Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

GRUPY BODŮ PŘÍMKY A ROVINNÉ KONFIGURACE

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

(Došlo dne 11. 6. 1970, přepracované dne 16. 9. 1971)

Všechny problémy tohoto článku budeme řešit v euklidovské rovině, rozšířené o nevlastní a komplexní elementy. V literatuře [1] str. 88–89 je definována grupa regulárních bodů rovinné ireducibilní kubiky.

Definice I. Nechť O je regulární bod rovinné ireducibilní kubiky C. Dva regulární body P, Q kubiky C sečteme tak, že třetí průsečík R' jejich spojnice s kubikou C spojíme s O a třetí průsečík R této přímky s kubikou C je součtem daných bodů. Budeme značit $P + Q = R$.

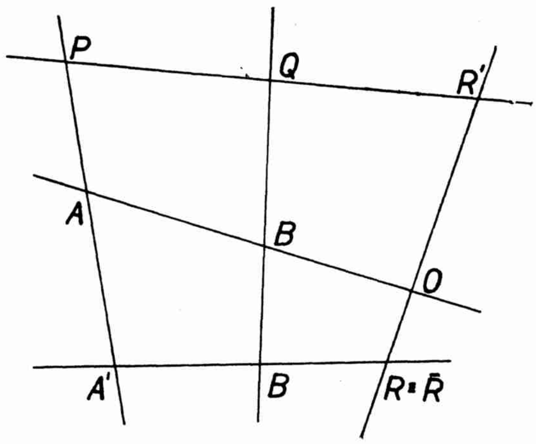
Uvažujme kubiku složenou z jednoduché kuželosečky k a přímky p. Předchozí operace sčítání se dá aplikovat jenom na body kuželosečky k, jestliže $O \in k$, $O \notin p$. V literatuře [2] je dokázáno:

Nechť kubika C je složena z jednoduché kuželosečky k a přímky p. Potom množina bodů kuželosečky k, které jsou regulárními body kubiky C tvoří vzhledem k uvažovanému sčítání komutativní grupu H.

V tomto článku zavedeme jinou definici sčítání bodů kubiky, která se však dá aplikovat na body přímky.

Definice II. Nechť A, B, P a Q jsou regulární body rovinné ireducibilní kubiky C. Označme A' třetí průsečík přímky AP s kubikou C a dále označme B' třetí průsečík přímky BQ s kubikou C. Třetí průsečík R přímky $A'B'$ s kubikou je součtem bodů P a Q. Budeme značit $P + Q = R$.

Dokažme pro ireducibilní kubiku ekvivalenci definic I a II za předpokladu, že třetí průsečík přímky AB z definice II s kubikou je bod O z definice I. (viz obr.).



Obr. 1.

V literatuře [3] str. 423–424 je dokázána věta:

Věta 1. *Tři spojnice všech šesti průsečíku kubiky a dvou přímek protnou kubiku v dalších třech bodech, jež leží rovněž v přímce.*

K této větě a předchozím definicím dodejme, že v případě splynutí některých dvojic bodů, je jejich spojnicí tečna ke křivce.

Nechť $P + Q = R$ podle definice I a $P + Q = \bar{R}$ podle definice II. Uvažujme přímky PQ, AB a $A'B'$. Všechny tyto body P, Q, A, B, A', B' leží na dvou přímkách a tedy podle věty 1 třetí průsečíky přímek PQ, AB a $A'B'$ s kubikou leží v přímce. Tyto body jsou však R', O a $\bar{R}$ a tedy $\bar{R}$ je třetí průsečík přímky $R'O$ s kubikou. Tento bod je však jednoznačně určen a proto musí být $R \equiv \bar{R}$.

Uvažujeme-li nyní kubiku složenou z jednoduché kuželosečky k a přímky p, potom můžeme aplikovat definici II a zavést sčítání bodů přímky p. Abychom konstrukci zjednodušili, vezmeme případ $A \equiv B$.

Definice III. Nechť $E \in k$, $E \notin p$. $P + Q = R$, kde R je průsečík přímky p s přímkou $P'Q'$, P' je druhý průsečík přímky PE s kuželosečkou k a Q' je druhý průsečík přímky QE s kuželosečkou k.

Věta 2. *Nechť kubika C je složena z jednoduché kuželosečky k a přímky p. Množina bodů přímky p, které jsou regulární body kubiky C tvoří vzhledem k definovanému sčítání komutativní grupu H.*

Důkaz. Zřejmě existuje kolineace K, která převádí kuželosečku k v kuželosečku $\bar{k}$ a přímku p v nevlastní přímku $\bar{p}$ roviny. Bod E nechť přejde v bod $O \in \bar{k}$. Potom přiřazení i, které bodu $A \in \bar{p}$ (A je regulární bod kubiky $\bar{C}$) přiřazuje bod $A' = $ p$= (AO \cap \bar{k}) \setminus \{O\}$, určuje na k sčítání $A' + B' = (A + B)'$, které bylo zavedeno v [2] před větou 20. Přiřazení i je zřejmě isomorfismus a uvažovaná grupa H je v tomto isomorfismu i isomorfní s grupou z věty 20 v [2].

