ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 97 * PRAHA 16. II. 1972 * ČÍSLO 1

PROJEKTIVNÍ DEFORMACE PŘÍMKOVÝCH KONGRUENCÍ VNOŘENÝCH DO ŠESTIROZMĚRNÝCH PROJEKTIVNÍCH PROSTORŮ

JAKUB BENEŠ, Brno

(Došlo dne 19. září 1968)

Tento článek navazuje na výsledky získané v práci [3], kde jsou studovány projektivní deformace 3. řádu přímkových kongruencí vnořených do n-rozměrných projektivních prostorů. Je-li $n \geqq 7$, jsou uvedené deformace ekvivalentní s bodovou deformací 1. řádu obou kongruencí. Je-li však jedna z obou kongruencí, které jsou v projektivní deformaci 3. řádu, vnořená do projektivního prostoru o dimensi 6 a není-li vnořitelná do prostoru o dimensi menší, pak totéž platí i pro druhou kongruenci. Přitom nutně musí být splněny určité podmínky (viz [3], rovnice (37)), které jsou mnohem silnější než ty, které si vynucují bodovou deformaci 1. řádu. Nebylo účelem článku [3] sledovat podrobně tento zvláštní případ a proto se k němu vracím v tomto pojednání. Je tedy hlavním úkolem tohoto článku objasnění podmínek (37) z jiných geometrických hledisek, dále důkaz existence netriviálních deformací 3. řádu a stručná zmínka o singulární deformaci 3. řádu. Omezím se však pouze na nejobecnější typy neparabolických kongruencí charakteru 3, jejichž příslušné Laplaceovy transformace nedegenerují a jimž v duálním prostoru odpovídají Laplaceovy posloupnosti ploch s konjugovanými sítěmi.

1. ZÁKLADNÍ ROVNICE KONGRUENCE L A JEJÍ DUALIZACE L^*

Vycházíme-li z podmínek (1), (2), (3), (22) a (35) v [3], které doplníme podmínkou

$$(1) \qquad [A_1, A_2, \ldots, A_7] = 1\,,$$

můžeme v případě $n = 6$ specializovat reper přímkové kongruence L obdobným způsobem jak tomu bylo v [2], takže platí

$$(2) \quad \omega_{12} = \alpha_1\omega_2\,, \quad \omega_{21} = \alpha_2\omega_1\,, \quad \omega_{14} = \omega_{23} = 0\,, \quad \omega_{1j} = \omega_{2j} = 0 \; (j = 5, 6, 7),$$
$$\omega_{31} = a_1\omega_2\,, \quad \omega_{35} = \omega_1\,, \quad \omega_{32} = \omega_{34} = \omega_{36} = \omega_{37} = 0\,,$$

$$\omega_{42} = a_2\omega_1\,,\quad \omega_{46} = \omega_2\,,\qquad \omega_{41} = \omega_{43} = \omega_{45} = \omega_{47} = 0\,,$$

$$\omega_{57} = b_2\omega_1\,,\quad \omega_{67} = b_1\omega_2\,,\quad \omega_{75} = c_1\omega_2\,,\quad \omega_{76} = c_2\omega_1\,,$$

$$\omega_{52} = \omega_{54} = \omega_{56} = \omega_{61} = \omega_{63} = \omega_{65} = \omega_{73} = \omega_{74} = 0\,.$$

