_1 \neq 0$. Then equations (2.3.4) determine all coefficients a_k and the problems has a unique solution (provided that the functions g, ${}^0h$ and ${}^1h$ are smooth enough):

$$u = W_6(g, {}^0h, {}^1h), \tag{2.3.21}$$

where

$$\begin{aligned} W_6(g, {}^0h, {}^1h)(x) = \sum_{k \in \mathscr{M} \setminus \{0\}} \{&{}^0u_k(g)(x) + {}^0h_k \omega k^{-1} \sin(kx/\omega) - \\ &- k\omega[(k^2 + \omega^2\alpha_0^2) \sin(k\pi/\omega)]^{-1} A_k(g, {}^0h, {}^1h) \times \\ &\times [\cos(kx/\omega) - \alpha_0 \omega k^{-1} \sin(kx/\omega)]\} e_k - \\ &- \pi^{-1}\alpha_0^{-2} A_0(g, {}^0h, {}^1h)(1 - \alpha_0 x) e_0 + \\ &+ [{}^0u_0(g)(x) + {}^0h_0 x] e_0, \quad x \in \mathscr{I}. \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

Obviously:

$$W_6 \in [\mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^{\varrho+1}_{2\pi}) \times (\mathscr{H}^{\varrho+1}_{2\pi})^2 \to \mathscr{U}] \cap [\mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^{\varrho}_{2\pi}) \times (\mathscr{H}^{\varrho+1}_{2\pi})^2 \to \mathscr{U}].$$

Theorem 2.3.2. *Let the problem $(\mathscr{P}_2^0)$ with $\alpha_0 = \alpha_1$ and with ω satisfying the assumption $[\mathscr{L}\varrho]$ for a natural $\varrho \geqq 2$ be given. Let $g \in \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^{\varrho+1}_{2\pi}) \cup \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^{\varrho}_{2\pi})$ and ${}^ih \in \mathscr{H}^{\varrho+1}_{2\pi}$, $i = 0, 1$.*

(A): *Let $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$. Then the problem has a solution if and only if*

$$R_5(g, {}^0h, {}^1h) = 0 \quad (\textit{equality in } \mathscr{R}).$$

In the affirmative case every solution of $(\mathscr{P}_2^0)$ is given by

$$u = V_5(d) + W_5(g, {}^0h, {}^1h),$$

where d is an arbitrary real number.

(B): *If* $\alpha_0 = \alpha_1 \neq 0$, *the problem has a unique solution*

$$u = W_6(g, {}^0h, {}^1h).$$

Finally, let $\alpha_0 \neq \alpha_1$ and $\omega = p/q$, where p, q are relatively prime natural numbers. Let us denote

$$(2.3.23)\quad S_3(k) = (\alpha_1 - \alpha_0)\cos(k\pi/\omega) - \frac{k^2 + \omega^2\alpha_0\alpha_1}{k\omega}\sin(k\pi/\omega), \quad k \in \mathscr{M} \setminus \{0\},$$

$$S_3(0) = \alpha_1 - \alpha_0 - \alpha_0\alpha_1\pi.$$

Then $|S_3(k)| = |\alpha_1 - \alpha_0| > 0$ for all $k \in \mathscr{S}(2)$ and the relation $(2.3.23_1)$ can be written for $k \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{S}(1)$ as

$$S_3(k) = (\alpha_1 - \alpha_0)\sin(k\pi q/p)\left[\operatorname{cotg}(k\pi q/p) - \frac{k^2 + \omega^2\alpha_0\alpha_1}{k\,\omega(\alpha_1 - \alpha_0)}\right].$$

The first term in the square brackets acquires only $p - 1$ values on the set of $k \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{S}(1)$, the second one can assume the same value for at most two different $k \in \mathscr{M}$, the whole expression in the brackets is equal to $k/(\omega(\alpha_0 - \alpha_1))$ asymptotically. Hence, the set $\mathscr{S}(3) = \{k \in \mathscr{M} \mid S_3(k) = 0\}$ contains at most $2p - 1$ numbers and, moreover, the following relations hold:

$$|S_3(k)| \geqq C|k|, \qquad k \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{S}(1) \setminus \mathscr{S}(3), \quad C \text{ being a constant},$$

$$|S_3(k)| = |\alpha_1 - \alpha_0|, \quad k \in \mathscr{S}(2).$$

Obviously, conditions (2.3.2) are equivalent to

$$(2.3.24)\qquad a_k = (S_3(k))^{-1} A_k(g, {}^0h, {}^1h), \quad k \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{S}(3),$$

$$(2.3.25)\qquad A_k(g, {}^0h, {}^1h) = 0, \quad k \in \mathscr{S}(3).$$

Then, to guarantee that $a = \{a_k\}_{-\infty}^{\infty} \in \mathfrak{h}^3$, a higher smoothness of the functions g, ${}^0h$ and ${}^1h$ must be assumed, e.g. $g \in \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^3_{2\pi}) \cup \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi})$, ${}^ih \in \mathscr{H}^3_{2\pi}$, $i = 0, 1$ or $g \in \mathscr{C}(\mathscr{I}; [\mathscr{H}^2_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(2)}) \cup \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; [\mathscr{H}^1_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(2)})$, ${}^ih \in [\mathscr{H}^2_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(2)}$, $i = 0, 1$ (in this case $A_k(g, {}^0h, {}^1h) = 0$ for $k \in \mathscr{S}(2)$).

Defining the operator R_7: $(\mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi}) \cup \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^1_{2\pi})) \times (\mathscr{H}^2_{2\pi})^2 \to \mathfrak{h}^{f}_{\mathscr{S}(3)}$ by

$$(2.3.26)\quad R_7(g, {}^0h, {}^1h) = \{r_k\}_{-\infty}^{\infty}, \quad r_k = \begin{cases} A_k(g, {}^0h, {}^1h), & k \in \mathscr{S}(3), \\ 0, & k \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{S}(3), \end{cases}$$

the solvability condition (2.3.25) can be written as

$$(2.3.25')\qquad R_7(g, {}^0h, {}^1h) = 0.$$

If this condition is fulfilled, every solution of $(\mathscr{P}_2^0)$ is given by

$$u = V_7(d) + W_7(g, {}^0h, {}^1h)\,, \quad d = \{d_k\}_{-\infty}^{\infty} \in \mathfrak{h}^1_{\mathscr{S}(3)}\,, \tag{2.3.27}$$

where

$$V_7(d)(x) = \sum_{k \in \mathscr{S}(3) \setminus \{0\}} d_k[\cos(kx/\omega) - \alpha_0 \omega\, k^{-1} \sin(kx/\omega)]\, e_k + \\ + d_0(1 - \alpha_0 x)\, e_0\,, \quad x \in \mathscr{I}\,, \tag{2.3.28}$$

$$W_7(g, {}^0h, {}^1h)(x) = \begin{cases} \tilde{W}_7(g, {}^0h, {}^1h)(x)\,, & \text{if } 0 \in \mathscr{S}(3)\,, \\ \tilde{W}_7(g, {}^0h, {}^1h)(x) + (S_3(0))^{-1} A_0(g, {}^0h, {}^1h) \times \\ \times (1 - \alpha_0 x)\, e_0\,, & \text{if } 0 \notin \mathscr{S}(3)\,, \end{cases} \tag{2.3.29}$$

$$\tilde{W}_7(g, {}^0h, {}^1h)(x) = \sum_{k \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{S}(3) \setminus \{0\}} (S_3(k))^{-1} A_k(g, {}^0h, {}^1h) \times \\ \times [\cos(kx/\omega) - \alpha_0 \omega k^{-1} \sin(kx/\omega)]\, e_k + \\ + \sum_{k \in \mathscr{M} \setminus \{0\}} [{}^0u_k(g)(x) + {}^0h_k \omega k^{-1} \sin(kx/\omega)]\, e_k + \\ + ({}^0u_0(g)(x) + {}^0h_0 x)\, e_0\,, \quad x \in \mathscr{I}\,. \tag{2.3.30}$$

(As to (2.3.27) let us remind that the sequence $d = \{d_k\}_{-\infty}^{\infty} \in \mathfrak{h}^1_{\mathscr{S}(3)}$ has only a finite number of non-vanishing terms which may assume arbitrary complex values such that $d_{-k} = \bar{d}_k$, $k \in \mathscr{M}$.) Obviously:

$$V_7 \in [\mathfrak{h}^1_{\mathscr{S}(3)} \to \mathscr{U}]\,, \quad W_7 \in [\mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^3_{2\pi}) \times (\mathscr{H}^3_{2\pi})^2 \to \mathscr{U}] \cap \\ \cap [\mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi}) \times (\mathscr{H}^3_{2\pi})^2 \to \mathscr{U}]$$

and as well

$$W_7 \in [\mathscr{C}(\mathscr{I}; [\mathscr{H}^2_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(2)}) \times ([\mathscr{H}^2_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(2)})^2 \to \mathscr{U}^{\perp}_{\mathscr{S}(2)}]\,.$$

Theorem 2.3.3. *Let the problem* $(\mathscr{P}_2^0)$ *with* $\alpha_0 \neq \alpha_1$ *and* $\omega = p/q$ *be given, where* p, q *are relatively prime natural numbers. Let* $g \in \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^3_{2\pi}) \cup \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi})$, ${}^ih \in \mathscr{H}^3_{2\pi}$, $i = 0, 1$ *or* $g \in \mathscr{C}(\mathscr{I}; [\mathscr{H}^2_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(2)}) \cup \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; [\mathscr{H}^1_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(2)})$, ${}^ih \in [\mathscr{H}^2_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(2)}$, $i = 0, 1$. *Then the following assertions hold*:

(A): *If* $\mathscr{S}(3)$ *is a void set, the problem has a unique solution*

$$u = W_7(g, {}^0h, {}^1h)\,.$$

(B): *If the set* $\mathscr{S}(3)$ *is non-void, the problem has a solution if and only if*

$$R_7(g, {}^0h, {}^1h) = 0 \quad (\textit{equality in the space } \mathfrak{h}^1_{\mathscr{S}(3)})\,.$$

In the affirmative case every solution of $(\mathscr{P}_2^0)$ *is given by*

$$u = V_7(d) + W_7(g, {}^0h, {}^1h)\,,$$

where d *is an arbitrary element of* $\mathfrak{h}^1_{\mathscr{S}(3)}$.

Remark 2.2. In the case when $\alpha_0 \neq \alpha_1$ and ω is an irrational number the investigation of existence of solutions in integers of the equation $S_3(k) = 0$ represents a fairly difficult number-theoretical problem. Therefore this case is omitted in this paper.

2.4. Problem $(\mathscr{P}_3^0)$. Identically with the problem $(\mathscr{P}_1^0)$, the boundary condition $(2.1.4_1)$ gives

$$a_k = {}^0h_k\,, \quad k \in \mathscr{M}\,. \tag{2.4.1}$$

Then the relations (2.1.5) and (2.1.6) inserted into $(2.1.4_2)$ yield

$$\begin{gathered} b_k[\omega^{-1}\cos(k\pi/\omega) + \alpha k^{-1}\sin(k\pi/\omega)] = D_k(g, {}^0h, {}^1h)\,, \quad k \in \mathscr{M} \setminus \{0\}\,, \\ b_0(1 + \alpha\pi) = D_0(g, {}^0h, {}^1h)\,, \end{gathered} \tag{2.4.2}$$

where

$$\begin{aligned} D_0(g, {}^0h, {}^1h) &= {}^1h_0 - \alpha{}^0h_0 + \omega^{-2}\int_0^\pi g_0(\pi - \xi)(1 + \alpha\xi)\,d\xi\,, \\ D_k(g, {}^0h, {}^1h) &= {}^1h_k + {}^0h_k[k\omega^{-1}\sin(k\pi/\omega) - \alpha\cos(k\pi/\omega)] + \\ &\quad + \omega^{-1}\int_0^\pi g_k(\pi - \xi)\,[\omega^{-1}\cos(k\xi/\omega) + \\ &\quad + \alpha k^{-1}\sin(k\xi/\omega)]\,d\xi\,, \quad k \in \mathscr{M} \setminus \{0\}\,. \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Firstly, let us investigate the simpler case, when $\alpha = 0$ and $\omega = p/q$, p, q – natural, relatively prime. Then expression in the brackets in (2.4.2) reduce to $\omega^{-1}\cos(k\pi q/p)$.

(A): Let p be an odd number. Then $\cos(k\pi q/p) \neq 0$ for all $k \in \mathscr{M}$ and so equations (2.4.2) give

$$\begin{aligned} b_k &= \omega[\cos(k\pi/\omega)]^{-1}\,D_k(g, {}^0h, {}^1h)\,, \quad k \in \mathscr{M} \setminus \{0\}\,, \\ b_0 &= D_0(g, {}^0h, {}^1h)\,. \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Thus, if $g \in \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi}) \cup \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^1_{2\pi})$, ${}^0h \in \mathscr{H}^3_{2\pi}$ and ${}^1h \in \mathscr{H}^2_{2\pi}$, the problem $(\mathscr{P}_3^0)$ has a unique solution

$$u = W_8(g, {}^0h, {}^1h)\,, \tag{2.4.5}$$

where

$$W_8 \in [\mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi}) \times \mathscr{H}^3_{2\pi} \times \mathscr{H}^2_{2\pi} \to \mathscr{U}] \cap [\mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^1_{2\pi}) \times \mathscr{H}^3_{2\pi} \times \mathscr{H}^2_{2\pi} \to \mathscr{U}]$$

is defined by

$$(2.4.6)\quad W_8(g, {}^0h, {}^1h)(x) = \sum_{k\in\mathcal{M}\setminus\{0\}} \{{}^0u_k(g)(x) + {}^0h_k \cos(kx/\omega) + \omega[k\cos(k\pi/\omega)]^{-1} D_k(g, {}^0h, {}^1h)\sin(kx/\omega)\}\, e_k + [{}^0u_0(g)(x) + {}^0h_0 + D_0(g, {}^0h, {}^1h)\, x]\, e_0\,, \quad x\in\mathcal{I}\,.$$

(B): Let $p = 2m$ be an even number. Then $\cos(k\pi q/p) = 0$ if and only if $k \in \mathcal{S}(4) = \{k \in \mathcal{M} \mid k/m = \text{odd number}\}$ and so conditions (2.4.2) give the system

$$(2.4.7)\quad b_k = \omega[\cos(k\pi q/p)]^{-1} D_k(g, {}^0h, {}^1h)\,, \quad k \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}(4) \setminus \{0\}\,,$$
$$b_0 = D_0(g, {}^0h, {}^1h)\,,$$

$$(2.4.8)\quad D_k(g, {}^0h, {}^1h) = 0\,, \quad k \in \mathcal{S}(4)\,.$$

The solvability condition (2.4.8) can be written after certain arrangements in the form

$$(2.4.8')\quad R_9(g, {}^0h, {}^1h) \equiv \sum_{j=0}^{2m-1} (-1)^j Z_9(g, {}^0h, {}^1h)(. + \pi j/m) = 0\,,$$

where the operator Z_9: $(\mathcal{C}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^2_{2\pi}) \cup \mathcal{C}^{(1)}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^1_{2\pi})) \times \mathcal{H}^3_{2\pi} \times \mathcal{H}^2_{2\pi} \to \mathcal{H}^2_{2\pi}$ is defined by

$$(2.4.9)\quad Z_9(g, {}^0h, {}^1h)(t) = {}^1h(t + \pi q/p) + (q/p)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,{}^0h(t) + \tfrac{1}{2}(q/p)^2 \int_0^\pi [g(\xi)(t + \xi q/p) - g(\xi)(t - \xi q/p)]\,\mathrm{d}\xi\,, \quad t\in(0, 2\pi)\,.$$

Hence, $R_9 \in [\mathcal{C}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^2_{2\pi}) \times \mathcal{H}^3_{2\pi} \times \mathcal{H}^2_{2\pi} \to \mathcal{H}^2_{2\pi}] \cap [\mathcal{C}^{(1)}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^1_{2\pi}) \times \mathcal{H}^3_{2\pi} \times \mathcal{H}^2_{2\pi} \to \mathcal{H}^2_{2\pi}]$.

Thus, supposing that the functions $g \in \mathcal{C}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^2_{2\pi}) \cup \mathcal{C}^{(1)}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^1_{2\pi})$, ${}^0h \in \mathcal{H}^3_{2\pi}$ and ${}^1h \in \mathcal{H}^2_{2\pi}$ fulfil the condition (2.4.8′), every solution of our problem has the form

$$(2.4.10)\quad u = V_9(d) + W_9(g, {}^0h, {}^1h)\,, \quad d = \{d_k\}_{-\infty}^{\infty} \in \mathfrak{h}^2_{\mathcal{S}(4)}\,,$$

where

$$(2.4.11)\quad V_9(d)(x) = \sum_{k\in\mathcal{S}(4)} d_k k^{-1} \sin(kx/\omega)\, e_k\,, \quad x\in\mathcal{I}\,,$$

$$(2.4.12)\quad W_9(g, {}^0h, {}^1h)(x) = \sum_{k\in\mathcal{M}} [{}^0u_k(g)(x) + {}^0h_k\cos(kx/\omega)]\, e_k + \sum_{k\in\mathcal{M}\setminus\{0\}\setminus\mathcal{S}(4)} D_k(g, {}^0h, {}^1h)\frac{\omega\sin(kx/\omega)}{k\cos(k\pi/\omega)}\, e_k + D_0(g, {}^0h, {}^1h)\, x e_0\,, \quad x\in\mathcal{I}\,.$$

Obviously:

$$V_9 \in [\mathfrak{h}^2_{\mathscr{S}(4)} \to \mathscr{U}], \quad W_9 \in [\mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi}) \times \mathscr{H}^3_{2\pi} \times \mathscr{H}^2_{2\pi} \to \mathscr{U}] \cap$$
$$\cap [\mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^1_{2\pi}) \times \mathscr{H}^3_{2\pi} \times \mathscr{H}^2_{2\pi} \to \mathscr{U}].$$

Theorem 2.4.1. *Let the problem $(\mathscr{P}^0_3)$ with $\alpha = 0$ and $\omega = p/q$ be given, where p, q are relatively prime natural numbers. Let $g \in \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi}) \cup \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^1_{2\pi})$, ${}^0h \in \mathscr{H}^3_{2\pi}$ and ${}^1h \in \mathscr{H}^2_{2\pi}$. Then the following assertions hold:*

(A): *If p is an odd number, the problem has a unique solution*

$$u = W_8(g, {}^0h, {}^1h).$$

(B): *Let $p = 2m$ be an even number. Then the problem has a solution if and only if*

$$R_9(g, {}^0h, {}^1h) = 0 \quad (\textit{equality in the space } \mathscr{H}^2_{2\pi}).$$

In the affirmative case every solution of $(\mathscr{P}^0_3)$ is given by

$$u = V_9(d) + W_9(g, {}^0h, {}^1h),$$

where d is an arbitrary element of $\mathfrak{h}^2_{\mathscr{S}(4)}$.

Further, let $\alpha = 0$ and let ω be an irrantional number satisfying the assumption $[\mathscr{L}\varrho]$ for a natural $\varrho \geqq 2$. Hence the estimate

$$|\cos(k\pi/\omega)| \geqq 2^{1-\varrho} C_0 k^{1-\varrho}, \quad k \in \mathscr{N} \tag{2.4.13}$$

follows and so

$$W_8 \in [\mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^{\varrho+1}_{2\pi}) \times \mathscr{H}^{\varrho+2}_{2\pi} \times \mathscr{H}^{\varrho+1}_{2\pi} \to \mathscr{U}] \cap$$
$$\cap [\mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^{\varrho}_{2\pi}) \times \mathscr{H}^{\varrho+2}_{2\pi} \times \mathscr{H}^{\varrho+1}_{2\pi} \to \mathscr{U}].$$

Since $\cos(k\pi/\omega) \neq 0$ for all $k \in \mathscr{M}$, equations (2.4.2) give again (2.4.4) and the function $u = W_8(g, {}^0h, {}^1h)$ is the unique solution of the problem.

Theorem 2.4.2. *Let the problem $(\mathscr{P}^0_3)$ with $\alpha = 0$ and with ω satisfying the assumption $[\mathscr{L}\varrho]$ for a natural $\varrho \geqq 2$ be given. Let $g \in \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^{\varrho+1}_{2\pi}) \cup \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^{\varrho}_{2\pi})$, ${}^0h \in \mathscr{H}^{\varrho+2}_{2\pi}$ and ${}^1h \in \mathscr{H}^{\varrho+1}_{2\pi}$. Then the problem has a unique solution*

$$u = W_8(g, {}^0h, {}^1h).$$

Finally, let $\alpha \neq 0$ and $\omega = p/q$, where p, q are relatively prime natural numbers. Let us introduce the set $\mathscr{S}(5) = \{k \in \mathscr{M} \mid S_5(k) = 0\}$, where

$$S_5(k) = k\omega^{-1} \cos(k\pi/\omega) + \alpha \sin(k\pi/\omega), \quad k \in \mathscr{M} \setminus \{0\}, \tag{2.4.14}$$
$$S_5(0) = 1 + \alpha\pi.$$

Thus, if $\cos(k\pi q/p) = 0$, then $|S_5(k)| = |\alpha| > 0$, if not, we can write

$$S_5(k) = \cos(k\pi q/p)\,[kq/p + \alpha\,\mathrm{tg}\,(k\pi q/p)]\,, \quad k \neq 0\,.$$

Since $\mathrm{tg}\,(k\pi q/p)$ assumes only p values on the set of $k \in \mathcal{M}$, the set $\mathcal{S}(5)$ contains at most p numbers. Moreover, for all $k \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}(5)$ such that $\cos(k\pi q/p) \neq 0$ the estimate $|S_5(k)| \geqq C|k|$ is valid, where C is a suitable positive constant.

Thus, conditions (2.4.2) are equivalent to

$$\text{(2.4.15)} \qquad b_k = k[S_5(k)]^{-1}\, D_k(g, {}^0h, {}^1h)\,, \quad k \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}(5) \setminus \{0\}\,,$$

$$b_0 = [S_5(0)]^{-1}\, D_0(g, {}^0h, {}^1h)\,, \quad \text{when} \quad 0 \notin \mathcal{S}(5)\,,$$

$$\text{(2.4.16)} \qquad D_k(g, {}^0h, {}^1h) = 0\,, \quad k \in \mathcal{S}(5)\,.$$

The solvability condition (2.4.16) may be also written as

$$\text{(2.4.16')} \qquad R_{10}(g, {}^0h, {}^1h) = 0\,,$$

where the operator R_{10}: $(\mathcal{C}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^2_{2\pi}) \cup \mathcal{C}^{(1)}(\mathcal{I}; \mathcal{H}^1_{2\pi})) \times \mathcal{H}^3_{2\pi} \times \mathcal{H}^2_{2\pi} \to \mathfrak{h}^1_{\mathcal{S}(5)}$ is defined by

$$\text{(2.4.17)} \quad R_{10}(g, {}^0h, {}^1h) = \{r_k\}_{-\infty}^{\infty}\,, \quad r_k = \begin{cases} D_k(g, {}^0h, {}^1h)\,, & \text{if} \quad k \in \mathcal{S}(5)\,, \\ 0\,, & \text{if} \quad k \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}(5). \end{cases}$$

If this condition is satisfied, every solution of the problem has the form

$$\text{(2.4.18)} \qquad u = V_{10}(d) + W_{10}(g, {}^0h, {}^1h)\,, \quad d = \{d_k\}_{-\infty}^{\infty} \in \mathfrak{h}^1_{\mathcal{S}(5)}\,,$$

where

$$\text{(2.4.19)} \quad W_{10}(g, {}^0h, {}^1h)(x) = \begin{cases} \tilde{W}_{10}(g, {}^0h, {}^1h)(x)\,, & \text{if} \quad 0 \in \mathcal{S}(5)\,, \\ \tilde{W}_{10}(g, {}^0h, {}^1h)(x) + (S_5(0))^{-1} \times & \\ \times\, D_0(g, {}^0h, {}^1h)\, x e_0\,, & \text{if} \quad 0 \notin \mathcal{S}(5)\,, \end{cases}$$

$$\text{(2.4.20)} \quad \tilde{W}_{10}(g, {}^0h, {}^1h)(x) = \sum_{k \in \mathcal{M}} [{}^0u_k(g)(x) + {}^0h_k \cos(kx/\omega)]\, e_k +$$
$$+ \sum_{k \in \mathcal{M} \setminus \{0\} \setminus \mathcal{S}(5)} (S_5(k))^{-1}\, D_k(g, {}^0h, {}^1h) \sin(kx/\omega)\, e_k\,, \quad x \in \mathcal{I}$$

and

$$\text{(2.4.21)} \qquad V_{10}(d)(x) = \sum_{k \in \mathcal{S}(5) \setminus \{0\}} d_k \sin(kx/\omega)\, e_k + d_0 x e_0\,, \quad x \in \mathcal{I}\,.$$

Obviously: $V_{10} \in [\mathfrak{h}^1_{\mathcal{S}(5)} \to \mathcal{U}]$.

Properties of the operator W_{10} are rather complicated for the equality $|S_5(k)| = |\alpha|$ (when $\cos(k\pi/\omega) = 0$) leads to the requirement of a higher smoothness of g, ${}^0h$ and ${}^1h$. It is necessary to distinguish two cases:

(i): The number p is odd. Then $W_{10} \in [\mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi}) \times \mathscr{H}^3_{2\pi} \times \mathscr{H}^2_{2\pi} \to \mathscr{U}] \cap \cap [\mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^1_{2\pi}) \times \mathscr{H}^3_{2\pi} \times \mathscr{H}^2_{2\pi} \to \mathscr{U}]$.

(ii): The number p is even, $p = 2m$. Then $W_{10} \in [\mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^3_{2\pi}) \times \mathscr{H}^4_{2\pi} \times \mathscr{H}^3_{2\pi} \to \to \mathscr{U}] \cap [\mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi}) \times \mathscr{H}^4_{2\pi} \times \mathscr{H}^3_{2\pi} \to \mathscr{U}]$ as well as $W_{10} \in [\mathscr{C}(\mathscr{I}; [\mathscr{H}^2_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(4)}) \times \times [\mathscr{H}^3_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(4)} \times [\mathscr{H}^2_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(4)} \to \mathscr{U}^{\perp}_{\mathscr{S}(4)}]$.

Theorem 2.4.3. *Let the problem* $(\mathscr{P}^0_3)$ *with* $\alpha \neq 0$ *and* $\omega = p/q$ *be given, where* p, q *are relatively prime natural numbers. Let one of the following assumptions be fulfilled:*

(i) *p is an odd number,* $g \in \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi}) \cup \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^1_{2\pi})$, ${}^0h \in \mathscr{H}^3_{2\pi}$ *and* ${}^1h \in \mathscr{H}^2_{2\pi}$;

(ii) $p = 2m$ *is an even number and* $g \in \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^3_{2\pi}) \cup \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi})$, ${}^0h \in \mathscr{H}^4_{2\pi}$, ${}^1h \in \mathscr{H}^3_{2\pi}$ *or* $g \in \mathscr{C}(\mathscr{I}; [\mathscr{H}^2_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(4)}) \cup \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; [\mathscr{H}^1_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(4)})$, ${}^0h \in [\mathscr{H}^3_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(4)}$, ${}^1h \in [\mathscr{H}^2_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(4)}$.

Then the following assertions hold:

(A): *If* $\mathscr{S}(5)$ *is a void set, the problem has a unique solution*

$$u = W_{10}(g, {}^0h, {}^1h) .$$

(B): *If the set* $\mathscr{S}(5)$ *is non-void, the problem has a solution if and only if*

$$R_{10}(g, {}^0h, {}^1h) = 0 \quad (\textit{equality in the space } \mathfrak{h}^1_{\mathscr{S}(5)}) .$$

In the affirmative case every solution of $(\mathscr{P}^0_3)$ *is given by*

$$u = V_{10}(d) + W_{10}(g, {}^0h, {}^1h) ,$$

where d is an arbitrary element of $\mathfrak{h}^1_{\mathscr{S}(5)}$.

Remark 2.3. The problem with $\alpha \neq 0$ and an irrational ω leads to difficulties analogous to those met with in the irrational case of $(\mathscr{P}^0_2)$ with $\alpha_0 \neq \alpha_1$ and so this problem is omitted as well.

3. THE WEAKLY NONLINEAR PROBLEM

3.1. General considerations. Taking into account that the linear problem was solved in the previous paragraph, the linear parts g, ${}^0h$ and ${}^1h$ of the right-hand sides in (0.1) and (0.3)–(0.5) may be omitted without loss of generality. Therefore we can formulate the weakly nonlinear problem as follows:

Let the operators $F = F(u, \varepsilon)$, $F : \mathscr{U} \times \langle 0, \varepsilon_0 \rangle \to \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^1_{2\pi})$, ${}^iX = {}^iX(u, \varepsilon)$, ${}^iX : \mathscr{U} \times \langle 0, \varepsilon_0 \rangle \to \mathscr{H}^2_{2\pi}$, $i = 0, 1$ and real numbers $\omega > 0$, α_0, α_1, α be given. The mapping $u^* = u^*(\varepsilon)$, continuous on an interval $\langle 0, \varepsilon^* \rangle \subset \langle 0, \varepsilon_0 \rangle$ into $\mathscr{U}$, is called a solution of the problem $(\mathscr{P}_1)$, $(\mathscr{P}_2)$ or $(\mathscr{P}_3)$, if for each $\varepsilon \in \langle 0, \varepsilon^* \rangle$ the function $u = u^*(\varepsilon) \in \mathscr{U}$ satisfies the equation

$$(3.1.1) \qquad -\omega^2 u''(x) + \Delta_t u(x) = \varepsilon F(u, \varepsilon)(x), \quad x \in \mathscr{I}$$

and the boundary conditions

$$(3.1.2) \qquad u(0) = \varepsilon\, {}^0X(u, \varepsilon), \quad u(\pi) = \varepsilon\, {}^1X(u, \varepsilon)$$

or

$$(3.1.3) \qquad u'(0) + \alpha_0 u(0) = \varepsilon\, {}^0X(u, \varepsilon), \quad u'(\pi) + \alpha_1 u(\pi) = \varepsilon\, {}^1X(u, \varepsilon)$$

or

$$(3.1.4) \qquad u(0) = \varepsilon\, {}^0X(u, \varepsilon), \quad u'(\pi) + \alpha\, u(\pi) = \varepsilon\, {}^1X(u, \varepsilon),$$

respectively.

Remark 3.1. The most frequent case is that F, ${}^0X$ and ${}^1X$ are Njemyckij-operators, i.e.

$$F(u, \varepsilon)(x)(t) \equiv f(t, x, u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t), \varepsilon),$$

$${}^jX(u, \varepsilon)(t) \equiv {}^j\chi(t, u(0, t), u_t(0, t), u_x(0, t), u(\pi, t), u_t(\pi, t), u_x(\pi, t), \varepsilon),$$

$$j = 0, 1, \quad x \in \mathscr{I}, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle .$$

Then the continuity of the operators F, ${}^0X$, ${}^1X$ and their G-derivatives F'_u, ${}^0X'_u$, ${}^1X'_u$ is guaranteed by a sufficient smoothness of the functions $f = f(t, x, u_0, u_1, u_2, \varepsilon)$, ${}^j\chi = {}^j\chi(t, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \varepsilon)$, $j = 0, 1$. For example: if the derivatives $\partial^n f / \partial t^i\, \partial u_0^j\, \partial u_1^k\, \partial u_2^m$, $n = i + j + k + m \leqq 3$, $i < 3$ exist, are 2π-periodic in t and continuous on the domain

$$\{(t, x, u_0, u_1, u_2, \varepsilon) |\; t \in \langle 0, 2\pi \rangle, x \in \langle 0, \pi \rangle, u_0, u_1, u_2 \in (-\infty, +\infty), \varepsilon \in \langle 0, \varepsilon_0 \rangle\},$$

then the operators F and F'_u are continuous from $\mathscr{U} \times \langle 0, \varepsilon_0 \rangle$ into $\mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi})$. However, if e.g. $F'_u : \mathscr{U} \times \langle 0, \varepsilon_0 \rangle \to \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^3_{2\pi})$ is required, it is already necessary to assume that $\partial f / \partial u_i \equiv 0$, $i = 1, 2$, which means that $f = f(t, x, u_0, \varepsilon)$. Similarly the requirement $F'_u : \mathscr{U} \times \langle 0, \varepsilon_0 \rangle \to \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^4_{2\pi})$ can be fulfilled only if $\partial f / \partial u_i \equiv 0$, $i = 0, 1, 2$, i.e. when $f = f(t, x, \varepsilon)$. Properties of the operators ${}^0X$, ${}^1X$ are quite analogous.

The weakly nonlinear problems will be solved by the following standard procedure, based on the application of Lemmas 1.4 and 1.5 to the results obtained in the linear case.

Let us denote the weakly nonlinear problems $(\mathscr{P}_1)$, $(\mathscr{P}_2)$, $(\mathscr{P}_3)$ by a common symbol $(\mathscr{P})$, the linear problem corresponding to $(\mathscr{P})$ (and having the same parameters ω, α_0, α_1, α) by $(\mathscr{P}^0)$. In accordance with the previous paragraph we shall distinguish the two following cases.

$[\mathscr{C}1]$: There exist Banach spaces $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_0$, $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ and linear continuous operators $R \in [\mathscr{F} \times \mathscr{F}_0 \times \mathscr{F}_1 \to \mathscr{D}_2]$, $V \in [\mathscr{D}_1 \to \mathscr{U}]$, $W \in [\mathscr{F} \times \mathscr{F}_0 \times \mathscr{F}_1 \to \mathscr{U}]$ such that it holds:

The problem $(\mathscr{P}^0)$ given by the right-hand sides $g \in \mathscr{F}$, ${}^0h \in \mathscr{F}_0$ and ${}^1h \in \mathscr{F}_1$ has a solution if and only if $R(g, {}^0h, {}^1h) = 0$.
If this condition is satisfied, every solution of $(\mathscr{P}^0)$ is given by the relation $u = V(d) + W(g, {}^0h, {}^1h)$, where d is an arbitrary element of $\mathscr{D}_1$.

$[\mathscr{C}2]$: There exist Banach spaces $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_0$, $\mathscr{F}_1$ and a linear continuous operator $W \in [\mathscr{F} \times \mathscr{F}_0 \times \mathscr{F}_1 \to \mathscr{U}]$ such that the problem $(\mathscr{P}^0)$ given by $g \in \mathscr{F}$, ${}^0h \in \mathscr{F}_0$ and ${}^1h \in \mathscr{F}_1$ has a unique solution $u = W(g, {}^0h, {}^1h)$.

The two following assertions, corresponding to the cases $[\mathscr{C}1]$ and $[\mathscr{C}2]$, respectively, can be easily obtained by the succesive application of Lemmas 1.4 and 1.5.

Assertion $[\mathscr{A}1]$. *Let $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_0$, $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ and R, V, W be the Banach spaces and the operators from the case $[\mathscr{C}1]$. Let the operators $F = F(u, \varepsilon)$, $F : \mathscr{U} \times \langle 0, \varepsilon_0 \rangle \to \mathscr{F}$, ${}^iX = {}^iX(u, \varepsilon)$, ${}^iX : \mathscr{U} \times \langle 0, \varepsilon_0 \rangle \to \mathscr{F}_i$, $i = 0, 1$, be continuous and have continuous G-derivatives F'_u, ${}^0X'_u$, ${}^1X'_u$. Let ${}^0d$ be an element of the space $\mathscr{D}_1$ and let $U = U(d, \varepsilon)$, $U : \mathscr{B}({}^0d; \delta_0; \mathscr{D}_1) \times \langle 0, \hat{\varepsilon}_0 \rangle \to \mathscr{U}$ be a continuous operator having the G-derivative U'_d continuous (in d and ε) and such that the function $u = U(d, \varepsilon)$ solves the equation*

$$u = V(d) + \varepsilon\, W(F(u, \varepsilon), {}^0X(u, \varepsilon), {}^1X(u, \varepsilon))$$

for arbitrarily chosen $d \in \mathscr{B}({}^0d; \delta_0; \mathscr{D}_1)$ and $\varepsilon \in \langle 0, \hat{\varepsilon}_0 \rangle$. (According to Lemma 1.4 such operator U exists and it is unique.) Defining the operator $P : \mathscr{B}({}^0d; \delta_0; \mathscr{D}_1) \times \langle 0, \hat{\varepsilon}_0 \rangle \to \mathscr{D}_2$ by

$$P(d, \varepsilon) = R(F(U(d, \varepsilon), \varepsilon), {}^0X(U(d, \varepsilon), \varepsilon), {}^1X(U(d, \varepsilon), \varepsilon)),$$

let the following assumptions be fulfilled:

(i) $$P({}^0d, 0) = 0,$$

(ii) there exists an operator $Q = [P'_d({}^0d, 0)]^{-1} \in [\mathscr{D}_2 \to \mathscr{D}_1]$.

Then there exist a number $\varepsilon_1 > 0$ and a continuous mapping $d^* = d^*(\varepsilon)$, d^*: $\langle 0, \varepsilon_1 \rangle \to \mathscr{B}({}^0d; \delta_0; \mathscr{D}_1)$ such that $d^*(0) = {}^0d$ and the equality $P(d^*(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ holds for all $\varepsilon \in \langle 0, \varepsilon_1 \rangle$. The transformation $u^* = u^*(\varepsilon)$, defined on $\langle 0, \varepsilon_1 \rangle$ into $\mathscr{U}$ by the relation $u^*(\varepsilon) = U(d^*(\varepsilon), \varepsilon)$, is a unique solution of the problem $(\mathscr{P})$ continuous on $\langle 0, \varepsilon_1 \rangle$ and such that $u^*(0) = V({}^0d)$.

Assertion $[\mathscr{A}2]$. *Let $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_0$ and $\mathscr{F}_1$ be the Banach spaces from the case $[\mathscr{C}2]$. Let the operators $F = F(u, \varepsilon)$, $F : \mathscr{U} \times \langle 0, \varepsilon_0 \rangle \to \mathscr{F}$, ${}^iX = {}^iX(u, \varepsilon)$, ${}^iX : \mathscr{U} \times \langle 0, \varepsilon_0 \rangle \to \mathscr{F}_i$, $i = 0, 1$, be continuous and have continuous G-derivatives F'_u, ${}^0X'_u$, ${}^1X'_u$. Then there exist a number $\varepsilon_1 > 0$ and a unique mapping $u^* = u^*(\varepsilon)$*

continuous on $\langle 0, \varepsilon_1 \rangle$ *into* $\mathscr{U}$ *such that* $u^*(0) = 0$ *and* u^* *solves the weakly nonlinear problem* $(\mathscr{P})$.

