Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

ÜBER DIE ZERLEGUNG VON LINEAREN HOMOGENEN DIFFERENTIALOPERATOREN IN OPERATOREN ERSTER ORDNUNG

JAROMÍR SUCHOMEL, Brno

(Eingegangen am 26. October 1970)

Mit $C_n(I)$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller Funktionen $y(x)$, die im Intervall I stetige Ableitungen bis zur n-ten Ordnung einschließlich besitzen. Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n-i)} = 0 \quad \text{mit} \quad a_i \in C_0(I) \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots, n\,. \tag{1}$$

Jeder Funktion $y \in C_n(I)$ ordnen wir die Funktion $z = \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n-i)}$ zu. Diese Zurodnung ist ein Differentialoperator n-ter Ordnung mit dem Definitionsbereich $C_n(I)$. Wir bezeichnen ihn mit $A = \sum_{i=0}^{n} a_i D^{n-i}$ und nennen ihn den durch die Gleichung (1) erzeugten Operator. In der oben eingeführten Schreibweise gilt also $z = Ay$. Ist $a_0 \neq 0$ für alle $x \in I$, so ist A ein regulärer Operator.

Es seien zwei Differentialoperatoren B, C gegeben, für die $Ay = B(Cy)$ für alle $y \in C_n(I)$ gilt. Das symbolische Produkt BC nennt man die Zerlegung von A. Mit den Zerlegungen von regulären Operatoren von der Form $A = \prod_{i=n}^{1} A_i$, wo A_i reguläre Operatoren erster Ordnung sind, befaßten sich z. B. Mammana in [1] und Ascoli in [2]. In der Arbeit [3] wurden die Zerlegungen von der Form

$$u^{2n} Y_n = [u^2 D + a_1 u^2 - (n-1)\, uu']^n \tag{2}$$

studiert, wo Y_n der reguläre, durch die iterierte Differentialgleichung

$$I_n(y; a_1, a_2) = 0 \quad \text{mit} \quad a_i \in C_{n-i} \quad \text{für} \quad i = 1, 2\,, \quad \text{siehe [3; S. 49]}\,, \tag{3}$$

erzeugte Operator ist. Die Funktion u ist ein Integral der Gleichung

$$y'' + \frac{3}{n+1}(a_2 - a_1' - a_1^2)\, y = 0 \tag{4}$$

und kann also isolierte Nullstellen haben. Die Aufgabe dieser Arbeit ist zu jedem regulären Operator A n-ter Ordnung eine Funktion $f \in C_0(I)$ zu suchen, sodaß $fA = \prod_{i=n}^{1} A_i$ gilt. Vgl. [4].

Das Symbol $W(y_1, y_2, \dots, y_s) = v_s$ bedeutet die Wronskische Determinante von $y_1, y_2, \dots, y_s \in C_s(I)$ und $W(y_1, y_2, \dots, y_s, D)$ ist der durch die Differentialgleichung $W(y_1, y_2, \dots, y_s, y) = 0$ erzeugte Operator.

1. Lemma. *Es seien Funktionen $y_i \in C_s(I)$ für $i = 1, 2, \dots, s$, $2 \leqq s$, gegeben. Dann gilt*

$$v_{s-1}\, W(y_1, y_2, \dots, y_s, D) = (v_s D - v_s')\, W(y_1, y_2, \dots, y_{s-1}, D)\,. \tag{5}$$

Beweis. Die Formel (5) wird in der Form

$$W(y_1, y_2, \dots, y_{s-1})\, W(y_1, y_2, \dots, y_s, y) =$$
$$= W[W(y_1, y_2, \dots, y_s), W(y_1, y_2, \dots, y_{s-1}, y)]$$

in [5; S. 403] bewiesen.

2. Lemma. *Es seien Funktionen $y_i \in C_{n-1}(I)$ für $i = 1, 2, \dots, n$ gegeben, für die $v_n \neq 0$ für alle $x \in I$ in Kraft ist. Dann können die Funktionen v_s für $s = 1, 2, \dots, n$ nur isolierte Nullstellen haben.*

Beweis folgt aus dem Satz 1 der Arbeit [6].

3. Lemma. *Es seien Funktionen $y_i \in C_s(I)$ für $i = 1, 2, \dots, s$ gegeben. Dann gilt*

$$u_s\, W(y_1, y_2, \dots, y_s, D) = \prod_{i=s}^{1} (b_i D - b_i') \tag{6}$$

mit

$$b_i = v_i u_{i-1} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, s\,, \quad u_1 = u_0 = 1 \tag{7}$$
$$u_i = \prod_{k=1}^{i-1} v_k^{2^{i-k-1}} \quad \text{für} \quad i = 2, 3, \dots, s\,.$$

Beweis wird mittels Induktion in bezug auf s vermöge (5) und $u_s = u_{s-1}^2 v_{s-1}$ durchgeführt.

4. Satz. *Es seien die Gleichung (1) mit $a_0 \neq 0$ für alle $x \in I$ und ihr beliebiges Hauptsystem $y_1, y_2, \dots, y_n \in C_n(I)$ gegeben. Dann existieren Funktionen $b_i \in$ $\in C_{n+1-i}(I)$ für $i = 1, 2, \dots, n$ und eine Funktion $f \in C_0(I)$, die nur isolierte Nullstellen haben kann, sodaß folgendes gilt*

$$f \sum_{i=0}^{n} a_i D^{n-i} = \prod_{i=n}^{1} (b_i D - b_i')$$
$$\Big\{\prod_{i=s}^{1} (b_i D - b_i')\Big\}\, y_k = 0 \quad \text{für} \quad s = 1, 2, \dots, n\,, \quad k = 1, 2, \dots, s\,.$$