$$\begin{aligned}
&\omega_1 \wedge [d\alpha_2 - \alpha_2(\omega_{33} - 2\omega_{11} + \omega_{22})] = 0\,,\\
&\omega_2 \wedge [d\alpha_1 - \alpha_1(\omega_{44} - 2\omega_{22} + \omega_{11})] = 0\,,\\
&\omega_1 \wedge (2\omega_{33} - \omega_{55} - \omega_{11}) = 0\,,\\
&\omega_2 \wedge (2\omega_{44} - \omega_{66} - \omega_{22}) = 0\,,\\
&\omega_1 \wedge [db_2 - b_2(\omega_{33} - \omega_{11} + \omega_{55} - \omega_{77})] = 0\,,\\
&\omega_2 \wedge [db_1 - b_1(\omega_{44} - \omega_{22} + \omega_{66} - \omega_{77})] = 0\,,\\
&\omega_1 \wedge [dc_2 - c_2(\omega_{33} - \omega_{11} + \omega_{77} - \omega_{66})] = 0\,,\\
&\omega_2 \wedge [dc_1 - c_1(\omega_{44} - \omega_{22} + \omega_{77} - \omega_{55})] = 0\,,\\
&\omega_1 \wedge [da_2 - a_2(\omega_{33} - \omega_{11} + \omega_{44} - \omega_{22})] + \omega_2 \wedge \omega_{62} = 0\,,\\
&\omega_1 \wedge \omega_{51} + \omega_2 \wedge [da_1 - a_1(\omega_{44} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{11})] = 0\,,\\
&\alpha_2\omega_1 \wedge \omega_{62} - b_1\omega_2 \wedge \omega_{71} = 0\,,\quad c_2\omega_1 \wedge \omega_{64} - \omega_2 \wedge \omega_{72} = 0\,,\\
&b_2\omega_1 \wedge \omega_{72} - \alpha_1\omega_2 \wedge \omega_{51} = 0\,,\quad \omega_1 \wedge \omega_{71} - c_1\omega_2 \wedge \omega_{53} = 0\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Přitom naše předpoklady o typu uvažovaných kongruencí si vynucují podmínku

$$\alpha_1\alpha_2a_1a_2b_1b_2c_1c_2 \neq 0\,. \tag{4}$$

Základní rovnice kongruence L při platnosti (2) jsou

$$dA_i = \sum_{j=1}^{7} \omega_{ij}A_j \quad (i = 1, 2, \ldots, 7)\,. \tag{5}$$

Označme symbolem P_6^* prostor duální k P_6. Repery v P_6^* jsou tvořeny analytickými nadrovinami E_k

$$E_k = (-1)^k\,[A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_7] \quad (k = 1, 2, \ldots, 7) \tag{6}$$

přitom $[A_i, E_j] = \delta_i^j$ (viz [1] str. 26).

Oskulačnímu prostoru $(A_1, A_2, \ldots, A_6)$ kongruence L podél přímky p je dualizací přiřazen bod E_7 duálního prostoru P_6^* a tedy kongruenci L v P_6 plocha L^* v P_6^*, jejíž základní rovnice jsou

$$dE_i = -\sum_{j=1}^{7} \omega_{ji}E_j\,. \quad (i = 1, 2, \ldots, 7) \tag{7}$$

Ze (7) vyplývá, že $\omega_1\omega_2 = 0$ je rovnicí konjugované sítě na L^*, a že plochy (E_6) a (E_4) resp. (E_5) a (E_3) jsou Laplaceovými transformacemi plochy L^* ve směru $\omega_1 = 0$ resp. $\omega_2 = 0$. Snadno se přesvědčíme, že dualizace přiřazuje fokální ploše kongruence L, na níž leží hrany vratu vrstvy rozvinutelných ploch $\omega_1 = 0$ $(\omega_2 = 0)$, kongruenci duálního prostoru vytvořenou tečnami vrstvy čar $\omega_1 = 0$ $(\omega_2 = 0)$ konjugované sítě na L^*.