Vezmeme-li speciálně K takovou, že reálné body $\bar{k}$ tvoří jednotkovou kružnici se středem v průsečíku S immaginární a reálné osy Gaussovy roviny a O bude totožný s obrazem čísla jedna, pak je zřejmé, že reálné body nevlastní přímky p tvoří vzhledem k uvažovanému sčítání grupu isomorfní multiplikativní grupě komplexních jednotek. Obsahuje tedy H cyklické podgrupy libovolného konečného řádu n. Prvky těchto cyklických grup tvoří na $\bar{k}$ pravidelný n-úhelník s vrcholem v O. Platí tedy:

Věta 3. *Nevlastní body určené uhlopříčkami a stranami pravidelného n-úhelníka tvoří vzhledem k uvažovanému sčítání bodů přímky, grupu G řádu n.*

Věta 4. *Nechť p je přímka komplexně projektivní roviny. Potom můžeme určit takové sčítání bodů přímky p, že vzhledem k tomuto sčítání tvoří body přímky p grupu H a tato grupa má podgrupy všech konečných řádů.*

Nyní odvodíme na základě předcházejících výsledků, celkem šest typů rovinných konfigurací.

Věta 5. *V rovině existují konfigurace typu* $(3n_{n-1}\ n(n-1)_3)$, *ke n je přirozené číslo větší než tři.*

Důkaz. Uvažujme kubiku složenou z kružnice k a nevlastní přímky. Pro dané n sestrojíme na kružnici k dva pravidelné n-úhelníky $(A'_1, \ldots, A'_n)$ a $(A''_1, \ldots, A''_n)$ z nichž jeden je vzhledem k druhému pootočen kolem středu kružnice k o úhel π/n. Zřejmě spojnice $A'_iA'_j$ a $A''_iA''_j$ $(i \neq j$ a $i, j = 1, \ldots, n)$ mají n nevlastních bodů $A_1, \ldots, A_n$. Na nevlastní přímce pak $A_1, \ldots, A_n$ tvoří grupu při sčítání definovaném pomocí k a A'_1 a zároveň (jinou) grupu při sčítání pomocí k a A''_1. Nyní dokážeme, že body $A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_n, A''_1, \ldots, A''_n$ v počtu $3n$ jsou body hledané konfigurace. Přímky konfigurace jsou přímky $A'_iA'_j$ a $A''_iA''_j$, kde $i \neq j$ a těchto přímek je zřejmě $n(n-1)$ a na každé z nich leží právě tři body konfigurace. Každým bodem A'_i a A''_i prochází právě $n-1$ těchto přímek. Zbývá dokázat, že také body A_i prochází právě $n-1$ těchto přímek. Tečny v bodech A'_i a A''_i musí procházet některým z bodů A_i (protože body A_i tvoří grupu). Bodem, který neleží na kružnici procházejí nejvýše dvě její tečny a proto každým bodem A_i prochází právě dvě uvažované tečny. Každým bodem A_i prochází tedy nejvýše $n-1$ přímek uvažované konfigurace. Protože těchto přímek je právě $n(n-1)$, musí procházet každým bodem A_i právě $n-1$ těchto přímek.

Prozkoumejme nyní podrobněji konfiguraci z věty 5 pro sudé n. Každým bodem A_i prochází buď právě $n/2$ přímek $A'_iA'_j$ a $(n-2)/2$ přímek $A''_iA''_j$, nebo $n/2$ přímek $A''_iA''_j$ a $(n-2)/2$ přímek $A'_iA'_j$. Vynechme v dané konfiguraci $n(n-2)/2$ přímek a to takových, že v bodě A_i, kterým prochází právě $n/2$ přímek $A'_iA'_j$ vynecháme $(n-2)/2$ přímek $A''_iA''_j$ a v bodě A_i, kterým prochází právě $n/2$ přímek $A''_iA''_j$ vynecháme $(n-2)/2$ přímek $A'_iA'_j$. Zřejmě vynecháme ty přímky $A'_iA'_jA_i(A''_iA''_jA_i)$, které jsou rovnoběžné s tečnami uvažované kružnice v bodech $A'_i(A''_i)$. Každým bodem A_i prochází nyní právě $n/2$ přímek. Bodem $A'_i(A''_i)$ prochází však také $n/2$ přímek, neboť každým tímto bodem prochází právě $n/2$ přímek konfigurace rovnoběžných se stranami daného n-úhelníka a právě $(n-2)/2$ přímek rovnoběžných s tečnami ve vrcholech daného n-úhelníka k opsané kružnici. Tím jsme dokázali:

Věta 6. *V rovině existují konfigurace typu* $(3n_{n/2}\ n\,.\,n/2_3)$, *kde n je sudé přirozené číslo větší než čtyři.*

Vynecháme nyní v konfiguraci uvažované ve větě 5 pro n sudé $n\,.\,n/2$ přímek a to takových, že v bodě A_i, kterým prochází právě $(n-2)/2$ přímek $A'_iA'_j$ vynecháme $n/2$ přímek $A''_iA''_j$ a v bodě A_i, kterým prochází právě $(n-2)/2$ přímek $A''_iA''_j$ vynecháme $n/2$ přímek $A'_jA'_i$. Zcela obdobnou úvahou, která předcházela větě 6, dokážeme, že nyní každým bodem A_i, A'_i a A''_i prochází právě $(n-2)/2$ přímek $A_iA'_iA'_j$ resp. $A_iA''_iA''_j$. Platí tedy: