ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 97 * PRAHA 9. 8. 1972 * ČÍSLO 3

EINE BENUTZUNG DER ZAHLENZERLEGUNG ZUR BESTIMMUNG DER ANZAHL UNISOMORPHER ZYKLEN IN ξ-TURNIEREN

MICHAL BUČKO, Košice

(Eingegangen am 7. October 1970)

1.

In der ganzen Arbeit verstehen wir unter einer Zahl eine natürliche Zahl.

Bezeichnen wir $p_n(2n + 1, k)$ die Anzahl der Zerlegung der Zahl $2n + 1$ in k Zahlen, aus denen keine grösser als die Zahl n ist.

Weiter leiten wir die Formeln für die Anzahl der Zerlegungen $p_n(2n + 1, k)$ ab, wenn $k = 3, 4$ ist.

Satz 1. *Es sei $p_n(2n + 1,3)$ die Anzahl der Zerlegungen der Zahl $2n + 1$ in 3 Zahlen, die nicht grösser als die Zahl n sind. Dann gilt*

$$p_n(2n + 1, 3) = \sum_{k=0}^{[(n-1)/3]} \left[\frac{n + 1 - 3k}{2}\right]. \tag{1}$$

Beweis. Gestalten wir folgenderweise das Schema 1, in dem die Summe jeder Spalte $2n + 1$ ist:

$n\ n\ \ldots\ n$	$n-1\ \ n-1\ \ldots\ n-1$	$\ldots$	$\ldots\ h$
$n\ \ n-1\ \ldots\ r_1$	$n-1\ \ n-2\ \ldots\ r_2$	$\ldots$	$\ldots\ r_p$
$1\ \ 2\ \ldots\ s_1$	$3\ \ 4\ \ldots\ s_2$	$\ldots$	$\ldots\ s_p$

Schema 1

Dabei legen wir $n \geqq r_1 \geqq s_1$, $n - 1 \geqq r_2 \geqq s_2$, $h \geqq r_p \geqq s_p$, $r_1 + s_1 = n + 1$, $r_2 + s_2 = n + 2, \dots$ und

$$r_p + s_p = \begin{cases} \frac{2}{3}(2n + 1), \text{ wenn } 2n + 1 \equiv 0 \,(\text{mod } 3) \text{ ist,} \\ 2\left[\dfrac{2n + 1}{3}\right], \text{ wenn } 2n + 1 \equiv 1 \,(\text{mod } 3) \text{ ist,} \\ 2\left[\dfrac{2n + 1}{3}\right] + 1, \text{ wenn } 2n + 1 \equiv 2 \,(\text{mod } 3) \text{ ist,} \end{cases}$$

$$h = \begin{cases} \dfrac{2n + 1}{3}, \text{ wenn } 2n + 1 \equiv 0 \,(\text{mod } 3) \text{ ist,} \\ \left[\dfrac{2n + 1}{3}\right] + 1, \text{ wenn } 2n + 1 \equiv 0 \,(\text{mod } 3) \text{ ist} \end{cases}$$

legen.

Die Anzahl der Spalten im Schema 1 ist der Zahl $p_n(2n + 1, 3)$ gleich. Wir überzeugen uns leicht aus dem Schema 1, dass für eine beliebige Zahl n

$$p_n(2n + 1, 3) = \left[\frac{n + 1}{2}\right] + \left[\frac{n - 2}{2}\right] + \left[\frac{n - 5}{2}\right] + \dots + \left[\frac{n + 1 - 3\left[\frac{n - 1}{3}\right]}{2}\right]$$

gilt.

Damit ist der Beweis des Satzes 1 beendet.

Es ist ersichtlich, dass $[a_1] + \dots + [a_k] \leqq a_1 + \dots + a_k$ für beliebige Zahlen $a_1, \dots, a_k$ gilt. Darum ist:

$$p_n(2n + 1, 3) \leqq \frac{n + 1}{2} + \frac{n + 1 - 3 \,.\, 1}{2} + \frac{n + 1 - 3 \,.\, 2}{2} + \frac{n + 1 - 3 \,.\, 3}{2} + \dots +$$

$$+ \frac{n + 1 - 3 \,.\left(\frac{n - 1}{3}\right)}{2} = \frac{1}{2}\left\{(n + 1)\left(\frac{n - 1}{3} + 1\right) - 3\left(1 + 2 + \dots + \frac{n - 1}{3}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\binom{n + 3}{2}.$$