Dále budeme označovat:

Laplaceovu posloupnost kongruencí v P_6 jako

$$\dots L_{-1}, L, L_1, \dots,$$

Laplaceovu posloupnost příslušných fokálních ploch jako

$$\dots S_{-1}, S_1, S_2, \dots,$$

přičemž $S_{-1} = (A_2)$, $S_1 = (A_1)$, Laplaceovu posloupnost ploch v P_6^* jako

$$\dots L_{-1}^*, L^*, L_1^*, \dots,$$

a přidruženou posloupnost kongruencí v P_6^* jako

$$\dots, S_{-1}^*, S_1^*, \dots,$$

kde $S_{-1}^*(S_1^*)$ je vytvořena tečnami vrstvy čar $\omega_1 = 0$ $(\omega_2 = 0)$ na L^*.

Je-li L' kongruence v P_6', pak o ní i o specializaci jejího reperu budeme předpokládat totéž co o kongruenci L a jejím reperu, pouze odpovídající symboly či rovnice budeme odlišovat čárkou.

Při označení $\tau_{ik} = \omega'_{ik} - \omega_{ik}$ platí o kongruencích L, L' v rozvinutelné korespondenci

$$\tau_{13} = 0, \quad \tau_{24} = 0. \tag{8}$$

Z (3), (3') a (8) vyplývají rovnice:

$$\begin{gathered}
\tau_{33} - \tau_{11} = s_1\omega_1, \quad \tau_{44} - \tau_{22} = s_2\omega_2, \quad \tau_{55} - \tau_{33} = s_3\omega_1, \\
\tau_{66} - \tau_{44} = s_4\omega_2, \\
\mathrm{d}\frac{\alpha_2'}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2'}{\alpha_2}(\tau_{22} - \tau_{11}) = m_2\omega_1, \quad \mathrm{d}\frac{\alpha_1'}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1'}{\alpha_1}(\tau_{11} - \tau_{22}) = m_1\omega_2, \\
\mathrm{d}\frac{b_2'}{b_2} - \frac{b_2'}{b_2}(\tau_{55} - \tau_{77}) = n_2\omega_1, \quad \mathrm{d}\frac{b_1'}{b_1} - \frac{b_1'}{b_1}(\tau_{66} - \tau_{77}) = n_1\omega_2, \\
\mathrm{d}\frac{c_2'}{c_2} - \frac{c_2'}{c_2}(\tau_{77} - \tau_{66}) = p_2\omega_1, \quad \mathrm{d}\frac{c_1'}{c_1} - \frac{c_1'}{c_1}(\tau_{77} - \tau_{55}) = p_1\omega_2.
\end{gathered} \tag{9}$$

2. PROJEKTIVNÍ DEFORMACE 3. ŘÁDU

Nutné a postačující podmínky projektivní deformace 3. řádu kongruencí L, L' uvedené v [3] (Prop. 6) se zjednoduší vzhledem k naší specializaci reperů na

$$\alpha_1' = \varrho^{-2}\alpha_1\,, \quad \alpha_2' = \varrho^2\alpha_2\,, \quad b_1 b_2' = \varrho^{-2} b_1' b_2\,, \quad \varrho \neq 0\,, \tag{10}$$
$$2s_1 + s_3 = 0\,, \quad 2s_2 + s_4 = 0\,.$$

Diferenciálními důsledky rovnic (10) jsou pak relace

$$b_1' c_2' = b_1 c_2\,, \quad b_2' c_1' = b_2 c_1\,, \quad a_1' = a_1\,, \quad a_2' = a_2 \tag{11}$$
$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = m_1 = n_1 = p_1 = m_2 = n_2 = p_2 = 0\,.$$

Odtud a podle [3], rovnice (36), nalezeneme nejobecnější kolineaci K realizující uvedenou deformaci ve tvaru

$$KA_1 = \varrho A_1'\,, \quad KA_2 = \varrho^{-1} A_2'\,, \quad KA_3 = \varrho A_3'\,, \quad KA_4 = \varrho^{-1} A_4'\,, \tag{12}$$
$$KA_5 = \alpha_{51} A_1' + \varrho A_5'\,, \qquad KA_6 = \alpha_{62} A_2' + \varrho^{-1} A_6'\,,$$
$$KA_7 = \alpha_{71} A_1' + \alpha_{72} A_2' + \varrho \frac{b_2'}{b_2} A_7'\,,$$

přičemž

$$3\varrho^{-1}\alpha_{51}\omega_1 = \tau_{53}\,, \quad 3\varrho\alpha_{62}\omega_2 = \tau_{64}\,. \tag{13}$$

Protože $a_1\omega_1\omega_2$ $(a_2\omega_1\omega_2)$ je bodová forma kongruence L_1, (L_{-1}) (viz [3], rov. (20)) a $b_1 c_2 \omega_1 \omega_2$ $(b_2 c_1 \omega_1 \omega_2)$ bodová forma kongruence S_1^* (S_{-1}^*), vyplývá z (11) a z [3], Prop. 1, 2, 3, tvrzení:

Věta 1. *Nechť $C : L \to L'$ je projektivní deformace 3. řádu. Pak C i indukované korespondence $C_i : L_i \to L_i'$ a $c_i^* : S_i^* \to S_i^*$ $(i = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ jsou bodovými deformacemi 2. řádu.*

Poznámka 1. Mnohé vlastnosti kongruencí vnořených do šestirozměrných projektivních prostorů jsou podobné těm, které byly zjištěny ve [2]. Všechny důkazy lze provést metodami užitými ve [2], proto jsou v dalším většinou vypuštěny, nebo jen naznačeny.

3. EXISTENČNÍ VĚTA

Podle (1), (1') a (12) je $\varrho a'/a = 1$. Repery kongruencí lze zvolit tak, že $\varrho = 1$. Za tohoto předpokladu se podmínky (10) zjednoduší, takže trojice (C, L, L'), kde $C : L \to L'$ je projektivní deformace 3. řádu, je dána uzavřeným systémem (2), (3) a

$$\tau_{1i} = \tau_{2i} = \tau_{3i} = \tau_{4i} = 0\ (i = 1, 2, \ldots, 7)\,, \quad \tau_{52} = \tau_{54} = \tau_{61} = \tau_{63} = 0\,,$$
$$\tau_{5j} = \tau_{6j} = 0\ (j = 5, 6, 7)\,, \quad \tau_{7k} = 0\ (k = 3, 4, 7)\,,$$
$$\omega_1 \wedge \tau_{53} = 0\,, \quad \omega_2 \wedge \tau_{64} = 0\,, \quad \omega_1 \wedge \tau_{51} = 0\,, \quad \omega_2 \wedge \tau_{62} = 0\,,$$
$$\alpha_2\omega_1 \wedge \tau_{64} - b_1\omega_2 \wedge \tau_{71} = 0\,, \quad b_2\omega_1 \wedge \tau_{72} - \alpha_1\omega_2 \wedge \tau_{51} = 0\,,$$
$$\omega_1 \wedge \tau_{71} - c_1\omega_2 \wedge \tau_{53} = 0\,, \quad c_2\omega_1 \wedge \tau_{64} - \omega_2 \wedge \tau_{72} = 0\,.$$

Systém není v involuci, proto jej prodloužíme rovnicemi:

$$\tau_{53} = a_{53}\omega_1\,, \quad \tau_{64} = b_{64}\omega_2\,, \quad \tau_{51} = b_2 a_{51}\omega_1\,, \quad \tau_{62} = b_1 b_{62}\omega_2\,,$$
$$\tau_{71} = -\alpha_2 b_{62}\omega_1 - c_1 a_{53}\omega_2\,, \quad \tau_{72} = -c_2 b_{64}\omega_1 - \alpha_1 a_{51}\omega_2\,.$$

Snadno se přesvědčíme, že systém ani teď není v involuci. Dalším prodlužováním jej lze už poměrně snadno uvést do involuce, je však nutno odlišit případ, kdy a_{53} a b_{64} je současně rovné nule.

Věta 2. *Trojice (C, L, L'), kde $C : L \to L'$ je projektivní deformace 3. řádu, existují a závisí na 18 libovolných funkcích jedné proměnné. V singulárním případě, $a_{53} = b_{64} = 0$, trojice (C, L, L') existují a závisí na 14 libovolných funkcích jedné proměnné.*

Poznámka 2. K singulárnímu případu se vrátíme podrobněji v odst. 6.

4. DEFORMACE FOKÁLNÍCH PLOCH A LAPLACEOVÝCH TRANSFORMACÍ

Korespondence $C : L \to L'$ vynucuje přirozeným způsobem korespondence $c_1 : S_1 \to S_1'$, $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$, $C^* : L^* \to L'^*$. Korespondence c_1, c_{-1}, C^* jsou projektivními deformacemi 2. řádu, právě když jsou konjugované nebo C rozvinutelná. Uvažme dále, že příslušné oskulační kolineace, které realizují uvedené deformace, jsou obecně různé. Platí:

Věta 3. *Korespondence $C : L \to L'$ je projektivní deformací 3. řádu (bodovou deformací 1. řádu), právě když projektivní deformace 2. řádu $c_1 : S_1 \to S_1'$, $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$ a $C^* : L^* \to L'^*(c_1 : S_1 \to S_1'$ a $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1})$ jsou současně realizovány společnou oskulační kolineací.*

Nutné a postačující podmínky, aby $c_1 : S_1 \to S_1'$ byla projektivní deformací 3. řádu i příslušnou oskulační kolineací 3. řádu K_1, vypočteme z rovnic

$$K_1\, d^m A_1 = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} {}^1\vartheta_k\, d^{m-k} A_1' \qquad \text{pro } m = 0, 1, 2, 3\,,$$

kde ${}^1\vartheta_k$ je vhodná k-forma, ${}^1\vartheta_0 = \varrho_1 \neq 0$.

Vychází: c_1 je konjugovaná a

$$\alpha_1'\alpha_2' - \alpha_1\alpha_2 = 0\,, \quad a_1' - a_1 = 0\,. \tag{14}$$

Poněvadž c_1 je konjugovaná, je C rozvinutelná a podle (14) jsou si rovny bodové formy kongruencí L, L' a L_1, L_1'. Ze (14) a (9) obdržíme jako diferenciální důsledky vztahy $a_2' = a_2$, $m_1 = m_2 = 0$. Tedy také bodové formy kongruencí L_{-1} a L'_{-1} jsou si rovny. Nejobecnější oskulační kolineace 3. řádu realizující projektivní deformaci 3. řádu c_1 je vyjádřena rovnicemi:

$$\begin{aligned}
&K_1A_1 = \varrho_1 A_1'\,, \quad K_1A_2 = \varrho\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}A_2'\,, \quad K_1A_3 = \varrho_1 A_3'\,, \\
&K_1A_4 = \varrho_1\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}A_4'\,, \quad K_1A_5 = \varrho_1 s_1 A_3' + \varrho_1 A_5'\,, \\
&K_1A_6 = {}^1\alpha_{61}A_1' + \varrho_1\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}s_2A_4' + \varrho_1\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}A_6'\,, \\
&K_1A_7 = {}^1\alpha_{71}A_1' + {}^1\alpha_{73}A_3' + \varrho_1\frac{2s_1+s_3}{b_2}A_5' + \varrho_1\frac{b_2'}{b_2}A_7'\,,
\end{aligned} \tag{15}$$

$$b_2{}^1\alpha_{73} = \varrho_1[ds_1 - s_1(\omega_{33} - \omega_{11}) + \tau_{53}] + \varrho_1 s_1(2\omega_{33} - \omega_{11} - \omega_{53}) + \varrho_1 s_1^2\omega_1\,.$$

Analytické podmínky pro projektivní deformaci 3. řádu $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$ a příslušnou oskulační kolineaci K_{-1} obdržíme ze (14) a (15) záměnou indexů

$$1 \text{ za } 2\,, \quad 3 \text{ za } 4\,, \quad 5 \text{ za } 6 \tag{16}$$

a naopak.

Obdržené výsledky můžeme s použitím Prop. 1, 2 a 3 z [3] shrnout ve věty:

Věta 4. *Korespondence $c_1 : S_1 \to S_1'$ je projektivní deformací 3. řádu, právě když $C : L \to L'$ je bodovou deformací 2. řádu.*

Věta 5. *Nechť $c_1 : S_1 \to S_1'$ je projektivní deformací 3. řádu. Pak také $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$ a všechny indukované korespondence $c_i : S_i \to S_i'$ $(i = \pm 2, \pm 3, \ldots)$ jsou projektivními deformacemi 3. řádu.*

Souvislost mezi projektivními deformacemi 2. řádu C, C_1 a C_{-1} a projektivní deformací 3. řádu $C : L \to L'$ je vyjádřena následující větou:

Věta 6. *Nechť $C : L \to L'$ a indukované korespondence $C_1 : L_1 \to L_1'$ a $C_{-1} : L_{-1} \to L'_{-1}$ jsou projektivními deformacemi 2. řádu. Tyto deformace jsou současně realizovatelné společnou oskulační kolineací, právě když C je projektivní deformací 3. řádu.*

5. DEFORMACE DUÁLNÍCH ÚTVARŮ

Korespondence $C : L \to L'$ vynucuje prostřednictvím dualizace korespondence mezi plochami $C^* : L^* \to L'^*$, $C_i^* : L_i^* \to L_i'^*$ a mezi přidruženými kongruencemi $c_i^* : S_i^* \to S_i'^*$, kde $i = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Aby c_1^* byla projektivní deformací 3. řádu, je nutnou a postačující podmínkou její rozvinutelnost a splnění vztahů

$$(17) \qquad b'_1 c'_2 = b_1 c_2 \,, \quad \alpha'_1 b'_1 b_2 = \alpha_1 b_1 b'_2 \,, \quad 2b_2 n_2 + b'_2 s_3 = 0 \,, \quad 2s_4 + s_2 = 0 \,.$$

Zkoumáním diferenciálních důsledků zjistíme, že tyto podmínky jsou ekvivalentní s (11). Platí tedy:

Věta 7. *Korespondence $C : L \to L'$ je projektivní deformací 3. řádu, právě když $c_1^* : S_1^* \to S_1'^*$ je projektivní deformací 3. řádu.*

Nejobecnější kolineace K_1^*, realizující projektivní deformaci 3. řádu c_1^* je dána rovnicemi:

(18)

$$K_1^* E_7 = {}^1\alpha_{77}^* E'_7 \,, \quad K_1^* E_6 = {}^1\alpha_{66}^* E'_6 \,, \quad K_1^* E_5 = {}^1\alpha_{77}^* \frac{b'_2}{b_2} E'_5 \,, \quad K_1^* E_4 = {}^1\alpha_{66}^* E'_4 \,,$$

$$K_1^* E_3 = {}^1\alpha_{37}^* E'_7 + {}^1\alpha_{77}^* \frac{b'_2}{b_2} E'_3 \,, \quad K_1^* E_2 = {}^1\alpha_{26}^* E'_6 + {}^1\alpha_{66}^* E'_2 \,,$$

$$K_1^* E_1 = {}^1\alpha_{17}^* E'_7 + {}^1\alpha_{16}^* E'_6 + {}^1\alpha_{77}^* \frac{b'_2}{b_2} E'_1 \,,$$

$${}^1\alpha_{77}^* \tau_{53} + 3b_2 {}^1\alpha_{37}^* \omega_1 = 0 \,, \quad 2{}^1\alpha_{66}^* \tau_{64} - 3\,{}^1\alpha_{26}^* \omega_2 = 0 \,,$$

$${}^1\alpha_{66}^* {}^1\alpha_{77}^* = \varrho_1^* \neq 0 \,.$$

Nutné a postačující podmínky pro projektivní deformaci 3. řádu $c_{-1}^* : S_{-1}^* \to S_{-1}'^*$ i příslušnou oskulační kolineaci 3. řádu K_{-1}^* obdržíme z (17) a (18) záměnou indexů podle (16). Tyto podmínky jsou však ekvivalentní s (17). Platí tedy věty:

Věta 8. *Korespondence $c_{-1}^* : S_{-1}^* \to S_{-1}'^*$ je projektivní deformací 3. řádu, právě když $c_1^* : S_1^* \to S_1'^*$ je projektivní deformací 3. řádu.*

Věta 9. *Nechť $C : L \to L'$ nebo $c_1^* : S_1^* \to S_1'^*$ jsou projektivními deformacemi 3. řádu. Pak také indukované korespondence $C_i : L_i \to L'_i$ a $c_i^* : S_i^* \to S_i'^*$ $(i = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ jsou projektivními deformacemi 3. řádu.*

6. SINGULÁRNÍ PROJEKTIVNÍ DEFORMACE 3. ŘÁDU

Je-li $C : L \to L'$ projektivní deformací 3. řádu, pak podle vět 1, 4 a 5 jsou také korespondence $c_1 : S_1 \to S'_1$ a $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$ projektivními deformacemi 3. řádu. Oskulační kolineace 3. řádu K, K_1, K_{-1} realizující tyto deformace jsou obecně různé (viz (12), (15)). Aby kolineace K a K_1 resp. K a K_{-1} mohly splynout, pak nutně musí být

$$\tau_{53} = 0\,, \quad \tau_{64} = 0\,. \tag{19}$$

Odtud máme:

Věta 10. *Nechť $C : L \to L'$ je projektivní deformace 3. řádu, $c_1 : S_1 \to S'_1$ a $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$ jsou vynucené projektivní deformace 3. řádu. Pak deformace C a c_1 jsou realizovatelné společnou oskulační kolineací právě tehdy, jsou-li takto realizovatelné deformace C a c_{-1}.*

Definice. Projektivní deformaci 3. řádu $C : L \to L'$ nazýváme *singulární*, jestliže vynucené projektivní deformace 3. řádu $c_1 : S_1 \to S'_1$ a $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$ jsou realizovány kolineací K (podle E. Čecha).

Na základě věty 2, 10 a vztahů (19) můžeme vyslovit tvrzení:

Věta 11. *Trojice (C, L, L'), kde $C : L \to L'$ je singulární projektivní deformace 3. řádu, existují a závisí na 14 funkcích jedné proměnné.*

Porovnáním kolineací K_1 a K_{-1} ihned obdržíme:

Věta 12. *Korespondence $C : L \to L'$ je singulární projektivní deformací 3. řádu, právě když indukované korespondence $c_1 : S_1 \to S'_1$ a $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$ jsou současně projektivními deformacemi 3. řádu a jsou realizovatelné společnou oskulační kolineací.*

7. SINGULÁRNÍ DEFORMACE LAPLACEOVÝCH TRANSFORMACÍ

Dále chceme určit nutné a postačující podmínky pro to, aby projektivní deformace 3. řádu $c_1^* : S_1^* \to S_1'^*$ byla singulární. Nalezneme proto známým způsobem kolineaci K^*, která realizuje projektivní deformaci 3. řádu $C^* : L^* \to L'^*$ a provonáme ji s kolineací K_1^*. Zjistíme:

Věta 13. *Korespondence $C : L \to L'$ je singulární projektivní deformací 3. řádu, právě když indukovaná korespondence $c_1^* : S_1^* \to S_1'^*$ je singulární projektivní deformací 3. řádu.*