Using these general assertions, we can reduce the following sections to the formulations of theorems holding in concrete problems $(\mathscr{P}_1)$, $(\mathscr{P}_2)$ and $(\mathscr{P}_3)$.

3.2. Problem $(\mathscr{P}_1)$. **Theorem 3.2.1.** *Let the problem* $(\mathscr{P}_1)$ *with* $\omega = p/q$ *be given, where* p, q *are relatively prime natural numbers. Let* $\mathscr{S}(2)$ *denote the set* $\{k \in \mathscr{M} \mid k/p \in \mathscr{M} \setminus \{0\}\}$. *Then the assertion* $[\mathscr{A}1]$ *is valid, where* $\mathscr{F} = \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi})$ *or* $\mathscr{F} = \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^1_{2\pi})$, $\mathscr{F}_i = \mathscr{H}^3_{2\pi}$, $i = 0, 1$, $\mathscr{D}_1 = \mathfrak{h}^2_{\mathscr{S}(2)}$, $\mathscr{D}_2 = \mathscr{H}^2_{2\pi}$, $V = V_1$, $W = W_1$ *and* $R = R_1$.

Theorem 3.2.2. *Let the problem* $(\mathscr{P}_1)$ *be given, where the number* ω *satisfies the assumption* $[\mathscr{L}\varrho]$ *for a natural* $\varrho \geqq 2$. *Then the assertion* $[\mathscr{A}2]$ *is valid, where* $\mathscr{F} = \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^{\varrho+1}_{2\pi})$ *or* $\mathscr{F} = \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^{\varrho}_{2\pi})$ *and* $\mathscr{F}_i = \mathscr{H}^{\varrho+2}_{2\pi}$, $i = 0, 1$.

Remark 3.2. If F, ${}^0X$ and ${}^1X$ are Njemyckij-operators, the above theorem is useful only with $\varrho = 2$. According to Remark 3.1, our problem with $\varrho \geqq 3$ must inevitably be a linear problem.

3.3. Problem $(\mathscr{P}_2)$. **Theorem 3.3.1.** *Let the problem* $(\mathscr{P}_2)$ *with* $\alpha_0 = \alpha_1$ *and* $\omega = p/q$ *be given, where* p, q *are relatively prime natural numbers. Let* $\mathscr{S}(1) = \{k \in \mathscr{M} \mid k/p \in \mathscr{M}\}$ *and* $\mathscr{S}(2) = \mathscr{S}(1) \setminus \{0\}$.

(A): *If* $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, *the assertion* $[\mathscr{A}1]$ *is valid, where* $\mathscr{F} = \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi})$ *or* $\mathscr{F} = \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^1_{2\pi})$, $\mathscr{F}_i = \mathscr{H}^2_{2\pi}$, $i = 0, 1$, $\mathscr{D}_1 = \mathfrak{h}^3_{\mathscr{S}(1)}$, $\mathscr{D}_2 = \mathscr{H}^2_{2\pi}$, $V = V_3$, $W = W_3$ *and* $R = R_3$.

(B): *If* $\alpha_0 = \alpha_1 \neq 0$, *the assertion* $[\mathscr{A}1]$ *is valid, where* $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_0$ *and* $\mathscr{F}_1$ *are the same spaces as above and* $\mathscr{D}_1 = \mathfrak{h}^3_{\mathscr{S}(2)}$, $\mathscr{D}_2 = \mathscr{H}^1_{2\pi}$, $V = V_4$, $W = W_4$ *and* $R = R_4$.

Theorem 3.3.2. *Let the problem* $(\mathscr{P}_2)$ *with* $\alpha_0 = \alpha_1$ *be given, where the number* ω *satisfies the assumption* $[\mathscr{L}\varrho]$ *for a natural* $\varrho \geqq 2$.

(A): *Let* $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$. *Then the assertion* $[\mathscr{A}1]$ *is valid, where* $\mathscr{F} = \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^{\varrho+1}_{2\pi})$ *or* $\mathscr{F} = \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^{\varrho}_{2\pi})$, $\mathscr{F}_i = \mathscr{H}^{\varrho+1}_{2\pi}$, $i = 0, 1$, $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_2 = \mathscr{R}$, $V = V_5$, $W = W_5$ *and* $R = R_5$.

(B): *If* $\alpha_0 = \alpha_1 \neq 0$, *then the assertion* $[\mathscr{A}2]$ *holds, where* $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_0$ *and* $\mathscr{F}_1$ *are the same spaces as above.*

Theorem 3.3.3. *Let the problem* $(\mathscr{P}_2)$ *with* $\alpha_0 \neq \alpha_1$ *and* $\omega = p/q$ *be given, where* p, q *are relatively prime natural numbers. Let* $\mathscr{S}(3)$ *denote the set* $\{k \in \mathscr{M} \mid S_3(k) = 0\}$, *where* $S_3(k)$ *is defined by* (2.3.23). *Putting either* $\mathscr{F} = \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^3_{2\pi})$ (*or* $\mathscr{F} = \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi})$), $\mathscr{F}_i = \mathscr{H}^3_{2\pi}$, $i = 0, 1$, *or* $\mathscr{F} = \mathscr{C}(\mathscr{I}; [\mathscr{H}^2_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(2)})$ (*or* $\mathscr{F} = \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; [\mathscr{H}^1_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(2)})$), $\mathscr{F}_i = [\mathscr{H}^2_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(2)}$, $i = 0, 1$, *where* $\mathscr{S}(2) = \{k \in \mathscr{M} \mid k/p \in \mathscr{M} \setminus \{0\}\}$, *the following propositions hold*:

(A): *If* $\mathscr{S}(3)$ *is a void set, the assertion* $[\mathscr{A}2]$ *holds.*

(B): *If the set* $\mathscr{S}(3)$ *is non-void, the assertion* $[\mathscr{A}1]$ *is valid, where* $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_2 = \mathfrak{h}^1_{\mathscr{S}(3)}$, $V = V_7$, $W = W_7$ *and* $R = R_7$.

3.4. Problem $(\mathscr{P}_3)$. **Theorem 3.4.1.** *Let the problem* $(\mathscr{P}_3)$ *with* $\alpha = 0$ *and* $\omega = p/q$ *be given, where p, q are relatively prime natural numbers.*

(A): *If p is an odd number, the assertion* $[\mathscr{A}2]$ *holds, where* $\mathscr{F} = \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi})$ *or* $\mathscr{F} = \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^1_{2\pi})$, $\mathscr{F}_0 = \mathscr{H}^3_{2\pi}$ *and* $\mathscr{F}_1 = \mathscr{H}^2_{2\pi}$.

(B): *Let* $p = 2m$ *be an even number and let* $\mathscr{S}(4)$ *denote the set* $\{k \in \mathscr{M} \mid k/m = \text{odd number}\}$. *Then the assertion* $[\mathscr{A}1]$ *is valid, where* $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_0$ *and* $\mathscr{F}_1$ *are the same spaces as above and* $\mathscr{D}_1 = \mathfrak{h}^2_{\mathscr{S}(4)}$, $\mathscr{D}_2 = \mathscr{H}^2_{2\pi}$, $V = V_9$, $W = W_9$ *and* $R = R_9$.

Theorem 3.4.2. *Let the problem* $(\mathscr{P}_3)$ *with* $\alpha = 0$ *be given, where the number* ω *satisfies the assumption* $[\mathscr{L}\varrho]$ *for a natural* $\varrho \geqq 2$. *Then the assertion* $[\mathscr{A}2]$ *is valid, where* $\mathscr{F} = \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^{\varrho+1}_{2\pi})$ *or* $\mathscr{F} = \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^{\varrho}_{2\pi})$, $\mathscr{F}_0 = \mathscr{H}^{\varrho+2}_{2\pi}$ *and* $\mathscr{F}_1 = \mathscr{H}^{\varrho+1}_{2\pi}$.

Theorem 3.4.3. *Let the problem* $(\mathscr{P}_3)$ *with* $\alpha \neq 0$ *and* $\omega = p/q$ *be given, where p, q are relatively prime natural numbers. Let* $\mathscr{S}(5)$ *be the set* $\{k \in \mathscr{M} \mid S_5(k) = 0\}$, *where* $S_5(k)$ *is defined by* (2.4.14), *and let the spaces* $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_0$, $\mathscr{F}_1$ *have one of the following meanings*:

(*i*) *If p is an odd number,* $\mathscr{F} = \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi})$ *or* $\mathscr{F} = \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^1_{2\pi})$, $\mathscr{F}_0 = \mathscr{H}^3_{2\pi}$ *and* $\mathscr{F}_1 = \mathscr{H}^2_{2\pi}$.

(*ii*) *If* $p = 2m$ *is an even number, either* $\mathscr{F} = \mathscr{C}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^3_{2\pi})$ (*or* $\mathscr{F} = \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; \mathscr{H}^2_{2\pi})$), $\mathscr{F}_0 = \mathscr{H}^4_{2\pi}$, $\mathscr{F}_1 = \mathscr{H}^3_{2\pi}$ *or* $\mathscr{F} = \mathscr{C}(\mathscr{I}; [\mathscr{H}^2_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(4)})$ (*or* $\mathscr{F} = \mathscr{C}^{(1)}(\mathscr{I}; [\mathscr{H}^1_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(4)})$), $\mathscr{F}_0 = [\mathscr{H}^3_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(4)}$, $\mathscr{F}_1 = [\mathscr{H}^2_{2\pi}]^{\perp}_{\mathscr{S}(4)}$, *where* $\mathscr{S}(4)$ *means the set* $\{k \in \mathscr{M} \mid k/m = \text{odd number}\}$.

Then the following propositions hold:

(A): *If* $\mathscr{S}(5)$ *is a void set, the assertion* $[\mathscr{A}2]$ *is valid.*

(B): *If the set* $\mathscr{S}(5)$ *is non-void, the assertion* $[\mathscr{A}1]$ *holds, where* $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_2 = \mathfrak{h}^1_{\mathscr{S}(5)}$, $V = V_{10}$, $W = W_{10}$ *and* $R = R_{10}$.

Bibliography

[1] *O. Vejvoda:* The mixed problem and periodic solutions for a linear and weakly nonlinear wave equation in one dimension, Rozpravy ČSAV, Řada matematických a přírodních věd, 1970, ročník *80*, sešit 3, Academia Praha.

[2] *O. Vejvoda:* Periodic solutions of a linear and weakly nonlinear wave equation in one dimension, I, Czech. Math. J., *14* (*89*), 1964, 341–382.

[3] *N. Krylová, O. Vejvoda:* A linear and weakly nonlinear equation of a beam: the boundary-value problem for free extremities and its periodic solutions, Czech. Math. J., *21* (*96*), 1971, 535 to 566.

[4] *A. J. Hinčin:* Continued fractions (Russian), 3rd edition, Fizmatgiz, Moscow, 1961.

Author's address: 757 01 Valašské Meziříčí, Nerudova 21.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

EŠTE O NIEKTORÝCH ĎALŠÍCH VLASTNOSTIACH KRIVIEK TRIEDY P A PP

JOZEF OBOŇA, NIKOLAJ PODTJAGIN, Bratislava

(Došlo dňa 20. júna 1970, prepracovane dňa 19. augusta 1971)

V tejto práci sa odvozujú rovnice algebraických kriviek triedy P (definovaných v práci [1]) v ortogonálnych a polárnych súradniciach. Ďalej sa uvádzajú niektoré významné vlastnosti dotyčníc ku krivkám triedy PP (definovaných v práci [2]), ktoré sa odvozujú z rovníc dotyčníc ku týmto krivkám v ich niektorých významných bodoch.

V práci [1] krivky triedy P boli definované parametrickými rovnicami

$$x = a \cos q\omega + b \cos (p + q)\, \omega\,, \qquad (1)$$

$$y = a \sin q\omega + b \sin (p + q)\, \omega\,,$$

kde konštanty p, q sú nesúdeliteľné čísla, ani jedna z konštant a, b, p, q nie je rovná nule, pričom a, b, q sú čísla kladné. Parameter ω sa mení v intervale $[0,2\pi)$.

V menovanej práci bolo ďalej dokázané, že rovnice (1) pre a = b, $p + q > 0$ určujú epicykloidy a hypocykloidy (presnejšie triedenie pozri [1]), pre a = b, $p + 2q \neq 0$ ružice a pre a = b, $p + 2q = 0$ úsečku na osi OX, ktorá sa nepovažuje za krivku triedy P.

KRIVKY TRIEDY P V ORTOGONÁLNYCH SÚRADNICIACH

Rovnice kriviek triedy P sme ľahko stanovili parametrickými rovnicami (1). Aby sme získali ich rovnice v ortogonálnych súradniciach, musíme z rovníc (1) vylúčiť parameter ω. Avšak priama eliminácia parametra nie je vždy možná, pretože tento postup vedie často k riešeniu algebraických rovníc vyššieho stupňa. Ukážeme jeden spôsob riešenia tejto úlohy, ktorý teoretický vždy vedie k želateľnému výsledku, hoci prakticky vyžaduje elementárne, ale veľmi zdĺhavé výpočty.

Položme

$$x + iy = \xi\,, \qquad (2)$$

$$x - iy = \eta\,,$$

kde $i = \sqrt{(-1)}$. Z rovníc (1) po úprave dostávame

$$x + iy = a\,e^{iq\omega} + b\,e^{i(p+q)\omega},$$
$$x - iy = a\,e^{-iq\omega} + b\,e^{-i(p+q)\omega},$$

odkiaľ po dosadení rovníc (2) a po úprave bude

$$\xi = a\,t^q + b\,.\,t^{p+q},$$
$$\eta = a\,t^{-q} + b\,.\,t^{-(p+q)},$$

kde $t = e^{i\omega}$.

Zapíšme posledné dve rovnice v tvare

(3) $$\xi = t^q\,(a + b\,.\,t^p)\,,$$
$$\eta = t^{-q}(a + b\,.\,t^{-p})\,.$$

Po vzájomnom prenásobení dostávame

$$\xi\,.\,\eta = (a + b\,.\,t^p)\,.\,(a + b\,.\,t^{-p})\,,$$

alebo

$$abt^{2p} + (a^2 + b^2 - \xi\eta)\,t^p + ab = 0\,,$$

odkiaľ

(4) $$t^p = \frac{\xi\,.\,\eta - a^2 - b^2 \pm \sqrt{((\xi\,.\,\eta - a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2)}}{2ab}\,.$$

Vidíme, že t^p je funkcia premenných ξ, η a nezávisí od parametru ω.

Položme teda

(5) $$t^p = w$$

a rovnice (3) nadobudnú tvar

(6) $$\xi^p = w^q(a + bw)^p\,,$$
$$\eta^p w^{p+q} = (aw + b)^p\,.$$

Tieto rovnice predstavujú krivky triedy P ešte v dvoch rôznych tvaroch: v súradniciach ξ a η a odtiaľ teda aj v reálnych súradniciach x a y. Pretože krivky triedy P sú reálne, rovnice (6) po dosazení za ξ a η zo vzťahov (2), nemôžu obsahovať kompexné veličiny.

Ak vydelíme prvú rovnicu rovníc (6) druhou, dostaneme ešte jeden tvar rovnice kriviek triedy P v pravouhlých súradniciach

(7) $$\xi^p = \eta^p\,.\,w^{p+2q}\left(\frac{a + bw}{aw + b}\right)^p.$$

Táto rovnica mú veľmi jednoduchý tvar pre a = b, teda

$$\xi^p = \eta^p \, . \, w^{p+2q} \, .$$

Ako príklad uvažujeme prípad, keď v rovniciach (1) položíme $p = 3$, $q = 1$. Krivka triedy P je potom krivkou 8-stupňa. Prvá z rovníc (6) nadobudne tvar

$$\xi^3 = w(a + bw)^3 \, . \tag{8}$$

Ak pre zjednodušenie výpočtov položíme

$$\begin{aligned} u &= \xi \, . \, \eta - a^2 - b^2 \, , \\ v &= \pm\sqrt{(4a^2b^2 - u^2)} \, , \end{aligned} \tag{9}$$

potom na základe vzťahov (4) a (5) máme

$$w = \frac{u + v}{2ab} \, . \tag{10}$$

Ak túto hodnotu funkcie w dosadíme do rovnice (8), potom po jednoduchých úpravách dostávame

$$\begin{aligned} 2a^4b\xi^3 - u^4 - 3a^2u^3 - a^2(3a^2 - 4b^2)\, u^2 - a^4(a^2 - 9b^2)\, u + 2a^4b^2(3a^2 - b^2) = \\ = \left[u^3 + 3a^2u^2 + a^2(3a^2 - 2b^2)\, u + a^4(a^2 - 3b^2)\right] v \, . \end{aligned}$$

Po dosadení za v, umocnení tejto rovnice na druhú a elementárnych, ale dosť dlhých výpočtoch dostaneme rovnicu tvaru

$$\begin{aligned} a^4b\xi^6 - \left[u^4 + 3a^2u^3 + a^2(3a^2 - 4b^2)\, u^2 + a^4(a^2 - 9b^2)\, u - 2a^4b^2(3a^2 - b^2)\right] \xi^3 + \\ + a^4b(u + a^2 + b^2)^3 = 0 \end{aligned}$$

a po dosazení za u z rovníc (9) a potom za ξ a η z rovníc (2), zdĺhavým výpočtom dostaneme konečný tvar krivky v ortogonálnych súradniciach

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^4 - (a^2 + 4b^2)(x^2 + y^2)^3 - b^2(a^2 - 6b^2)(x^2 + y^2)^2 - \\ - 2a^4bx(x^2 - 3y^2) + b^2(5a^2b^2 - a^4 - 4b^4)(x^2 + y^2) - \\ - b^2(a^2 - b^2)^3 = 0 \, . \end{aligned} \tag{11}$$

Príklad nám potvrdil, že na vyjadrenie kriviek triedy P v ortogonálnych súradniciach treba vykonať veľké množstvo elementárnych operácií.

KRIVKY TRIEDY P V POLÁRNYCH SÚRADNICIACH

Vyjadrenie kriviek triedy P v polárnych súradniciach budeme hľadať cez diferenciálnu rovnicu týchto kriviek.

Vychádzajme zo vzťahov pre polárne súradnice ϱ, φ

$$\varrho^2 = x^2 + y^2\,, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

a potom

$$\text{(12)} \qquad d\varphi = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}\,,$$

za predpokladu, že súčasne x a y nenadobúdajú nulové hodnoty.

Z rovníc (1) dostávame

$$\text{(13)} \qquad \varrho^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos p\omega\,,$$

$$x\,dy - y\,dx = [a^2 q + b^2(p + q) + ab(p + 2q) \cos p\omega]\, d\omega\,.$$

Z rovnice (12) potom dostávame

$$d\varphi = \frac{1}{\varrho^2} [a^2 q + b^2(p + q) + ab(p + 2q) \cos p\omega]\, d\omega\,.$$

Derivovánim rovnice (13) budeme mať

$$d\varrho = \frac{-abp \sin p\omega}{\varrho}\, d\omega$$

a z posledných dvoch rovníc teda máme

$$\text{(14)} \qquad \frac{d\varrho}{d\varphi} = -\frac{abp \sin p\omega}{a^2 q + b^2(p + q) + ab(p + 2q) \cos p\omega}\,.$$

Z rovnice (13) môžeme dostať

$$\cos p\omega = \frac{\varrho^2 - a^2 - b^2}{2ab}$$

a potom teda

$$\sin p\omega = \frac{4a^2b^2 - (\varrho^2 - a^2 - b^2)^2}{2ab}\,.$$

Diferenciálnu rovnicu (14) môžeme teda napísať vo tvare

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = -\frac{p\varrho \sqrt{(4a^2b^2 - (\varrho^2 - a^2 - b^2)^2)}}{2a^2 q + 2b^2(p + q) + (p + 2q)(\varrho^2 - a^2 - b^2)}\,,$$

alebo vo tvare

$$\frac{(p + 2q)\,\varrho^2 - p(a^2 - b^2)}{\sqrt{[\varrho^2 - (a - b)^2][(a + b)^2 - \varrho^2]}}\,\frac{d\varrho}{\varrho} = -p\,d\varphi\,. \tag{15}$$

Táto rovnica je teda aj diferenciálnou rovnicou algebraických kriviek triedy P.

Pre a = b (teda pre $p + 2q \neq 0$, pozri [1]), tj. pre ružice, diferenciálna rovnica (15) má veľmi jednoduchý tvar

$$\frac{p + 2q}{\sqrt{(4a^2 - \varrho^2)}}\,d\varrho = -p\,d\varphi \tag{16}$$

a teda táto diferenciálna rovnica je diferenciálnou rovnicou všetkých ružíc.

Integrál, vyhovujúci diferenciálnej rovnici (16) a splňujúci počiatočnú podmienku (pre $\varphi = 0$ musí byť $\varrho = 2a$) je

$$\varrho = 2a\cos\frac{p}{p + 2q}\,\varphi \tag{17}$$

a táto rovnica súčasne definuje aj rovnice ružíc v polárnych súradniciach.

V prípade, keď $a \neq b$ (epicykloidy a hypocykloidy) všeobecným integrálom rovnice (15) je rovnica

$$\int\frac{(p + 2q)\,\varrho^2 - p(a^2 - b^2)}{\sqrt{[\varrho^2 - (a - b)^2][(a + b)^2 - \varrho^2]}}\,\frac{d\varrho}{\varrho} = -p\varphi + C\,. \tag{18}$$

Označme integrál na ľavej strane tejto rovnice ako I a položme $z = \varrho^2 - a^2 - b^2$ a potom budeme mať

$$I = \frac{1}{2}\int\frac{(p + 2q)(a^2 + b^2 + z) - p(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2 + z)\sqrt{(4a^2b^2 - z^2)}}\,dz\,,$$

alebo po čiastočnej integrácii

$$I = -\frac{p + 2q}{2}\arccos\frac{z}{2ab} - \frac{p(a^2 - b^2)}{2}\,I_1\,, \tag{19}$$

kde

$$I_1 = \int\frac{dz}{(a^2 + b^2 + z)\sqrt{(4a^2b^2 - z^2)}}\,.$$

Tento integrál vypočítame opäť substitúciou $1/v = a^2 + b^2 + z$ a po dosazení, výpočte integrálu dostávame v pôvodných premenných

$$I_1 = \frac{1}{a^2 - b^2}\arccos\frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)\,\varrho^2}{2ab\varrho^2}\,.$$

Pre integrál I na základe vzťahu (19) potom budeme mať výraz

$$I = -\frac{p + 2q}{2} \arccos \frac{\varrho^2 - a^2 - b^2}{2ab} - \frac{p}{2} \arccos \frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)\varrho^2}{2ab\varrho^2}.$$

Všeobecné riešenie (18) diferenciálnej rovnice (15) môžeme teda napísať vo tvare

$$(p + 2q) \arccos \frac{\varrho^2 - a^2 - b^2}{2ab} + p \arccos \frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)\varrho^2}{2ab\varrho^2} = 2p\varphi + C.$$

Ľubovoľnú konštantu C určíme z počiatočnej podmienky: pre $\varphi = 0$ musí byť $\varrho = a + b$. Ak dosadíme tieto hodnoty ϱ a φ do poslednej rovnice, ľahko vypočítame $C = p\pi$.

Rovnica krivky triedy P v polárnych súradniciach nadobúda konečný tvar

$$(20) \quad (p + 2q) \arccos \frac{\varrho^2 - a^2 - b^2}{2ab} + p \arccos \frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)\varrho^2}{2ab\varrho^2} = p(2\varphi + \pi).$$

Poznámenávame, že táto rovnica platí aj pre a = b. Skutočne, v tom prípade nadobúda tvar

$$(p + 2q) \arccos \frac{\varrho^2 - 2a^2}{2a^2} = 2p\varphi,$$

odkiaľ dostávame

$$\varrho^2 = 2a^2 \left(1 + \cos \frac{2p}{p + 2q} \varphi\right),$$

a tedy aj

$$\varrho = 2a \cos \frac{p}{p + 2q} \varphi,$$

čo sa zhoduje so vzťahom (17) pre ružice.

Podobne ako v práci [3] môžeme skúmať vlastnosti dotyčníc ku krivkám triedy P, vyjadrených v ortogonálnych súradniciach, kedy je vhodné použiť tvaru (10), pre funkciu w. Analogicky je možné skúmať vlastnosti dotyčníc aj v polárnych súradniciach.

Niektoré významné vlastnosti dotyčníc kriviek triedy PP.

V práci [2] krivky triedy PP boli definované rovnicami

$$(21) \quad \begin{aligned} x &= a \cos qq'\omega + b \cos (p + q) q'\omega + c \cos (p'q + pq' + qq')\omega \\ y &= a \sin qq'\omega + b \sin (p + q) q'\omega + c \sin (p'q + pq' + qq')\omega, \end{aligned}$$

kde ω je parameter, meniaci sa v intervale $[0, 2\pi/\bar{q})$; p, q, p', q' sú nesúdeliteľné čísla, pričom q, q' sú čísla kladné; $\bar{q}$ je najväčší spoločný deliteľ čísel q a q'; a, b, c, sú ľubovoľné kladné čísla.

V spomenutej práci bolo ďalej dokázané, že pre

$$\mathrm{a}qq' - \mathrm{b}(p + q)\, q' + \mathrm{c}(p'q + pq' + qq') = 0$$

rovnice (21) určujú prostú epiepicykloidu, pre

$$\mathrm{a}qq' + \mathrm{b}(p + q)\, q' - \mathrm{c}(p'q + pq' + qq') = 0$$

prostú epihypocykloidu, pre

$$\mathrm{a}qq' - \mathrm{b}(p + q)\, q' - \mathrm{c}(p'q + pq' + qq') = 0$$

prostú hypoepicykloidu a pre

$$\mathrm{a}qq' + \mathrm{b}(p + q)\, q' + \mathrm{c}(p'q + pq' + qq') = 0$$

prostú hypohypocykloidu.

V práci [2] bolo tiež dokázané, že pre $p = \bar{p} \,.\, p_1$, $p' = \bar{p} \,.\, p_2$, $q = \bar{q} \,.\, q_1$, $q' = \bar{q} \,.\, q_2$, kde $\bar{p}$ je najväčší spoločný deliteľ čísel p a p', potom:

1. Na každej krivke triedy PP existuje práve p bodov, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť $\varrho = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$, určených vzťahom

$$\omega = \frac{2k\pi}{\bar{p} \,.\, \bar{q}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \bar{p} - 1 \,. \tag{22}$$

2. Pre $|p_2|\, q_1$ párne na každej krivke triedy PP existuje $\bar{p}$ rôznych bodov, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť $\varrho = |a - b - c| > 0$, určených vzťahom

$$\omega = \frac{(2k + 1)\, \pi}{\bar{p}\bar{q}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \bar{p} - 1 \,. \tag{23}$$

3. Pre $|p_1|$, $|p_2|$, q_1, q_2 nepárne na každej krivke triedy PP existuje p rôznych bodov, ktorých vzdialenosť od počiatku súradnicovej sústavy je $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b} + \mathrm{c}| > 0$ a ktoré sú definované vzťahom (23).

4. Pre $|p_1| \,.\, q_2$ párne na každej krivke triedy PP existuje $\bar{p}$ rôznych bodov, ktorých vzdialenosť od počiatku súradnicovej sústavy je $\varrho = |\mathrm{a} + \mathrm{b} - \mathrm{c}| > 0$ a ktoré sú opäť určené vzťahom (23).

Z rovníc (21) vyplýva, že všetky krivky triedy PP sú súmerné vzhľadom na os OX. Ak $\bar{p}$ je párne číslo, tieto krivky sú súmerné aj vzhľadom na os OY.

2. Pre smernicu dotyčnice ku krivke triedy PP v jej ľubovoľnom bode (x, y) máme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{a}qq' \cos qq'\omega + \mathrm{b}(p+q)\,q' \cos(p+q)\,q'\omega + \mathrm{c}(p'q + pq' + qq')\cos(p'q + pq' + qq')\,\omega}{\mathrm{a}qq' \sin qq'\omega + \mathrm{b}(p+q)\,q' \sin(p+q)\,q'\omega + \mathrm{c}(p'q + pq' + qq')\cos(p'q + pq' + qq')\,\omega}. \tag{24}$$

Smernica dotyčnice v bode $\omega = 0$ môže byť konečná len pre

$$\mathrm{a}qq' + \mathrm{b}(p+q)\,q' + \mathrm{c}(p'q + pq' + qq') = 0\,,$$

z toho vyplýva, že dotyčnica ku každej krivke triedy PP v jej počiatočnom bode $\omega = 0$, s výnimkou prostých hypohypocykloid, je vždy kolmá na os OX.

Počiatočný bod $\omega = 0$ prostej hypohypocykloidy je singulárny bod zvratu, v ktorom dotyčnicou je os OX. Ak $\bar{p}$ je číslo párne, aj dotyčnica v bode súmernom s bodom $\omega = 0$ vzhľadom na os OY, je tiež os OX.

1° Body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť $\varrho = a + \mathrm{b} + \mathrm{c}$, sú určené hodnotami (22) parametra ω, pre ktoré máme

$$\cos p'q\omega = \cos pq'\omega = 1\,.$$

Vzťah (24) v nich nadobúda tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{[\mathrm{a}qq' + \mathrm{b}(p+q)\,q' + \mathrm{c}(p'q + pq' + qq')]\cos qq'\omega}{[\mathrm{a}qq' + \mathrm{b}(p+q)\,q' + \mathrm{c}(p'q + pq' + qq')]\sin qq'\omega}$$

a nemá zmysel pre prosté hypohypocykloidy. Pre všetky ostatné krivky triedy PP v uvedených bodoch platí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos q\,q'\omega}{\sin q\,q'\omega}. \tag{25}$$

Pre rovnice dotyčníc v týchto bodoch potom máme

$$X \cos q\,q'\omega + Y \sin q\,q'\omega = x \cos q\,q'\omega + y \sin q\,q'\omega\,, \tag{26}$$

kde x, y sú súradnice dotykového bodu krivky PP, vzdialeného od počiatku O na $\varrho = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$; X, Y sú premenné súradnice bodov dotyčnice. Ak dosadíme hodnoty (22) parametra ω, potom pre všetky krivky triedy PP, s výnimkou prostých hypohypocykloid, dostaneme rovnice dotyčníc

$$X \cos qq_2 \frac{2k\pi}{\bar{p}} + Y \sin qq_2 \frac{2k\pi}{\bar{p}} = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, \bar{p} - 1\,. \tag{27}$$

Pre $\bar{p}$ nepárne ani jedna z týchto dotyčníc, okrem dotyčnice v počiatočnom bode $\omega = 0$, nemôže byť kolmá ani na jednu zo súradnicových osí.

Pretože čísla qq_2, $\bar{q}$ nemajú spoločných deliteľov, pre $\bar{p}$ párne ($\bar{p} = 2k_1$) dotyčnica v uvažovaných bodoch je kolmá na os OX len v tom prípade, keď číslo $t = k/k_1$ je celé. Pretože $k \leqq \bar{p} - 1$, musí byť $t \leqq (2k_1 - 1)/k_1 = 2 - 1/k_1 < 2$ a teda t môže nadobúdať len dve hodnoty 0 a 1. To znamená, že pre $\bar{p}$ párne každá krivka triedy PP, s výnimkou prostých hypohypocykloid, má len dva body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$, v ktorých dotyčnice sú kolmé na os OX. Tieto dotyčnice sú dané rovnicami (25). Pretože číslo qq_2 je nepárne, sú teda dané rovnicami $X = \pm(\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c})$.

Ak aj $\bar{p}/2$ je číslo párne ($\bar{p} = 4k_2$), dotyčnica v bode, vzdialenom od počiatku súradnicovej sústavy má $\varrho = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$ je kolmá na os OY vtedy a len vtedy, keď $t = k/k_2$ je celé nepárne číslo. Pretože $k \leqq \bar{p} - 1$ musíme mať $t \leqq (4k_2 - 1)/k_2 = 4 - 1/k_2 < 4$ a teda t môže mať len hodnoty 1 a 3. V prípade, keď $\bar{p}/2$ je číslo párne, každá krivka triedy PP, s výnimkou prostých hypohypocykloid, má dva body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$, v ktorých dotyčnice sú kolmé na os OY. Sú dané rovnicami (25) pre $k = k_2$ a $k = 3k_2$, teda $Y = \pm(\mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c})$.

2°. V bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}|$, tj. pre $|p_2| \cdot q_1$ párne, určených vzťahom (23) máme

$$\cos pq'\omega = -1\,, \quad \cos p'q\omega = 1\,.$$

Vzťah (24) pre tieto body nadobúda tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{[\mathrm{a}qq' - \mathrm{b}(p + q)\,q' - \mathrm{c}(p'q + pq' + qq')]\cos qq'\omega}{[\mathrm{a}qq' - \mathrm{b}(p + q)\,q' - \mathrm{c}(p'q + pq' + qq')]\sin qq'\omega}$$

a nemá zmysel pre prosté hypoepicykloidy. Pre všetky ostatné krivky triedy PP pre uvedené body platí vzťah (25).

Pre dotyčnice v týchto bodoch potom platí rovnica (26). Ak do nej dosadíme hodnoty (23) parametra ω pre dotyčnice v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}|$ u všetkých kriviek triedy PP, s výnimkou prostých hypoepicykloid, dostaneme konečne rovnice

$$X \cos qq_2 \frac{(2k + 1)\,\pi}{\bar{p}} + Y \sin qq_2 \frac{(2k + 1)\,\pi}{\bar{p}} = \mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, \bar{p} - 1\,. \tag{28}$$

3°. Pre $|p_1|$, $|p_2|$, q_1, q_2 nepárne, máme v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}|$, určených vzťahom (21)

$$\cos pq'\omega = -1\,, \quad \cos p'q\omega = -1\,.$$

Vzťah (24) pre tieto body nadobúda tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{[\mathrm{a}qq' - \mathrm{b}(p + q)\,q' + \mathrm{c}(p'q + pq' + qq')]\cos qq'\omega}{[\mathrm{a}qq' - \mathrm{b}(p + q)\,q' + \mathrm{c}(p'q + pq' + qq')]\sin qq'\omega}$$

a nemá zmysel pre prosté epiepicykloidy. Pre ostatné krivky triedy PP v uvedených bodoch znovu platí vzťah (25).

Pre rovnice dotyčníc v týchto bodoch platí zase rovnica (25) a po dosadení do nej hodnôt (23) pre dotyčnice v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |a - b - c| > 0$, pre všetky krivky triedy PP, s výnimkou prostých epiepicykloid dostaneme teraz rovnice

$$(29) \qquad X \cos qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} + Y \sin qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} = a - b + c\,,$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, \bar{p} - 1\,.$$

4°. Pre $|p_1| \,.\, q_2$ párne v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |a + b - c|$, určených vzťahom (23), máme

$$\cos pq'\omega = 1\,, \quad \cos p'q\omega = -1\,.$$

Vzťah (24) potom nadobúda tvar

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{[aqq' + b(p+q)\,q' - c(p'q + pq' + qq')] \cos qq'\omega}{[aqq' + b(p+q)\,q' - c(p'q + pq' + qq')] \sin qq'\omega}\,.$$

Nemá zmysel pre prosté epihypocykloidy. Pre ostatné krivky triedy PP, pre uvedené body platia znovu vzťahy (25) a (26). Ak dosadíme do rovnice (26) hodnoty (23) parametra ω, pre dotyčnice v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |a + b - c| > 0$, pre všetky krivky triedy PP, s výnimkou prostých epihypocykloid, dostaneme rovnice

$$(30) \qquad X \cos qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} + Y \sin qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} = a + b - c\,,$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, \bar{p} - 1\,.$$

Ak porovnáme rovnice (28), (29) a (30) vidíme, že sa líšia len ich pravými stranami. Môžeme ich teda zapísať v spoločnom tvare

$$(31) \quad X \cos qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} + Y \sin qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} = m\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \bar{p} - 1\,.$$

kde u kriviek triedy PP v prípade 2° $m = a - b - c$, v prípade 3° $m = a - b + c$, v prípade 4° $m = a + b - c$.

Rovnice (31) platia pre všetky krivky triedy PP, s výnimkou prostých hypoepicykloid v prípade 2°, prostých epiepicykloid v prípade 3° a prostých epihypocykloid v prípade 4°.

Pre $a - b - c = 0$ v prípade 3°, pre $a - b + c = 0$ v prípade 3° a pre $a + b - c = 0$ v prípade 4° máme tedy $m = 0$. Krivka prechádza počiatkom súradnicovej sústavy. Dotyčnice v tomto prípade sú určené pre všetky uvedené prípady jediným tvarom rovníc

$$X \cos qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} + Y \sin qq_2 \frac{(2k+1)\pi}{\bar{p}} = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots, \bar{p} - 1\,.$$

Pri vyšetrovaní podmienok, pri ktorých sú dotyčnice kolmé na súradnicové osi v prípadoch 2°, 3° a 4° vychádzame zo spoločného tvaru rovníc dotyčníc (31) a postupujúc analogicky ako v prípade 1° avšak presne tak, ako to bolo uvedené v práci [3] pre krivky triedy P, môžeme dokázať, že:

1. Pre $\bar{p}$ párne dotyčnice v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = \mathrm{m}$ nemôžu byť kolmé na os OY. Každá krivka triedy PP, s výnimkou hore vymenovaných prípadov, má len v jednom z uvedených bodov dotyčnicu kolmú na os OX, a to pre qq_2 párne jej rovnica je

$$X = \mathrm{m} \tag{32}$$

a pre qq_2 nepárne

$$\mathrm{X} = -\mathrm{m}\,. \tag{33}$$

2. Pre $\bar{p}$ párne dotyčnica v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = m$ nemôže byť kolmá na os OX. Každá krivka triedy PP, s vynimkou hore vymenovaných prípadov, má dva a len dva z uvedených bodov, v ktorých dotyčnice sú kolmé na os OY, ak $\bar{p}$ je párne a $\frac{1}{2}\bar{p}$ nepárne číslo.

Ich rovnice sú $\mathrm{Y} = \pm \mathrm{m}$.

Literatúra

[1] *Podtjagin N.:* O jednej triede racionálnych kriviek, Časop. pěst. mat., *90* (1965), 181—190.

[2] *Podtjagin N.:* Ešte o jednej triede racionálnych kriviek, Čas. pěst. mat., *92* (1967), 294—312.

[3] *Podtjagin N., Oboňa J.:* O niektorých ďalších vlastnostiach kriviek triedy P, Časop. pěst. mat., *96* (1971), 398—405.