Wenn wir weiter überlegen, dass $m - 1 \leqq [m]$ für jede Zahl m gilt und dass in der Zahlenfolge $n + 1, n - 2, n - 5, \dots$ gerade und ungerade Zahlen sich gegenseitig abwechseln, dann bekommen wir die untere Grenze für $p_n(2n + 1, 3)$, wenn wir von $\frac{1}{6}\binom{n+3}{2}$ die Zahl $\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{3}+1\right)$ subtrahieren. Es gilt also

$$\frac{1}{6}\binom{n+2}{2} \leqq p_n(2n+1,3) \leqq \frac{1}{6}\binom{n+3}{2}. \tag{2}$$

Satz 2. *Es sei $p_n(2n+1,4)$ die Anzahl der Zerlegungen der Zahl $2n+1$ in 4 Zahlen, die nicht grösser als die Zahl n sind. Dann gilt*

$$p_n(2n+1,4) = \sum_{\substack{i=0 \\ 0 \leqq 3i+j \leqq n-2}} \sum_{j=0} \left[\frac{n-3i-j}{2}\right]. \tag{3}$$

Beweis. Gestalten wir das Schema 2, in dem die Summe der Elemente in jeder Spalte $2n+1$ ist, folgenderweise:

$n \quad \dots n$	$n-1 \dots n-1$	$\dots$	$\dots q$
$n-1 \dots x_1$	$n-1 \dots x_2$	$\dots$	$\dots x_p$
$1 \quad \dots y_1$	$2 \quad \dots y_2$	$\dots$	$\dots y_p$
$1 \quad \dots z_1$	$1 \quad \dots z_2$	$\dots$	$\dots z_p$

Schema 2

Wir legen dabei $n \geqq x_1 \geqq y_1 \geqq z_1$, $n-1 \geqq x_2 \geqq y_2 \geqq z_2, \dots, q \geqq x_p \geqq y_p \geqq z_p$, $x_1 + y_1 + z_1 = n+1$, $x_2 + y_2 + z_2 = n+2, \dots, q + x_p + y_p + z_p = 2n+1$.

Wenn wir die Ergebnisse des Schemas 1 für die zweite, dritte und vierte Spalte des Schemas 2 benutzen, bekommen wir

$$p_n(2n+1,4) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n-3}{2}\right] + \dots + \left[\frac{n-3\,.\left[\frac{n-2}{3}\right]}{2}\right] +$$

$$+ \left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{n-4}{2}\right] + \dots + \left[\frac{n-1-3\,.\left[\frac{n-3}{3}\right]}{2}\right] + \dots + \left[\frac{d}{2}\right],$$

wobei d eine der Zahlen 2, 3, 4 ist. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Aus (2) und (3) folgt dass

$$\frac{1}{6}\binom{n+1}{2} + \frac{1}{6}\binom{n}{2} + \dots + \frac{1}{6}\binom{3}{2} \leqq$$

$$\leqq p_n(2n+1,4) \leqq \frac{1}{6}\binom{n+2}{2} + \frac{1}{6}\binom{n+1}{2} + \dots + \frac{1}{6}\binom{4}{2},$$

ist, woraus wir nach einer Berechnung

(4) $$\frac{1}{6}\left\{\binom{n+2}{3} - 1\right\} \leqq p_n(2n+1, 4) = \frac{1}{6}\left\{\binom{n+3}{3} - 4\right\},$$

bekommen.

In der Tabelle 1 werden die Zahlen $p_n(2n+1, 3)$ und $p_n(2n+1, 4)$ für $n = 1, 2, \ldots, 10$ angeführt.

Tab. 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_n(2n+1, 3)$	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12
$p_n(2n+1, 4)$	0	1	2	4	7	11	16	23	31	41

2.

A. Kotzig behandelt in der Arbeit [1] die Zyklen in Turnieren und führt eine Definition spezieller Turniere an, woher wir die folgende Definition übernehmen:

Definition 1. Es sei G ein Turnier mit m Knotenpunkten. Wir nennen G genau dann ein ξ-Turnier, wenn wir dessen Knotenpunkten so numerieren können, dass für jedes Paar der Indexen $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Folgendes gilt: Wenn G die Kante $\overrightarrow{v_iv_j}$ enthält, dann enthält G auch die Kante $\overrightarrow{v_{i+1}v_{j+1}}$ (wobei wir $v_{m+1} = v_1$ legen).

Es ist ersichtlich, dass jedes ξ-Turnier eine ungerade Anzahl von Knotenpunkten enthält.

Es sei G ein ξ-Turnier mit $2n + 1$ Knotenpunkten. Nehmen wir die Kante $\overrightarrow{v_iv_j}$ des Graphes G. Benennen wir eine gleichzeitige Vergrösserung der beiden Indexe um eins, bei der wir aus der Kante $\overrightarrow{v_iv_j}$ die Kante $\overrightarrow{v_{i+1}v_{j+1}}$ bekommen die Umdrehung der Kante $\overrightarrow{v_iv_j}$ (dabei ist $v_{i+k(2n+1)} = v_i$ für $k = 1, 2, \ldots$). Wir bezeichnen die Kantenlänge $\overrightarrow{v_iv_j}$ ($\overrightarrow{v_jv_i}$) des Graphes G mit d_{ij} und wir definieren:

(6) $$d_{ij} = \min\left(|i-j|, 2n+1-|i-j|\right).$$

Bei so einer Definition der Kantenlänge gibt es nur Kanten der Länge $1, 2, \ldots, n$, wobei es in G genau $2n + 1$ Kanten der Länge i ($i = 1, 2, \ldots, n$) gibt. Es ist ersichtlich, dass die Kantenlänge bei der Umdrehung (auch bei der vielfachen Umdrehung) sich nicht wechselt.

Es sei C ein gegebener Zyklus des Graphes G. Eine Umdrehung des Zyklus C sei die gleichzeitige Umdrehung aller seiner Kanten genannt.

Definition 2. Unter der Länge des Zyklus C verstehen wir die Anzahl seiner Kanten.

Es sei G ein ξ-Turnier mit $2n + 1$ Knotenpunkten. Bezeichnen wir $S(G, k)$ die Summe der Kantenlängen des Zyklus der Länge k des Graphes G. Aus der Definition 2 und aus (6) folgt, dass

$$3 \leqq S(G, k) \leqq \binom{2n+1}{2} \quad \text{ist.}$$

Betrachten wir soein spezielles ξ-Turnier mit den Knotenpunkten $v_1, v_2, \ldots, v_{2n+1}$, das die Kanten

$$\overrightarrow{v_1v_2}, \overrightarrow{v_1v_3}, \overrightarrow{v_1v_4}, \ldots, \overrightarrow{v_1v_{n+1}} \tag{7}$$

enthält und bezeichnen wir es mit G_1. Aus (7) und aus der Definition 1 folgt, dass der Graph G_1 genau folgende Kanten enthält:

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{v_1v_2}, \overrightarrow{v_2v_3}, \ldots, \overrightarrow{v_{2n}v_{2n+1}}, \overrightarrow{v_{2n+1}v_1}, \\ \overrightarrow{v_1v_3}, \overrightarrow{v_2v_4}, \ldots, \overrightarrow{v_{2n}v_1}, \overrightarrow{v_{2n+1}v_2}, \\ \overrightarrow{v_1v_4}, \overrightarrow{v_2v_5}, \ldots, \overrightarrow{v_{2n}v_2}, \overrightarrow{v_{2n+1}v_3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overrightarrow{v_1v_n}, \overrightarrow{v_2v_{n+1}}, \ldots, \overrightarrow{v_{2n}v_{n-2}}, \overrightarrow{v_{2n+1}v_{n-1}}, \\ \overrightarrow{v_1v_{n+1}}, \overrightarrow{v_2v_{n+2}}, \ldots, \overrightarrow{v_{2n}v_{n-1}}, \overrightarrow{v_{2n+1}v_n}. \end{array} \tag{8}$$

Aus (6) folgt, dass alle Kanten in der ersten Zeile die Länge 1, der in zweiten Zeile die Länge 2, usw. bis in der n-en Zeile die Länge n haben.

Lemma 1. *Es seinen k, p solche ganzen Zahlen, für die $1 \leqq p \leqq n$, $3 \leqq k \leqq 2n + 1$ gilt. Es sei G_1 ein ξ-Turnier, das die Kanten (7) enthält. Bezeichnen wir $S(G_1, k)$ die Summe der Kantenlängen von einem beliebigen Zyklus der Länge k des Graphes G_1. Dann gilt*

$$S(G_1, k) = p(2n + 1). \tag{9}$$

Der Beweis folgt aus (6) und (8). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit genügt es die Summe der Kantenlängen der Zyklen der Länge k zu untersuchen, welche Zyklen durch einen fest ausgewählten Knotenpunkt gehen (z. B. v_1).

Bemerkung 1. Auf dem Grund von (8) überzeugen wir uns leicht, dass $S(G_1, 3) = 2n + 1$, $S(G_1, 4) = 2n + 1$ ist.

Satz 3. *Es sei G_1 ein ξ-Turnier mit $2n + 1$ Knotenpunkten, welches die Kanten (8) enthält. Es seien $p_n(2n + 1, 3)$ und $p_n(2n + 1, 4)$ die Zahlen aus den Sätzen 1 und 2. Bezeichnen wir $Q(G_1, k)$ die Anzahl der unisomorphen Zyklen des Graphes G_1*