Adresa autora: 884 20 Bratislava, Gottwaldovo nám. 2 (Stavebná fakulta SVŠT).

Résumé

ENCORE SUR QUELQUES PROPRIETES NOUVELLES DES COURBES DES CLASSES P ET PP

NIKOLAJ PODTJAGIN, JOZEF OBOŇA, Bratislava

Les courbes algébriques en question ont été définies dans l'article [1] par les équations (1) où ω est un paramètre réel, $\omega \in [0, 2\pi)$, a et b sont deux constantes positives arbitraires, et p, q deux nombres entiers sans diviseur commun, q étant de plus positif.

Dans le présent arrticle, nous démontrons que les équations paramétriques (1) des courbes de la classe P deviennent les équations (6) en coordonnées ξ, η par la substitution (3), tandis que la substitution (2) les transforme en équations en coordonnées rectangulaires. Nous trouvons les équations (20) de ces courbes en coordonnées polaires; (15) est l'équation différentielle des courbes de la classe P.

Nous étudions aussi des propriétés nouvelles des courbes de la classe PP, dont la définition a été donnée dans [2] au moyen des équations (21) où ω est un paramètre réel, $\omega \in [0, 2\pi/\bar{q})$, p, q et p', q' sont deux paires de nombres entiers sans diviseurs communs, q et q' étant positifs; $\bar{q}$ est le PGCD des nombres q et q'; a, b, c sont des constantes positives arbitraires.

Nous trouvons les équations des tangentes aux points situés à une distance de a + + b + c de l'origine

$$X \cos qq_2(2k\pi)/\bar{p} + Y \sin qq_2(2k\pi)/\bar{p} = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, \bar{p} - 1\,;$$

ici, $\bar{p}$ est le PGCD des nombres $|p|$ et p'; q_2 étant défini par l'égalité $q' = \bar{q}q_2$. Ces équations sont valides pour toutes les courbes de la classe PP à l'exception des hypohypocloïdes. Il en résulte que dans le cas où $\bar{p}$ est impair, ces tangentes (à l'exception de la tangente en $\omega = 0$) ne peuvent pas être perpendiculaires aux axes des coordonnées. Si $\bar{p}$ est pair, les courbes de la classe PP — excepté les hypohypocycloïdes simples — ont chacune deux points distants de a + b + c de l'origine, avec des tangentes perpendiculaires à l'axe OX. Mais si $\bar{p}/2$ est pair aussi, la courbe a de plus deux points situés à une distance de a + b + c de l'origine et où les tangentes sont perpendiculaires à l'axe OY.

Nous trouvons les équations des tangents en des points distants de m = a − b − c, soit de m = a − b + c, soit encore de m = a + b − c de l'origine

$$X \cos qq_2(2k + 1)\,\pi/\bar{p} + Y \sin qq_2(2k + 1)\,\pi/\bar{p} = m\,, \quad k = 0, 1, \ldots, \bar{p} - 1\,.$$

Ces équations sont valides pour toutes les courbes de la classe PP, à l'exception des hypoépicycloïdes simples pour m = a − b − c, des épiépicyloïdes simples pour m = a − b + c et des épihypocycloïdes simples pour m = a + b − c. On en voit que dans le cas où $\bar{p}$ est impair, les tangentes en question ne peuvent pas être perpendiculaires à l'axe OY. Cependant, la tangente en un de ces points est perpendiculaire à l'axe OX.

Dans le cas où $\bar{p}$ est pair, les tangentes en ces points ne peuvent pas être perpendiculaires à l'axe OX. Mais si $\bar{p}$ est pair et $\bar{p}/2$ impair, la courbe de la classe PP a deux points distants de m de l'origine et où les tangentes sont perpendiculaires a l'axe OY.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

REPER SÍTĚ NA PLOŠE

LIBUŠE MARKOVÁ, Olomouc

(Došlo dne 13. prosince 1971)

Studium křivek na ploše v trojrozměrném prostoru patří k základním problémům diferenciální geometrie. R. N. ŠČERBAKOV užitím Cartanových metod konstruuje pohyblivý reper plochy, který je invariantně spojený s libovolnou vrstvou křivek na ploše [2], později charakterizuje obecně metodu reperáže subvariet dané variety pro speciální typy variet [3]. K. SVOBODA, V. HAVEL, I. KOLÁŘ v práci [6] zobecnili Ščerbakovovu metodu a vyložili obecně způsob konstrukce kanonického reperu systému subvariet.

Tento článek navazuje na uvedené výsledky a uvádí další konstrukci reperu sítě křivek na ploše v trojrozměrném ekviafinním prostoru, která je odlišná od konstrukce uvedené v článku [1]. Vychází ze stejných předpokladů o uvažovaných funkcích. Na nerozvinutelné ploše $\boldsymbol{P}$ je dána síť $\boldsymbol{S} = \{\Theta_1, \Theta_2\}$. Vrchol $\boldsymbol{M}$ pohyblivého reperu $\boldsymbol{R}$ je ztotožněn s bodem plochy $\boldsymbol{P}$ a vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ reperu $\boldsymbol{R}$ patří do zaměření tečné roviny plochy v tomto bodě.

V tomto stadiu byl v [1] reper $\boldsymbol{R}$ připojen k síti tím, že se ztotožnily přímky $(\boldsymbol{M}\mathbf{e}_1)$, $(\boldsymbol{M}\mathbf{e}_2)$ v bodě $\boldsymbol{M}$ s tečnami ke křivkám vrstev Θ_1, Θ_2 v tomto bodě. Toto připojení se dělo fixací dvou tzv. význačných parametrů sítě, které odpovídaly formám π_2^1, π_1^2. Reper, který závisí pouze na hlavních, tj. na parametrech plochy, a význačných parametrech sítě nazveme polokanonický.

1. Konstrukce polokanonického reperu $\boldsymbol{R}$ plochy $\boldsymbol{P}$ vzhledem k síti $\boldsymbol{S}$.

Pro tento reper platí

$$\mathrm{d}\boldsymbol{m} = \omega^i \mathbf{e}_i\,, \quad \mathrm{d}\mathbf{e}_i = \omega_i^k \mathbf{e}_k \quad i, k = 1, 2, 3\,,$$

jednak obvyklé rovnice struktury ekviafinního prostoru a dále

$$(1) \qquad \omega^3 = 0\,, \quad \omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2\,, \quad \omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2\,.$$

Prodloužením rovnic (1) lze získat

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad & \mathrm{d}a - a(3\omega_1^1 + \omega_2^2) - 2b\omega_1^2 = m\omega^1 + n\omega^2 , \\
& \mathrm{d}b - 2b(\omega_1^1 + \omega_2^2) - a\omega_2^1 - c\omega_1^2 = n\omega^1 + p\omega^2 , \\
& \mathrm{d}c - c(\omega_1^1 + 3\omega_2^2) - 2b\omega_2^1 = p\omega^1 + \omega^2 .
\end{aligned}
$$

Jelikož plocha **P** je nerozvinutelná, lze provést fixaci

$$(3) \qquad b^2 - ac = 1 .$$

Užitím (3) dostáváme z (2) rovnici

$$(4) \qquad -2(\omega_1^1 + \omega_2^2) = F\omega^1 + G\omega^2 ,$$

kde

$$F = \tfrac{1}{2}(2bn - ap - cm) , \quad G = \tfrac{1}{2}(2bp - aq - cn) .$$

Pokračujeme-li v prodlužování rovnic (4), můžeme provést další fixaci $F = G = 0$. Nyní reper závisí na třech vedlejších parametrech, které odpovídají třem nezávislým formám $\pi_1^1 = -\pi_2^2, \pi_1^2, \pi_2^1$ a určují polohu vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ v tečné rovině plochy **P**. Fixujeme jeden ze zbývajících parametrů. Předpokládáme-li, že ani jedna vrstva parametrických křivek není asymptotická, je $a \neq 0$, $c \neq 0$. Pak vektor $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ volíme za tečný vektor asociované konjugované sítě (viz [1]), což odpovídá volbě

$$(5) \qquad a = c .$$

Polokanonický reper **R** plochy **P** vzhledem k síti **S** je pak dán následující soustavou rovnic

$$
\begin{aligned}
(6) \qquad \mathrm{d}\mathbf{m} &= \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2 , \\
\mathrm{d}\mathbf{e}_1 &= \omega_1^1\mathbf{e}_1 + \omega_1^2\mathbf{e}_2 + (a\omega^1 + b\omega^2)\,\mathbf{e}_3 , \\
\mathrm{d}\mathbf{e}_2 &= \omega_2^1\mathbf{e}_1 - \omega_1^1\mathbf{e}_2 + (b\omega^1 + a\omega^2)\,\mathbf{e}_3 , \\
\mathrm{d}\mathbf{e}_3 &= (M_1\omega^1 + M_2\omega^2)\,\mathbf{e}_1 + (N_1\omega^1 + N_2\omega^2)\,\mathbf{e}_2 ,
\end{aligned}
$$

kde $M_1 = ha - bk$, $M_2 = ka - lb$, $N_1 = ka - bh$, $N_2 = la - kb$, $b^2 - a^2 = 1$. $aM_2 - aN_1 - bM_1 + bN_2 = 0$,

$$\omega_1^1 = \frac{1}{4a}\{(p - m)\,\omega^1 + (q - n)\,\omega^2 + 2b(\omega_2^1 - \omega_1^2)\} .$$

Soustava příslušných vnějších rovnic je pak

$$
\begin{aligned}
(7)\quad &(\mathrm{d}a - 2a\omega_1^1 - 2b\omega_1^2) \wedge \omega^1 + (db - a\omega_1^2 - a\omega_2^1) \wedge \omega^2 = 0\,,\\
&(\mathrm{d}b - a\omega_1^2 - a\omega_2^1) \wedge \omega^1 + (da + 2a\omega_1^1 - 2b\omega_2^1) \wedge \omega^2 = 0\,,\\
&(\mathrm{d}M_1 + N_1\omega_2^1 - M_2\omega_1^2) \wedge \omega^1 + (\mathrm{d}M_2 + 2M_2\omega_1^1 + N_2\omega_2^1 - M_2\omega_2^1) \wedge \omega^2 = 0,\\
&(\mathrm{d}N_1 - 2N_1\omega_1^1 - M_1\omega_1^2 - N_2\omega_1^2) \wedge \omega^1 + (\mathrm{d}N_2 - N_1\omega_2^1 + M_2\omega_1^2) \wedge \omega^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Libovůle řešení soustavy (6) závisí na třech funkcích dvou argumentů.

2. Geometrická charakteristika reperu *R*.

Z předchozí volby vyplynulo, že směry $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ jsou tečné ke křivkám sítě *S*. Zbývá stanovit směr vektora $\mathbf{e}_3$. V knize [2] kap. III. § 21. je sestrojen kanonický reper plochy **P**. Jeho vektory ε_1, ε_2 jsou tečnými vektory asymptotických křivek. Vektor ε_3 určuje směr afinní normály plochy. Určíme vztah mezi kanonickým reperem a naším reperem **R**. Z rovnic asymptotických křivek obou reperů lze odvodit následující relace mezi formami obou reperů

$$
\begin{aligned}
(8)\qquad \omega^1 &= k_1(-b-1)\,v^1 + k_2(-b+1)\,v^2\,,\\
\omega^2 &= k_1 a v^1 + k_2 a v^2\,,
\end{aligned}
$$

kde v^1, v^2 jsou Pfaffovy formy příslušné kanonickému reperu. Mezi vektory obou reperů pak platí následující transformační rovnice

$$
\begin{aligned}
(9)\qquad \varepsilon_1 &= k_1\{(-b-1)\,\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2\}\,,\\
\varepsilon_2 &= k_2\{(-b+1)\,\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2\}\,,\\
\varepsilon_3 &= S_1\mathbf{e}_1 + S_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3\,.
\end{aligned}
$$

Diferencujeme-li (9) a bereme-li v úvahu (6) a soustavu diferenciálních rovnic kanonického reperu, získáme řadu vztahů mezi koeficienty a invarianty obou reperů, z nichž lze vyjmout

$$
(10)\qquad k_3^2 = 1\,,\quad S_1 = S_2 = 0\,,
$$

a dále

$$
k_1^6 = \frac{1}{8a^3k_3^3}\,\frac{Z_2}{Z_1}\,,\quad k_2^6 = \frac{1}{8a^3k_3^3}\,\frac{Z_1}{Z_2}\,,
$$

kde $Z_1 = 2an(b+1) - m(b+1)^2 - a^2p$, $Z_2 = 2an(b-1) - m(b-1)^2 - a^2p$.
Z (10) okamžitě vyplývá:

Vektor $\mathbf{e}_3$ reperu R patří směru, který určuje afinní normálu plochy v bodě M a je stejně normovaný jako ε_3 u kanonického reperu plochy.

3. Kanonický reper sítě na ploše.

Rozhodneme-li se nyní pro síť se speciálními vlastnostmi, lze kanonizaci dokončit pouze prodlužováním rovnic (2) nebo rovnic

$$\omega_3^1 = M_1\omega^1 + M_2\omega^2\,, \quad \omega_3^2 = N_1\omega^1 + N_2\omega^2$$

a získáme pro variace koeficientů podle význačných parametrů vztahy

$$\begin{aligned}
2a\delta m &= 3mb\pi_2^1 + (6an - 3mb)\,\pi_1^2\,, & \delta M_1 &= N_1\pi_2^1 + M_2\pi_1^2\,,\\
2a\delta n &= (nb + 2am)\,\pi_2^1 + (4ap - nb)\,\pi_1^2\,, & \delta M_2 &= -2M_1\pi_1^1 - N_2\pi_2^1 + M_1\pi_1^2\,,\\
2a\delta p &= (4an - pb)\,\pi_2^1 + (2aq + pb)\,\pi_1^2\,, & \delta N_1 &= 2N_1\pi_1^1 + (N_2 - M_1)\,\pi_1^2\,,\\
2a\delta q &= (6ap - 3bq)\,\pi_2^1 + 3bq\pi_1^2\,, & \delta N_2 &= N_1\pi_2^1 - M_2\pi_1^2\,.
\end{aligned}$$

Pak je možné volit:

a) $m = 0$, $q = 0$ za předpokladu, že $np \neq 0$,

b) $m = a$, $q = a$ za předpokladu, že $b^2 - (5b - 2an)(5b - 6ap) \neq 0$,

c) $M_2 = N_2 = 0$ za předpokladu, že $M_1N_1 \neq 0$,

d) $M_1 = N_2 = 0$ za předpokladu, že $N_1M_2 \neq 0$.

Geometrické vlastnosti zvolených sítí ukážeme v dalším.

Pokud další speciální požadavky na síť neklademe, stačí předpokládat, že jsme tuto síť již vybrali, což ve skutečnosti znamená pokládat formy ω_1^2, ω_2^1 za hlavní, tj. položit

$$\omega_1^2 = t\omega^1 + u\omega^2\,, \quad \omega_2^1 = f\omega^1 + g\omega^2\,.$$

Pak reper je určen soustavou

$$\begin{aligned}
\text{(11)}\qquad \mathrm{d}\mathbf{m} &= \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{e}_1 &= (r\omega^1 + s\omega^2)\,\mathbf{e}_1 + (t\omega^1 + u\omega^2)\,\mathbf{e}_2 + (a\omega^1 + b\omega^2)\,\mathbf{e}_3\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{e}_2 &= (f\omega^1 + g\omega^2)\,\mathbf{e}_1 - (r\omega^1 + s\omega^2)\,\mathbf{e}_2 + (b\omega^1 + a\omega^2)\,\mathbf{e}_3\,,\\
\mathrm{d}\mathbf{e}_3 &= (M_1\omega^1 + M_2\omega^2)\,\mathbf{e}_1 + (N_1\omega^1 + N_2\omega^2)\,\mathbf{e}_2\,.
\end{aligned}$$

Soustava vnějších rovnic je pak

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}r \wedge \omega^1 + \mathrm{d}s \wedge \omega^2 &= (rf - su - fu + gt - 2rs - M_1b + M_2a)\,\omega^1 \wedge \omega^2\,,\\
\mathrm{d}t \wedge \omega^1 + \mathrm{d}u \wedge \omega^2 &= (-3st + ru + tf - u^2 - N_1b + N_2a)\,\omega^1 \wedge \omega^2\,,\\
\mathrm{d}a \wedge \omega^1 + \mathrm{d}b \wedge \omega^2 &= (-2as - 2bn + af + at)\,\omega^1 \wedge \omega^2\,,\\
\mathrm{d}b \wedge \omega^1 + \mathrm{d}a \wedge \omega^2 &= (-as - 2ar - au + br + ft)\,\omega^1 \wedge \omega^2\,,\\
\mathrm{d}f \wedge \omega^1 + \mathrm{d}g \wedge \omega^2 &= (f^2 - 2gr - gu - M_1a + M_2b)\,\omega^1 \wedge \omega^2\,,
\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}M_1 \wedge \omega^1 + \mathrm{d}M_2 \wedge \omega^2 = (M_1 f - M_2 u - 2M_2 r - N_2 f + N_1 g)\, \omega^1 \wedge \omega^2 ,$$
$$\mathrm{d}N_1 \wedge \omega^1 + \mathrm{d}N_2 \wedge \omega^2 = (-M_2 t + M_1 u - 2N_1 s + 2N_1 f - N_2 u)\, \omega^1 \wedge \omega^2 .$$

Mezi 12 funkcemi na levé straně rovnic vnějšího systému jsou tři závislosti $-ru + ts = -fu + gt$, (3), (6) a podle Bachvalovy věty ([2] kap. III. § 21.) libovůle řešení závisí na dvou funkcích dvou argumentů.

4. Geometrický význam invariantů kanonického reperu sítě.

Ze zadání repera je zřejmé, že obě vrstvy křivek Θ_1, Θ_2 jsou vzájemně rovnocenné a že přechod od vrstvy Θ_1 k vrstvě Θ_2 se děje následující záměnou

$$\Big\downarrow \begin{array}{cccccccc} 1 & r & t & a & f & b & M_1 & N_1 \\ 2 & -s & g & a & u & b & N_2 & M_2 \end{array}$$

K určení geometrického významu invariantů stačí tedy určit význam invariantů jednoho řádku.

Koeficient b. Rovina $z = 1$ protne paraboloid svazku základních kvadrik v hyperbole, jejíž vrcholy jsou $(\pm 1/\sqrt{b},\ \pm 1/\sqrt{b})$.

Koeficient a. Charakteristika obálky rovin $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0$ při pohybu $\omega^1 = 0$ je proťata průmětem hořejší hyperboly do roviny $z = 0$ rovnoběžně s $\mathbf{e}_3$ v bodech $(\pm\sqrt{-a/b},\ \pm 1/\sqrt{-a})$.

Koeficient f. $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} - (1/f)\, \mathbf{e}_2$ je ohniskem kongruence $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} + \alpha\mathbf{e}_2$.

Koeficient t. Oskulační rovina křivky $\omega^2 = 0$ je určena vektory $\mathbf{e}_1$, $t\mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3$.

Koeficient r. Průsečnice roviny $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{E}_3, \mathbf{e}_1, d\mathbf{e}_2)_{\omega^2=0} = 0$ kde $\boldsymbol{E}_3 = M + \mathbf{e}_3$ s rovinou $x = 0$ má směr určený vektorem $(0, -r, b)$.

Koeficient M_1. Charakteristika obálky rovin $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0$ při $\omega^2 = 0$ je směru $(0, M_1, -f)$.

Koeficient N_1. Charakteristika obálky rovin $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 0$ při $\omega^2 = 0$ je směru $(N_1, 0, -t)$.

Fixace (a). Za souřadné křivky sítě jsou zvoleny takové křivky, pro které průsečné křivky plochy s rovinami $y = 0$, $x = 0$ měly s parabolami $z = \frac{1}{2}ax^2$, $z = \frac{1}{2}ay^2$ v daném bodě $\boldsymbol{M}$ plochy $\boldsymbol{P}$ dotyk aspoň třetího řádu.

Fixace (b) volí za souřadné křivky takové, pro něž příslušné průsečné křivky mají afinní normály určené směry $(1, 0, -3a)$, $(0, 1, -3a)$ (viz [2] kap. I. § 8.).

Fixace (c), (d). Fixace (c) určuje takové souřadné křivky, pro které charakteristika obálky tečných rovin $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{M}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0$ při $\omega^1 = 0$ a $\omega^2 = 0$ je směru $\mathbf{e}_3$. Analogický význam má fixace (d). Lze rovněž ukázat, že při fixaci (c) je jedno ohnisko kongruence $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} + t\boldsymbol{e}_3$ nevlastním bodem, při fixaci (d) jsou ohniska této kongruence souměrně položená vzhledem k bodu $\boldsymbol{M}$ plochy $\boldsymbol{P}$ na afinní normále plochy.

Literatura

[1] *L. Marková:* Konstrukce kanonického reperu sítě na ploše v ekviafinním prostoru, Čas. pro pěst. mat., roč. *96* (1971), Praha.

[2] *Р. Н. Щербаков*: Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии, Томск 1960.

[3] *Я. Н. Щербаков*: О методе репеража подмногообразий, Труды Томского гос. унив, *168* (1963) 5—11.

[4] *С. Р. Фиников*: Метод внешних форм Картана, Москва-Ленинград 1948.

[5] *I. Kolář:* Užití Cartanových metod ke studiu obecné sítě křivek na ploše v trojrozměrném prostoru, Rozpravy čes. ak. věd 1967 ročník *77*, sešit 5.

[6] *K. Svoboda, V. Havel, I. Kolář:* La métode du repérage des systémes de sous-variétés, Comm. Math. Univ. Carolinae, *5* (1964), 4, 183—201.

Adresa autorky: 771 46 Olomouc, Leninova 26 (Přírodovědecká fakulta UP).

Summary

MOVING FRAME OF A NET ON A SURFACE

LIBUŠE MARKOVÁ, Olomouc

In this article the construction of a semicanonical and canonical moving frame of an arbitrary net $\boldsymbol{S}$ on a surface $\boldsymbol{P}$ in unimodular threedimensional space is suggested and its geometrical characterisation is given. Besides that the geometrical meaning of some invariants of the canonical moving frame is given.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ÜBER EINE GEWISSE VERALLGEMEINERUNG DER QUASIFLEKNODALGEBILDE IN S_{2n-1}

JOSEF DOLEŽAL, Brno

(Eingegangen am 11. April 1972)

1. DIE VERALLGEMEINERUNG DER BEGRIFFE DER QUASIFLEKNODALGEBILDE IN S_{2n-1}

Im projektiven Raum S_{2n-1} ($n \geqq 2$) betrachten wir ein aus zwei Mannigfaltigkeiten V und $\bar{V}$ zusammengesetztes Paar P von folgenden Eigenschaften: Die Mannigfaltigkeit V ist ein Monosystem (eine einparametrische Menge) linearer Unterräume $S(u)$ von Dimension $n - 1$, die Mannigfaltigkeit $\bar{V}$ ist ein Monosystem linearer Unterräume $\bar{S}(u)$ von derselben Dimension $n - 1$. Die Unterräume S und $\bar{S}$ nennen wir die erzeugenden Unterräume der Mannigfaltigkeiten V und $\bar{V}$. Beide Mannigfaltigkeiten befinden sich in Korrespondenz, wobei sich Unterräume, die demselben Wert des Parameters $u \in I^{*}$(I ist ein offener Intervall) zugeordnet sind, entsprechen. Wir setzen voraus, daß kein Paar der sich entsprechenden Unterräume (weiter nur Räume) gemeinsame Punkte hat.

Wir betrachten nun ein System von $2n$ reellen Kurven $(A_1(u)), (A_2(u)), \ldots, (A_{2n}(u))$ von folgenden Eigenschaften: Jede der Kurven $(A_1), \ldots, (A_n)$ schneidet jeden der Räume $S(u)$ der Mannigfaltikeit V gerade in einem Punkt und jede der Kurven $(A_{n+1}), \ldots, (A_{2n})$ schneidet jeden der Räume $\bar{S}(u)$ ebenso gerade in einem Punkt. Dabei werden wir voraussetzen, daß für jedes $u \in I$ die Punkte A_i ($i = 1, 2, \ldots, 2n$) linear unabhängig sind. Sie können also als Ecken des Koordinatensystems gewählt werden. Die Kurven $(A_1), \ldots, (A_n)$ nennen wir die Leitlinien der Mannigfaltigkeit V, die Kurven $(A_{n+1}), \ldots, (A_{2n})$ diejenigen der Mannigfaltigkeit $\bar{V}$. Die Koordinaten der Punkte A_i sollen Funktionen der Klasse C^2 sein.

Für Bezeichnung und Summation nach den Indexen $1, 2, \ldots, n$ werden wir die Buchstaben r oder s, für die Bezeichnung und Summation nach $n + 1, n + 2, \ldots$ $\ldots, 2n$ die Buchstaben ϱ oder σ und für $1, 2, \ldots, 2n$ die Buchstaben i oder j benutzen.

Das infinitesimale Verrücken des Koordinatensystems ist durch

(1) $$\mathrm{d}A_i = u_i^j A_j \, \mathrm{d}u$$

gegeben. Jeder Punkt Y des Raumes S kann mittels den zum Koordinatensystem mit den Eckpunkten A_r bezogenen Koordinaten y^r bestimmt werden

$$Y = y^r A_r \tag{2}$$

Wenn die Koordinaten y^r Funktionen von u sind, so bedeutet (2) eine Kurve $Y(u)$ der Mannigfaltigkeit V. Die Tangenten zu allen Kurven der Mannigfaltigkeit V, die durch einen festen Punkt $Y \in S$ gehen, liegen in einem linearen Raum

$$\tau_Y = (A_1, A_2, \ldots, A_n, \mathrm{d}Y)$$

Durch Differenzieren der Gleichung (2) bekommt man

$$\mathrm{d}Y = \mathrm{d}y^r A_r + y^r(u_r^s A_s + u_r^\varrho A_\varrho)\,\mathrm{d}u$$

und weiter

$$\tau_Y = (A_1, A_2, \ldots, A_n, u_r^\varrho y^r A_\varrho)\,.$$

Definition 1. Wenn n lineare Formen $u_r^{n+1} y^r, \ldots, u_r^{2n} y^r$ für ein bestimmtes n-Tuppel von Koordinaten des Punktes $Y \in S$ und ein bestimmtes $u = u_0$ durchwegs gleich Null sind, dann sagen wir, daß der Punkt Y ein *singulärer Punkt des Raumes* S ist. Punkte, die nicht singulär sind, nennen wir *reguläre Punkte*.

Der Raum τ_Y eines singulären Punktes $Y \in S$ fällt mit dem Raume S zusammen. Der Raum τ_X eines regulären Punktes $X \in S$ ist der *Berührraum* der Mannigfaltigkeit V.

Die Koordinaten jedes singulären Punktes genügen dem System von linearen Gleichungen

$$u_r^\varrho y^r = 0 \tag{4}$$

das in Form eines Matrizenproduktes

$$MY = 0 \tag{5}$$

geschrieben werden kann. Dabei bezeichnet M die Quadratmatrix

$$M = \begin{pmatrix} u_1^{n+1} & \ldots & u_n^{n+1} \\ \vdots & & \\ u_1^{2n} & \ldots & u_n^{2n} \end{pmatrix}$$

und Y die Spaltenmatrix aus den Koordinaten des Punktes Y. Wir werden voraussetzen, daß die Matrix M für $u \in I$ nicht alle Elemente gleich Null hat. Wenn M für $u = u_0$ den Rang $n - h$ $(0 \leqq h < n)$ besitzt, dann wird die Gleichung (5) durch alle Punkte eines linearen Raumes S_{h-1} (von Dimension $h - 1$) befriedigt. Umgekehrt, wenn S_{h-1} der Raum aller singulären Punkte in S ist, dann hat M den Rang $n - h$. Wir nennen S_{h-1} den *singulären Raum* von S.

Was über den Raum S gesagt wurde, kann in ähnlicher Weise über den Raum $\bar{S}$ ausgesprochen werden: Ein willkürlicher Punkt $Z \in \bar{S}$ der Mannigfaltigkeit $\bar{V}$ kann mittels den zum Koordinatensystem mit den Eckpunkten A_ϱ bezogenen Kordinaten $z^{n+1}, \ldots, z^{2n}$ bestimmt werden

(6) $$Z = z^\varrho A_\varrho\,.$$

Der lineare Raum

(7) $$\tau_Z = (A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{2n}, u^r_\varrho z^\varrho A_r)$$

ist der Berührraum der Mannigfaltigkeit $\bar{V}$ im Punkte Z falls $Z \in \bar{S}$ ein regulärer Punkt ist, degegen $\tau_Z = \bar{S}$ falls Z ein singulärer Punkt desselben Raumes ist. Die Koordinaten z^ϱ der singulären Punkte befriedigen das System

(8) $$u^r_\varrho z^\varrho = 0$$

oder in Matrizenform

(9) $$NZ = 0\,.$$

Dabei sind unter N die Matrix

$$N = \begin{pmatrix} u^1_{n+1} & \ldots & u^1_{2n} \\ \vdots & & \\ u^n_{n+1} & \ldots & u^n_{2n} \end{pmatrix}$$

und unter Z die Spaltenmatrix aus den Koordinaten des Punktes Z zu verstehen.

Definition 2. Ein linearer Raum $S \in V$, dessen alle singulären Punkte einen linearen Unterraum S_{p-1} $(0 \leqq p \leqq n - 1)$ bilden, nennen wir den *torsalen Raum der Mannigfaltigkeit V von der Stufe p.* Einen Raum ohne singuläre Punkte bezeichnen wir als *regulären Raum.*

Definition 3. Ein Punktepaar $Y \in S$, $Z \in \bar{S}$ nennt man das Paar *zugeordneter Quasifleknodalpunkte*, wenn die Räume (τ_Y, Z) und (τ_Z, Y) die Dimensionen n haben. Den Punkt Y nennt man den *Quasifleknodalpunkt des Raumes S*, den Punkt Z den *Quasifleknodalpunkt des Raumes $\bar{S}$* (weiter nur Q-Punkte). Die Gerade (YZ) nennen wir die *Quasifleknodalgerade* (Q-Gerade) *des Paares der Räume S, $\bar{S}$.* Wenn u das Intervall I durchläuft, kann für jeden Wert des Parameters ein Paar von zugeordneten Q-Punkten $Y \in S$, $Z \in \bar{S}$ ausgewählt werden, so daß $(Y(u))$, $(Z(u))$ ein Kurvenpaar bilden. Diese Kurven nennt man *zugeordnete Quasifleknodalkurven* (Q-Kurven). Die Regelfläche mit den Leitkurven $(Y(u))$, $(Z(u))$ nennen wir die *Quasifleknodalfläche* (Q-Fläche) *des P-Paares.*

Aus den Definitionen folgt:

a) Wenn die beiden Punkte $Y \in S$, $Z \in \bar{S}$ eines Paares der zugeordneten Q-Punkte regulär sind, dann gehen die Berührräume τ_Y bzw. τ_Z durch den Punkt Z bzw. Y.

Beide haben die Dimension n. Die Gerade (Y, Z) ist die gemeinsame Tangente beider Mannigfaltigkeiten V, $\bar{V}$.

Der Berührraum τ_Y schneidet den entsprechenden Raum $\bar{S}$ im Punkte Z mit den Koordinaten $z^\varrho = u^\varrho_r y^r$, oder kurz

$$Z = MY. \tag{10}$$

Ebenso schneidet der Berührraum τ_Z der Mannigfaltigkeit $\bar{V}$ im Punkte $Z \in \bar{S}$ den entsprechenden Raum S im Punkte

$$Y = NZ. \tag{11}$$

b) Wenn ein Raum τ_Y, der die Mannigfaltigkeit V im Punkt Y berührt, den entsprechenden Raum $\bar{S}$ in einem singulären Punkt Z durchschneidet, so sind die in der Definition 3 gestellte Bedingungen für die Dimensionen der Räume (τ_Y, Z), (τ_Z, Y) befriedigt. Die Punkte $Y \in S$ der eben erwähnten Eigenschaft genügen daher wegen (10) und (9) der Gleichung

$$NMY = 0. \tag{12}$$

In ähnlicher Weise ergibt sich für die regulären Punkte $Z \in \bar{S}$, deren Berührräume den entsprechenden Raum S in einem singulären Punkt durchschneiden, die Gleichung

$$MNZ = 0. \tag{13}$$

In beiden Fällen bilden Y und Z ein Paar der zugeordneten Q-Punkte. Den Gleichungen (12) bzw. (13) genügen außer den regulären Punkten $Y \in S$, bzw. $Z \in \bar{S}$ noch alle singulären Punkte der Räume S bzw. $\bar{S}$, da die Gleichungen (12) bzw. (13) die triviale Lösung $MY = 0$ bzw. $NZ = 0$ haben.

c) Wenn $Y \in S$, $Z \in \bar{S}$ zwei beliebige singuläre Punkte sind, dann haben die Räume (τ_Y, Z), (τ_Z, Y) die Dimensionen n. Die genannten Punkte bilden daher ein Paar der zugeordneten Q-Punkte.

Wir werden jetzt alle Q-Punkte und Q-Geraden eines P-Paares aufsuchen. Wir betrachten zuerst den Fall, wann beide Räume regulär sind, und dann, wann einer von ihnen oder beide torsal sind.

1. Setzen wir voraus, daß beide Räume S und $\bar{S}$ regulär sind. Die Ränge der Matrizen M und N sind beide gleich n. Die Gleichungen (10) und (11) drücken reguläre projektive Transformationen von S in $\bar{S}$ und von $\bar{S}$ in S aus. Durch das Zusammensetzen beider Transformationen bekommt man in S eine reguläre Kollineation K mit der Matrix NM. Punkte, die durch die Kollineation K in sich übergeführt werden, und nur diese Punkte bilden die Gesamtheit aller Q-Punkte des Raumes S. Analogisch bekommt man in $\bar{S}$ durch das Zusammensetzen der Transformationen (11) und (10) die Kollineation $\bar{K}$ mit der Matrix MN. Die durch die Kollineation $\bar{K}$ in sich übergeführte Punkte bilden die Gesamtheit der Q-Punkte in $\bar{S}$.

Die Q-Punkte in S bzw. in $\bar{S}$ befriedigen die Gleichungen

$$\alpha Y = NMY \tag{14}$$

bzw.

$$\beta Z = MNZ \tag{15}$$

wo α, β von Null verschiedene Faktoren sind. Beide Gleichungen können in folgender äquivalenter Form geschrieben werden

$$(NM - \alpha E)\, Y = 0 \tag{16}$$

bzw.

$$(MN - \beta E)\, Z = 0 \tag{17}$$

Dabei bedeutet E die Einheitsmatrix.

Da beide Matrizen M, N den Rang n haben, gilt dasselbe auch für die Matrizen NM und MN. Damit beide Gleichungen (16) und (17) eine nicht triviale Lösung besitzen, ist es notwendig und hinreichend, daß α bzw. β die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen

$$|NM - \alpha E| = 0 \tag{18}$$

bzw.

$$|MN - \beta E| = 0 \tag{19}$$

sind. Beide Matrizen NM und MN haben dieselben charakteristischen Wurzeln. In der Tat, wählen wir eine der Gleichung (18) genügende Zahl $\alpha \neq 0$, dann hat (16) eine nichttriviale Lösung. Durch das Multiplizieren der Gleichung (16) mit der Matrix M von links ergibt sich nach Umformung

$$(MN - \alpha E)(MY) = 0\,.$$

Da Y kein singulärer Punkt ist, hat die letzte Gleichung eine Lösung $MY = Z$ und daher ist α die charakteristische Wurzel der Gleichung

$$|MN - \alpha E| = 0 \tag{20}$$

d.i. der Gleichung (19). Multiplizieren wir die Gleichung (17) mit der Matrix N von links, so ergibt sich, daß jede Wurzel der Gleichung (19) auch der Gleichung (18) genügt.

Bemerkung. Am Beweis wird nichts geändert, wenn die Matrix M oder N oder beide keine regulären Matrizen sind. Die Matrizen NM und MN haben wieder dieselbe charakteristischen Wurzeln, wobei eine von ihnen gleich Null ist.

Im Weiteren werden wir wieder voraussetzen, daß M und N reguläre Matrizen sind.

Es ist wohlbekannt, daß die Gleichungen (16) bzw. (17) durch die Punkte der linearen Räume $S_{s_1-1}, S_{s_2-1}, \ldots, S_{s_m-1}$, bzw. $\bar{S}_{s_1-1}, \bar{S}_{s_2-1}, \ldots, \bar{S}_{s_m-1}$ befriedigt werden, von denen jeder einer von verschiedenen Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ oder $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ der charakteristischen Gleichungen (18) oder (19) entspricht [1]. Die Indexe $s_k - 1$ $(k = 1, \ldots, m)$ geben die Dimensionen der betreffenden Räume an. Die Zahlen $n - s_k$ sind die Ränge der Matrizen $(NM - \alpha E)$ bzw. $(MN - \beta E)$. Die Räume S_{s_k-1} haben keine Punkte gemeinsam. Dasselbe gilt von den Räumen $\bar{S}_{s_k-1}$. Sie heißen Haupträume der Kollineationen K und $\bar{K}$. Daraus ergibt sich der

Satz 1. *Die beiden entsprechenden Räume S, $\bar{S}$ der Mannigfaltigkeiten V, $\bar{V}$ für ein festes $u \in I$ seien regulär. Die Q-Punkte der Räume S bzw. $\bar{S}$ und nur diese sind die Haupträume S_{s_k-1} bzw. $\bar{S}_{s_k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ der Kollineationen K bzw. $\bar{K}$. Sie genügen den Gleichungen (16) bzw. (17), wenn man in diese nacheinander für α und β die Wurzeln der charakteristischen Gleichungen (18) oder (19) einsetzt.*

Paare der zugeordneten Q-Punkte bilden: Ein willkürlicher Q-Punkt $Y \in S_{s_k-1} \subset S$ und der zugeordnete Q-Punkt $Z = MY \in \bar{S}_{s_k-1} \subset \bar{S}$ oder ein willkürlicher Q-Punkt $Z \in \bar{S}_{s_k-1} \subset \bar{S}$ und der zugeordnete Q-Punkt $Y = NZ \in S_{s_k-1} \subset S$.

2. Es seien die beiden entsprechenden Räume S, $\bar{S}$ torsal und zwar S von der Stufe h und $\bar{S}$ von der Stufe k. $(0 \leqq h < n, 0 \leqq k < n)$. Die Matrix M hat den Rang $n - h$, die Matrix N den Rang $n - k$. Im Raume S befindet sich der singuläre Raum S_{h-1}, im Raume $\bar{S}$ der singuläre Raum $\bar{S}_{k-1}$.

Die Gleichung (10) drückt jetzt eine singuläre projektive Transformation T_1 von S in $\bar{S}$ aus. Alle reguläre Punkte $Y \in S$ bilden sich mittels T_1 in einen Raum $\bar{S}_{n-h-1} \subset \bar{S}$ ab. Die Gleichung (11) drückt eine singuläre projektive Transformation T_2 von $\bar{S}$ in S aus. Alle reguläre Punkte $Z \in \bar{S}$ bilden sich mittels T_2 in einen Raum $S_{n-k-1} \subset S$ ab. Wir setzen voraus, daß $\bar{S}_{n-h-1}$ kein Unterraum von $\bar{S}_{k-1}$ ist. Dann gibt es in $\bar{S}_{n-h-1}$ reguläre Punkte, die sich mittels T_2 in Punkte $Y \in S$ abbilden. Im Raume S entsteht also eine singuläre Kollineation $K^s = T_2 T_1$ mit der Gleichung

$$Y^* = NMY. \tag{21}$$

Die Matrix NM hat den Rang $r \leqq \min(n - h, n - k)$. Deren charakteristische Gleichung besitzt eine r-fache Wurzel $\alpha = 0$ und q $(0 \leqq q \leqq n - r)$ voneinander verschiedene Wurzeln $\alpha_k \neq 0$ $(k = 1, \ldots, q)$. (Der Fall $q = 0$ bedeutet, daß die Wurzeln der charakteristischen Gleichung durchwegs Null sind.) Die Wurzeln $\alpha_k \neq 0$ geben — in die Gleichung (16) eingesetzt — die Haupträume der Kollineation K^s

und damit Q-Punkte in S. Durch jeden Punkt Y des Hauptraumes geht eine einzige Q-Gerade durch.

In analoger Weise ensteht in $\bar{S}$ eine singuläre Kollineation $\bar{K}^s$ mit der Gleichung

$$Z^* = MNZ \tag{22}$$

deren Haupträume Q-Punkte in $\bar{S}$ bilden.

Bezeichnen wir weiter mit S_h den Raum, der durch den regulären Punkt $Y \in S$ und den singulären Raum S_{h-1} durchgeht. Es sei $U \in S_h$, $U \neq Y$ ein beliebiger regulärer Punkt und X der Schnittpunkt der Geraden (UY) mit S_{h-1}. Wenn λ_1 und λ_2 passende Zahlen sind, dann ergibt sich wegen (5) und (10)

$$MU = M(\lambda_1 Y + \lambda_2 X) = \lambda_1 MY + \lambda_2 MX = \lambda_1 Z\,. \tag{23}$$

Daraus folgt: Die Berührräume der Mannigfaltigkeit V in allen regulären Punkten des Raumes S_h schneiden den Raum $\bar{S}$ in einem und demselben Punkte Z. Wenn nun Z ein singulärer Punkt ist, bildet er mit einem beliebigen Punkt $Y \in S_h$ immer ein Paar der zugeordneten Q-Punkte. Durch den Punkt Z gehen also ∞^h verschiedene Q-Geraden durch. Alle Punkte, die sich in Z abbilden, befriedigen die Gleichung (12), die als die Gleichung (16) angesehen werden kann, wenn man in (16) die Wurzel $\alpha = 0$ einsetzt. Da die singulären Punkte — die immer Q-Punkte sind — auch der Gleichung (16) genügen, bekommt man den

Satz 2. *Die entsprechenden Räume S, $\bar{S}$ seien beide torsal und zwar S von der Stufe h, $\bar{S}$ von der Stufe k $(0 \leqq h < n,\ 0 \leqq k < n)$. Die Q-Punkte $Y \in S$ und nur diese befriedigen die Gleichung (16), in der α eine beliebige Wurzel der Gleichung (18) oder (19) bedeutet. Die Punkte $Z \in \bar{S}$ und nur diese befriedigen die Gleichung (17), in der β eine beliebige Wurzel der Gleichung (19) oder (18) bedeutet.*

Die Matrizenprodukte NM bzw. MN definieren in S bzw. in $\bar{S}$ die singulären Kollineationen K^s bzw. $\bar{K}^s$.

Paare der zugeordneten Q-Punkte (soweit sie existieren) sind folgende:

a) *Ein willkürlicher regulärer Q-Punkt Y des Hauptraumes $S_{s_k-1} \subset S$ der singulären Kollineation K^s und der zugeordnete reguläre Q-Punkt $Z = MY$ des Hauptraumes $\bar{S}_{s_k-1} \subset \bar{S}$ der singulären Kollineation $\bar{K}^s$ (oder $Z \in \bar{S}_{s_k-1}$ und $Y = NZ \in S_{s_k-1}$).*

b) *Ein regulärer Punkt $Y \in S$ und ein singulärer Punkt $Z = MY \in \bar{S}_{k-1}$ (oder ein regulärer Punkt $Z \in \bar{S}$ und ein singulärer Punkt $Y = NZ \in S_{h-1}$).*

c) *Ein willkürlicher Punkt des singulären Raumes $S_{h-1} \subset S$ und ein willkürlicher Punkt des singulären Raumes $\bar{S}_{k-1} \subset \bar{S}$.*

2. Q-FLÄCHEN

In dieser Kapitel werden einige geometrische Eigenschaften der Q-Flächen behandelt. Zuerst führen wir die von Bonpiani stammende Definition:

Definition 4. Mit Φ bezeichnen wir eine durch die Leitlinien $(Y(u))$, $(Z(z))$ gegebene Regelfläche. Unter dem *Abwickelbarkeitsindex der Fläche* Φ vesteht man die kleinste Zahl v, für die der Rang der Matrix

$$(Y, Z, Y', Z', \ldots, Y^{(v)}, Z^{(v)}) \tag{24}$$

kleiner als $2v + 2$ ist. [3].

Satz 3. *Φ sei eine Q-Fläche des P-Paares mit dem Abwickelbarkeitsindex $v > 1$. Die Tangentenebenen der Fläche Φ in den zugeordneten Q-Punkten $Y(u) \in S$, $Z(u) \in \bar{S}$ haben mit den erzeugenden Räumen S bzw. $\bar{S}$ je eine Gerade gemeinsam.*

Beweis. Wir beweisen z.B., daß die Tangentenebene π_Z $(Z \in \bar{S})$ der Fläche Φ den Raum $\bar{S}$ in einer einziger Geraden durchschneidet. Da $v > 1$ vorausgesetzt wird, besitzt die Matrix (Y, Z, Y', Z') den Rang 4 und daher die Matrix

$$(Y, Z, Z') \tag{25}$$

den Rang 3.

Wenn Z ein singulärer Punkt ist, liegt die Gerade (Z, Z') im Raume $\bar{S}$ und der Satz ist bewiesen. Wenn Z ein regulärer Punkt ist, geht der Berührraum $\tau_Z = (A_{n+1}, \ldots, A_{2n}, Z')$ durch den dem Punkte Z zugeordneten Q-Punkt Y. Es gibt daher die Zahlen $\mu^{n+1}, \ldots, \mu^{2n+1}$, die folgenden Beziehungen genügen:

$$Y = \mu^{\varrho} A_{\varrho} + \mu^{2n+1} Z', \quad \mu^{2n+1} \neq 0 . \tag{26}$$

Wenn $\mu^{n+1} = \mu^{n+2} = \ldots = \mu^{2n} = 0$ wäre, dann hätten wir $Y = \mu^{2n+1} Z'$ und der Rang der Matrix (25) wäre kleiner als 3. Da $\mu^{\varrho} A_{\varrho} \neq \mu Z$ ist (sonst wäre der Punkt Z' von Y und Z linear abhängig), liegt der Punkt $X = \mu^{\varrho} A_{\varrho}$ im Raum $\bar{S}$ und wegen (26) auch in der Ebene π_Z. Die Gerade (ZX) ist dem Raum $\bar{S}$ und der Tangentenebene π_Z gemeinsam.

Satz 4. *Φ sei eine Q-Fläche des P-Paares mit dem Abwickelbarkeitsindex $v = 1$. Die Leitlinien der Q-Fläche seien die zugeordneten Q-Kurven $(Y) \subset V$, $(Z) \subset \bar{V}$, die keine stationären Tangenten besitzen. Eine der Leitkurven ist dann die Rückkehrkante der Fläche Φ. Die Bezeichnung kann so durchgeführt werden, daß die Rückkehrkante die Kurve (Y) ist. Kein Punkt der Kurve (Y) ist ein singulärer Punkt im Sinne der Definition 1. Die Schmiegebene σ_Y der Kurve (Y) im Punkt Y hat mit dem Raume S gerade den Punkt Y, mit $\bar{S}$ dagegen eine Gerade gemeinsam.*

Beweis. Da $v = 1$ ist, hat die Matrix (Y, Z, Y', Z') für jedes $u \in I$ den Rang 3 (wäre er 2, so würde Φ in eine Gerade entarten). Man kann also die Zahlen μ^i ($i = 1, \ldots, 4$) – nicht alle Null gleich – finden, daß die folgende Gleichung gilt:

$$\mu^1 Y + \mu^2 Z + \mu^3 Y' + \mu^4 Z' = 0 . \tag{27}$$

Es ist klar, daß beide Zahlen μ^3, μ^4 gleichzeitig nicht verschwinden können. Wir zeigen aber, daß eine von ihnen notwendigerweise gleich Null ist.

Wir setzen für einen Augenblick voraus, daß der Gegenteil gilt:

$$\mu^3 . \mu^4 \neq 0 . \tag{28}$$

Da Y, Z für $u = u_0$ zugeordnete Q-Punkte sind, haben die Räume (τ_Y, Z), (τ_Z, Y) die Dimensionen n. Wir wissen, daß beide Räume nur die Gerade (Y, Z) gemeinsam haben. Sollten jetzt beide Gleichungen (27) und (28) richtig sein, so hätten die Räume (τ_Y, Z), (τ_Z, Y) die Ebene (Y, Z, Y', Z') gemeinsam. Daher hat man $\mu^3 . \mu^4 = 0$.

Wenn $\mu^4 = 0$ ist, hat die Fläche Φ nach (27) ihre Rückkehrkante in der Kurve (Y). Wenn $\mu^3 = 0$ ist, so ist es die Kurve (Z). Wir werden voraussetzen $\mu^4 = 0$. Man bekommt dann

$$Y' = \lambda_1 Y + \lambda_2 Z . \tag{29}$$

Kein Punkt der Rückkehrkante ist ein singulärer Punkt. In der Tat, für einen singulären Punkt Y gilt $Y' \in S$ und daraus nach (29) auch $Z \in S$ gegen der Voraussetzung.

Wir beweisen noch die letzte Behauptung des Satzes 4. Die Schmiegebene $\sigma_Y = (Y, Y', Y'')$ ist wegen (29) durch linear unabhängige Punkte Y, Z, Z' aufgespannt. Der Rang der Matrix (Y, Z, Z') ist 3. Weiter deckt sich der Beweis mit dem Beweis des Satzes 3. Damit wird bewiesen, daß σ_Y mit dem Raum $\bar{S}$ eine Gerade gemeinsam hat. Daraus folgt $\sigma_Y \cap S = Y$.

Im nächsten Abschnitt wird vorausgesetzt, daß in S_{2n-1} eine feste Regelfläche Φ gegeben ist. Wir beantworten die Frage, ob es solche P-Paare gibt, die die gegebene Fläche Φ als eine Q-Fläche besitzen. Wir geben auch die Anzahl der Funktionen an, von denen die Wahl der P-Paare abhängt.

Satz 5. *Φ sei eine Regelfläche mit den Leitkurven $(Y(u))$, $(Z(u))$ der Klasse C^{n-1}. Der Abwickelbarkeitsindex sei $v = n$. Dann können P-Paare so gefunden werden, daß Φ eine gemeinsame Q-Fläche dieser Paare ist und (Y) und (Z) ihre Q-Kurven sind. Die P-Paare hängen von $3n^2 - 9n + 8$ willkürlichen Funktionen eines Parameters ab.*

Beweis. Da $v = n$ vorausgesetzt wird, so hat die Matrix aus den Koordinaten der Punkte $Y, Z, Y', Z', \ldots, Y^{(n-1)}, Z^{(n-1)}$ für jedes $u \in I$ den Rang $2n$. Als Ecken des Koordinatensystemes in S_{2n-1} können also die genannten Punkte gewählt werden. Man bezeichne mit π_Y bzw. π_Z die Tangentenebenen der Fläche Φ in den Punkten Y bzw. Z.

Wir konstruieren nun für jedes $u \in I$ die folgende Reihe von $2n$ linear unabhängigen Punkten: $A_1 = Y$, $A_2 \in \pi_Y$, $A_{n+1} = Z$, $A_{n+2} \in \pi_Z$. Die Punkte A_2 und A_{n+2} liegen außer der Geraden (Y, Z). Die übrigen Punkte A_i $(i = 3, \ldots, n, n + 3, \ldots, 2n)$ sind beliebige Punkte im Raum S_{2n-1}.

Wir müssen also Funktionen a_i^k in folgender Weise wählen:

$$
\begin{aligned}
(30) \qquad A_1 &= Y, \\
A_2 &= a_2^0 Y + a_2^1 Y' + \qquad\qquad\qquad + a_2^n Z, \\
A_3 &= a_3^0 Y + a_3^1 Y' + \ldots + a_3^{n-1} Y^{(n-1)} + a_3^n Z + a_3^{n+1} Z' + \ldots \\
&\quad \ldots + a_3^{2n-1} Z^{(n-1)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_n &= a_n^0 Y + a_n^1 Y' + \ldots + a_n^{n-1} Y^{(n-1)} + a_n^n Z + a_n^{n+1} Z' + \ldots \\
&\quad \ldots + a_n^{2n-1} Z^{(n-1)}, \\
A_{n+1} &= Z, \\
A_{n+2} &= a_{n+2}^0 Y + \qquad\qquad\qquad a_{n+2}^n Z + a_{n+2}^{n+1} Z', \\
A_{n+3} &= a_{n+3}^0 Y + a_{n+3}^1 Y' + \ldots + a_{n+3}^{n-1} Y^{(n-1)} + a_{n+3}^n Z + a_{n+3}^{n+1} Z' + \ldots \\
&\quad \ldots + a_{n+3}^{2n-1} Z^{(n-1)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{2n} &= a_{2n}^0 Y + a_{2n}^1 Y' + \ldots + a_{2n}^{n-1} Y^{(n-1)} + a_{2n}^n Z + a_{2n}^{n+1} Z' + \ldots \\
&\quad \ldots + a_{2n}^{2n-1} Z^{(n-1)}.
\end{aligned}
$$

Dabei müssen noch die Bedingung der Unabhängigkeit der Punkte $A_1, \ldots, A_{2n}$ bewährt werden und die Relationen

$$a_2^1 \neq 0, \quad a_{n+2}^{n+1} \neq 0$$

gelten.

Die Punkte $A_1, \ldots, A_n$ spannen für jedes $u \in I$ den Raum S und die Punkte $A_{n+1}, \ldots$ $\ldots, A_{2n}$ den Raum $\bar{S}$ auf.

Wir zeigen, daß Φ tatsächlich eine Q-Fläche des P-Paares ist. Aus (30) folgt:

$$
\begin{aligned}
a_2^1 Y' &= A_2 - a_2^0 Y - a_2^n Z, \\
a_{n+2}^{n+1} Z' &= A_{n+2} - a_{n+2}^0 Y - a_{n+2}^n Z.
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen der rechten Seiten der letzten Gleichungen in

$$\tau_Y = (A_1, \ldots, A_n, Y'), \quad \tau_Z = (A_{n+1}, \ldots, A_{2n}, Z')$$

überzeugt man sich leicht, daß die Räume (τ_Y, Z) und (τ_Z, Y) die Dimensionen n haben. Dies genügt zur Behauptung, daß Φ eine Q-Fläche des P-Paares ist.

Die Anzahl der Funktionen a_i^j in (30) beträgt $2[3 + 2n(n - 2)]$. Sie kann noch vermindert werden.

Der Raum S kann statt $A_1, \ldots, A_n$ durch die Punkte $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n$ aufgespannt werden, die man in folgender Weise bestimmt: $\bar{A}_1 = A_1$, die Gerade

$$(A_1, A_2) = (Y, a_2^0 Y + a_2^1 Y' + a_2^n Z)$$

ist von dem Koeffizienten a_2^0 unabhängig. Wir setzen $a_2^0 = 0$. Die Gerade (A_1, A_2) verbindet die Punkte $\bar{A}_1$ und

$$\bar{A}_2 = a_2^1 Y' + a_2^n Z\,, \quad a_2^1 \neq 0\,.$$

Die Anzahl der Koeffizienten in $\bar{A}_2$ ist um 1 kleiner als in A_2. Weiter ist es möglich zu schreiben:

$$A_3 = a_3^0 Y + \bar{a}_3^1(a_2^1 Y' + a_2^n Z) + a_3^2 Y'' + \ldots + a_3^{n-1} Y^{(n-1)} +$$
$$+ \bar{a}_3^n Z + \ldots + a_3^{2n-1} Z^{(n-1)}$$
$$\bar{a}_3^1 = a_3^1 : a_2^1\,, \quad \bar{a}_3^n = (a_3^n a_2^1 - a_2^n a_3^1) : a_2^1\,.$$

Zur Bestimmung der Ebene (A_1, A_2, A_3) ist es möglich die Punkte $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ und

$$\bar{A}_3 = a_3^2 Y''' + a_3^3 Y''' + \ldots + \bar{a}_3^n Z + \ldots + a_3^{2n-1} Z^{(n-1)} \tag{31}$$

zu nehmen. Die Anzahl der Koeffizienten in A_3 ist um 2 kleiner als in A_3.

Unter Voraussetzung $a_3^2 \neq 0$ ist es möglich zu schreiben:

$$A_4 = a_4^0 Y + \bar{a}_4^1(a_2^1 Y' + a_2^n Z) + \bar{a}_4^2(a_3^2 Y'' + a_3^3 Y''' + \ldots + \bar{a}_3^n Z + \ldots$$
$$\ldots + a_3^{2n-1} Z^{(n-1)}) + \bar{a}_4^3 Y''' + \ldots$$
$$\bar{a}_4^1 = a_4^1 : a_2^1\,, \quad \bar{a}_4^2 = a_4^2 : a_3^2\,, \quad \bar{a}_4^3 = (a_4^3 a_3^2 - a_4^2 a_3^3) : a_3^2, \ldots$$

Den Raum (A_1, A_2, A_3, A_4) können wir also durch die Punkte $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ und

$$\bar{A}_4 = \bar{a}_4^3 Y''' + \ldots + \bar{a}_4^{n-1} Y^{(n-1)} + \bar{a}_4^n Z + \ldots + \bar{a}_4^{2n-1} Z^{(n-1)}$$

bestimmen. Unter der Voraussetzung $a_3^2 = 0$, suchen wir den nächsten Koeffizienten, der von Null verschieden ist. Man findet z.B. $a_3^3 \neq 0$. Die Gleichung (31) lautet nun:

$$\bar{A}_3 = a_3^3 Y''' + a_3^4 Y^{(IV)} + \ldots + a_3^{2n-1} Z^{(n-1)}\,.$$

Man schreibt weiter

$$A_4 = a_4^0 Y + \bar{a}_4^1(a_2^1 Y' + a_2^n Z) + a_4^2 Y'' + \bar{a}_4^3(a_3^3 Y''' + a_3^4 Y^{(IV)} + \ldots$$
$$\ldots + a_3^{2n-1} Z^{(n-1)}) + \bar{a}_4^4 Y^{(IV)} + \ldots,$$

wo $\bar{a}_4^3, \bar{a}_4^4 \ldots$ Ausdrücke sind, die a_i^j enthalten. Der Raum (A_1, A_2, A_3, A_4) kann durch die Punkte $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ und

$$\bar{A}_4 = a_4^2 Y'' + \bar{a}_4^4 Y^{(\mathrm{IV})} + \ldots + \bar{a}_4^{2n-1} Z^{(n-1)}$$

bestimmt werden. Die Anzahl der Koeffizienten in $\bar{A}_4$ ist um 3 kleiner als in A_4. Wenn wir in dieser Weise fortschreiten, vermindert sich die Anzahl der Koeffizienten in $\bar{A}_r$ $(r = 2, \ldots, n)$ um $r - 1$ im Vergleich zu A_r.

Dasselbe Verfahren, durch das wir $A_1, \ldots, A_n$ durch die Punkte $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n$ ersetzt haben, kann auch in $\bar{S}$ durchgeführt werden. So bekommt man statt $A_{n+1}, \ldots, A_{2n}$ die Punkte $\bar{A}_{n+1}, \ldots, \bar{A}_{2n}$. Schließlich können weitere $2(n - 1)$ Koeffizienten durch Normierung der Punkte $\bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n, \bar{A}_{n+2}, \ldots, \bar{A}_{2n}$ weggeschafft werden, sodaß ihre endliche Anzahl

$$2[2 + (2n - 2) + (2n - 3) + \ldots + (2n - n + 1) - (n - 1)] = 3n^2 - 9n + 8$$

gleich ist.

Satz 6. *Die Kurve (Y) der Differentialklasse C^{2n-1} sei als Rückkehrkante einer abwickelbaren Fläche Φ gegeben. Wir setzen für alle $u \in I$ voraus, daß*

$$|Y, Y', Y'', \ldots, Y^{(2n-1)}| \neq 0$$

gilt.

Dann gibt es P-Paare, für die Φ eine gemeinsame Q-Fläche ist. Die P-Paare hängen von $3n^2 - 7n + 6$ Funktionen einer Veränderlichen ab.

Beweis. Die Fläche Φ hat den Abwickelbarkeitsindex $\nu = 1$. Sollte sie eine Q-Fläche sein, ist es gemäß dem Satz 4 notwendig, daß (Y) mit einer Q-Kurve des gesuchten P-Paares zusammenfällt. Jeder erzeugende Raum $S(u)$ für $u \in I$ ist so zu wählen, daß er durch den Punkt Y durchgeht, doch mit der Beschränkung, daß er mit der Schmiegebene $\sigma = (Y, Y', Y'')$ nur den Punkt Y gemeinsam hat.

Wir wählen die Kurven $(A_2(u)), \ldots, (A_n(u))$ so daß für alle $u \in I$ die Punkte

$$Y, Y', Y'', A_2, A_3, \ldots, A_n \tag{32}$$

linear unabhängig sind. Die Punkte $Y = A_1, A_2, \ldots, A_n$ bilden eine Basis des Raumes S.

Die erzeugenden Räume $\bar{S}(u)$ sind so zu wählen, daß sie mit $\sigma(u)$ immer eine Gerade gemeinsam haben. Man wähle also die Kurven $(A_{n+1}(u)), (A_{n+2}(u))$ so daß jede von ihnen die Schmiegebene $\sigma(u)$ in einem Punkte durchschneidet, der verschieden von Y ist, und weitere Kurven $(A_{n+3}(u)), \ldots, (A_{2n}(u))$ so daß für $u \in I$ die Determinante

$$|A_1, A_2, \ldots, A_{2n}|$$

von Null verschieden ist. Die Punkte $A_{n+1}, \ldots, A_{2n}$ bilden eine Basis des Raumes $\bar{S}$. Die Räume S, $\bar{S}$ sind erzeugende Räume der Mannigfaltigkeiten V, $\bar{V}$.

Zusammenfassend bekommt man

$$\begin{aligned}
A_1 &= Y, \\
A_2 &= a_2^0 Y + a_2^1 Y' + a_2^2 Y'' + \ldots + a_2^{2n-1} Y^{(2n-1)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_n &= a_n^0 Y + a_n^1 Y' + a_n^2 Y'' + \ldots + a_n^{2n-1} Y^{(2n-1)}, \\
A_{n+1} &= a_{n+1}^0 Y + a_{n+1}^1 Y', \\
A_{n+2} &= a_{n+2}^0 Y + a_{n+2}^1 Y' + a_{n+2}^2 Y'', \\
A_{n+3} &= a_{n+3}^0 Y + a_{n+3}^1 Y' + a_{n+3}^2 Y'' + \ldots + a_{n+3}^{2n-1} Y^{(2n-1)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{2n} &= a_{2n}^0 Y + a_{2n}^1 Y' + a_{2n}^2 Y'' + \ldots + a_{2n}^{2n-1} Y^{(2n-1)}, \\
&\qquad a_{n+1}^1 \neq 0, \quad a_{n+2}^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Die Anzahl der Funktionen, von denen die Wahl der Eckpunkte $A_2, \ldots, A_{2n}$ abhängig ist, kann wieder vermindert werden. In ähnlicher Weise wie im vorangehenden Falle sind die Punkte $A_1, \ldots, A_n$ des Raumes S durch die Punkte $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n$ zu ersetzen. Die Anzahl der Koeffizienten, die die Punkte $\bar{A}_r$ $(r = 2, \ldots, n)$ bestimmen, ist um $r - 1$ kleiner als die der Punkte A_r. In analoger Weise werden die Punkte $A_{n+2}, \ldots$ $\ldots, A_{2n}$ eingeführt. Durch Normierung der Punkte $\bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_{2n}$ ist es möglich noch $2n - 1$ Koeffizienten abzuschaffen. Deren Gesamtanzahl ist also

$$\begin{gathered}
(2n - 1) + (2n - 2) + \ldots + (2n - n + 1) + 2 + 2 + (2n - 2) + \ldots \\
\ldots + (2n - n + 1) - (2n - 1) = 3n^2 - 7n + 6.
\end{gathered}$$

Durch die Wahl der Punkte A_i sind die notwendigen Bedingungen des Satzes 4 für Existenz der Mannigfaltigkeiten V, $\bar{V}$ erfüllt. Wir zeigen, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind.

Wir setzen z.B.

$$Z = A_{n+1} = a_{n+1}^0 Y + Y', \quad A_{n+2} = a_{n+2}^1 Y' + Y''.$$

Dann bekommt man

$$Z' = A_{n+2} + \left[a_{n+1}^{0\prime} - a_{n+1}^0 (a_{n+1}^0 - a_{n+2}^1)\right] Y + (a_{n+1}^0 - a_{n+2}^1) Z.$$

Man kann sich jetzt leicht überzeugen, daß die Räume (τ_Y, Z), (τ_Z, Y) die Dimensionen n haben. Daher sind Y, Z zugeordnete Q-Punkte, (Y, Z) die Q-Gerade und Φ die gemeinsame Q-Fläche der betrachteten P-Paare.

Literatur

[1] *Hodge-Pedoe:* Metods of algebraic geometry, vol. I, Cambridge, 1953.
[2] *Ивлев Е. Т.:* О паре линейчатых поверхностей в трехмерном нростр., Геом. сб. 2, Труды Томского гос. унив. С. мех.-мат., Томск *161*, (1962).
[3] *Švec A.:* Přímkové plochy, litogr., Akad. věd, Praha.
[4] *Vala J.:* Über die Regelflächenpaare mit einer nicht abwickelbaren Quasifleknodalfläche, Czechoslovak Math. Journal *18 (93)*, 1968, Praha.

Anschrift des Verfassers: 611 00 Brno, Kraví hora XII (Vysoké učení technické).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

DIE LÖSUNG DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNG $u_{xxtt} = A(t, x)\, u_{xx} + B(t, x)\, u_{tt}$ MIT GEWISSEN NEBENBEDINGUNGEN

VĚRA RADOCHOVÁ, Brno

(Eingegangen am 19. April 1972)

Wenn wir bei dem Ableiten der partiellen Differentialgleichung der Längsschwingungen von Stäben die energetische Methode benützen und dabei die Deformation des Querschnittes in seiner Ebene in Erwägung ziehen, erhalten wir die Differentialgleichung der Schwingungen mit einem Korrektionsglied vierter Ordnung

$$u_{tt} + a(t, x)\, u_{xxtt} + b(t, x)\, u_{xx} = 0\,,$$

welche von A. E. LOVE stammt [1].

Ist $a(t, x) \neq 0$, so können wir diese Differentialgleichung in der Form

$$u_{xxtt} = A(t, x)\, u_{xx} + B(t, x)\, u_{tt} \tag{1}$$

oder noch allgemeiner in der Form

$$u_{xxtt} = f(t, x, u_{xx}, u_{tt}) \tag{2}$$

schreiben.

Der Lösung und den Eigenschaften dieser Differentialgleichung für gewisse Anfangs- und Randbedingungen, sind die folgenden Absätze gewidmet.

Wir beschäftigen uns mit der Lösung der Differentialgleichung (2), die den folgenden Nebendingungen genügt:

Die Integralfläche soll zwei sich schneidende Raumkurven enthalten, die über zwei Charakteristiken liegen, die in ihrem Schnittpunkte verschiedene Richtungen haben. Längs einer dieser Raumkurven werden noch die Tangenten in der Richtung gegeben, deren Projektion auf die tx-Ebene mit der Richtung der zweiten Charakteristikenschar übereinstimmt. Längs einer dritten Charakteristik, die zu demselben System gehört wie die, über welcher wir nur die Funktionenwerte kennen, ist noch die Richtung der Tangenten gegeben und zwar so, dass ihre Projektion auf die tx-Ebene mit der Richtung des zweiten Charakteristikensystems übereinstimmt. Diese dritte

Charakteristik kann entweder von den ersten zwei Charakteristiken verschieden sein, oder kann mit der übereinstimmen, über welcher wir nur die Funktionenwerte kennen.

Die physikalische Bedeutung dieser Nebenbedingungen liegt darin, dass wir für einen Stab, dessen Achse mit der x-Achse übereinstimmt, den Anfangszustand und die Anfangsgeschwindigkeit kennen und an einem Ende des Stabes die Verschiebung und entweder an dem zweiten Ende, wenn die drei Charakteristiken verschieden sind, oder an demselben Ende, wenn zwei von ihnen zusammenfliessen, die nichtkorrigierte Spannung vorgeschrieben haben.

Satz 1. *Es sei die Differentialgleichung* (2) *gegeben. Die Funktion* $f(t, x, v, w)$ *sei in dem Gebiete* $D = \{\alpha < x < \beta, \gamma < t < \delta\}$, *und für beliebige* v, w *stetig und erfülle in jedem kompakten Teilgebiete* $D_0 \subset D$ *in Bezug auf* v, w *die Lipschitz-Bedingung*

$$(3) \qquad |f(t, x, v_2, w_2) - f(t, x, v_1, w_1)| \leqq M(|v_2 - v_1| + |w_2 - w_1|)\,.$$

Ferner seien $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ *Funktionen der Klasse* $C^2(I_1)$, *wobei* $I_1 = \{\alpha < x < < \beta\}$ *ist,* $\psi_0(t), \psi_1(t)$ *Funktionen der Klasse* $C^2(I_2)$, *wobei* $I_2 = \{\gamma < t < \delta\}$ *ist, und die Zahlen* $\xi_0 \leqq \xi_1 \in I_1$, $\tau \in I_2$ *so gegeben, dass für diese Funktionen die Beziehungen*

$$(4) \qquad \varphi_0(\xi_0) = \psi_0(\tau)\,, \quad \varphi_1(\xi_0) = \psi_0'(\tau)\,, \quad \varphi_0'(\xi_1) = \psi_1(\tau)\,, \quad \varphi_1'(\xi_1) = \psi_1'(\tau)$$

gelten. Dann hat die Differentialgleichung (2) *in dem Gebiete* D *mindestens eine Lösung* $u = u(t, x)$, *die längs der Charakteristiken* $x = \xi_0$, $x = \xi_1$, $t = \tau$ *die Bedingungen*

$$(5) \qquad u(\tau, x) = \varphi_0(x)\,, \quad u_t(\tau, x) = \varphi_1(x)\,, \quad u(t, \xi_0) = \psi_0(t)\,, \quad u_x(t, \xi_1) = \psi_1(t)$$

erfüllt.

Beweis. Wir werden diesen Satz mittels des Iterationsverfahrens beweisen.

Als erste Annäherung nehmen wir die Funktion

$$(6) \qquad u_0(t, x) = \varphi_0(x) + \psi_0(t) - \psi_0(\tau) +$$
$$+ (t - \tau)\,[\varphi_1(x) - \varphi_1(\xi_0)] + (x - \xi_0)\,[\psi_1(t) - \psi_1(\tau)] - (x - \xi_0)\,(t - \tau)\,\psi_1'(\tau)\,.$$

Sie erfüllt die Bedingungen (5) und gehört der Klasse $C^2(D)$.

Wenn $u_{n-1}(t, x)$ die $(n - 1)$-te Näherungsfunktion ist, die der Klasse $C^2(D)$ gehört, so gehört der Klasse $C^2(D)$ auch die n-te Annäherung

$$(7) \qquad u_n(t, x) = u_0(t, x) + F_{n-1}(t, x)\,,$$

wobei die Bezeichnung

$$(8) \qquad F_k(t, x) = \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^x \int_{\xi_1}^{x_1} f\left(t_2, x_2, \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 u_k}{\partial t_2^2}\right) dx_2\, dx_1\, dt_2\, dt_1$$

benützt wurde.

Es soll nun gezeigt werden, dass die Folge der Näherungsfunktionen $u_n(t, x)$ in jedem kompakten Teilgebiete $D_0 \subset D$, $D_0 = \{\alpha_0 \leqq x \leqq \beta_0,\ \gamma_0 \leqq t \leqq \delta_0\}$, wobei $\alpha_0 \leqq \xi_0 \leqq \xi_1 \leqq \beta_0$, $\gamma_0 \leqq \tau \leqq \delta_0$ ist, gleichmässig konvergiert.

Die Funktion $f(t, x, \partial^2 u_0/\partial x^2, \partial^2 u_0/\partial t^2)$ ist in D_0 stetig, so dass $|f| \leqq A$ ist und für $n = 1$ die folgenden Beziehungen gelten:

$$|u_1(t, x) - u_0(t, x)| \leqq \frac{A}{4} |t - \tau|^2 |x - \xi_0| |x - \xi_1|,$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0(t, x)}{\partial x^2}\right| \leqq \frac{A}{2} |t - \tau|^2,$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0(t, x)}{\partial t^2}\right| \leqq \frac{A}{2} |x - \xi_0| |x - \xi_1|.$$

Wird $2K = \max\{2; [(\beta_0 - \alpha_0) + (\delta_0 - \gamma_0)]^2\}$ gesetzt, gelten die Beziehungen

$$(8) \qquad |u_1(t, x) - u_0(t, x)| \leqq \tfrac{1}{2} AK(|t - \tau| + |x - \xi_0| + |x - \xi_1|)^2,$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right| \leqq \tfrac{1}{2} AK(|t - \tau| + |x - \xi_0| + |x - \xi_1|)^2,$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}\right| \leqq \tfrac{1}{2} AK(|t - \tau| + |x - \xi_0| + |x - \xi_1|)^2.$$

Wir nehmen nun an, dass für $n = m$ die Beziehungen

$$(9) \qquad |u_m(t, x) - u_{m-1}(t, x)| \leqq \frac{A}{2M} \frac{(2MK)^m}{(2m)!} (|t - \tau| + |x - \xi_0| + |x - \xi_1|)^{2m},$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x^2}\right| \leqq \frac{A}{2M} \frac{(2MK)^m}{(2m)!} (|t - \tau| + |x - \xi_0| + |x - \xi_1|)^{2m},$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial t^2}\right| \leqq \frac{A}{2M} \frac{(2MK)^m}{(2m)!} (|t - \tau| + |x - \xi_0| + |x - \xi_1|)^{2m}$$

gelten, wo M die Lipschitz-Konstante ist. Für $m = 1$ sind die Beziehungen (9) erfüllt, da sie mit den Beziehungen (8) übereinstimmen.

Wegen der Gültigkeit der Lipschitz-Bedingung (3) ist für $n = m + 1$

$$|u_{m+1} - u_m| \leqq$$

$$\leqq M \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^{x} \int_{\xi_1}^{x_1} \left(\left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x_2^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial t_2^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial t_2^2} \right| \right) \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}t_2 \, \mathrm{d}t_1 \leqq$$

$$\leqq \frac{A}{2M} \frac{(2MK)^m}{(2m)!} 2M \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^{x} \int_{\xi_1}^{x_1} (|x_2 - \xi_0| + |x_2 - \xi_1| + |t_2 - \tau|)^{2m} \, .$$

$$. \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}t_2 \, \mathrm{d}t_1 \leqq \frac{A}{2M} \frac{(2MK)^{m+1}}{(2m+2)!} (|t - \tau| + |x - \xi_0| + |x - \xi_1|)^{2m+2} \, ,$$

$$\left| \frac{\partial^2 u_{m+1}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} \right| \leqq M \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \left(\left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial t_2^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial t_2^2} \right| \right) \mathrm{d}t_2 \, \mathrm{d}t_1 \leqq$$

$$\leqq \frac{A}{2M} \frac{(2MK)^{m+1}}{(2m+2)!} (|t - \tau| + |x - \xi_0| + |x - \xi_1|)^{2m+2} \, ,$$

$$\left| \frac{\partial^2 u_{m+1}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} \right| \leqq M \int_{\xi_0}^{x} \int_{\xi_1}^{x_1} \left(\left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial x_2^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_{m-1}}{\partial t^2} \right| \right) \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 \leqq$$

$$\leqq \frac{A}{2M} \frac{(2MK)^{m+1}}{(2m+2)!} (|t - \tau| + |x - \xi_0| + |x - \xi_1|)^{2m+2} \, .$$

Daraus folgt, dass die Folge der Funktionen

$$u_n(t, x) = u_0(t, x) + [u_1(t, x) - u_0(t, x)] + \ldots + [u_n(t, x) - u_{n-1}(t, x)]$$

und die Folgen ihrer partiellen Ableitungen zweiter Ordnung nach x und t für $n \to \infty$ in jedem kompakten Rechteck D_0 gleichmässig gegen die Funktion $u(t, x)$ und gegen ihre zweiten partiellen Ableitungen nach x und t konvergieren.

Die Funktion $u(t, x)$ und ihre zweiten partiellen Ableitungen nach x und t sind also in dem ganzen Gebiete D vorhanden.

Aus der Beziehung (7) erhalten wir für $n \to \infty$ die Funktion $u(t, x)$ in der Form

$$(10) \qquad u(t, x) = u_0(t, x) + \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^{x} \int_{\xi_1}^{x_1} f(t_2, x_2, u_{xx}, u_{tt}) \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}t_2 \, \mathrm{d}t_1 \, ,$$

woraus folgt, dass auch die vierte Ableitung u_{xxtt} existiert und stetig ist, so dass die Funktion $u(t, x)$ der Differentialgleichung (2) genügt. Aus der Beziehung (10) ersieht man auch, dass die Funktion $u(t, x)$ die vorgeschriebenen Bedingungen (5) erfüllt.

Aus der Gültigkeit der Lipschitz-Bedingung folgt nicht nur die Existenz der Lösung des Problems (2), (5), sondern auch die Eindeutigkeit dieser Lösung.

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 gibt es in D genau eine Lösung der Differentialgleichung (2), die die Nebenbedingungen (5) erfüllt.*

Beweis. Wir nehmen an, dass es zwei solche Lösungen $u(t, x)$ und $\bar{u}(t, x)$ gibt, die den Nebenbedingungen (5) und den anderen Voraussetzungen des Satzes 1. genügen.

Für diese Lösungen muss also gelten:

$$(11) \qquad u(t, x) = u_0(t, x) + \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^x \int_{\xi_1}^{x_1} f(t_2, x_2, u_{xx}, u_{tt})\, dx_2\, dx_1\, dt_2\, dt_1 ,$$

$$\bar{u}(t, x) = u_0(t, x) + \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_{\xi_0}^x \int_{\xi_1}^{x_1} f(t_2, x_2, \bar{u}_{xx}, \bar{u}_{tt})\, dx_2\, dx_1\, dt_2\, dt_1 ,$$

$$(12) \qquad \begin{aligned} u(\tau, x) &= \bar{u}(\tau, x), & u_x(\tau, x) &= \bar{u}_x(\tau, x), & \ldots \\ u(t, \xi_0) &= \bar{u}(t, \xi_0), & u_t(t, \xi_0) &= \bar{u}_t(t, \xi_0), & \ldots \\ u_t(\tau, x) &= \bar{u}_t(\tau, x), & u_x(t, \xi_1) &= \bar{u}_x(t, \xi_1). \end{aligned}$$

Es genügt nun zu zeigen, dass die beiden Funktionen $u(t, x)$ und $\bar{u}(t, x)$ in jedem kompakten Teilrechteck $D_0 \subset D$, das die drei Charakteristiken $t = \tau$, $x = \xi_0$, $x = \xi_1$ enthält, übereinstimmen. Der Lipschitz-Bedingung gemäss ist:

$$(13) \qquad |f(t, x, u_{xx}, u_{tt}) - f(t, x, \bar{u}_{xx}, \bar{u}_{tt})| \leqq M(|u_{xx} - \bar{u}_{xx}| + |u_{tt} - \bar{u}_{tt}|) .$$

Es sei für $\alpha_0 \leqq x \leqq \beta_0$ entweder $\xi = \xi_0$, wenn $|x - \xi_0| \geqq |x - \xi_1|$ gilt, oder $\xi = \xi_1$, wenn $|x - \xi_0| < |x - \xi_1|$ gilt. Wir führen die Funktion

$$(14) \qquad \omega(t, x) = (|u - \bar{u}| + |u_{xx} - \bar{u}_{xx}| + |u_{tt} - \bar{u}_{tt}|)\, e^{-E}$$

ein, wobei $E = K(|x - \xi| + |t - \tau|)$ und $K = ((\sqrt{(2M)}/(\sqrt{(1 + 2M)} - \sqrt{(2M)}))^{1/2}$ ist, wobei M die Lipschitz-Konstante darstellt.

Wenn wir ferner die Bezeichnung

$$(15) \qquad F_{xx}(t, x) = \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} f(t_2, x, u_{xx}, u_{tt})\, dt_2\, dt_1 ,$$

$$F_{tt}(t, x) = \int_{\xi_0}^x \int_{\xi_1}^{x_1} f(t, x_2, u_{xx}, u_{tt})\, dx_2\, dx_1$$

einführen und mit dem Querstrich dieselben Werte für die Funktion $\bar{u}(t, x)$ bezeichnen, gilt für die Funktion $\omega(t, x)$ wegen (8), (11), (12), (13), (14) und (15) die Beziehung

$$\omega(t, x) = e^{-E}\{|F(t, x) - \bar{F}(t, x)| + |F_{xx}(t, x) - \bar{F}_{xx}(t, x)| + \\ + |F_{tt}(t, x) - \bar{F}_{tt}(t, x)|\} \leqq$$

$$\leqq Me^{-E}\left\{\int_{\xi_0}^{x}\int_{\xi_1}^{x_1}\omega(t, x_2)\, e^E\, dx_2\, dx_1 + \int_{\tau}^{t}\int_{\tau}^{t_1}\omega(t_2, x)\, e^E\, dt_2\, dt_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau}^{t}\int_{\tau}^{t_1}\int_{\xi_0}^{x}\int_{\xi_1}^{x_1}\omega(t_2, x_2)\, e^E\, dx_2\, dx_1\, dt_2\, dt_1\right\}.$$

Wenn wir $\mu = \max\limits_{(t,x)\in D_0} \omega(t, x)$ bezeichnen, folgt:

$$\omega(t, x) \leqq Me^{-E}\mu\left[\int_{\tau}^{t}\int_{\tau}^{t_1}\int_{\xi_0}^{x}\int_{\xi_1}^{x_1} e^E\, dx_2\, dx_1\, dt_2\, dt_1 + \int_{\xi_0}^{x}\int_{\xi_1}^{x_1} e^E\, dx_2\, dx_1 + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau}^{t}\int_{\tau}^{t_1} e^E\, dt_2\, dt_1\right] \leqq M\mu\left[\frac{2}{k^2} + \frac{1}{k^4}\right] = \frac{1}{2}\mu\,.$$

Für jeden Punkt von D_0 gilt $\omega(t, x) \leqq \frac{1}{2}\mu$, also auch $\mu \leqq \frac{1}{2}\mu$, woraus folgt, dass $\mu = 0$ ist und damit auch $\omega(t, x) = 0$ in jedem Teilgebiete D_0 ist.

Wenn die rechte Seite der Differentialgleichung (1) *die Voraussetzungen des Satzes* 1 *erfüllt, gibt es in dem Gebiete D genau eine Lösung des Problems* (1), (5).

Wir befassen uns nun mit der Differentialgleichung (1), in welche

$$A(t, x) = -\frac{c^2}{a^2}\,, \quad B(t, x) = \frac{1}{a^2} \tag{16}$$

eingesetzt wird, wobei $a^2 \neq 0$, c^2 gegebene Konstanten sind. Die Funktion

$$f(t, x, u_{xx}, u_{tt}) = \frac{1}{a^2}u_{tt} - \frac{c^2}{a^2}u_{xx}$$

erfüllt die Lipschitz-Bedingung in der ganzen tx-Ebene.

Wir wählen $\tau = 0$, $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = L$, so dass die Nebenbedingungen (5) die Form

$$u(0, x) = \varphi_0(x)\,, \quad u_t(0, x) = \varphi_1(x)\,, \quad u(t, 0) = \psi_0(t)\,, \quad u_x(t, L) = \psi_1(t) \tag{17}$$

erhalten, wobei $\varphi_0(0) = \psi_0(0)$, $\varphi_1(0) = \psi_0'(0)$, $\varphi_0'(0) = \psi_1(0)$, $\varphi_1'(0) = \psi_1'(0)$ ist.

Wir nehmen ferner an, dass die Funktionen $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllen, sodass die partielle Differentialgleichung

$$u_{xxtt} = \frac{1}{a^2}u_{tt} - \frac{c^2}{a^2}u_{xx} \tag{18}$$

genau eine Lösung in dem Gebiete D hat.

Als erste Annäherung nehmen wir die Funktion

$$u_0(t, x) = \varphi_0(x) + \psi_0(t) - \psi_0(0) + t[\varphi_1(x) - \varphi_1(0)] + \\ + x[\psi_1(t) - \psi_1(0)] - tx\,\varphi_1'(L)\,. \tag{19}$$

Aus der Beziehung (7) erhalten wir die k-te Näherungsfunktion in der Form

$$\begin{aligned}
u_k(t, x) &= u_0(t, x) + [\psi_0(t) - \psi_0(0) - t\,\psi_0'(0)] \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{a^{2n}} P_{2n}(L, x) + \\
&+ a[\psi_1(t) - \psi_1(0) - t\,\psi_1'(0)] \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{a^{2n}} P_{2n+1}(L, x) + [\varphi_0(x) - \varphi_0(0) - \\
&- x\,\varphi_0'(L)] \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{ct}{a}\right)^{2n} + \frac{a}{c} [\varphi_1(x) - \varphi_1(0) - \\
&- x\,\varphi_1'(L)] \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{ct}{a}\right)^{2n+1} + \sum_{m=1}^{k} \left\{ \frac{1}{a^{2m}} \left[\int_{2m} \varphi_0(x)\,\mathrm{d}x - \right.\right. \\
&- \left. P_{2m}\,\varphi_0(0) - P_{2m+1}\,\varphi_0'(L) \right] \sum_{n=1}^{k-m} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \binom{n + m - 1}{m} \left(\frac{ct}{a}\right)^{2n} + \\
&+ \frac{1}{a^{2m}} \frac{a}{c} \left[\int_{2m} \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x - P_{2m}\,\varphi_1(0) - \right. \\
&- \left. P_{2m+1}\varphi_1'(L) \right] \sum_{n=1}^{k-m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \binom{n + m - 1}{m} \left(\frac{ct}{a}\right)^{2n+1} + \\
&+ (-1)^m \left(\frac{c}{a}\right)^{2m} \left[\int_{2m} \psi_0(t)\,\mathrm{d}t - \frac{t^{2m}}{(2m)!} \psi_0(0) - \right. \\
&- \left. \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} \psi_0'(0) \right] \sum_{n=1}^{k-m} \frac{1}{a^{2n}} \binom{n + m - 1}{m} P_{2n}(L, x) + \\
&+ (-1)^m \left(\frac{c}{a}\right)^{2m} a \left[\int_{2m} \psi_1(t)\,\mathrm{d}t - \frac{t^{2m}}{(2m)!} \psi_1(0) - \right. \\
&- \left.\left. \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} \psi_1'(0) \right] \sum_{n=1}^{k-m} \frac{1}{a^{2n}} \binom{n + m - 1}{m} P_{2n+1}(L, x) \right\},
\end{aligned}$$

wobei die Bezeichnungen

$$\int_{2m} \varphi_i(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x \int_L^{x_1} \ldots \int_0^{x_{2m-2}} \int_L^{x_{2m-1}} \varphi_i(x_{2m})\,\mathrm{d}x_{2m} \ldots \mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1\,, \quad i = 0, 1\,,$$

$$\int_{2m} \psi_i(t)\,dt = \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{2m-1}} \psi_i(t_{2m})\,dt_{2m} \dots dt_2\,dt_1\,, \quad i = 0, 1\,,$$

$$P_{2m}(L, x) = \frac{x^{2m}}{(2m)!} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{L^{2m-2k-1}}{(2m-2k-1)!} P_{2k+1}(L, x)\,, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$P_{2m+1}(L, x) = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{L^{2m-2k}}{(2m-2k)!} P_{2k+1}(L, x)\,, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$P_0(L, x) = 1\,, \quad P_1(L, x) = x$$

benützt wurden.

Durch den Grenzübergang $k \to \infty$ erhalten wir die Lösung des Problems (18), (17) in der Form

$$u(t, x) = \psi_0(t) - \psi_0(0) - \varphi_0(0) + x\,\psi_1(t) +$$

$$+ [\varphi_0(x) - \varphi_0(0) - x\,\varphi_0'(L)] \cos\frac{ct}{a} + \frac{a}{c}[\varphi_1(x) - \varphi_1(0) - x\,\varphi_1'(L)] \sin\frac{ct}{a} +$$

$$+ [\psi_0(t) - \psi_0(0) - t\,\psi_0'(0)] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{2n}} P_{2n} + a[\psi_1(t) - \psi_1(0) -$$

$$- t\,\psi_1'(0)] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{2n+1}} P_{2n+1} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{a^{2m}} \left[\int_{2m} \varphi_0(x)\,dx - \right.\right.$$

$$\left. - P_{2m}\,\varphi_0(0) - P_{2m+1}\,\varphi_0'(L) \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \binom{n+m-1}{m} \left(\frac{ct}{a}\right)^{2n} +$$

$$+ \frac{1}{a^{2m}} \frac{a}{c} \left[\int_{2m} \varphi_1(x)\,dx - P_{2m}\,\varphi_1(0) - P_{2m+1}\,\varphi_1'(L) \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot$$

$$\cdot \binom{n+m-1}{m} \left(\frac{ct}{a}\right)^{2n+1} + (-1)^m \left(\frac{c}{a}\right)^{2m} \left[\int_{2m} \psi_0(t)\,dt - \frac{t^{2m}}{(2m)!} \psi_0(0) - \right.$$

$$\left. - \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} \psi_0'(0) \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{2n}} \binom{n+m-1}{m} P_{2n} + (-1)^m \left(\frac{c}{a}\right)^{2m} a \left[\int_{2m} \psi_1(t)\,dt - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{t^{2m}}{(2m)!} \psi_1(0) - \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} \psi_1'(0) \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{2n+1}} \binom{n+m-1}{m} P_{2n+1} \right\}.$$

Wenn die zwei Charakteristiken $x = 0$ und $x = L$ zusammenfliessen, wenn also die Nebenbedingungen die Form

(20) $\quad u(0, t) = \varphi_0(x)\,; \quad u_t(0, t) = \varphi_1(x)\,; \quad u(t, 0) = \psi_0(t)\,; \quad u_x(t, 0) = \psi_1(t)$

haben, erhalten wir die Lösung des Problems (18), (20) in der Form

$$u(t, x) = \varphi_0(0) + t\,\varphi_1(0) + \psi_1(0) + tx\,\psi_1'(0) +$$

$$+ [\varphi_0(x) - \varphi_0(0) - x\,\varphi_0'(0)] \cos\frac{ct}{a} + \frac{a}{c}[\varphi_1(x) - \varphi_1(0) - x\,\varphi_1'(0)] \sin\frac{ct}{a} +$$

$$+ [\psi_0(t) - \psi_0(0) - t\,\psi_0'(0)] \cosh\frac{x}{a} + a[\psi_1(t) - \psi_1(0) - t\,\psi_1'(0)] \sinh\frac{x}{a} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{a^{2m}}\left[\int_{2m} \varphi_0(x)\,\mathrm{d}x - \frac{x^{2m}}{(2m)!}\varphi_0(0) - \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\varphi_0'(0)\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,.\right.$$

$$.\binom{n+m-1}{m}\left(\frac{ct}{a}\right)^{2n} + \frac{1}{a^{2m}}\frac{a}{c}\left[\int_{2m} \varphi_1(x)\,\mathrm{d}x - \frac{x^{2m}}{(2m)!}\varphi_1(0) -\right.$$

$$\left. - \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\varphi_1'(0)\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\binom{n+m-1}{m}\left(\frac{ct}{a}\right)^{2n+1} +$$

$$+ (-1)^m\left(\frac{c}{a}\right)^{2m}\left[\int_{2m} \psi_0(t)\,\mathrm{d}t - \frac{t^{2m}}{(2m)!}\psi_0(0) - \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!}\psi_0'(0)\right].$$

$$.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\binom{n+m-1}{m}\left(\frac{x}{a}\right)^{2n} + (-1)^m\left(\frac{c}{a}\right)^{2m} a\left[\int_{2m} \psi_1(t)\,\mathrm{d}t -\right.$$

$$\left.\left. - \frac{t^{2m}}{(2m)!}\psi_1(0) - \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!}\psi_1'(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\binom{n+m-1}{m}\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}\right\}.$$

Literatur

[1] *A. E. H. Love:* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge 1952.

[2] *E. Kamke:* Differentialgleichungen II, Leipzig 1962.

Anschrift des Verfassers: 662 95 Brno, Janáčkovo nám. 2a (Matematický ústav ČSAV, pobočka Brno).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

A BAIRE FUNCTION NOT COUNTABLY DECOMPOSABLE INTO CONTINUOUS FUNCTIONS

ROY O. DAVIES, Leicester

(Received July 28, 1972)

In connection with a problem of KARTÁK [1], VRKOČ recently constructed [2] a measurable real function f on $I = [0, 1]$ such that I cannot be partitioned into countably many sets A_n with each restriction $f \mid A_n$ continuous. He asked whether for every Baire function there does exist such a partition of I into Borel sets. Here it will be shown that, on the contrary, there exists a function of Baire class 1 for which there exists no such partition whatever, even into non-Borel sets.

Theorem 1. *If $f: A \to I$ is continuous, where A is a subset of I, then given $\varepsilon > 0$ there exists a closed set $F \subseteq I \times I$ such that $F \cap \mathrm{Gr}(f) = \emptyset$ and $m(F_x) \geqq 1 - \varepsilon$ for all $x \in I$.*

Proof. For each element $u \in A$, let $J_u = \{(u, y) : |y - f(u)| < \frac{1}{2}\varepsilon\}$ and $K_u = (\{u\} \times I) \setminus J_u$. Denote by E the closure of the set $D = \cup\{K_u : u \in A\}$. First, we observe that $E \cap \mathrm{Gr}(f) = \emptyset$. Indeed, given any point $(u, f(u)) \in \mathrm{Gr}(f)$, we can choose $\delta > 0$ so small that

$$v \in A \;\&\; |v - u| < \delta \Rightarrow |f(v) - f(u)| < \varepsilon/4 ;$$

then the open rectangle with centre at $(u, f(u))$, width 2δ, and height $\frac{1}{2}\varepsilon$ contains no point of D.

Next, we prove that *for every $x \in \bar{A}$, the set $I \setminus E_x$ is an interval of length at most ε, open relative to I.* Since E_x is closed, it is enough to show that if $y_1, y_2 \in I \setminus E_x$ and $y_1 < y < y_2$ then (i) $y_2 - y_1 < \varepsilon$ and (ii) $y \in I \setminus E_x$. Consider any $u \in A$ with $|u - x| < \delta$, where δ is the smaller of the distances of (x, y_1) and (x, y_2) from E; then $(u, y_1) \in J_u$ and $(u, y_2) \in J_u$, and (i) follows. Moreover $|y - f(u)| < \frac{1}{2}\varepsilon - \min(y_2 - y, y - y_1)$; hence the open rectangle with centre (u, y), width 2δ, and height $2 \min(y_2 - y, y - y_1)$ contains no point of D, and this establishes (ii).

To construct F we adjoin to E a large part of each strip $S = (c, d) \times I$, where (c, d) is an interval of $I \setminus \bar{A}$; namely, the whole of S except for an open "corridor" (with rectilinear edges) joining the open vertical intervals $G = \{c\} \times (I \setminus E_c)$ and $H = \{d\} \times (I \setminus E_d)$. (If $G = H = \emptyset$ we include the whole of S in F; while if, for example, $H = \emptyset$ but $G \neq \emptyset$ then we include the whole of S except for the open triangle joining G to the point (d, z), where (c, z) is the mid-point of G.) It is easy to verify that the resulting set F is closed, and it clearly has the other required properties.

Theorem 2. *Let $f : I \to I$ be such that there is a partition $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ with each restriction $f \mid A_n$ continuous. Then given $\varepsilon > 0$ there exists a closed set $F \subseteq I \times I$ such that $F \cap \mathrm{Gr}(f) = \emptyset$ and $m(F_x) \geqq 1 - \varepsilon$ for all $x \in I$.*

Proof. Let $\sum \varepsilon_n$ be a convergent series of positive terms with sum less than ε. By Theorem 1 there exists for each n a closed set $F_n \subseteq I \times I$ such that $F_n \cap \mathrm{Gr}(f \mid A_n) = \emptyset$ and $m[(F_n)_x] \geqq 1 - \varepsilon_n$ for all $x \in I$. The set $F = \cap F_n$ has the required properties.

Theorem 3. *There exists a function $f : I \times I$ of Baire class 1 such that I cannot be partitioned into countably many sets A_n with each restriction $f \mid A_n$ continuous.*

Proof. In view of Theorem 2, it is sufficient for f to have the property that $F \cap \mathrm{Gr}(f) \neq \emptyset$ for every closed set $F \subseteq I \times I$ which satisfies $F_x \neq \emptyset$ for all $x \in I$. It is known [3] that there exists a function with G_δ graph having the stated property; this is not quite enough, but the example constructed explicitly in [4] is lower semi-continuous and therefore in the first Baire class.

Note added 13 January 1973. In a paper by L. Keldysh (Sur les fonctions premières mesurables B, Dokl. Akd. Nauk SSSR (N.S.) 5 (1934), 192–197) it was shown that for every α there exists a function $f : I \to I$ of Baire class α, such that I cannot be partitioned into countably many sets A_n with each restriction f/A_n of class less than α, thereby answering a question of P. S. Novikov, who had already proved the result stated above as Theorem 3.

References

[1] *K. Karták:* Problém 2, Čas. pěst. mat. *91* (1966), p. 104.

[2] *I. Vrkoč:* Remark about the relation between measurable and continuous functions. Čas. pěst. mat. *96* (1971), 225–228.

[3] *E. Michael:* G_δ sections and compact-covering maps. Duke Math. J. *36* (1969), 125–127.

[4] *Roy O. Davies:* A non-Prokhorov space. Bull. London Math. Soc. *3* (1971), 341–342.

Author's address: Dept. of Mathematics, The University, Leicester. LE1 7RH. England.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ON THE DEGREES OF GRAPHS WITH $\alpha(G) \leqq 2$

JAROSLAV MORÁVEK, Praha

(Received July 31, 1972)

Certain results are proved concerning the degrees of finite undirected graphs with the stability-number at most 2 (theorems 1, 2, 3). By applying theorems 1 and 2 we obtain the solution of an extremal combinatorial problem proposed by the author in [1] (theorem 4 of this paper). The obtained results generalize respectively modify a special case of a theorem of Turán (see e.g. [2], p. 269). The reader who is interested also in other generalizations or modifications of the Turán's theorem may consult e.g. [3], [4], [5] and [6].

Let n be a given integer, $n \geqq 2$, and put K_n for a complete undirected graph without loops and multiple edges (cf. [2] pp. 5–7) with n vertices $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Let us associate with each partial graph (see [2] p. 7) G of K_n its stability-number $\alpha(G)$ (cf. [2], p. 260), and put $d_j(G)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ for the degree of the vertex u_j in G (cf. [2], p. 6). Further, let us denote by $\mathcal{G}_n$ the family of all partial graphs G of K_n such that $\alpha(G) \leqq 2$.

Theorem 1. *Let $G \in \mathfrak{G}_n$. Then a partition*[1]

$$\{\{u_{i(1)}, \ldots, u_{i(a)}\}, \{u_{i(a+1)}, \ldots, u_{i(n)}\}\}$$

of the vertex-set $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ exists such that

$$\text{(i)} \qquad 1 \leqq a \leqq \left[\frac{n}{2}\right]^{2)},$$

$$\text{(ii)} \qquad \min\{d_{i(1)}(G), \ldots, d_{i(a)}(G)\} \geqq a - 1,$$

$$\text{(iii)} \qquad \min\{d_{i(a+1)}(G), \ldots, d_{i(n)}(G)\} \geqq n - a - 1.$$

Proof. Let $G \in \mathfrak{G}_n$. The subgraph (cf. [2], p. 7) of G generated by a nonempty set $V \subset \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ will be denoted by $G(V)$. We shall distinguish the following

[1]) The term "partition" will denote a disjoint decomposition.

[2]) The symbol $[\xi]$ will denote the integer part of a real number ξ.

two cases:

$$(\alpha) \qquad \min\{d_1(\mathbf{G}), d_2(\mathbf{G}), \ldots, d_n(\mathbf{G})\} > \frac{n}{2} - 1$$

$$(\beta) \qquad \min\{d_1(\mathbf{G}), d_2(\mathbf{G}), \ldots, d_n(\mathbf{G})\} \leqq \frac{n}{2} - 1\,.$$

In the (α) case the assertion of the theorem is obviously fulfilled for $a = [\frac{1}{2}n]$ and for an arbitrary partition having the form $\{\{\mathbf{u}_{i(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{i([n/2])}\}, \{\mathbf{u}_{i([n/2]+1)}, \ldots, \mathbf{u}_{i(n)}\}\}$.

Thus, let us consider the (β) case. Choose for $\mathbf{u}_{i(1)}$ any vertex such that

$$d_{i(1)}(\mathbf{G}) = \min\{d_j(\mathbf{G}) \mid j = 1, 2, \ldots, n\}\,,$$

and denote by $\mathbf{u}_{i(2)}, \ldots, \mathbf{u}_{i(a)}$ all the vertices adjacent to $\mathbf{u}_{i(1)}$. Further, let $\mathbf{u}_{i(a+1)}, \ldots$ $\ldots, \mathbf{u}_{i(n)}$ denote all remaining vertices. We shall show that the partition

$$\{\{\mathbf{u}_{i(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{i(a)}\}, \{\mathbf{u}_{i(a+1)}, \ldots, \mathbf{u}_{i(n)}\}\}$$

constructed in this way, has properties (i)–(iii).

Properties (i) and (ii) follow immediately from our construction and from (β); it remains to verify (iii). Indeed, the subgraph $\mathbf{G}(\{\mathbf{u}_{i(a+1)}, \ldots, \mathbf{u}_{i(n)}\})$ must be complete. Since assuming, on the contrary, that non-adjacent vertices $\mathbf{u}_{i(\gamma)}$ and $\mathbf{u}_{i(\delta)}$ exist such that $a < \gamma < \delta \leqq n$ we obtain a stable set (cf. [2], p. 260) $\{\mathbf{u}_{i(1)}, \mathbf{u}_{i(\gamma)}, \mathbf{u}_{i(\delta)}\}$, which contradicts $\alpha(\mathbf{G}) \leqq 2$.

From the completeness of $\mathbf{G}(\{\mathbf{u}_{i(a+1)}, \ldots, \mathbf{u}_{i(n)}\})$ (iii) immediately follows. □

The following theorem shows that lowerbounds (ii) and (iii) established in theorem 1 are best possible, and it describes all graphs $\mathbf{G} \in \mathfrak{G}_n$ for which in (ii) and (iii) equality holds.

Theorem 2. *Let* $a \in \{1, 2, \ldots, [\frac{1}{2}n]\}$, and let

$$\{\{\mathbf{u}_{i(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{i(a)}\}, \{\mathbf{u}_{i(a+1)}, \ldots, \mathbf{u}_{i(n)}\}\}$$

be a partition of the vertex-set of $\mathbf{K}_n$. *Then* $\mathbf{G} \in \mathfrak{G}_n$ *exists such that*

$$(1) \qquad d_j(\mathbf{G}) = a - 1 \quad \textit{for} \quad j = i(1), i(2), \ldots, i(a)$$

and

$$(2) \qquad d_j(\mathbf{G}) = n - a - 1 \quad \textit{for} \quad j = i(a+1), \ldots, i(n)\,.$$

This graph is unique if $a < \frac{1}{2}n$, *and it consists of two complete subgraphs as connectivity-components; the first connectivity-component is generated by* $\{\mathbf{u}_{i(1)}, \ldots$ $\ldots, \mathbf{u}_{i(a)}\}$, *the second by* $\{\mathbf{u}_{i(a+1)}, \ldots, \mathbf{u}_{i(n)}\}$.

In the case of $a = \frac{1}{2}n$ all the graphs $\mathbf{G} \in \mathfrak{G}_n$ satisfying $d_j(\mathbf{G}) = \frac{1}{2}n - 1$ $(j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n)$ are just the graphs which consist of two complete connectivity-components having an equal number of vertices.

Proof. Let $\mathbf{G}_0$ be a graph of $\mathfrak{G}_n$ as follows: Vertices $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ are adjacent in $\mathbf{G}_0$ iff

$$(\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \subset \{\mathbf{u}_{i(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{i(a)}\} \text{ or } \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \subset \{\mathbf{u}_{i(a+1)}, \ldots, \mathbf{u}_{i(n)}\}) .$$

The graph $\mathbf{G}_0$ satisfies conditions (1) and (2), which proves the first part of the theorem.

Conversely, let $\mathbf{G}$ be an arbitrary graph satisfying (1) and (2), and let us choose a vertex $\mathbf{u}_{j(1)}$ such that

$$d_{j(1)}(\mathbf{G}) = \min \{d_j(\mathbf{G}) \mid j = 1, 2, \ldots, n\} .$$

Then $d_{j(1)}(\mathbf{G}) = a - 1$. Further, let $\mathbf{u}_{j(2)}, \ldots, \mathbf{u}_{j(a)}$ be all the vertices adjacent to $\mathbf{u}_{j(1)}$, and denote by $\mathbf{u}_{j(a+1)}, \ldots, \mathbf{u}_{j(n)}$ the remaining vertices. Analogously as in the proof of theorem 1 we obtain

$$\min \{d_{j(1)}(\mathbf{G}), \ldots, d_{j(a)}(\mathbf{G})\} \geqq a - 1 , \tag{3}$$

$$\min \{d_{j(a+1)}(\mathbf{G}), \ldots, d_{j(n)}(\mathbf{G})\} \geqq n - a - 1 , \tag{4}$$

and

$$\mathbf{G}(\{\mathbf{u}_{j(a+1)}, \ldots, \mathbf{u}_{j(n)}\}) \tag{5}$$

is complete.

By combining (1), (2), (3) and (4) we obtain further

$$d_{j(1)}(\mathbf{G}) = \ldots = d_{j(a)}(\mathbf{G}) = a - 1 , \tag{6}$$

$$d_{j(a+1)}(\mathbf{G}) = \ldots = d_{j(n)}(\mathbf{G}) = n - a - 1 , \tag{7}$$

and moreover if $a < \frac{1}{2}n$:

$$\begin{aligned} \{j(1), j(2), \ldots, j(a)\} &= \{i(1), i(2), \ldots, i(a)\} \\ \{j(a + 1), \ldots, j(n)\} &= \{i(a + 1), \ldots, i(n)\} . \end{aligned} \tag{8}$$

Now, it follows from (5), (6) and (7) that no vertex of $\{\mathbf{u}_{j(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{j(a)}\}$ is adjacent to a vertex of $\{\mathbf{u}_{j(a+1)}, \ldots, \mathbf{u}_{j(n)}\}$ and hence $\mathbf{G}(\{\mathbf{u}_{j(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{j(a)}\})$ must be also complete.

Thus $\mathbf{G}$ consists of two complete subgraphs

$$\mathbf{G}(\{\mathbf{u}_{j(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{j(a)}\}) \quad \text{and} \quad \mathbf{G}(\{\mathbf{u}_{j(a+1)}, \ldots, \mathbf{u}_{j(n)}\})$$

as connectivity-components, and moreover (8) holds if $a < \frac{1}{2}n$. □

Let us denote by Δ_n the family of all n-dimensional vectors $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ such that $\delta_j = d_j(\mathbf{G})$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ holds for some $\mathbf{G} \in \mathfrak{G}_n$. Let $\mathscr{R}$ denote the partial-order relation on Δ_n as follows:

$$(\delta_1, \ldots, \delta_n) \mathscr{R} (\delta_1', \ldots, \delta_n') \quad \text{iff} \quad \delta_j \leqq \delta_j' \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Vector $(\delta_1^*, \ldots, \delta_n^*) \in \Delta_n$ will be called a *minimal element* of Δ_n iff for any $(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in$ $\in \Delta_n$

$$(\delta_1, \ldots, \delta_n) \mathscr{R} (\delta_1^*, \ldots, \delta_n^*) \Rightarrow (\delta_1, \ldots, \delta_n) = (\delta_1^*, \ldots, \delta_n^*).$$

By using theorems 1 and 2 we obtain easily the following characterization of minimal elements of Δ_n.

Corollary. *Vector $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) \in \Delta_n$ is a minimal element of Δ_n iff there exists a partition*

$$\{\{i(1), \ldots, i(a)\}, \{i(a+1), \ldots, i(n)\}\} \quad \text{of} \quad \{1, 2, \ldots, n\}$$

such that $1 \leqq a \leqq \frac{1}{2}n$,

$$\delta_j = a - 1 \qquad \textit{for} \quad j = i(1), \ldots, i(a),$$
$$\delta_j = n - a - 1 \quad \textit{for} \quad j = i(a+1), \ldots, i(n). \ \square$$

In the next theorem, another extremal property of the degrees of $\mathbf{G} \in \mathfrak{G}_n$ is investigated.

Theorem 3. *Let $\mathbf{G} \in \mathfrak{G}_n$. Then*

$$\sum_{j=1}^{n} \left(d_j(\mathbf{G}) - \frac{3n-4}{4} \right)^2 \leqq \frac{n^3}{16}. \tag{9}$$

Further, the equality

$$\sum_{j=1}^{n} \left(d_j(\mathbf{G}) - \frac{3n-4}{4} \right)^2 = \frac{n^3}{16}$$

holds iff either $\mathbf{G} = \mathbf{K}_n$ or $\mathbf{G}$ consists of two complete subgraphs as connectivity-components.

Remark 1. The first part of this theorem follows also from [1].

Remark 2. The assertion may be formulated in a geometrical fashion as follows: The vector $(d_1(\mathbf{G}), d_2(\mathbf{G}), \ldots, d_n(\mathbf{G}))$ is contained for any $\mathbf{G} \in \mathfrak{G}_n$ in the ball defined by (9). Moreover, the theorem describes all graphs $\mathbf{G} \in \mathfrak{G}_n$ the vector of degrees of those belongs to the boundary of the ball (9).

Proof of the theorem 3. Let us put $\mathbf{E}$ for the set of all edges of $\mathbf{G}$. We shall say that $\mathbf{e} \in \mathbf{E}$ is *incident* to a triplet (u_i, u_j, u_k) where $1 \leqq i < j < k \leqq n$ if $\mathbf{e}$ links some pair of vertices u_i, u_j, u_k. Let us denote by $\mathsf{T}(\mathbf{e})$ the set of all such triplets which are incident to $\mathbf{e}$, and put

$$\mathsf{T} = \bigcup_{\mathbf{e} \in \mathbf{E}} \mathsf{T}(\mathbf{e}) . \tag{10}$$

It follows from $\alpha(\mathbf{G}) \leqq 2$ that T contains all triplets, and hence

$$\operatorname{card}(\mathsf{T}) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} . \tag{11}$$

On the other hand, it follows from (10) that

$$\operatorname{card}(\mathsf{T}) = \sum_{r=1}^{\operatorname{card}(\mathbf{E})} (-1)^{r-1} \sum\nolimits^{(r)} \operatorname{card}(\mathsf{T}(\mathbf{e}_1) \cap \ldots \cap \mathsf{T}(\mathbf{e}_r)) \tag{12}$$
[3]

where $\sum^{(r)} \operatorname{card}(\mathsf{T}(\mathbf{e}_1) \cap \ldots \cap \mathsf{T}(\mathbf{e}_r))$ denotes the sum of $\operatorname{card}(\mathsf{T}(\mathbf{e}_1) \cap \ldots \cap \mathsf{T}(\mathbf{e}_r))$ over the family of all r-element subsets $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ of $\mathbf{E}$. From (12) it follows immediately

$$\operatorname{card}(\mathsf{T}) = \sum_{r=1}^{3} (-1)^{r-1} \sum\nolimits^{(r)} \operatorname{card}(\mathsf{T}(\mathbf{e}_1) \cap \ldots \cap \mathsf{T}(\mathbf{e}_r)) \tag{13}$$

since the remaining summands on the right-hand side of (12) are zero. (This follows from the fact that at most three distinct edges can be incident to a common triplet.)

Now we shall express the first and the second summand on the right-hand side of (13) by using $d_j(\mathbf{G})$, and estimate the third:

$$\sum\nolimits^{(1)} \operatorname{card}(\mathsf{T}(\mathbf{e}_1)) = (n-2) \operatorname{card}(\mathbf{E}) = \frac{n-2}{2} \sum_{j=1}^{n} d_j(\mathbf{G}) \tag{14}$$

(since each edge is incident to exactly $n - 2$ triplets),

$$\sum\nolimits^{(2)} \operatorname{card}(\mathsf{T}(\mathbf{e}_1) \cap \mathsf{T}(\mathbf{e}_2)) = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} d_j(\mathbf{G}) (d_j(\mathbf{G}) - 1) , \tag{15}$$

(since any two distinct edges are incident to a common triplet iff they have one common vertex), and

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits^{(3)} \operatorname{card}(\mathsf{T}(\mathbf{e}_1) \cap \mathsf{T}(\mathbf{e}_2) \cap \mathsf{T}(\mathbf{e}_3)) \leqq \\ &\leqq \tfrac{1}{3} \sum\nolimits^{(2)} \operatorname{card}(\mathsf{T}(\mathbf{e}_1) \cap \mathsf{T}(\mathbf{e}_2)) = \tfrac{1}{6} \sum_{j=1}^{n} d_j(\mathbf{G}) (d_j(\mathbf{G}) - 1) , \end{aligned} \tag{16}$$

(since to each three edges incident to a common triplet three pairs of edges correspond occuring in $\sum^{(2)} \operatorname{card}(\mathsf{T}(\mathbf{e}_1) \cap \mathsf{T}(\mathbf{e}_2))$.

[3]) According to the so called "principle of inclusion and exclusion".

By combining (11), (13), (14), (15) and (16) we obtain the inequality

$$\frac{n-2}{2}\sum_{j=1}^{n} d_j(\mathsf{G}) - \tfrac{1}{3}\sum_{j=1}^{n} d_j(\mathsf{G})\,(d_j(\mathsf{G})-1) \geqq \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

which yields

$$\sum_{j=1}^{n}\left(d_j(\mathsf{G})^2 - \frac{3n-4}{2}\,d_j(\mathsf{G})\right) \leqq -\frac{n(n-1)(n-2)}{2},$$

and

$$\sum_{j=1}^{n}\left(d_j(\mathsf{G}) - \frac{3n-4}{4}\right)^2 \leqq \frac{n^3}{16},$$

proving the first part of the theorem.

Now, let for $\mathsf{G} \in \mathfrak{G}_n$ the equality in (9) hold. Then

$$3\sum^{(3)} \operatorname{card}\left(\mathsf{T}(\mathbf{e}_1) \cap \mathsf{T}(\mathbf{e}_2) \cap \mathsf{T}(\mathbf{e}_3)\right) = \sum^{(2)} \operatorname{card}\left(\mathsf{T}(\mathbf{e}_1) \cap \mathsf{T}(\mathbf{e}_2)\right),$$

and hence for any vertices $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ and $\mathbf{w}$ of G if $\mathbf{u}$ is adjacent both to $\mathbf{v}$ and to $\mathbf{w}$ then also $\mathbf{v}$ and $\mathbf{w}$ are adjacent, i.e. the subgraph $\mathsf{G}(\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\})$ is complete. We conclude immediately from this fact that each connectivity-component of G is a complete subgraph. Further $\alpha(\mathsf{G}) \leqq 2$ yields that G has no more than two connectivity-components, and hence our assertion.

In order to complete the proof we must show that the equality holds in (9) if $\mathsf{G} = \mathsf{K}_n$ or G consists of two complete connectivity-components. Indeed, it follows from our assumption that an integer $a \in \{0, 1, \ldots, [\frac{1}{2}n]\}$ and a partition $\{\{i(1), \ldots \ldots, i(a)\}, \{i(a+1), \ldots, i(n)\}\}$ of $\{1, 2, \ldots, n\}$ exist such that

$$d_j(\mathsf{G}) = \begin{cases} a-1 & \text{for } j = i(1), \ldots, i(a), \\ n-a-1 & \text{for } j = i(a+1), \ldots, i(n). \end{cases}$$

(If $a = 0$ then $d_j(\mathsf{G}) = n - 1$; this case corresponds to $\mathsf{G} = \mathsf{K}_n$.) Then

$$\sum_{j=1}^{n}\left(d_j(\mathsf{G}) - \frac{3n-4}{4}\right)^2 =$$

$$= a\left(a - 1 - \frac{3n-4}{4}\right)^2 + (n-a)\left(n - a - 1 - \frac{3n-4}{4}\right)^2 = \frac{n^3}{16},$$

which completes the proof. □

Theorems 1 and 2 will be now applied for the solution of an open problem from [1]. Let be given nonnegative numbers $c_1, c_2, \ldots, c_n$ assigned respectively to $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$.

(The numbers $c_1, c_2, \ldots, c_n$ will be considered as weights of vertices.) Put

$$\tau_n(c_1, \ldots, c_n) = \min \{ \sum_{j=1}^{n} c_j d_j(\mathbf{G}) \mid \mathbf{G} \in \mathfrak{G}_n \} .$$

The problem of determing $\tau_n(c_1, \ldots, c_n)$ was proposed in [1][4]. The following theorem solves this problem, and moreover, in the case of $c_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ it describes all extremal graphs $\mathbf{G} \in \mathfrak{G}_n$.

Theorem 4. a) *It holds that*

$$\tau_n(c_1, \ldots, c_n) = \min \left((a - 1) \sum_{j=1}^{a} c_{i(j)} + (n - a - 1) \sum_{j=a+1}^{n} c_{i(j)}\right)$$

where the minimum is taken over the family of all partitions $\{\{\mathbf{u}_{i(1)}, \ldots, \mathbf{u}_{i(a)}\}, \{\mathbf{u}_{i(a+1)}, \ldots, \mathbf{u}_{i(n)}\}\}$ *of* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *such that* $1 \leqq a \leqq \frac{1}{2}n$.

b) *Let* $\min \{c_j \mid j = 1, 2, \ldots, n\} > 0$, *and*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \, d_j(\mathbf{G}) = \tau_n(c_1, c_2, \ldots, c_n) .$$

Then $\mathbf{G}$ *is a graph consisting of two complete subgraphs as connectivity-components.*

Proof. The a) part follows by combining theorem 1 and the fact that the function "$(\delta_1, \ldots, \delta_n) \to c_1\delta_1 + \ldots + c_n\delta_n$" is isotonic on Δ_n.

If $\min \{c_j \mid j = 1, 2, \ldots, n\} > 0$ then the considered function is even strictly isotonic. Thus it follows from

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \, d_j(\mathbf{G}) = \tau_n(c_1, \ldots, c_n) \quad \text{that} \quad (d_1(\mathbf{G}), \ldots, d_n(\mathbf{G}))$$

is a minimal element in Δ_n, and hence $\mathbf{G}$ is a graph described in the theorem 2, which completes the proof. $\square$

Remark. It follows from this theorem that for determining all solutions of the considered problem if $c_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ it is necessary and sufficient to determine all partitions $\{\{u_{i(1)}, \ldots, u_{i(a)}\}, \{u_{i(a+1)}, \ldots, u_{i(n)}\}\}$ such that $1 \leqq a \leqq \frac{1}{2}n$ and

$$(a - 1) \sum_{j=1}^{a} c_{i(j)} + (n - a - 1) \sum_{j=a+1}^{n} c_{i(j)} = \min = \tau_n(c_1, \ldots, c_n) .$$

[4]) This problem was proposed by the author also at the "Conference on Graph Theory and Combinatorial Analysis" held at Štiřín (May 1972).

If we put $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = \frac{1}{2}$ in the previous theorem and observe that $\sum_{j=1}^{n} c_j \, d_j(\mathbf{G})$ equals the number of edges of $\mathbf{G}$ (i.e. card (E) according to the notation used in the proof of theorem 3) in this case we obtain easily the following assertion that coincides with a special case of the Turán theorem.

Corollary 1. *If $\mathbf{G} \in \mathfrak{G}_n$ then the number of all edges of $\mathbf{G}$ is at least $[\frac{1}{4}(n-1)^2]$. Moreover,* card (E) $= [\frac{1}{4}(n-1)^2]$ *iff $\mathbf{G}$ consists of two complete connectivity-components.* □

In order to simplify the computation of $\tau_n(c_1, \ldots, c_n)$ the following simple fact may be useful.

Corollary 2. *If* $c_1 \geqq c_2 \geqq \ldots \geqq c_n \geqq 0$ [5]) *then* $\tau_n(c_1, \ldots, c_n) = \min \{(a-1) \cdot \sum_{j=1}^{a} c_j + (n-a-1) \sum_{j=a+1}^{n} c_j \mid a = 1, 2, \ldots, [\frac{1}{2}n]\}$.

Proof. In view of theorem 4, it is sufficient to prove that

$$(a-1) \sum_{j=1}^{a} c_{i(j)} + (n-a-1) \sum_{j=a+1}^{n} c_{i(j)} \geqq$$
$$\geqq (a-1) \sum_{j=1}^{a} c_j + (n-a-1) \sum_{j=a+1}^{n} c_j$$

holds for any partition $\{\{i(1), \ldots, i(a)\}, \{i(a+1), \ldots, i(n)\}\}$ of $\{1, 2, \ldots, n\}$ such that $1 \leqq a \leqq \frac{1}{2}n$. Indeed

$$(a-1) \sum_{j=1}^{a} c_{i(j)} + (n-a-1) \sum_{j=a+1}^{n} c_{i(j)} =$$
$$= (a-1) \sum_{j=1}^{n} c_{i(j)} + (n-2a) \sum_{j=a+1}^{n} c_{i(j)} = (a-1) \sum_{j=1}^{n} c_j + (n-2a) \sum_{j=a+1}^{n} c_{i(j)} \geqq$$
$$\geqq (a-1) \sum_{j=1}^{n} c_j + (n-2a) \sum_{j=a+1}^{n} c_j = (a-1) \sum_{j=1}^{a} c_j + (n-a-1) \sum_{j=a+1}^{n} c_j \,,$$

which completes the proof. □

The results of this paper can be also formulated in a different form. Let $\mathfrak{G}_n^*$ denote the family of all partial graphs $\mathbf{G}$ of $\mathbf{K}_n$ that do not contain "triangles", i.e. complete subgraphs with three vertices. Let us consider the bijection $\Phi : \mathfrak{G}_n \leftrightarrow \mathfrak{G}_n^*$ such that $\Phi(\mathbf{G})$ is the complementary graph of $\mathbf{G} \in \mathfrak{G}_n$. By using the mapping Φ we can state theorem 1 in the following equivalent fashion:

[5]) This can be guaranteed by an appropriate numbering of vertices.

"*Let* $\mathbf{G} \in \mathfrak{G}_n^*$. *Then a partition*

$$\{\{u_{i(1)}, \ldots, u_{i(a)}\}, \{u_{i(a+1)}, \ldots, u_{i(n)}\}\} \quad \text{of} \quad \{u_1, \ldots, u_n\}$$

exists such that

(j) $$1 \leqq a \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$$

(jj) $$\max \{d_{i(1)}(\mathbf{G}), \ldots, d_{i(a)}(\mathbf{G})\} \leqq n - a$$

(jjj) $$\max \{d_{i(a+1)}(\mathbf{G}), \ldots, d_{i(n)}(\mathbf{G})\} \leqq a \,."$$

Also the remaining assertions of this paper may be formulated in a "complementary" fashion.

In the conclusion we present the following problem: Theorems 1 and 3 are certain necessary conditions for n given nonnegative integers to be representable as degrees of a certain graph $\mathbf{G} \in \mathfrak{G}_n$. We find it interesting to look for some necessary and sufficient conditions.

References

[1] *Morávek J.:* O jednom extremálním problému pro grafy s $\alpha(\mathbf{G}) \leqq 2$. Časopis pro pěstování matematiky (to appear).

[2] *Berge C.:* Graphes et hypergraphes. DUNOD, Paris (1970).

[3] *Motzkin T. S.* and *E. G. Straus:* Maxima of Graphs and a New Proof of a Theorem of Turán. Canad. Journal of Mathematics, Vol. *XVII*, pp 533—540.

[4] *Simonovits M.:* A Method for Solving Extremal Problems in Graph Theory, Stability Problems. Proceedings of the Colloquium held at Tihany, 279—319. Akadémiai Kiadó, Budapest 1968.

[5] *Sauer N.:* A Generalization of a Theorem of Turán. Journal of Combinatorial Theory, *10*, 109—112 (1971).

[6] *Novák J.:* Eulerovské grafy bez trojúhelníků s maximálním počtem hran. Sborník vědeckých prací VŠST, Liberec (to appear).

Author's address: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

r-ROZMĚRNÉ KONFIGURACE II

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

(Došlo dne 15. září 1972)

Úvod. Tato práce je pokračováním článku [1], jehož znalost předpokládáme a pokračujeme také v označování vět, poznámek i odstavců.

4. r-rozměrné konfigurace s body U_{ij} a M_{ij}. Označme M_{ij} bod jehož i-tá a j-tá souřadnice je rovna jedné a ostatní jsou rovny nule. Zřejmě platí $M_{ij} \equiv M_{ji}$ a v daném S_r existuje právě $\binom{r+1}{2}$ těchto bodů M_{ij}.

Označme S_s^I s-rozměrný podprostor daného S_r určený rovnicemi:

$$
\begin{gathered}
a_1 x_{i_1} + a_2 x_{i_2} + \ldots + a_{s+1} x_{i_{s+1}} + a_{s+2} x_{i_{s+2}} = 0\,, \\
x_{i_{s+3}} = 0, \ldots, x_{i_{r+1}} = 0\,,
\end{gathered} \tag{5}
$$

kde a_i je rovno právě jednomu z čísel 1 a -1 a platí $0 \leqq s \leqq r - 1$.

Z rovnic (5) je ihned vidět: jestliže podprostor S_s^I obsahuje bod U_{ij}, tak neobsahuje bod M_{ij} a obráceně. Součet počtu bodů U_{ij} a M_{ij} obsažených v daném S_s^I je právě $\binom{s+2}{2}$. Dále je vidět, že v daném S_s^I nemusí ležet žádný bod M_{ij}. Naopak v každém S_s^I, kde $s > 0$ leží aspoň jeden bod U_{ij}.

Věta 13. *V daném S_r existuje právě 2^r nadrovin S_{r-1}^I.*

Důkaz. Nadrovina S_{r-1}^I je určena rovnicí:

$$
a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{r+1} x_{r+1} = 0\,, \tag{6}
$$

kde a_i je právě jedno z čísel 1 a -1. Počet různých rovnic (6) je zřejmě $1 + r + 1 + \binom{r+1}{2} + \ldots + \binom{r+1}{r} + 1 = 2^{r+1}$, neboť číslo $\binom{r+1}{s}$ určuje počet rovnic (6), které mají právě s záporných znamének u proměnných x_i. Znásobíme-li rovnici z rovnic (6) číslem -1 dostáváme opět rovnici z rovnic (6) a tyto dvě rovnice určují stejnou nadrovinu. Je tedy počet nadrovin určených rovnicemi (6) právě 2^r.

Věta 14. *V daném S_r existuje právě* $\binom{r+1}{s+1} \cdot 2^{s+1}$ *s-rozměrných podprostorů* S_s^I.

Důkaz. Uvažujme „přípustný“ s-rozměrný podprostor, určený soustavou (1). Zřejmě tento podprostor je prostor S_s^I a z důkazu předcházející věty snadno usoudíme, že k podprostorům S_s^I patří další podprostory určené tak, že v prvé rovnici soustavy (1) jsou také záporná znaménka u proměnných. Počet podprostorů S_s^I dostaneme tak, že počet „přípustných“ podprostorů znásobíme číslem 2^{s+1}. Z předcházejícícího a z věty 3 vyplývá, že počet S_s^I v daném S_r je právě $\binom{r+1}{s+1} \cdot 2^{s+1}$.

Věta 15. *Nechť $s > k$, potom každým S_k^I prochází právě* $\binom{r-k-1}{s-k} \cdot 2^{s-k}$ *různých podprostorů S_s^I.*

Důkaz. Metodou použitou při důkazu věty 2. zjistíme, že daným S_k^I prochází $\binom{r-k-1}{s-k}$ různých S_s^I, jestliže čísla a_i jsou pevně stanovena. V našem případě se však u $s - k$ proměnných mohou změnit znaménka. Proto je třeba získaný počet násobit číslem 2^{s-k} analogicky jako ve větě 13.

Poznámka 4. Věta 15 platí i pro bod tj. prostor dimenze nula. Platí tedy: Každým bodem U_{ij} a M_{ij} prochází právě $\binom{r-1}{s} \cdot 2^s$ různých podprostorů S_s^I.

Věta 16. *Nechť $s > k$. V podprostoru S_s^I daného prostoru S_r leží právě* $\binom{s+2}{k+2}$ *k-rozměrných podprostorů S_k^I prostoru S_s^I.*

Důkaz. Tato věta je zcela obdobná větě 4. Je-li $S_k^I \subset S_s^I$, potom v prvé rovnici soustavy (5), která dané S_k^I a S_s^I určuje, musí být u příslušných proměnných stejná znaménka. Můžeme tedy zde aplikovat důkaz věty 4.

Věta 17. *Nechť M' je množina, která jako své prvky obsahuje všechny podprostory $S_s^I \subset S_r$, $0 \leqq s \leqq r - 1$. Potom množina M' je r-rozměrnou konfigurací typu:*

$$(7) \qquad \begin{bmatrix} 2\binom{r+1}{2}, & 2(r-1), & \dots, & \binom{r-1}{r-2} \cdot 2^{r-2}, & 2^{r-1} \\ 3, & \binom{r+1}{3} \cdot 2^2, & \dots, & \binom{r-2}{r-3} \cdot 2^{r-3}, & 2^{r-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{r+1}{2}, & \binom{r+1}{3}, & \dots, & \binom{r+1}{r}, & 2^r \end{bmatrix}.$$

Důkaz. Tato věta plyne z předcházejících vět. Na hlavní diagonále matice (7) jsou čísla podle věty 14, pod hlavní diagonálou jsou čísla určená větou 16 a nad hlavní diagonálou jsou čísla, která dostaneme užitím věty 15.

Označme S_s^{II} s-rozměrný podprostor daného S_r určený rovnicemi:

$$x_{i_m} = 0\,, \quad \text{kde} \quad m = s+2, s+3, \ldots, r+1 \tag{8}$$

Věta 18. *V daném S_r existuje právě $\binom{r+1}{r-s}$ s-rozměrných podprostorů S_s^{II}.*

Důkaz. Jedná se zde zřejmě o kombinace $r - s$-té třídy z $r + 1$ prvků.

Věta 19. *Nechť $s > k$. Každým podprostem S_k^{II} prostoru S_r prochází právě $\binom{r-k}{r-s}$ různých podprostorů S_s^{II}.*

Důkaz. Nechť S_s^{II} je dán soustavou (8) a S_k^{II} soustavou:

$$x_{i_n} = 0\,, \quad n = k+2, k+3, \ldots, r+1\,. \tag{9}$$

Zřejmě musí platit, že množina $\{x_{i_{s+2}}, x_{i_{s+3}}, \ldots, x_{i_{r+1}}\}$ je podmnožinou množiny $\{x_{i_{k+2}}, x_{i_{k+3}}, \ldots, x_{i_{r+1}}\}$. Protože prvá množina má $r - k$ prvků, druhá množina $r - s$ prvků a protože se jedná o kombinace je počet uvažovaných prostorů S_s^{II} dán číslem $\binom{r-k}{r-s}$.

Věta 20. *Nechť $s > k$. V každém podprostoru S_s^{II} prostoru S_r leží právě $\binom{s+1}{s-k}$ k-rozměrných podprostorů S_k^{II}.*

Důkaz. Nechť S_s^{II} je dán soustavou (8) a S_k^{II} soustavou (9). Množina $\{x_{i_{s+2}}, x_{i_{s+3}}, \ldots, x_{i_{r+1}}\}$ musí být podmnožinou množiny $\{x_{i_{k+2}}, x_{i_{k+3}}, \ldots, x_{i_{r+1}}\}$. Protože $r - s$ proměnných bylo již zvoleno, můžeme měnit pouze $r - k - (r - s) = s - k$ proměnných. Těchto $s - k$ proměnných budeme vybírat z $r + 1 - (r - s) = s + 1$ proměnných. Jsou to opět kombinace a počet prostorů S_k^{II}, které leží v daném S_s^{II}, je dán číslem $\binom{s+1}{s-k}$.

Věta 21. *Nechť M_1 je množina, která jako své prvky obsahuje všechny podprostory $S_s^{II} \subset S_r$, $0 \leqq s \leqq r - 1$. Potom množina M_1 je r-rozměrnou konfigurací typu:*

$$\begin{bmatrix} r+1\,, & \binom{r}{r-1}, & \binom{r}{r-2}, & \ldots, & \binom{r}{2}, & r \\ 2\,, & \binom{r+1}{r-1}, & \binom{r-1}{r-2}, & \ldots, & \binom{r-1}{2}, & \binom{r-1}{1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{r}{r-1}, & \binom{r}{r-2}, & \binom{r}{r-3}, & \ldots, & \binom{r}{2}, & r+1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Důkaz této věty vyplývá z předcházejících vět a proto ho nebudeme provádět.

Poznámka 5. Čtenář si jistě uvědomil, že množina M_1 z věty 21 je „souřadnicový simplex". Použijeme ho však k odvození dalších konfigurací.

Věta 22. *Nechť M_2 je množina, která jako své prvky obsahuje body M_{ij}, U_{ij} (tj. podprostory S_0^I) a všechny podprostory $S_s^{II} \subset S_r$, kde $0 < s \leqq r - 1$. Potom množina M_2 je r-rozměrnou konfigurací typu:*

$$\begin{bmatrix} 2\binom{r+1}{2}, & 1, & \binom{r-1}{r-2}, & \dots, & \binom{r-1}{2}, & r-1 \\ 2, & \binom{r+1}{r-1}, & \binom{r-1}{r-2}, & \dots, & \binom{r-1}{2}, & r-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2\binom{r}{2}, & \binom{r}{r-2}, & \binom{r}{r-3}, & \dots, & \binom{r}{2} & , r+1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Důkaz. Matice (11) se liší od matice (10) v prvém řádku a v prvém sloupci. Počet bodů U_{ij} a M_{ij} je zřejmě $2\binom{r+1}{2}$ a dále je z rovnic (8) vidět, že každý $S_s^{II}(0 < s \leqq r - 1)$ obsahuje právě $\binom{s+1}{2}$ bodů U_{ij} a $\binom{s+1}{2}$ bodů M_{ij}. Tedy ostatní čísla v prvém sloupci matice (11) jsou $2\binom{s+1}{2}$. Z rovnic (8) je také vidět, že každý bod U_{ij} a M_{ij} leží na jediné přímce S_1^{II}. Z toho vyplývá, že v prvém řádku matice (11) je druhé číslo jedna a další čísla jsou stejná jako v druhém řádku.

Věta 23. *Nechť M_3 je množina, která jako své prvky obsahuje podprostory S_s^I pro $s = 0, 1$ a podprostory S_s^{II} pro $s = 2, 3, \dots, r - 1$. Potom množina M_3 je r-rozměrnou konfigurací typu:*

$$\begin{bmatrix} 2\binom{r+1}{2}, & 2(r-1), & \binom{r-1}{r-2}, & \dots, & \binom{r-1}{2}, & r-1 \\ 3, & \binom{r+1}{3}.2^2, & 1, & \dots, & \binom{r-2}{r-4}, & r-2 \\ 6, & 4, & \binom{r+1}{r-2}, & \dots, & \binom{r-2}{2}, & r-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2\binom{r}{2}, & \binom{r}{3}.2^2, & \binom{r}{r-3}, & \dots, & \binom{r}{2}, & r+1 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Důkaz. Matice (12) se liší od matice (11) v druhém řádku a v druhém sloupci. Prvá dvě čísla v uvažovaném řádku a sloupci jsou již známa. Jestliže daná přímka S_1^I

má ležet v $S_s^{II}(s > 1)$, potom v soustavě (8) – určující S_s^{II} – nesmí být žádná rovnice s proměnnou, která je v prvé rovnici soustavy (5) – určující danou přímku S_1^I. V prvé rovnici soustavy (5) jsou tři proměnné (pro S_1^I) a tedy platí, že daná S_1^I je obsažena v $\binom{r-2}{s-2}$ různých podprostorech S_s^{II}. Tím jsou určena čísla v druhém řádku matice (12). Nyní určíme čísla v druhém sloupci matice (12). Proměnné v prvé rovnici soustavy (5) – určující S_1^I – můžeme vybírat z $s + 1$ proměnných, které nejsou v soustavě (8) určující zvolený S_s^{II}. Dostáváme tak $\binom{s+1}{3}$ kombinací. V každé kombinaci však můžeme v první rovnici soustavy (5) měnit znaménka a pro případ přímky dostáváme zřejmě čtyři možnosti změn znamének, které vedou k různým přímkám. Čísla v druhém sloupci počínaje třetím řádkem jsou tedy $\binom{s+1}{3} . 2^2$.

Poznámka 6. Nechť $r = 3$. Pro případ věty 17 dostáváme konfiguraci v trojrozměrném prostoru typu:

$$(13) \qquad \begin{pmatrix} 12, & 4, & 4 \\ 3, & 16, & 2 \\ 6, & 4, & 8 \end{pmatrix}.$$

Pro případ věty 23 dostáváme konfiguraci v trojrozměrném prostoru typu:

$$(14) \qquad \begin{pmatrix} 12, & 4, & 2 \\ 3, & 16, & 1 \\ 6, & 4, & 4 \end{pmatrix}.$$

Z rovnic (5) a (8) je vidět, že každé dvě roviny S_2^I a S_2^{II} jsou navzájem různé. Z toho vyplývá, že se dá sečíst třetí sloupec matice (13) s třetím sloupcem matice (14). Tím jsme dokázali tuto zajímavou větu:

Věta 24. *V trojrozměrném prostoru existuje konfigurace typu:*

$$\begin{pmatrix} 12, & 4, & 6 \\ 3, & 16, & 3 \\ 6, & 4, & 12 \end{pmatrix}.$$

Poznámka 7. V uvažovaném S_r platí princip duality. Platí tedy, že ke všem konfiguracím odvozeným v obou článcích existují konfigurace duální.

Literatura

[1] *J. Krys:* r-Rozměrné konfigurace, Časopis pro pěstování matematiky, Svazek *96* (1971), str. 339–345.

Adresa autora: 501 91 Hradec Králové, Leninovo nám. 301 (Pedagogická fakulta).

Zussammenfassung

r-DIMENSIONALE KONFIGURATIONEN II

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

In dieser Arbeit, die eine Fortsetzung des Artikels [1] ist, sind drei weitere Konfigurationstypen im projektiven Raum über dem Körper der komplexen Zahlen hergeleitet. Die Elemente dieser Konfiguration sind von einer gewisen Anzahl von Punkten U_{ij} und M_{ij} bestimmt, wo $U_{ij} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)$ und $M_{ij} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ ist.

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

JIŘÍ PEŠL, Valašské Meziříčí: *Periodic solutions of weakly nonlinear wave equation in one dimension.* (Periodická řešení jednorozměrné slabě nelineární vlnové rovnice.)

V této práci je vyšetřována existence a jednoznačnost klasických 2π-periodických (v t) řešení jednorozměrné slabě nelineární vlnové rovnice $u_{tt}(t, x) - \omega^2 u_{xx}(t, x) = g(t, x) + \varepsilon F(u, \varepsilon)(t, x)$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$ s nehomogenními okrajovými podmínkami Dirichletova nebo Newtonova typu v bodech $x = 0$ a $x = \pi$. Pravé strany se předpokládají 2π-periodické v t, parametr ω může být buď číslo racionální nebo iracionální splňující jistou číselně-teoretickou podmínku (např. číslo algebraické). Nejprve se zkoumá lineární úloha ($\varepsilon = 0$), řešení jsou hledána ve tvaru Fourierovy řady $u(t, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k(x) e^{ikt}$ v prostoru „smíšeného typu“ $\mathscr{C}(\langle 0, \pi \rangle; \mathscr{H}^3_{2\pi}) \cap \mathscr{C}^{(1)}(\langle 0, \pi \rangle; \mathscr{H}^2_{2\pi}) \cap \mathscr{C}^{(2)}(\langle 0, \pi \rangle; \mathscr{H}^1_{2\pi})$. V závěrečném paragrafu jsou užitím vět o implicitních funkcích (pro operátory v Banachových prostorech) odvozeny některé postačitelné podmínky řešitelnosti slabě nelineární úlohy.

JOSEF DOLEŽAL, Brno: *Über eine gewisse Verallgemeinerung der Quasifleknodalgebilde in S_{2n-1}.* (O jistém zobecnění kvasifleknodálních útvarů v S_{2n-1}.)

V práci se zobecňují pojmy kvasifleknodálních bodů a kvasifleknodálních přímek zavedené Ivlevem na monosystémy lineárních podprostorů dimense $n - 1$ v projektivním prostoru S_{2n-1}. Je definován pojem kvasifleknodálních ploch a jsou studovány některé geometrické vlastnosti těchto ploch.

VĚRA RADOCHOVÁ, Brno: *Die Lösung der partiellen Differentialgleichung $u_{xxtt} = A(t, x) u_{xx} + B(t, x) u_{tt}$ mit gewissen Nebenbedingungen.* (Řešení parciální diferenciální rovnice $u_{xxtt} = A(t, x) u_{xx} + B(t, x) u_{tt}$ pro jisté počáteční a okrajové podmínky.)

Pomocí Picardovy metody postupných aproximací je dokázána existence a jednoznačnost řešení diferenciální rovnice $u_{xxtt} = f(t, x, u_{xx}, u_{tt})$ pro jisté počáteční a okrajové podmínky a pro určitou třídu funkcí f. Pro případ, kdy f je lineární funkce s konstantními koeficienty je posloupnost aproximací spočítána a řešení vyjádřeno ve tvaru nekonečné řady.

ROY O. DAVIES, Leicester: *A Baire function not countably decomposable into continuous functions.* (Bairovská funkce nerozložitelná na spočetně mnoho spojitých funkcí.)

V článku se řeší problém, který byl položen K. Kartákem a částečně již řešen I. Vrkočem, zda je možno pro každou Bairovskou funkci definovanou na intervalu I, tento interval rozloži: na spočetně mnoho částí tak, že daná Bairovská funkce je na těchto částech intervalu I spojitá.

JAROSLAV MORÁVEK, Praha: *On the degrees of graphs with $\alpha(\mathfrak{G}) \leqq 2$.* (O stupních grafu s $\alpha(\mathfrak{G}) \leqq 2$.)

Nejprve jsou dokázány tři věty o stupních konečných neorientovaných grafů s číslem stability nejvýše 2. Aplikací prvních dvou z těchto vět získáváme řešení extremálního kombinatorického problému předloženého autorem v dřívější práci. Dokázané výsledky zobecňují popříp. modifikují v různých směrech speciální případ Turánovy věty.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

RŮZNÉ

FLOQUETOVA TEORIE PRO ZOBECNĚNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

ŠTEFAN SCHWABIK, Praha

(Došlo dne 17. července 1972)

Nechť $\mathbf{A}(t)$ je čtvercová matice typu $n \times n$, jejíž prvky jsou zleva spojité funkce proměnné t definované pro $t \in (-\infty, +\infty)$. Nechť platí

$$(1) \qquad \mathbf{A}(t + \omega) - \mathbf{A}(t) = \mathbf{C},$$

kde $\omega > 0$ a $\mathbf{C}$ je konstantní matice typu $n \times n$. Buďte dále prvky matice $\mathbf{A}(t)$ takové, že jejich variace v intervalu $[a, a + \omega]$ je konečná, a je libovolné reálné číslo. (Odtud a z (1) ihned plyne, že variace každého prvku matice $\mathbf{A}(t)$ v libovolném intervalu délky ω je konečná.)

Vyšetřujme homogenní systém zobecněných lineárních diferenciálních rovnic

$$(\mathrm{H}) \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\tau} = D[\mathbf{A}(t)\, \mathbf{x}]$$

(viz [1]). Vektorová funkce $\mathbf{x}(\tau)$ je řešením systému (H) v intervalu (a, b), když pro každé $\tau_1, \tau_2 \in (a, b)$, $\tau_1 < \tau_2$ platí rovnost

$$\mathbf{x}(\tau_2) = \mathbf{x}(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{d}[\mathbf{A}(t)]\, \mathbf{x}(t),$$

kde integrál v této rovnosti je Perron-Stieltjesův (nebo ekvivalentně Kurzweilův). Takto definované systémy (H) jsou předmětem vyšetřování v [1]; v [1] jsou uvedeny věty o existenci a jednoznačnosti řešení (H) pro rostoucí hodnoty nezávisle proměnné, zaveden pojem fundamentální matice a jsou vyšetřeny její základní vlastnosti.

Buď dáno $a \in (-\infty, \infty)$ libovolně. Matici $\boldsymbol{\Phi}(\xi)$ typu $n \times n$ definovanou pro $\xi \geqq a$ nazveme fundamentální maticí systému (H) jestliže je $\det \boldsymbol{\Phi}(a) \neq 0$ a jsou-li sloupce matice $\boldsymbol{\Phi}(\xi)$ řešení systému (H). Fundamentální matice $\boldsymbol{\Phi}(\xi)$ splňuje rovnost

$$(2) \qquad \boldsymbol{\Phi}(\xi) = \boldsymbol{\Phi}(a) + \int_a^{\xi} \mathrm{d}[\mathbf{A}(t)]\, \boldsymbol{\Phi}(t) \quad \text{pro} \quad \xi \geqq a.$$

Nechť $\Phi(\xi)$ je fundamentální matice systému (H), $\xi \geqq a$. Položme $\Psi(\xi) = \Phi(\xi + \omega)$. S využitím (1) lze snadno ukázat, že matice $\Psi(\xi)$ splňuje rovnost (2) pro všechna $\xi \geqq a$. Není však zaručeno, že také $\det \Psi(a) = \det \Phi(a + \omega) \neq 0$. Tím také není zaručeno, že by matice $\Psi(\xi)$ byla fundamentální maticí systému (H). Výpočtem z (2) lze za předpokladu (1) jednoduše ukázat, že je

$$(3) \qquad \Phi(\xi + \omega) = \Phi(\xi)\, \Phi^{-1}(a)\, \Phi(a + \omega)\,, \quad \xi \geqq a\,.$$

Podle věty 4,2 z [1] je $\Phi(\xi)$ nesingulární matice (tj. $\det \Phi(\xi) \neq 0$) pro každé $\xi \in [a, a + \omega]$ právě když je

$$(4) \qquad \det(\mathbf{E} + \Delta^+ \mathbf{A}(t)) \neq 0\,, \quad \forall t \in [a, a + \omega]\,,$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice typu $n \times n$ a $\Delta^+ \mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t+) - \mathbf{A}(t) = \lim_{\tau \to t+} \mathbf{A}(\tau) - \mathbf{A}(t)$.

Předpoklad (4) zaručí také existenci a jednoznačnost řešení systému (H) pro klesající hodnoty nezávisle proměnné (viz odst. 4 v [1]), a tedy vzhledem k (1) neomezenou pokračovatelnost řešení systému (H) na celý interval $(-\infty, +\infty)$. Tímto je umožněno definovat pro všechna $\xi \in (-\infty, +\infty)$ fundamentální matici $\Phi(\xi)$ systému (H). Tato bude splňovat rovnost (2) pro každé $\xi \in (-\infty, \infty)$ (viz opět odst. 4 v [1]), a tedy také vztah (3) pro každé $\xi \in (-\infty, +\infty)$.

Předpokládejme tedy, že platí (4). Potom je podle výše uvedeného matice $\Phi(a + \omega)$ regulární, a tedy je regulární také matice $\Phi^{-1}(a)\, \Phi(a + \omega)$. Dle (3) je tedy mimo jiné $\Psi(\xi) = \Phi(\xi + \omega)$ fundamentální maticí systému (H). Dále odtud a ze známých úvah prováděných v případě klasických soustav lineárních diferenciálních rovnic se spojitou maticí systému (viz [2]) plyne existence matice $\mathbf{R}$ (tato však není určena jednoznačně) tak, že $\Phi^{-1}(a)\, \Phi(a + \omega) = e^{\omega \mathbf{R}}$; podle (3) tedy je $\Phi(\xi + \omega) = \Phi(\xi)\, e^{\omega \mathbf{R}}$ pro všechna $\xi \in (-\infty, \infty)$. Stejným postupem jako v [2] se nyní už dá ukázat, že platí

$$(5) \qquad \Phi(\xi) = \mathbf{P}(\xi)\, e^{\xi \mathbf{R}}\,,$$

přičemž $\mathbf{P}(\xi)$ je regulární matice pro každé $\xi \in (-\infty, \infty)$, a platí $\mathbf{P}(\xi + \omega) = \mathbf{P}(\xi)$ pro každé $\xi \in (-\infty, \infty)$. Platí tedy

Věta. *Buď $\omega > 0$, $a \in (-\infty, +\infty)$. Nechť $\mathbf{A}(t)$ je matice typu $n \times n$ definovaná pro $t \in (-\infty, +\infty)$ se zleva spojitými prvky s konečnou variací v $[a, a + \omega]$ taková, že platí* (1) *a* (4). *Potom ke každé fundamentální matici $\Phi(\xi)$ systému* (H) *existuje matice $\mathbf{P}(\xi)$ definovaná pro $\xi \in (-\infty, \infty)$, regulární pro každé $\xi \in (-\infty, \infty)$, periodická s periodou ω a konstantní matice $\mathbf{R}$ typu $n \times n$ tak, že platí* (5).

Poznámka. Tato věta je přímé zobecnění základní věty Floquetovy teorie známé v případě klasických soustav lineárních diferenciálních rovnic se spojitou maticí soustavy (viz [2]).

Literatura

[1] *Schwabik, Š.:* Verallgemeinerte lineare Differentialgleichungssysteme, Čas. pěst. mat., 96 (1971), 183—211.
[2] *Coddington, E. A., Levinson, N.:* Theory of Ordinary Differential Equations, Mc-Graw-Hill, New York, Toronto, London, 1955.

Adresa autora: 115 67 Praha 1, Žitná 25, (Matematický ústav ČSAV v Praze).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

POZNÁMKA O SEMIREGULÁRNÍCH MNOŽINÁCH

V tomto časopise, roč. *97* (1972), str. 334, byla J. KRÁLEM předložena následující

Úloha č. 1. Nechť U je resolutivní množina s hranicí $U^* \neq \emptyset$ v harmonickém prostoru X (viz [1]) a označme pro každý kompakt $K \subset X$ symbolem $C(K)$ prostor všech spojitých (konečných) reálných funkcí na K. Každé funkci $f \in C(U^*)$ je tedy přiřazena harmonická funkce H_f^U na U, která je zobecněným řešením (v Perronově smyslu) Dirichletovy úlohy příslušné k množině U a okrajové podmínce f. Nechť U_r značí množinu všech $x \in U^*$, pro něž $\lim_{\substack{y \to x \\ y \in U}} H_f^U(y) = f(x)$ pro každou funkci $f \in C(U^*)$. Množina U se nazývá semiregulární, jestliže pro každou funkci $f \in C(U^*)$ lze příslušnou funkci H_f^U rozšířit na $F \in C(U \cup U^*)$. Je-li U semiregulární, pak U_r je kompaktní. Obrácení tohoto tvrzení neplatí v Bauerových harmonických prostorech. Rozhodněte, zda obrácené tvrzení platí v Brelotových prostorech (nebo alespoň v harmonickém prostoru indukovaném klasickými harmonickými funkcemi na n-rozměrném euklidovském prostoru $X = R^n$), tj. rozhodněte o správnosti následujícího

Tvrzení. *Nechť X je Brelotův prostor a buď $U \subset X$ relativně kompaktní otevřená (a tedy resolutivní) množina, $U^* \neq \emptyset$. Pak U je semiregulární, právě když U_r je kompaktní.*

V této poznámce dokážeme jedno tvrzení o semiregulárních množinách a jeho aplikaci na parciální diferenciální rovnice.

Označení. Je-li M množina v topologickém prostoru, označíme $\overline{M}$ její uzávěr a int M její vnitřek.

Lemma. *Nechť U je relativně kompaktní otevřená resolutivní množina v harmonickém prostoru X, $U^* \neq \emptyset$. Předpokládejme, že množina $U^* - \overline{U}_r$ je polární. Potom platí $U^* - \overline{U}_r \subset \operatorname{int} \overline{U}$.*

Důkaz. Nechť $x \in U^* - \overline{U}_r$ a Y je otevřené souvislé okolí bodu x takové, že $Y \cap \overline{U}_r = \emptyset$. Označme $P = Y \cap (U^* - \overline{U}_r)$, $Y_1 = U \cap Y$, $Y_2 = Y - \overline{U}$. Zřejmě platí $Y - P = Y_1 \cup Y_2$, $Y_1 \cap \overline{Y}_2 = \overline{Y}_1 \cap Y_2 = \emptyset$ a $Y_1 \neq \emptyset$. Uvažujme nyní Y jako harmonický prostor. Podle předpokladu je $U^* - \overline{U}_r$ polární množina v X a tedy P

je polární podmnožina souvislého harmonického prostoru Y. Z toho plyne, že množina $Y - P$ je souvislá ([2], Proposition 6.2.5), takže $Y_2 = \emptyset$. Vidíme, že $Y \subset \bar{U}$ a tedy $x \in \operatorname{int} \bar{U}$.

Věta. *Nechť U je relativně kompaktní otevřená resolutivní množina v $\mathfrak{S}$-harmonickém prostoru X, $U^* \neq \emptyset$ a nechť množina $U^* - U_r$ je polární.*

Jestliže U_r je kompaktní, potom je U semiregulární.

Důkaz. Nechť $f \in C(U^*)$. Protože X je $\mathfrak{S}$-prostor, je funkce H_f^U omezená harmonická funkce v U ([2]. Proposition 2.4.1.b). Zvolme $x \in U^* - U_r$ a buď Y otevřené okolí bodu x takové, že $Y \subset \operatorname{int} \bar{U} - U_r$ (podle lemmatu takové okolí existuje). Uvažujme nyní harmonický prostor Y a označme $F = U^* - U_r$. Potom je $F \cap Y$ uzavřená polární podmnožina harmonického prostoru Y a tedy omezenou harmonickou funkci H_f^U v $Y - F$ lze spojitě (dokonce harmonicky) rozšířit na celé Y ([2], Corollary 6.2.5). Speciálně tedy pro každé $x \in U^* - U_r$ existuje vlastní $\lim\limits_{\substack{y \to x \\ y \in U}} H_U^f(y)$. Odtud již snadno plyne, že U je semiregulární.

Důsledek. *Nechť X je $\mathfrak{P}$-harmonický prostor se spočetnou bazí a nechť v X platí axiom polarity. Buď $U \subset X$ relativně kompaktní otevřená resolutivní množina s neprázdnou hranicí.*

Pak U je semiregulární, právě když U_r je kompaktní.

Důkaz. Tvrzení okamžitě plyne z dokázané věty a z [2], Corollary 9.1.3.

Poznámky. 1. Výsledek zformulovaný v důsledku lze pro harmonické prostory splňující dodatečné předpoklady odvodit z vět o Choquetových simplexech ([3], Theorem 3.9). (V citované práci se předpokládá, že X je souvislý harmonický prostor ve smyslu Baureovy axiomatiky, v němž konstanty jsou harmonické, body polární, nezáporné harmonické funkce oddělují body a platí axiom D.)

2. V Brelotově prostoru obecně nemusí být množina $U^* - U_r$ polární; existují tedy Brelotovy prostory, v nichž neplatí axiom polarity ([2], Exercise, 6.3.10). Na druhé straně existují harmonické prostory splňující předpoklady tvrzení uvedeného v důsledku, které nejsou Brelotovy ([2], Exercises 3.1.7, 9.1.3). Každý $\mathfrak{P}$-harmonický prostor se spočetnou bazí splňující dominační axiom splňuje však axiom polarity ([2], Corollary 9.2.3). Poznamenejme, že důležité příklady Brelotových prostorů, indukovaných řešeními parciálních diferenciálních rovnic eliptického typu, jsou $\mathfrak{P}$-prostory, v nichž platí dominační axiom.

Jako aplikaci tvrzení uvedeného v důsledku odvodíme jedno tvrzení týkající se řešení parciálních diferenciálních rovnic.

Nechť X je otevřená podmnožina euklidovského prostoru R^n $(n \geqq 2)$ a nechť a_{ij}, b_i, c $(i, j = 1, \ldots, n)$ jsou spojité reálné funkce na X takové, že $a_{ij} = a_{ji}$, matice

(a_{ij}) je positivně definitní v každém bodě z X, funkce a_{ij}, b_i, c jsou lokálně lipschitzovské a $c \leqq 0$. Pro každou otevřenou množinu $U \subset X$ buď $\mathscr{H}(U)$ množina všech reálných funkcí h na U třídy C^2 takových, že na U platí

$$(*) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial h}{\partial x_i} + ch = 0 .$$

Potom je $(X, \mathscr{H})$ Brelotův harmonický prostor splňující dominační axiom. Jestliže je $Y \subset \bar{Y} \subset X$ otevřená množina, je $(Y, \mathscr{H})$ $\mathfrak{P}$-prostor. Je-li $U \subset \bar{U} \subset X$ otevřená množina, pak pro $x \in U^*$ platí $x \in U_r$, právě když x je regulárním bodem množiny U pro Laplaceovu rovnici ([2], exercises 3.2.7, 9.2.9, [4], chap. VII). Odtud a z důsledku plyne snadno následující

Tvrzení. *Nechť U je libovolná neprázdná otevřená omezená množina, pro niž $\bar{U} \subset X$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *Pro každou $f \in C(U^*)$ je zobecněné řešení Dirichletovy úlohy rovnice $(*)$ (příslušné f a U) stejnoměrně spojité v U.*

(ii) *Množina regulárních bodů množiny U vzhledem k* Laplaceově rovnici *je uzavřená.*

Speciálně v případě klasických harmonických funkcí je neprázdná omezená otevřená množina $U \subset R^n$ semiregulární tehdy a jen tehdy, když U_r je kompaktní.

Poznámka při korektuře. Existuje Brelotův prostor X a relativně kompaktní množina $U \subset X$ tak, že U_r je neprázdná kompaktní množina a přitom U není semiregulární. (Konstrukce takového prostoru bude uvedena v příštím čísle tohoto časopisu.) Tvrzení uvedené ve formulaci úlohy tedy obecně v Brelotových prostorech neplatí.

Literatura

[1] *C. Constantinescu:* Harmonic spaces and their connections with the semi-elliptic differential equations and with the Markov processes, Elliptische Differentialgleichungen (Symposium), Akademie-Verlag, Berlin 1969.

[2] *C. Constantinescu - A. Cornea:* Potential theory on harmonic spaces, Springer Verlag, Berlin 1972.

[3] *E. G. Effros - J. L. Kazdan:* Applications of Choquet simplexes to elliptic and parabolic boundary value problems, J. Diff. Equations *8* (1970), 95—134.

[4] *R. M. Hervé:* Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier *12* (1962), 415—571.

Ivan Netuka, Praha

RECENSE

Ernst Peschl, ANALYTICKÁ GEOMETRIE A LINEÁRNÍ ALGEBRA. Praha, 1971, SNTL — Státní nakladatelství technické liferatury; 244 str., 6 obr. Cena brož. výt. Kčs 19,00, cena váz. výt. Kčs 29,00. Z německého originálu Analytische Geometrie und lineare Algebra, nakl. Bibliographisches Institut v Mannheimu, přeložil prof. Dr. Fr. Šik, DrSc.

Hned na začátku bych rád uvedl, že je to jedna z mála velmi dobrých úvodních příruček či lépe učebnic základů analytické geometrie, i když v podstatě vlastní analytické geometrii lineárních a kvadratických variet je věnována přibližně jen asi třetina knihy, a to poslední dvě kapitoly z celkem třinácti kapitol. Prvých jedenáct kapitol prakticky představuje neobyčejně pečlivý výběr nejdůležitějších pojmů a vět z některých elementárních partií lineární algebry, které ve svém souhrnu umožňují přesné a přehledné vybudování základů analytické geometrie. O ostré hranici mezi lineární algebrou a analytickou geometrií nelze dost dobře hovořit, a tak pochopitelně v algebraické části vystupují již také mnohé významné geometrické pojmy a věty.

Po stručném úvodu a krátkém názorném zavedení vektorového prostoru přistupuje autor v duchu moderního pojetí výstavby analytické geometrie ihned k ústřednímu pojmu, a to k definici abstraktního n-rozměrného vektorového prostoru a ke studiu jeho vektorových podprostorů. Pak následují celkem stručné ale velmi hutné a korektně podané úvody do maticového počtu a do teorie determinentů, samozřejmě vhodným výběrem látky zaměřené na uplatnění v analytické geometrii. Nalezených výsledků je ihned užito k rozvinutí elementů teorie objemu. Další fundamentální pojmy, a to skalární součin vektorů (tedy přechod k metrickému vektorovému prostoru) a vektorový součin, spolu s úsporným rozvinutím příslušného aparátu umožňují autoru zabývat se úhly mezi vektorovými podprostory, prohloubit teorii objemu a dokonce, byť zcela stručně, aplikovat výsledky na trigonometrii jak rovinnou tak i sférickou. Studium vektorových prostorů je zakončeno vyšetřováním speciálních automorfizmů (otáčení); speciálně jsou projednávány případy $n = 2$ (v souvislosti s komplexními čísly) a $n = 3,4$ (v souvislosti s kvaterniony). Závěrečná část věnovaná již jen vlastní analytické geometrii se zabývá n-rozměrnými bodovými prostory (projektivním, afinním a euklidovským) a jejich lineárními a kvadratickými varietami. Přitom největší pozornost je soustředěna na geometrii afinního prostoru. Je to důsledek autorova zásadního uplatňování jednoho ze základních principů Kleinova Erlangenského programu: věty, které obsahově patří do geometrie nějaké grupy transformací, mají se dokazovat pouze prostředky této geometrie. Pro kvadratické variety jsou nalezeny projektivní, afinní a euklidovské normální tvary rovnic (v překladu: normální formy).

Matematik-geometr přečte knížku s opravdovým potěšením. Pro začátečníka — podle mého názoru — je poměrně dost náročná. Vyjadřování je totiž velmi úsporné, někdy až skoupé. Překladatel byl si toho vědom a některá příliš stručná místa vhodně doplnil popř. upřesnil podrobnějším výkladem. Za zvlášť šťastné pokládám rozhodnutí překladatele odchýlit se poněkud od originálu a dovést problém určení úhlu dvou vektorových podprostorů n-rozměrného vektorového prostoru až do konce a nalezený výsledek formulovat větou.

Dá se očekávat, že knížky bude hodně používáno, zvláště mezi techniky, a že tak do určité míry bude mít vliv na geometrickou terminologii. Je proto škoda, že ve výkladech o kvadratických varietách v n-rozměrném euklidovském prostoru terminologie je poněkud rozkolísaná. Místo nadkoule zřejmě má být kulová nadplocha; podobně místo kužel a nadkužel má být kuželová plocha a kuželová nadplocha (těchto termínů se ovšem užívá jen u nás). V případě $n > 3$ se jednou mluví o hyperboloidech a paraboloidech, podruhé správně (v přehledu na konci knížky) je uvedeno nadhyperboloidy a nadparaboloidy. U nadelipsoidů místo ν-tá hlavní osa by úplně stačilo užít názvu ν-tá osa (aby přirozeným způsobem bylo zobecněno běžné názvosloví pro $n = 2$; ostatně v textu se dále mluví také prostě jen o ν-té poloose). A ještě jeden termín nepokládám za vhodný: „špička" simplexu (203_4); je při nejmenším velmi neobvyklý, spíše zbytečný (každý vrchol simplexu může být „špičkou", tedy proč nový název?).

Běžné tiskové chyby si přirozeně čtenář opraví sám. Tiskové chyby, které by mohly při studiu vzbudit případně nejistotu, jsou v řádcích 38_4, 59_2, 70_2, 94_1, 123^{11}, 140_{11}, 143^{10}, 213^8 (místo P má být P_0), 232_{10} (místo 3 má být 2).

Alois Urban, Praha

K. Chandrasekharan: ARITMETICAL FUNCTIONS, Springer Verlag 1970 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 167.) Stran 231, 8 obr., cena \$ 16,00.

Další knížka současného presidenta mezinárodní matematické unie, vyšlá ve známé Springerově edici a věnovaná teorii čísel. (Předešlá kniha téhož autora *Introduction to Analytic Number Theory* byla recensována v tomto časopise, roč. *95* (1970), 97—99.) Kniha obsahuje osobitý výběr látky o funkcích, které souvisí s problematikou rozložení prvočísel, Dirichletovým problémem dělitelů a problematikou rozkladu přirozeného čísla na součet čísel přirozených (partition). Kniha vznikla na základě přednášek, které autor konal v létě 1964 v Curychu a volně navazuje na autorovu zmíněnou předešlou knihu.

Pojednáme nyní stručně o obsahu jednotlivých kapitol. Omezíme se však jen na stručný přehled jednotlivých výsledků, neboť mnoho z problematiky této knihy (zejména z kapitol II—VI) je vyloženo obšírným způsobem v recensích některých monografií z pera znalce nad jiné povoleného — zesnulého profesora V. Jarníka (viz tento časopis *67* (1937), D 54 — D 56, *67* (1938), D 303 — D 306, *74* (1949), D 51 — D 54, *85* (1960), 364 — 392 a zejména *76* (1951), 35—65.

První kapitola obsahuje Wiringovu variantu elementárního důkazu slavné „prvočíselné" věty

$$\pi(x) = x/\lg x + o(x/\lg x) \tag{1}$$

Autor sice provádí Wirsingovu modifikaci Selberg-Erdösova postupu, ale nedokazuje nejsilnější výsledek, k němuž vede, nýbrž jen vztah (1) (Podrobněji k problematice elementárního důkazu viz recensentovu poznámku „O elementárním důkazu prvočíselné věty", tento časopis *99* (1974).)

Kapitola druhá obsahuje studium Riemannovy dzeta funkce $\zeta(s)$ v rozsahu obvyklém v běžných monografiích: Riemannova - von Mangoldtova formule, Hardyho věta o nekonečně mnoha nulových n bodech na přímce $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}i$, Hamburgerova věta z r. 1921 o charakterisaci Riemannovy dzeta funkce pomocí funkcionální rovnice. Třetí kapitola je věnována obecnému vztahu mezi „dobrými" odhady Riemannovy dzeta funkce „vpravo" od přímky $\operatorname{Re} s = 1$, oborem, v němž je tato funkce nenulová a konečně zbytkovým členem v „prvočíselné větě". Jsou zde dále reprodukovány Weylovy a Littlewoodovy výsledky, zatím co kapitola čtvrtá zachycuje výsledky I. M. Vinogradova (Poznamenejme, že stěžejní bod — tzv. věta o střední hodnotě je elegantně dokázán postupem A. A. Karacuby a N. M. Korobova z r. 1963). Vinogradovova metoda dává doposud nejlepší výsledek

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\lg t} + O[x \exp(-c(\lg x)^{3/5} (\lg \lg x)^{-1/5}] \tag{2}$$

(Autor však dokazuje jen slabší Čudakovův výsledek.) Připomeňme pro srovnání, že z platnosti známé Riemannovy domněnky plyne (2) se zbytkovým členem tvaru $O(\sqrt{x} \lg x)$.

Kapitola pátá studuje rozdíl $p_{n+1} - p_n$ (p_n je n-té prvočíslo). Jsou ukázány vztahy mezi „řádovou" velikostí tohoto rozdílu a odhady nulových bodů Riemannovy dzeta funkce v oboru $\operatorname{Re} s \geqq \sigma$, $0 < \operatorname{Im} s \leqq T$ (Hoheisel) a těchto odhadů s odhady tvaru $\zeta(\frac{1}{2} + it) = O(t^c)$.

Šestá kapitola shrnuje základní výsledky o Dirichletových L-funkcích a jejich nulových bodech, které úzce souvisí s rozložením prvočísel v aritmetických posloupnostech. Většina věcí je uvedena jen v přehledu, autor se soustřeďuje na důkaz Siegelovy věty o poloze reálného nulového bodu pro L-funkci s reálným nehlavním charakterem χ.

Pojednejme trochu obšírněji o kapitole sedmé, neboť problematika tzv. partitions se objevuje velmi zřídka v monografické literatuře. Pro n přirozené buď $p(n)$ počet vyjádření čísla n součtem přirozených čísel, přičemž rozklady, lišící se jen pořadím sčítanců, považujeme za stejné. Hledejme asymptotické vyjádření funkce $p(n)$. Je-li t komplexní číslo, $|t| < 1$, buď

$$f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)\, t^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - t^k)^{-1}\,.$$

Vyjádření hodnoty $p(n)$ pomocí křivkového integrálu z funkce $t^{-n-1} f(t)$ je snadnou aplikací Cauchyova vzorce. Pro asymptotiku takto získaného vyjádření je nyní účelné uvážit, že funkce $f(t)$ úzce souvisí s Dedekindovou funkcí $\eta(z)$, pro niž známe výhodné transformační vztahy. Integrační kružnici tedy rozložíme na jisté oblouky a na každém z nich použijeme takovou transformaci, která vede k „velmi dobrému" vyjádření integrálu. Takto lze odvodit jednak explicitní vyjádření funkce $p(n)$ (Rademacher), jednak Hardyovou - Ramanujanovu asymptotickou formuli

$$p(n) = c_1 m^{-2} \exp(c_2 m)\,(1 + O(m^{-1}))\,,$$

kde

$$c_1 = 4^{-1} \,.\, 3^{-1/2}\,, \quad c_2 = \pi \,.\, 2^{1/2} \,.\, 3^{-1/2} \quad \text{a} \quad m = n - \tfrac{1}{24}\,.$$

Závěrečná — devátá kapitola je věnována Dirichletově problému dělitelů a jsou v ní dokázány klasické výsledky (Voronoi, Hardy, Ingham).

Recensovaná kniha je psána velmi pečlivě a srozumitelně. Autor starostlivě ke každé kapitole připojil řadu poznámek o literatuře, dalších výsledcích a metodách. V některých místech je zajímavý výběr látky: prakticky žádná kapitola nepodává nejsilnější výsledky, ale většina kapitol popisuje metody, které k těmto výsledkům vedou, i když jejich konkrétní použití není uvedeno v nejsilnější formě. V knize jsem nenašel patrných nedostatků — je to zřejmě také díky pečlivé práci H. Jorise, který se na konečném zpracování podílel. Knihu lze doporučit jako zajímavě pojatý pohled na problematiku některých partií analytické teorie čísel, která může být dobrým úvodem ke studiu úplnějších monografií neb původních prací.

Břetislav Novák, Praha

N. Bourbaki: ELÉMENTS DE MATHÉMATIQUE. INTÉGRATION, Chapitre IX. Hermann, Paris 1969. Stran 134, cena 36 F.

Druhé vydání Bourbakiho knihy o integraci se rozrostlo o novou, devátou kapitolu; kapitoly 1—4 a 5 byly již v tomto časopise recenzovány, kapitoly 6—8 zatím nově nevyšly.

Předchozí části se zabývaly integrací na lokálně kompaktních prostorech; v tomto dílu se používá dřívějších výsledků k vytvoření obecnější teorie integrace na Hausdorffových prostorech. Je tedy tato kapitola traktátu jednou z výjimek, kdy se nejde „od obecného k zvláštnímu".

Buď T Hausdorffův prostor, a buď $\mathfrak{K}$ množina všech kompaktních částí T, uspořádaná inkluzí. Pro každé $K \in \mathfrak{K}$ buď $\mathscr{M}(K)$ prostor komplexních měr na K. Nechť $K, L \in \mathfrak{K}$, $K \subset L$; buď ι_{KL}: $\mathscr{M}(L) \to \mathscr{M}(K)$ zobrazení, přiřazující každé míře μ na L indukovanou míru μ_K na K. Premírou na T se nazývá každý element w projektivní limity $(\mathcal{M}(K), \iota_{KL})$; je-li w lokálně ohraničená, nazývá se mírou na T.

Po technických odstavcích, kdy se mimo jiné ukazuje, které z výsledků předchozích kapitol lze zobecnit pro tuto situaci, se studují vnitřně regulární množinové funkce, projektivní limity měr (Prochorovova věta) a ohraničené míry na úplně regulárních prostorech. Centrální částí knihy je paragraf o promírách na lokálně konvexních prostorech (promíra je projektivní systém měr na projektivním systému faktorprostorů konečné dimenze). Je ukázána konstrukce Wienerovy míry; dále je dokázána Minlosova věta.

Kniha končí dodatkem o Hilbertových - Schmidtových zobrazeních, cvičeními (např. cvičení k §3 obsahující výklad „staré" teorie integrálu v termínech sigmaaditivních funkcí) a velmi zajímavou historickou poznámkou.

Karel Karták, Praha

C. A. Hayes, C. Y. Pauc: DERIVATION AND MARTINGALES. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 49. Nakladatelství Springer, Berlin—Heidelberg—New York 1970. Stran 205, cena DM 48.

Kniha je rozdělena na dvě hlavní části (Pointwise Derivation, Martingales and Cell Functions) a doplňky.

V první části se studují různé důkazy věty o derivabilitě σ-aditivní množinové funkce; v základním prostoru je dána derivační báze $\mathfrak{B}$, splňující abstraktní Vitaliho pokrývací větu. Stanovisko je nejprve velmi obecné; namísto obvyklého metrického prostoru se zde zavádějí pretopologické pojmy, odvozené z $\mathfrak{B}$. Pro tuto situaci jsou také upraveny důkazy základní věty, pocházející od Banacha a Carathéodoryho. Na konci této části se uvažují silné derivace v R^n; je dokázána Jessenova - Marcinkiewiczova - Zygmundova věta spolu se Saksovým výsledkem o její optimálnosti. Je zde také vyložena A. P. Morseova teorie blanketů, která např. umožňuje derivovat R^n i podle obecnějších než intervalových bazí.

Ve druhé části, která je podstatně stručnější co do důkazů, se po přehledu teorie míry na Booleových σ-algebrách přechází ke studiu velmi obecně definovaných martingalů a funkcí buňky. Hlavní výsledky, pocházející převážně od K. Krickeberga, se týkají konvergence submartingalů a martingalů ve smyslu L_p, podle míry apod. Podrobnější výklad této části knihy se najde v práci Krickeberg - Pauc: Martingales et dérivation, Bull. Soc. M. France *91*, 455—544.

V doplňcích je podán referát o derivacích vektorových funkcí, topologii odvozené z míry, derivaci v lokálně kompaktních grupách aj. V této části i v hlavním textu je formulována řada problémů.

Karel Karták, Praha

PROCEEDINGS OF THE CONFERENCE ON CONSTRUCTIVE THEORY OF FUNCTIONS. Akadémiai Kiadó, Budapest 1972. Stran 538, cena neudána.

Kniha je souborem referátů z konference o konstruktivní teorii funkcí, konané 24. 8. až 3. 9. 1969 v Budapešti. Vedle dvou přehledných referátů (G. Szegö o pracích L. Fejéra, I. I. Ibragimov o S. N. Bernštejnovi) je zde 50 prací z různých oborů matematické analýzy, které je (a někdy i není) možno zařadit do značně neurčitého směru, nazývaného konstruktivní teorií funkcí. Jak říkají editoři knihy G. Alexits a S. B. Stečkin, důraz byl kladen na teoretické aspekty oboru; čtenář zde najde nové výsledky v teorii polynomiální i racionální aproximace, interpolaci, aproximaci v Banachových prostorech, ortogonálních řadách aj. Na konci knihy je seznam některých problémů položených účastníky konference.

Svazek je hezky vypraven; zdá se také, že vyšel rychleji, než je při podobných příležitostech obvyklé u nás.

Karel Karták, Praha

Henning Tolle: OPTIMIERUNGSVERFAHREN FÜR VARIATIONSAUFGABEN MIT GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ALS NEBENBEDINGUNGEN. Springer Verlag Berlin—Heidelberg—New York 1971, XII + 285 str.

Recenzovaná kniha vyšla ve springrovské sérii „Ingenieurwissenschaftliche Bibliothek", kterou vydává István Szabó. Je věnována následující úloze: Buďte $x_j(t)$ souřadnice polohy systému, které jsou určeny jako řešení jistého systému obyčejných diferenciálních rovnic a $u_l(t)$ regulační funkce (regulace), kterými lze ovlivňovat (řídit) tento systém. Je třeba určit regulace $u_l(t)$, které jsou optimální v tom smyslu, že pro ně nabývá funkcionál

$$(1) \qquad \int_{t_A}^{t_E} L(t, x_j(t), u_l(t))\, dt$$

extremální hodnotu, přičemž jsou dány vedlejší podmínky

$$(2) \qquad \dot{x}_j = g_j(t, x_i, u_l)$$

a okrajové podmínky

$$(3) \qquad x_j(t_A) = A_j\,, \quad x_j(t_E) = E_j\,,$$

$i, j = 1, \ldots, m,\ l = 1, \ldots, k.$

(2) je systém obyčejných diferenciálních rovnic, které určují polohu systému v daném čase t. Symboly t_A a t_E z (1) a (3) znamenají počáteční resp. koncový čas sledování systému.

Z této formulace úlohy je zřejmé, že jde o variační úlohu hledání extrému funkcionálu (1) přičemž mají být splněny „vazby" (2) a (3).

Knížka je rozdělena do tří částí: I. Základy, II. Nepřímé metody, III. Přímé metody.

V první části jsou vyloženy základní pojmy a metody klasického variačního počtu v tom pojetí jak je známo u C. Carathéodoryho. Výklad je poněkud zjednodušen a je velmi přístupný. Zvlášť je poukázáno na to, jak se formalizmus klasického variačního počtu přenáší na úlohy s diferenciálními rovnicemi v roli vazeb. Jde o aparát, který je ve většině prací o optimalizaci pokládán za samozřejmost a předpoklad k jejich porozumění.

Druhá část obsahuje výklad novějších metod, které jsou formulovány ve tvaru nutných podmínek pro optimalitu regulace $u_l(t)$. Dnes snad už lze říci, že i tyto metody jsou klasické, přestože se jejich vznik datuje z let 1956—1960, kdy L. S. Pontrjagin formuloval se svými spolupracovníky známý princip maxima. Princip maxima umožňuje ve třídě všech regulací vymezit ty regulace, které mohou být optimální. Je jasné, že tímto lze zúžit třídu vyšetřovaných regulací. V ideálním případě zúží princip maxima třídu všech regulací tak, že zůstane pouze jedna jediná a ta je pak už optimální. V praktických případech však tato situace nastane jen zřídka a k určení optimální regulace je třeba použít dalšího matematického aparátu. V této knížce jsou tyto metody instruktivně popsány a jsou uvedeny rovnice, ze kterých je možno vyznačené regulace, aspirující na optimálnost, vypočítat.

Poslední část je věnována přímým metodám; je v ní popsána metoda gradientů a Bellmanův princip dynamického programování.

Výklad ve všech částech knihy je názorný, obsahuje mnoho příkladů od nejjednodušších až po poměrně složité příklady optimálního navádění raket na cílové dráhy, aj. Velkou pozornost věnuje autor otázkám numerických metod, které souvisí s popisovanými metodami řešení uvedené úlohy.

Přes poměrně malý rozsah knihy je v ní shromážděn materiál velmi obsáhlý a je vyložen přístupným způsobem. Je to dáno tím, že se autor nezabýval podrobnými matematickými důkazy, spíše chtěl motivovat metody, aby tím více vynikla jejich podstata a bylo usnadněno jejich pochopení. Základní hledisko, které autor při psaní této knihy zvolil, je takový výklad moderních metod optimalizace pro úlohy uvedeného typu, který umožňuje přímé aplikace. Poukazuje přitom na mnohá úskalí, která se musí při řešení konkrétních problémů překonávat.

Štefan Schwabik, Praha

P. Faurre: NAVIGATION INERTIELLE OPTIMALE ET FILTRACE STATISTIQUE. Dunod, Paris, 1971. Stran XV + 446.

Recensovaná kniha pojednává o jedné třídě autonomních systémů navigace (tj. nezávislých na zdrojích informace mimo řízené těleso), a to tzv. inerciální navigaci umožňující z údajů akcelerometrů a gyroskopů stanovit úhly azimutu, klonění a klopení, jakož i rychlosti a přemístění pohybujícího se tělesa. Chyby v určení počátečních hodnot způsobují narůstání chyb ve stanovených polohových parametrech tělesa, a proto se inerciální soustavy navigace kombinují s jinými systémy. Tak vznikají hybridní navigační soustavy. Metody inerciální a hybridní navigace se uplatňují především v letectví, kosmonautice a námořním provozu, avšak princip optimalizačních procedur je použitelný i v jiných aplikačních oborech, kde se řeší otázky automatického řízení procesů.

První dvě kapitoly knihy jsou úvodní, v první je stručně ukázán princip inerciální navigace, ve druhé je popsán případ soustavy s jednou osou, navigované podél zemského poledníku, přičemž na rozboru chyb je ukázána účelnost uvažovat hybridní soustavu, pro niž lze najít optimální skladbu složky inerciální a složky externí informace.

Druhá část (kap. 3 a 4) pojednává o základech teorie soustav a statistické filtraci. V kap. 3 o teorii soustav jsou uvedeny v maticovém zápisu základní pojmy a definice lineárních dynamických soustav a diskutovány otázky jejich stability, pozorovatelnosti a ovladatelnosti. V kap. 4 pojednávající o statistické filtraci jsou nejprve uvedeny charakteristiky náhodných procesů, jejich spektrální zobrazení a Wienerova filtrace. Podrobně jsou popsány markovské vlastnosti náhodných procesů a rekurentní filtry Kalmana - Bucyho, a to jak pro pozorování diskrétní tak spojité, přičemž jsou uvažovány též případy singulární kovarianční matice měřicího šumu. V dodatcích k této kapitole se popisují metody faktorizace racionální spektrální matice, a probírají otázky stability a citlivosti Kalmanovy - Bucyho filtrace, jehož i problematika její numerické simulace.

Třetí část zahrnující kapitoly 5 až 8 obsahuje popis hlavních prvků navigačních soustav, tj. gyroskopů, akcelerometrů, platforem (stabilizovaných základen) a palubních počítačů. Tato část napsaná spolupracovníky hlavního autora, je zaměřena zcela aplikačně. Obsahuje popisy konstrukčních uspořádání, technologické otázky, rozbory chyb, jakož i ukázky komečních přístrojů s jejich parametry a fotografiemi. Kapitola o počítačích obsahuje všeobecné informace o jejich struktuře i současné technologii uplatňované v palubních přístrojích. Větší část této kapitoly pojednává o speciálních diferenciálních analyzátorech potřebných pro zpracování dat pro účely navigace.

Poslední část knihy pojednávající o navigačních systémech je určitou syntézou předchozích kapitol. Čtyři kapitoly této části jsou charakteru matematického a poslední dvě technologického.

V kapitole 9 se popisují bloková schémata pro zpracování informace získané z inerční soustavy, přičemž se uvažují různá uspořádání těchto soustav. V dodatcích k této kapitole jsou uvedeny pomocné výrazy pro pohyb orientovaného bodu po ploše a výrazy pro lokální křivosti zemského geoidu aproximovaného rotačním elipsoidem. Kapitola 10 je věnována podrobné analýze chyb inerciální navigační soustavy. Jsou formulovány rovnice chyb a jejich integrace jakož i jejich statistická analýza. Jsou uvedeny konkrétní příklady řešené numerickou simulací. V kapitole 11 se probírá problematika počátečního nastavení parametrů navigačního systému, jež je jednou z rozhodujících otázek vyhovující funkce soustav. Tato problematika se objasňuje jednak z hlediska tzv. klasického, jednak z hlediska řešení optimálního a suboptimálního. Kapitola 12 se zabývá problematikou syntézy hybridních soustav, přičemž uvádí nejprve typy doplňkových informací získaných z externích zdrojů a dále řešení této problematiky ve formulaci jednak klasické, jednak optimální. Ukázky možných variant jsou demonstrovány na konkrétních příkladech.

Kapitoly 13 a 14 popisují, podobným způsobem jako v kap. 5 až 8, konkrétní realizace navigačních soustav. V kap. 13 jsou podrobně popsány jednotlivé prvky sousatvy NSI francouzské firmy SAGEM, v kap. 14 prvky americké soustavy LTN 51.

V šesti přílohách jsou shrnuty některé užitečné výrazy, operace a jiná fakta vektorového a maticového počtu, o transformaci souřadnic, o parametrickém zobrazení rotace, o Laplaceově a z-transformaci a konečně o numerických metodách řešení obyčejných diferenciálních rovnic.

Vedoucí autor knihy studoval na Stanfordově universitě u profesora Kalmana a po návratu do Francie byl jmenován do významných funkcí ve výzkumu automatizace a teorii informace. Seznam referencí na konci knihy tato fakta plně odráží: převážně zahrnuje současné anglicky psané práce, zbývající citovaná literatura je francouzská.

Jak vyplývá ze stručné charakteristiky jednotlivých kapitol, obsahuje recensovaná kniha jednak kapitoly matematického charakteru, jednak kapitoly vysloveně konstrukčně-technologického zaměření. V ediční charakteristice knihy na záložce je tato syntéza uváděna jako metodická novinka dosud jinde nepoužitá, nicméně na první pohled vzniká dojem značné nesourodnosti a nevyváženosti podávané látky. Autoři si jsou tohoto faktu vědomi a v předmluvě uvádějí, že práce je určena třem skupinám čtenářů:

Především matematikům-aplikantům, kterým podává úvod do metodiky zpracování informací v reálném čase, přičemž optimální navigační soustavy lze považovat za aplikační příklad. Z hlediska navigačních systémů pak kniha může být využita jednak vývojovými pracovníky, konstruktéry a technology, kteří na vývoji a výrobě těchto systémů pracují, jednak provozními pracovníky, kteří těchto systémů používají.

Recenzent se počítá do první skupiny čtenářů a podle jeho názoru jsou matematické části knihy podány velmi přehlednou a názornou formou, přístupnou i technikovi s přiměřenou matematickou erudicí.

Kniha je po formální stránce vzorně vybavena, přesto však byla namátkou zjištěna tisková chyba v popisu obr. 2—6.

Oldřich Kropáč, Praha

C. Berge: GRAPHES ET HYPERGRAPHES, Dunod, Paris, 1970.

Nová kniha autora velmi dobře známé knihy „Théorie des graphes et ses applications", je současně moderní monografií i vynikající učebnicí. Předkládá čtenáři pozoruhodné množství faktů především z teorie konečných grafů, přičemž výklad je veden s cílem důkladného osvětlení základních principů. Sestává ze dvou částí, nazvaných „Les graphes" et „Les hypergraphes".

Kniha takovéhoto zaměření zcela logicky musí obsahovat většinu materiálu přejatého z původních prací jiných autorů. Přitom je však nutné upozornit na veliký přínos samotného autora, nejen pokud jde o množství a kvalitu vlastních výsledků, ale i pokud jde o originální způsob zpracování.

Na mnoha místech jsou různé velmi dobře známé (i slavné) věty získány jako důsledky obecnějších vět, zformulovaných a dokázaných samotným autorem. Jako příklad uveďme kapitolu 6 o charakterizaci stupňů a polostupňů, v níž je na základě obecné věty o polostupních sudého multigrafu, dokázané autorem pomocí Fordovy - Fulkersonovy teorie toků v sítích, získána jak Erdösova - Gallaiova nutná a postačující podmínka pro realizaci celočíselného vektoru pomocí stupňů neorientovaného grafu, tak i analogické podmínky pro orientované grafy, např. výsledek pro turnaje objevený nezávisle Landauem a Moonem (Zde spatřujeme též ilustraci autorovy obecné a v předmluvě proklamované tendence, setřít rozdíl mezi orientovanými a neorientovanými grafy v rámci obšírnější teorie.)

Podobně jako v knize „Théorie des graphes et ses applications" věnuje i v této knize autor velkou pozornost dvěma důležitým metodám teorie grafů: metoda toků v sítích a metoda alternujících řetězců.

Druhá část knihy je věnována některým výsledkům o hypergrafech a jejich aplikacím. Tato část představuje zajímavý a podle recensentova mínění dostatečně representativní pohled do této doposud sice málo propracované ale silbně se rozvíjející oblasti. (Patrně jde vůbec o jeden z prvních pokusů knižního zpracování tématu hypergrafů). Současně s výkladem některých novějších výsledků o hypergrafech, na nichž se významnou měrou podílel i sám autor, jsou s použitím terminologie hypergrafů zformulovány i některé klasické výsledky, jako např. Ramseyova věta.

Na konci knihy se při výkladu unimodulárních hypergrafů a matroidů z obecnějšího hlediska osvětlují a interpretují některé pojmy a fakty z lineární algebry a kombinatorické teorie matic, jako např. von Neumannova věta o bistochastických maticích, nebo vlastnost totální unimodulárnosti matic.

Pro úplnější představu o uspořádání materiálu uvádíme názvy jednotlivých kapitol.

Poznamenejme nakonec, že autor provedl některé terminologické změny ve srovnání s „Théorie des graphes et ...": Sudý graf se dříve nazýval „graphe simple", nyní „graphe biparti"; „graphe simple" nyní znamená graf bez smyček a násobných hran. Číslo vnitřní stability se nyní nazývá stručně „nomre de stabilité" (dříve „nomre de stabilité interne") a dává se přednost termínu „nombre d'absorption" před termínem „nombre de stabilité externe". Analogické změny se týkají i stabilních množin.

Jaroslav Morávek, Praha

P. Deussen, HALBGRUPPEN UND AUTOMATEN, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1971, brož., 196 str., cena DM 11,80.

Chápeme-li pojem automatu ve smyslu jeho genese a z hlediska teoretické kybernetiky, rozumíme jím, zhruba řečeno, jistou třídu algoritmů. Vedle toho se dnes automat též běžně chápe jako jistá algebraická struktura, podobně jako grupa nebo svaz aj. a studuje se metodami obecné algebry. Právě toto druhé hledisko je zastoupeno v recenzované učebnici.

Kniha sestává ze tří kapitol, kde první dvě jsou čistě algebraické a teprve až třetí je věnována automatům. Názvy kapitol jsou: Halbgruppen und Relationen. Halbgruppen und Semimoduln. Automaten.

V první kapitole, v paragrafech 1, 2 jsou uvedeny některé základní definice a jednoduché fakty z teorie pologrup. Ve třetím paragrafu je pojednáno o ideálech v pologrupách, a sice v rozsahu potřebném pro pozdější výklad vztahu mezi semimoduly a pologrupami. Paragrafy 4 a 5 jsou věnovány binárním relacím, specielně relacím kongruence v pologrupách.

Druhá kapitola je věnována teorii semimodulů. Po základních definicích a větách (paragrafy 6 a 7) se zkoumají některé vztahy mezi pologrupami a semimoduly (paragrafy 8, 9 a 10). V paragrafu 11 se studují kongruence a automorfismy v semimodulech; pro případ konečného semimodulu se diskutuje efektivní způsob nalezení všech jeho kongruencí a automorfismů. V paragrafu 12 se autor méně formálním způsobem zmiňuje o vztahu mezi semimoduly, grafy a teorií obvodů.

Ve třetí kapitole, 13. pagarafu je definován obecný pojem automatu, jako systému $\mathfrak{A} = \langle F, {}_F S, \lambda, A \rangle$, kde F a A jsou pologrupy, ${}_F S$ levý F-semimodul a λ: $F \times S \rightarrow A$ je zobrazení, splňující podmínku $\lambda(fg, s) = \lambda(f, gs)\, \lambda(g, s)$ $(f, g \in F;\ s \in S)$. (F se nazývá vstupní pologrupa, A výstupní pologrupa, λ výstupní funkce a prvky množiny S stavy automatu.) Paragraf 14 seznamuje čtenáře s některými důležitými definicemi a větami jako je např. věta o redukci pro automaty. Různá zobrazení pologrup do pologrup, definovaná automatem, jsou obsahem paragrafu 15. Paragraf 16 je nazván „Realisierung von Automaten", čímž má autor na mysli teorii dekomposice. Poslední paragraf 17 ukazuje souvislosti teorie automatů s formálními jazyky; vyšetřují se množiny slov akceptovatelné automatem (regulární události) i obecněji, akceptovatelné podmnožiny pologrup.

Výklad je veden na solidní algebraické úrovni a přitom autor neopomenul na několika místech uvést vhodné motivace pro nově zaváděné pojmy i objasňující poznámky a interpretace k vykládané stroze algebraické teorii (souvislosti s grafy, s teorií obvodů, s teorií jazyků aj.). Pokud jde o předpoklady na čtenáře, není k četbě knihy jistě na škodu znalost nejzákladnějších pojmů a faktů z teorie algebraických struktur. Kniha je však napsána natolik přehledně, že ji lze při dobré vůli číst i bez předběžného algebraického vzdělání.

Jaroslav Morávek, Praha

A. Doneddu: LES BASES DE L'ANALYSE MATHÉMATIQUE MODERNE, Dunod, Paris, 1971, 2. vydání, s předmluvou akademika Lichnerowicze, vázané, 371 stran.

Kniha se zabývá rigorózním zavedením číselných oborů cestou postupného rozšiřování, přičemž se začíná oborem přirozených čísel a končí oborem komplexních čísel.

V první části jsou zavedeny základní pojmy týkající se množinového kalkulu, základních algebraických struktur, binárních relací a zobrazení.

Následuje druhá část, obsahující výklad konstrukce a nejjednodušších vlastností přirozených čísel; přirozená čísla jsou zavedena pomocí Peanových axiomů. Dále se zkoumá zápis přirozených čísel v b-adické soustavě, při libovolném přirozeném b, $b \geqq 2$.

Ve třetí části se definují a studují kladná racionální čísla. Speciálně se zkoumají b-nární kladná racionální čísla, která potom v následující části umožňují definovat kladná reálná čísla bez použití ostatních racionálních čísel.

Studium kladných reálných čísel je předmětem 4. části. Při zavedení pomocí b-nárních racionálních čísel hrají potom stejnou roli iracionální čísla a ta racionální čísla která nejsou b-nární; obojí mají nekonečný b-adický zápis. Vyložená teorie se poté aplikuje na studium míry prvků archimedovských i kvasiarchimedovských pologrup. Z posledního se rovněž získává aplikace na měření úhlů Eukleidovy roviny.

V páté části se z kladných reálných čísel rozšířením na additivní grupu konstruují relativní reálná čísla a uvažuje se těleso reálných čísel. Jsou uvedeny geometrické aplikace vykládané teorie, jednak na axiomatiku geometrie jednorozměrného Eukleidova prostoru, jednak na geometrii orientovaných úhlů dvourozměrného Eukleidova prostoru; míra úhlů se rozšiřuje na grupu rotací.

Poslední, šestá část knihy je věnována konstrukci a studiu tělesa komplexních čísel. Argument komplexního čísla je zde definován pomocí isomorfismu mezi grupou rotací a aditivní grupou reálných čísel modulo 2π.

Kniha je napsána přesným a přitom dobře čtivým způsobem. Používá „bourbakistické" terminologie. Může být užitečná každému, kdo začíná se studiem moderní matematiky, i každému kdo vyučuje matematickou analýzu.

Jaroslav Morávek, Praha

Lothar Sachs: STATISTISCHE AUSWERTUNGSMETHODEN. Dritte, neubearbeitete und erweiterte Auflage mit neuer Bibliographie. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1972. Stran XX + 545, cena DM 58,—; US $ 18.10.

Po krátkém čase již třetí vydání (první vyšlo v r. 1968, druhé v r. 1969) velmi dobré knihy s praktickým zaměřením, určené především pro čtenáře nemající matematické vzdělání.

Základní rozčlenění výkladu do osmi kapitol zůstalo i v tomto vydání zachováno. Po úvodní, nulté kapitole (25 stran), která nese název „*Předběžné poznámky*" a poskytuje právě čtenářům bez předchozího matematického vzdělání nejdůležitější informace o matematických symbolech a výpočtech, o zaokrouhlování, grafickém znázorňování apod., následuje první kapitola, „*Technika statistického rozhodování*", která má největší rozsah (132 stran). Nejprve se pokouší odpovědět na otázku, co je to statistika, dále shrnuje základy teorie pravděpodobnosti, seznamuje čtenáře s normálním rozložením a některými dalšími rozloženími, se základními charakteristikami a především s principy statistického rozhodování pomocí statistických testů. Druhá kapitola (36 stran) popisuje, jak již sám název napovídá, „*použití statistických postupů v lékařství a technice*". Obsahuje mimo jiné výklad o sekvenčních testech, lineárním programování, teorii her a metodě Monte Carlo. Třetí kapitola, nazvaná „*Srovnání nazávislých výběrů měřených hodnot*" (47 stran), se zabývá hodnocením nezávislých náhodných výběrů. Čtenář zde najde intervaly spolehlivosti některých charakteristik, testy hypotéz o středních hodnotách a rozptylech, zmínku o řešení problému extrémních hodnot a o tolerančních mezích a v závěru se seznámí s použitím neparametrických metod pro srovnání nezávislých výběrů. V návaznosti na třetí kapitolu pokračuje čtvrtá kapitola („*Další testy*", 57 stran) výkladem o párovém srovnávání, o porovnání dvou závislých výběrů, o χ^2-testu dobré shody, Kolmogorovově - Smirnovově testu, intervalech spolehlivosti pro relativní četnosti, vyhodnocování čtyřpolních tabulek, testu náhodnosti posloupnosti alternativních dat a o testování trendu. Pátá kapitola, nesoucí název „*Míry závislosti: korelace a regrese*" (59 stran), je zřejmě jedna z nejdůležitějších. Hned na jejím počátku je stručný přehled osvětlující pojmy korelační analýza a regresní analýza, především jsou v ní však vyloženy parametrické i neparametrické míry závislosti, metody jejich odhadu, testy některých hypotéz o nich a konečně i nelineární regrese a parciální a vícenásobná korelace a regrese. Šestá kapitola, nazvaná „*Vyhodnocování vícepolních tabulek*" (24 stran), navazuje na čtvrtou kapitolu (a snad by tedy měla být umístěna za ní). V závěrečné, sedmé kapitole — „*Metody analýzy rozptylu*" (56 stran), jsou popsány některé testy homogenity několika rozptylů, analýza rozptylu při jednoduchém, dvojném i trojném třídění, některé neparametrické testy a principy plánování pokusů; kapitola je uzavřena přehledem o zpracování vědeckých problémů.

Tím je ukončen vlastní výklad. Zbývající, poměrně značnou část knihy (109 stran) tvoří velmi obsáhlý seznam použité literatury i literatury k dalšímu studiu (natolik obsáhlý, že si vyžádal samostatný přehled o rozdělení do jednotlivých částí), cvičné úlohy a jejich řešení, výběr anglických odborných výrazů, nově připojený jmenný rejstřík a ovšem také podrobný věcný rejstřík.

Kromě toho je třeba se zmínit o přibližně 400 pečlivě propočtených číselných příkladech, které jsou v souladu se zaměřením knihy zařazeny průběžně do výkladu, a také o 210 matematických a matematicko-statistických tabulkách; jejich zařazení do výkladu je však méně šťastné, než je tomu u zmíněných příkladů, neboť jejich vyhledávání v textu při pozdější potřebě bývá někdy zdlouhavé.

Knihu je možno vřele doporučit každému, kdo se zabývá použitím statistických metod v praxi. Výklad je srozumitelný i pro nematematika, vniknutí do jednotlivých problémů je usnadňováno množstvím zmíněných numerických příkladů. I čtenář bez hlubšího matematického vzdělání se naučí správně chápat a aplikovat statistické metody. Jelikož je jich však zde popsáno velké množství, nevyjímaje ani ty nejmodernější, poslouží kniha dobře jako příručka i matematikům; užitečná pro ně bude jistě i obsáhlá bibliografie.

S ohledem na určení knihy neobsahuje výklad žádné abstraktní matematické úvahy ani odvozování. Ze stejného důvodu nebylo možno dosáhnout naprosté preciznosti při zavádění základních pojmů matematické statistiky a teorie pravděpodobnosti (náhodná veličina aj.). Přesto je během celého výkladu patrná snaha autora po co největší přesnosti při zachování snadné srozumitelnosti textu. Totéž lze říci o označení, které je zaváděno tak, aby vyhovovalo praktickým aplikacím a nekomplikovalo zbytečně úvahy. Snad by ale přece jen bývalo bylo užitečné zachovat větší přesnost například při označování indexů, což by v několika případech naopak zvýšilo srozumitelnost a zabránilo případným omylům začátečníka (viz např. vzorec (3.52) a následující vysvětlení na str. 235, kde se tentýž index r užívá jako sčítací index i jako horní mez sčítání).

Přestože ve třetím vydání knihy byly provedeny četné opravy oproti předchozím vydáním, i sem se vloudily některé tiskové chyby. Českého čtenáře už asi nepřekvapí (ale v každém případě si toho všimne), že jména českých autorů nejsou zcela v pořádku. Tak například místo Hájek najde Hàjek, místo Šidák — Sidàk (obojí na str. 455_{10}); zcela bez háčků a čárek jsou jména Malý (460[3]), Žáček (454[26], 459[15], 474_{11}), Žaludová (465_7). Nejednotnost je v přepisu jmen ruských, částečně ovšem asi zaviněná nejednotností přepisu jména téhož autora při vydávání jeho různých prací. V bibliografii jsem našel např. tyto variace jednoho jména: Smirnov, N.V. (452_2), Smirnow, N.W. (465[5]), Smirnoff, N.W. (473_{16}), Smirnov, N. (478_8 — přitom však v odkazu na str. 256[15] na příslušnou práci je psáno Smirnoff).

Tyto a další drobné nedostatky jsou však zcela nepodstatné. Proto ještě jednou zdůrazňuji, že kniha je vynikající učebnicí statistických metod pro začátečníka a nanejvýš užitečnou příručkou pro statistika.

Jaroslav Hustý, Praha

John T. Moore: FUNDAMENTAL PRINCIPLES OF MATHEMATICS. New York, Holt, Rinehart and Winston 1962. 630 s. Angl.

Kniha profesora floridské university Johna T. Moora je určena převážně posluchačům prvních ročníků vysokých škol technického a přírodovědeckého směru. Rovněž může posloužit absolventům středních škol, kteří chtějí získat potřebný rozhled po středoškolské matematice před vstupem na vysokou školu.

V prvních dvou kapitolách jsou zavedeny elementární pojmy z teorie množin jako jsou pojmy množina, relace, operace atd. a reálná čísla. Kapitola třetí je věnována početní technice. Ve čtvrté až sedmé kapitole je zaveden pojem funkce, jsou zavedeny přirozeným a nenáročným způsobem elementární funkce, jejichž chování je vyšetřováno grafickou metodou. Výklad je doplněn příklady aplikací z nichž nejvíce místa je věnováno trigonometrii. V následujících dvou kapitolách je definována limita funkce, derivace, primitivní funkce, posloupnost a řada. Výklad je jako v dalších kapitolách doplněn značným počtem instruktivních příkladů. V kapitole desáté jsou zavedena komplexní čísla a jsou studovány vlastnosti polynomů. Kapitola jedenáctá se zabývá studiem soustav lineárních rovnic pomocí matic a determinantů. Kapitoly dvanáctá až patnáctá dávají poměrně široký přehled analytické geometrie v trojrozměrném prostoru přičemž není například opomenuto ani studium speciálních křivek. Poslední dvě kapitoly zavádějí pojmy permutace, kombinace a pravděpodobnosti a poskytují též elementární úvod do statistiky. V dodatku jsou přehledně uvedena pravidla počítání s reálnými čísly doplněná příklady řešenými i neřešenými. Kniha je dále vybavena seznamem použitých symbolů, tabulkou logaritmů, trigonometrických funkcí, přirozených logaritmů, exponenciální funkce, klíčem k neřešeným problémům v textu a věcným rejstříkem. Látka vyložená v knize je velmi pečlivě zpracována a přehledně uspořádána, takže není pochyb, že tato publikace splní úkol jenž si její autor vytkl za cíl: dát přehled o středoškolské matematice studujícím, u nichž matematika není účelem ale prostředkem.

Ivan Straškraba, Praha

Moses Richardson: ÉLÉMENTS DE MATHEMATIQUES MODERNES. Deuxième édition revue et augmentée, Collection SIGMA, Vol. 4, Dunod, Paris 1968. Přeloženo z 3. vydání Fundamentals of Mathematics, Macmillan, New York 1966.

Kniha je napsána především pro studenty společenských věd. To ale neznamená, že by její čtení nebylo užitečné pro studenty matematiky nebo jiných přírodních věd. Její čtení nevyžaduje prakticky žádných předběžných znalostí a nekonvenční volba látky činí knihu zajímavou od první do poslední stránky.

Vyjímečně zdařilé je podání jednoduchých a ilustrativních aplikací v téměř všech oborech, studujících kvantitativní vztahy. Uveďme zde aspoň několik: Booleovy algebry v teorii elektrických obvodů, teorie množin ve společenských vědách, lineární programování v ekonomii, incidenční matice v sociologii, Markovovy řetězce v psychologii. Skoro všechny kapitoly obsahují historický úvod a na konci přehledný seznam literatury, jakož i přiměřený soubor příkladů a cvičení. Autor spěšně pěstuje čtenářův kritický přístup k novým pojmům a učí ho, jak formulovat nematematické problémy matematickým jazykem.

Redakce

DÁLE VYŠLO

A. Kaufmann, D. Coster: EXERCISEC DE COMBINATORIQUE AVEC SOLUTIONS III: méthodes d'optimisation. Dunod, Paris 1972, 164 str., cena brož. 38 F.

Třetí, poslední část řešených příkladů z knihy A. Kaufmann, Introduction à la combinatorique en vue des applications, Dunod, Paris 1968.

Redakce

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

ZPRÁVY

DOC. JAN VYŠÍN, CSc. ŠESŤDESIATPÄŤROČNÝ

Málokto z tých, ktorí poznajú doc. J. Vyšína, CSc., uverí, že sa vo februári tohto roku dožil 65 rokov. Jeho životná energia a duševná sviežosť sú v príkrom rozpore s touto skutočnosťou.

Jubilant sa narodil 9. 2. 1908 v Prahe, v rodine učiteľa. Maturoval r. 1926 na reálnom gymnáziu v Prahe 2 na Truhlářskej ulici. Štúdium matematiky a deskriptívnej geometrie na prírodovedeckej fakulte Karlovej univerzity ukončil štátnymi skúškami r. 1932. Po absolvovaní základnej vojenskej služby zostal pre nedostatok učiteľských miest vo vojenskej činnej službe až do r. 1937, keď nastúpil miesto stredoškolského profesora matematiky na reálnom gymnáziu v Brandýse n. L. Potom postupne pôsobil na reálnom gymnáziu v Karlovych Varoch, Úpici, Jilemnici, Beroune a v Prahe-Žižkove.

Po oslobodení od r. 1946 pôsobil na katedre matematiky pedagogickej fakulty Karlovej univerzity ako odborný asistent. Od r. 1953, keď bol menovaný docentom novozaloženej Vysokej školy pedagogickej v Prahe budoval katedru matematiky tejto školy ako jej vedúci. Má najväčší podiel na vytvorení koncepcie štúdia matematiky na Vysokej škole pedagogickej. Roku 1958 prechádza na katedru teórie vyučovania matematiky matematicko-fyzikálnej fakulty Karlovej univerzity, kde pôsobí ako docent až do r. 1972. Od decembra 1972 je pracovníkom Matematického ústavu ČSAV v Prahe.

V krátkej spomienkovej črte nie je možné dostatočne vystihnúť ani oceniť mnohostrannú prácu, ktorú vykonal doc. Vyšín pri zvyšovanie úrovne našej školskej matematiky. Spolupracoval na celom rade učebníc geometrie pre základné, všeobecnovzdelávacie i pedagogické školy. Spracoval geometrickú časť učebnice matematiky pre priemyselné školy, je spoluautorom učebníc geometrie pre pedagogické fakulty. Presnosťou výkladu a metodickým spracovaním vynikajú jeho vysokoškolské učebnice *„Elementární geometrie"*, *„Soustava axiomů eukleidovské geometrie"*, *„Úvod do vektorové algebry"* a učebné texty *„Vybrané statě z elementární geometrie"*. Je autorom viacerých pokusných učebných textov pre experimentálne ZDŠ. Má rozhodujúci podiel na tvorbe koncepcie obsahu vyučovania matematiky na novovytvorených gymnáziách. V čase, keď nejestvujú prakticky žiadne učebnice matematiky pre gymnáziá, vykonali a vykonávajú neoceniteľné služby *„Komentáre k učebniciam matematiky pre SVŠ"*, ktoré vznikli pod jeho vedením a v prevažnej miere na jeho pracovnom stole.

So značným ohlasom doma i v zahraničí sa stretla „*Metodika řešení matematických úloh*“ doc. Vyšína. Sviežosťou štýlu a aktuálnosťou obsahu si získali čitateľov jeho knižočky populárného rázu, ktoré napísal pre Cestu k vědění, Bránu k vědění i Školu mladých matematikov. Posledne menovaná edícia vďačí doc. Vyšínovi do značnej miery za svoj zrod a od prvých sväzkov pracuje v jej redakčnom kruhu.

Doc. Vyšín je autorom celého radu odborných článkov, ktoré vyšli v Časopise pro pěstování matematiky, Rozhledoch matematicko-fyzikálnych, Pokrokoch matematiky, fyziky a astronómie. Napísal cez tridsať metodických i populárno-odborných článkov pre časopisy „Matematika ve škole“, „Matematika a fyzika ve škole“ a ďalšie. Je autorom námetov školských filmov, spoluautorom televízneho kurzu matematiky, od neho pochádzajú viaceré návrhy učebných pomôcok pre modernizáciu vyučovania matematiky.

Značnú časť svojich tvorivých síl zasvätil doc. Vyšín myšlienke modernizácie obsahu školskej matematiky. Okrem článkov, tvorby pokusných učebných textov, prednášok pre učiteľov i ďalších záujemcov získaval stúpencov pre nový obsah i nové metódy vyučovania matematiky na základných i stredných školách vedením seminárov v Prahe, Brne, Bratislave i ďalších mestách. Zúčastnil sa niekoľkých sympózií o modernizácii vyučovania matematiky v zahraničí. Je dlhoročným členom a od r. 1966 podpredsedom Národnej subkomisie pre vyučovanie matematiky.

Vyše dvadsaťročná história matematickej olympiády je nerozlučne spätá s menom doc. Vyšína. Na organizácii tejto súťaže vytvorenej predovšetkým pre objavovanie a rozvíjanie matematických talentov medzi žiakmi našich škôl sa podieľal od jej vzniku r. 1951. Je spoluautorom prakticky všetkých brožúr o jednotlivých ročníkoch MO. Od roku 1959 je podpredsedom a od roku 1966 predsedom ústredného výboru matematickej olympiády. V niekoľkých riadkoch ani nemožno oceniť zásluhy, ktoré má na udržiavaní aktuálnosti náplne a úrovne organizácie MO. Nikdy neľutoval čas ani sily na zlepšenie starostlivosti o matematicky nadaných žiakov. S húževnatosťou jemu vlastnou poukazuje na skúsenosti tých socialistických krajín, ktoré v starostlivosti o talenty dosahujú výsledky podstatne lepšie od našich. Oprávňujú ho k tomu vlastné poznatky, veď šesťkrát viedol československé družstvo na medzinárodnú matematickú olympiádu. Je pôvodcom návrhu na vydávanie komentárov k úlohám matematickej olympiády, ktoré sú neoceniteľnou metodickou pomôckou učiteľov pri vedení matematických krúžkov a pri práci s matematicky nadanými žiakmi, i ich neúnavným tvorcom.

Veľmi významný úsek verejnej činnosti doc. Vyšína sa týka jeho práce v Jednote československých matematikov a fyzikov. Za dlhý výpočet funkcií, ktoré v Jednote zastával nech hovorí fakt, že ho zjazd JČSMF roku 1972 menoval zaslúžilým členom JČSMF a zvolil ho na ďalšie funkčné obdobie do ústredného výboru.

Stručný výpočet bohatej činnosti doc. Vyšína by nebol úplný, ak by sme nespomenuli jeho mnohoročné členstvo v redakčných radách časopisov, a to predovšetkým Matematika ve škole a Pokroky matematiky, fyziky a astronómie. Za mnohé z jeho organizačných úloh na škole a fakulte uveďme aspoň prácu v komisii pre obhajobu kandidátskych prác z teórie vyučovania matematiky na matematicko-fyzikálnej a pedagogickej fakulte Karlovej univerzity, ktorej je podpredsedom a prácu v funkcii predsedu komisie pre rigorózne skúšky na matematicko-fyzikálnej fakulte.

Ani bohatá odborná a organizátorská činnosť v matematike nezabránili doc. Vyšínovi rozvíjať živý záujem o umenie, najmä hudbu a literatúru.

U svojich spolupracovníkov sa teší doc. Vyšín prirodzenej úcte a autorite, ktorá pramení z jeho náročnosti k sebe, úprimného a priateľského prístupu, ochoty vždy poradiť a pomôcť. Nikdy nestráca svoj typicky vyšínovský zmysel pre humor a odvahu vášnivo bojovať za všetko, o správnosti čoho je vnútorne presvedčený.

Náš milý jubilant môže byť úplne spokojný s výsledkami práce, ktorú až doteraz na prospech spoločnosti vykonal. Treba si len úprimne želať so všetkými jeho priateľmi a spolupracovníkmi, aby ho budúce roky zastihli v plnom zdraví a spokojnosti, aby mohol nerušene pokračovať vo svojom bohatom činorodom diele.

UDĚLENÍ PLAKETY BERNARDA BOLZANA PROF. DR. VLADIMÍRU KNICHALOVI, ČLENU KORESPONDENTU ČSAV

Presidium ČSAV udělilo dne 20. března 1973 prof. dr. VLADIMÍRU KNICHALOVI, členu korespondentu ČSAV, u příležitosti jeho 65. narozenin stříbrnou plaketu Bernarda Bolzana za zásluhy o rozvoj matematických věd.

Redakce

PROF. JAROSLAV HÁJEK LAUREÁTEM STÁTNÍ CENY K. GOTTWALDA

K 1. máji 1973 byla prof. ing. dr. JAROSLAVU HÁJKOVI, DrSc., udělena státní cena Klementa Gottwalda za vybudování asymptotické teorie statistických pořadových testů.

Matematicko-statistické testy jsou základní nepostradatelnou pomůckou při hodnocení experimentálních dat nebo ještě šířeji řečeno, všude tam, kde se vyskytují náhodné jevy. Mezi těmito testy hrají významnou úlohu tzv. pořadové testy, založené pouze na pořadí pozorování uspořádaných podle velikosti (nikoliv na hodnotách pozorování samých). Zprvu byly pořadové testy považovány jen za jednoduchou, rychlou, ale horší náhražku klasických testů, vycházejících např. z předpokladu normálního rozložení. Později se však začalo zjišťovat a uznávat, že normální rozložení nebývá tak časté ve skutečné praxi a navíc že klasické testy při změně předpokladů mohou velmi silně změnit své vlastnosti. Proto se začala věnovat větší pozornost pořadovým testům, které platí pro velmi široké třídy rozložení, např. pro všechna spojitá rozložení, a které jsou značně robustní, tj. při malé změně předpokladů se jejich vlastnosti změní jen málo; dále bylo též dokázáno, že při vhodné volbě jsou pořadové testy velmi vydatné ve srovnání s klasickými testy. V posledních 10—20 letech proto pořadové testy pronikly výrazně do nejrůznějších aplikací a rovněž teoreticky patří k nejvíce pěstovaným oblastem matematické statistiky.

Prof. Hájek se ve svých pracích zabýval zejména asymptotickou teorií pořadových testů a dokázal zde řadu významných výsledků, založených na jeho originálních, pozoruhodných a plodných idejích. Zhruba řečeno, tyto výsledky se týkaly asymptotických rozložení pořadových statistik nejprve při nulové hypotéze, pak při „blízkých", kontiguitních alternativách a nakonec při obecných, nekontiguitních alternativách. Zmíníme se nyní stručně o některých nejvýznamnějších Hájkových publikacích z této oblasti.

Prof. Hájek se jasnozřivě začal zabývat pořadovými testy již velmi záhy — ve své disertaci podané r. 1949 — tedy na samém začátku své vědecké činnosti, a to v době, kdy tato oblast byla ještě v plenkách a kdy se začínaly teprve pomaličku vytvářet náznaky její teorie. Část této disertace pak publikoval v článku „*Některá pořadová rozdělení a jejich použití*", Čas. pro pěst. mat. *80* (1955), 17—31, kde odvodil vytvořující funkce a dokázal asymptotickou normalitu rozložení statistik, známých nyní pod jmény Wilcoxonova dvouvýběrová a jednovýběrová statistika a Kendallův pořadový korelační koeficient.

Hájkova světová proslulost v této oblasti byla založena článkem „*Some extensions of the Wald-Wolfowitz-Noether theorem*", Ann. Math. Statist. *32* (1961), 506—523, v němž nalezl nutnou a postačující podmínku pro asymptotickou normalitu obecných lineárních pořadových statistik při nulové hypotéze, tj. při předpokladu, že vektor pořadí nabývá všech permutací se stejnými pravděpodobnostmi. Tím zobecnil řadu výsledků jiných autorů; věta bývá citována nyní pod Hájkovým jménem, popř. pod jmény Wald-Wolfowitz-Noether-Hájek apod. Originální metoda článku spočívá na výsledku, že pořadová statistika S_n je asymptoticky ekvivalentní podle středu vhodně zvolenému součtu T_n nezávislých asymptoticky malých veličin (přesněji že $\lim_{n\to\infty} E(S_n - T_n)^2/\text{var } T_n = 0$).

Dalším významným článkem je „*Asymptotically most powerful rank-order tests*", Ann. Math. Statist. *33* (1962), 1124—1147, kde je dokázána asymptotická normalita lineárních pořadových statistik pro testování regrese při kontiguitních alternativách, vyšetřována asymptotická eficience příslušných testů a nalezen tvar asymptoticky nejmohutnějšího testu. Kromě toho je zde sestrojen universální asymptoticky nejmohutnější pořadový test, jehož existence byla svého času překvapením pro odborné kruhy. Metodicky je výrazným přínosem článku využití pojmu kontiguity, zavedeného původně LeCamem pro jiné účely. (Obecně, jsou-li P_n, Q_n dvě posloupnosti pravděpodobnostních měr, řekneme, že Q_n jsou kontiguitní vzhledem k P_n, jestliže pro libovolnou posloupnost jevů A_n konvergence $P_n(A_n) \to 0$ implikuje $Q_n(A_n) \to 0$. Pro vyšetřovaný regresní model to znamená, že posloupnost alternativ se blíží nulové hypotéze, tedy že se kladou jisté předpoklady na limitní chování koeficientů regrese.)

Další zajímavou Hájkovou myšlenkou byla representace známé Kolmogorovovy-Smirnovovy statistiky v jiné ekvivalentní formě pomocí tzv. antipořadí, což mu pak umožnilo přirozené zobecnění této statistiky pro regresní alternativy. To bylo provedeno v článku „*Extension of the Kolmogorov-Smirnov test to regression alternatives*", Bernoulli-Bayes-Laplace Anniversary Volume, Springer Verlag 1965, str. 45—60. Zde je též dokázáno, že zmíněná zobecněná statistika konverguje v distribuci k Brownovu můstku.

Obecná systematická teorie pořadových testů spolu s řadou konkrétních speciálních případů byly pak vyloženy v třísetstránkové monografii „*Theory of rank tests*", Academia, Praha & Academic Press, New York—London, 1967, kterou napsal prof. J. Hájek společně se Z. Šidákem. (V r. 1971 v nakladatelství Nauka v Moskvě vyšel též její ruský překlad.) V kap. V, VI a VII této knihy, psaných prof. Hájkem, jsou právě shrnuty jeho dřívější výsledky z asymptotické teorie, ovšem na mnoha místech vylepšené, doplněné a systematizované. Ze závažných nových výsledků v knize je vhodné se zmínit o důkazu asymptotické suficience vektoru pořadí a jeho důsledcích v § VII.1.

Poněvadž předchozí monografie byla napsána na dosti vysoké matematické úrovni, vydal prof. Hájek ještě jednu, snadnější knihu „*A course in nonparametric statistics*", Holden-Day, San Francisco 1969, určenou spíše pro studenty pro první seznámení s teorií pořadových testů. (Chystá se rovněž její ruský překlad.)

V novější době prof. Hájek dokázal řadu významných výsledků o asymptotické normalitě pořadových statistik při obecných, nekontiguitních alternativách v článcích „*Asymptotic normality* *of simple linear rank statistics under alternatives*", Ann. Math. Statist. *39* (1968), 325—346, „*Asymptotic normality of simple linear rank statistics under alternatives II*", Ann. Math. Statist. *40* (1969), 1992—2017, „*Asymptotic normality of the Wilcoxon statistic under divergent alternatives*", Zastosowania matematyki *10* (1969), 171—178 (poslední dva články společně s V. Dupačem). Metody použité v těchto článcích jsou sice v podstatě elementární, ale složité a důmyslné; jejich základem je jednak nová nerovnost pro rozptyly pořadových statistik, jednak aproximace těchto statistik pomocí jejich projekcí na součty nezávislých veličin.

Prof. Hájek patří mezi světově uznávané přední odborníky v matematické statistice pro své práce nejen z teorie pořadových testů, ale i z několika dalších oblastí jako např. teorie výběrových šetření, statistická indukce v náhodných procesech, filosoficko-logické základy matematické statistiky aj. Jeho publikace jsou naplněny množstvím významných a podnětných výsledků a myšlenek, v době svého vzniku vždy posunuly o značný kus dopředu rozvoj příslušné oblasti a bylo na ně nesčetněkrát navazováno zahraničními i našimi autory. Několik fundamentálních výsledků bývá citováno pod Hájkovým jménem: o větě o asymptotické normalitě pořadových statistik jsme se již zmínili, další jsou např. Feldmanova-Hájkova věta o tom, že pravděpodobnostní míry dvou normálních procesů jsou buď vzájemně ekvivalentní nebo singulární, nebo Hájkova-Rényiho nerovnost pro součty nezávislých veličin.

Vědecká činnost prof. Hájka je úzce spojena s aplikacemi matematické statistiky. Prof. Hájek jednak sám přímo spolupracoval na mnoha aplikačních problémech v různých oborech, jednak i jeho teoretické výsledky mají značný a dosti bezprostřední význam pro aplikace. Všimněme si jen teorie pořadových testů: zde se za prvé jeho výsledků o asymptotických rozloženích prakticky používá pro případy velkého počtu pozorování, za druhé se prof. Hájek zabýval také tvarem optimálních testů v různých situacích a jejich vhodnou volbu a navrhl některé nové testy.

Kromě své vlastní vědecké činnosti se prof. Hájek velmi pečlivě věnuje výchově mladších vědeckých pracovníků a výuce studentů na katedře matematické statistiky matematicko-fyzikální fakulty University Karlovy a pozvedl na vysokou úroveň veškerou práci na této katedře. Pod jeho vedením řada pracovníků dosáhla kandidátské hodnosti a na základě jeho podnětů a rad vzniklo mnoho dalších zajímavých prací jeho žáků (jmenujme opět jen z teorie pořadových testů práce J. Anděla, M. Huškové, J. Jurečkové, D. Vorlíčkové a vietnamského aspiranta Nguyen-van Ho).

Jménem všech čtenářů tohoto časopisu blahopřejeme prof. J. Hájkovi k udělení státní ceny a věříme, že jeho nepříznivý zdravotní stav se zlepší natolik, aby mohl matematickou statistiku obohatit ještě mnoha svými výsledky a idejemi.

Zbyněk Šidák, Praha

CELOSTÁTNÍ KONFERENCE O TEORII GRAFŮ A KOMBINATORICKÉ MATEMATICE

Liberecká odbočka Jednoty československých matematiků a fyziků ve spolupráci s katedrou matematiky Vysoké školy strojní a textilní v Liberci uspořádala ve dnech 16.—20. dubna 1973 celostátní konferenci o teorii grafů a kombinatorické matematice. Tato konference byla pořádána v rámci oslav 20. výročí založení Vysoké školy strojní a textilní v Liberci. Konala se v příjemném prostředí zotavovny ROH „František Kouba" ve Starých Splavech.

Bylo přítomno 53 účastníků z Bratislavy, Brna, Košic, Liberce, Olomouce, Poděbrad, Prahy, Prešova, Zvolena a Žiliny a tři hosté ze zahraničí — doc. dr. VERA TURÁN-SÓS z University Loránda Eötvöse v Budapešti, dr. HANS-JÜRGEN VOSS z Vysoké školy technické v Ilmenau (NDR) a dr. MACIEJ SYSŁO z Vratislavské university.

Na programu bylo celkem 25 přednášek, z nichž každá trvala 30—50 minut (s diskusí), a zasedání věnované otevřeným problémům teorie grafů a kombinatorické matematiky.

Byly předneseny tyto přednášky:

M. Fiedler: Uspořádání uzlů grafů, simplex grafu.
B. Zelinka: Polární a polarisované grafy.
F. Zítek: Jak otvírati nedobytné pokladny.
A. Vrba: Subdeterminanty a podgrafy.
H.-J. Voss: Graphen mit gegebener Zahl unabhängiger Kreise bzw. mit vorgeschriebener Maximalkreislänge.
J. Novák: Hranové base k-uniformních hypergrafů.
I. Havel, P. Liebl: Vnořování grafů do mocnin krychlí.
L. Nebeský: O vnořování některých stromů do krychle.
J. Nešetřil: O hranové versi Ulamovy hypotézy.
V. Müller: O vynucených homomorfismech turnajů.
K. Havlíček, K. Stach: Zobecnění pojmu oboru transitivity.
V. Jurák: O konstrukci některých turnajů s body určitých konečných projektivních rovin.
J. Zedník: Akceptory a grafy.
V. Turán-Sós: Extremal problems of graph theory.
J. Morávek: Zobecnění Turánovy věty pro ohodnocené grafy.
S. Jendroľ, E. Jucovič: Zovšeobecnenie Eberhardovej vety.
M. Trenkler: O päťvalentných mnohostenoch.
J. Bosák: Rozklady kompletných grafov na faktory s rovnakými priemermi.
E. Tomová: Rozklad párnokompletného grafu na faktory s danými priemermi.
M. Sysło: Remarks on line digraphs.
F. Glivjak: Kritické grafy daného priemeru.
K. Čulík: K teorii konečných acyklických orientovaných grafů.
M. Sekanina: O pojmu mezi v grafech.
V. Rajlich: O hypergrafech a dynamice diskretních systémů.
V. Mahel: Poznámka o konstrukci dvojic ortogonálních latinských čtverců řádu 10. (Za onemocnělého přednesl *K. Havlíček*).

Konference úspěšně navázala na tradici každoročních konferencí o teorii grafů. Byla přednesena řada hodnotných nových výsledků z teorie grafů a kombinatorické matematiky, přičemž některé přímo navazovaly na výsledky obdobné loňské konference. V diskusích se zahraničními hosty se účastníci seznámili s prací matematiků v jejich zemích. Významné je i to, že došlo k setkání grafových teoretiků s pracovníky příbuzných oborů (kombinatorická geometrie, teorie automatů).

Konference probíhala jako vždy v příjemném přátelském ovzduší, nechybělo ani trochu humoru. Nezbývá než si přát, aby tradice takovýchto konferencí dále pokračovala a aby další byly stejně úspěšné.

Bohdan Zelinka, Liberec

OBHAJOBY A DISERTAČNÍ PRÁCE DOKTORŮ A KANDIDÁTŮ VĚD

Před komisemi pro obhajoby doktorských disertačních prací obhájili dne 30. března 1973 RNDr. ZBYNĚK ŠIDÁK, CSc., práci na téma: „Příspěvky k operátorové teorii Markovových řetězců s obecným systémem stavů" a dne 24. dubna 1973 RNDr. OTTO VEJVODA, CSc., práci na téma: „Periodická řešení lineární a slabě nelineární vlnové rovnice".

Před komisemi pro obhajoby kandidátských disertačních prací obhájili dne 16. ledna 1973 RNDr. JAROSLAV BAYER práci na téma: „O deformacích kongruencí rovin vnořených do osmirozměrných projektivních prostorů" a RNDr. JOSEF ČUČKA práci na téma: „O deformacích kongruencí (n — 1)-rovin, vnořených do ($2n$ — 1)-rozměrných projektivních prostorů", dne 9. února 1973 PAVLA VRBOVÁ práci na téma: „Spektrální vlastnosti operátorů", dne 12. března 1973 RNDr. HILDA DRAŠKOVIČOVÁ práci na téma: „O niektorých reláciach na zväzoch a na systémoch ekvivalencií", dne 22. března 1973 RNDr. MARIE ŠIKULOVÁ práci na téma: „Stochastické modely absorpčních procesů: Příspěvek k určení meze únavy", dne 30. března 1973 ADÉLA FILLOVÁ práci na téma „Vlastnosti riešení kvázilineárnej diferenciálnej rovnice štvrtého rádu", dne 27. dubna 1973 RNDr. JAN CHVALINA práci na téma: „Realizace topologií množinovými systémy", dne 29. května 1973 Ing. VÁCLAV RAJLICH práci na téma: „Absolutně paralelní gramatiky", RNDr. IVAN MEZNÍK práci na téma: „O jedné třídě generovatelných jazyků" a Ing. JOSEF PUŽMAN práci na téma: „Kódování při přenosu se zpětnou vazbou", dne 7. června 1973 RNDr. JOZEF MIKLOŠKO práci na téma: „K niektorým problémom numerických kvadratúr", dne 11. června 1973 MILAN TVRDÝ práci na téma: „Okrajové úlohy pro zobecněné lineární diferenciální rovnice" a VLADIMÍR LOVICAR práci na téma: „Skoroperiodická funkce a skoroperiodická řešení parciálních diferenciálních rovnic" a dne 18. června 1973 RNDr. MARTIN ČERNÝ práci na téma: „Preferenční relace na prostorech trajektorií" a RNDr. ZDENĚK VLÁŠEK práci na téma: „Rovinné potenciální obtékání skupin profilů a profilových mříží ideální nestlačitelnou tekutinou".

Redakce