Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

LJAPUNOVSKÉ FUNKCE V TEORII OMEZENOSTI ABSTRAKTNÍCH RESTRINGOVANÝCH PROCESŮ

FRANTIŠEK TUMAJER, Liberec

(Došlo dne 21. srpna 1970)

ÚVOD

V práci [1] zavádí J. NAGY pojem abstraktního regulovaného procesu, který je bezprostředně spjat s pojmem abstraktního procesu uvedeného O. HÁJKEM na symposiu EQUADIFF II. Abstraktní regulovaný proces není sice abstraktním procesem, ale ukazuje se, že má s ním mnoho společných vlastností. V práci [2] jsou studovány pomocí ljapunovských funkcí vlastnosti omezenosti abstraktních procesů. V předložené práci užíváme podobných metod ke studiu silné a slabé omezenosti tzv. abstraktních restringovaných procesů; jejichž speciálním případem jsou regulované procesy z práce [1]. Připomeneme si proto nejprve základní definice a označení z prací [1] a [2].

Symboly R^1, R^0, R^+ budou značit po řadě následující množiny: $(-\infty, +\infty)$, $\langle 0, +\infty)$, $(0, +\infty)$. R značí danou neprázdnou podmnožinu množiny R^1, P a W dané abstraktní množiny. V textu budeme používat zobrazení projekce, které definujeme následujícím způsobem. Nechť je dán systém množin X_j pro $j = 1, 2, \ldots, n$. Pro každou kombinaci $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ přirozených čísel takových, že $1 \leqq i_s < i_{s+1} \leqq n$ pro $1 \leqq s \leqq k - 1$, definujeme

$$\mathrm{proj}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to X_{i_1} \times X_{i_2} \times \ldots \times X_{i_k}$$

předpisem

$$\mathrm{proj}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}) .$$

Dále se budeme zabývat jistou relací t na množině $P \times W \times R$. Předpokládáme, že relace t má vždycky následující vlastnost:

(1) je-li $(y, w_1, \beta), (x, w, \alpha) \in P \times W \times R$, $(y, w_1, \beta)\, t(x, w, \alpha)$, pak $\beta \geqq \alpha$.

Každá taková relace určuje systém relací

(2) $$\{_\beta t_\alpha : \beta \geqq \alpha \text{ v } R\} \quad \text{na} \quad P \times W$$

definovaných vztahem

(3) $$(y, w_1)\, _\beta t_\alpha (x, w) \Leftrightarrow (y, w_1, \beta)\, t(x, w, \alpha)$$

a také obráceně každý systém relací (2) definuje pomocí vztahu (3) relaci t na $P \times \times W \times R$. Je-li t relace na množině $P \times W \times R$, pak označíme

$$E = \text{domain}\ t\,,$$

$$D = \{(\vartheta, x, w, \alpha) \in R \times P \times W \times R : (y, w_1, \vartheta)\, t(x, w, \alpha) \text{ pro nějaké } (y, w_1) \in P \times W\}\,,$$

$$_\vartheta t_\alpha(x, w) = \{(y, w_1) \in P \times W : (y, w_1, \vartheta)\, t(x, w, \alpha)\}$$

a zobrazení

$$\varepsilon : E \to (-\infty, +\infty\rangle : \varepsilon(x, w, \alpha) = \sup\{\beta \in R : (\beta, x, w, \alpha) \in D\}\,.$$

1. DEFINICE ABSTRAKTNÍHO RESTRINGOVANÉHO PROCESU

1.1. V této části připomeneme nejdříve definici abstraktního procesu z práce [2] a zavedeme pojem abstraktního restringovaného procesu. Budeme přitom bez dalších poznámek používat označení a konvencí zavedených v úvodní části. Identickou relaci na $P \times W$ označíme $1_{P \times W}$.

1.2. Definice. Říkáme, že t je *proces* na $P \times W$ nad R, právě když P, W jsou množiny, $R \subset R^1$, t je relace na $P \times W \times R$ vyhovující podmínce

(1) $$_\beta t_\alpha \Rightarrow \beta \geqq \alpha \quad \text{pro všechna} \quad \alpha, \beta \in R$$

a mající následující dvě vlastnosti:

(i) $_\alpha t_\alpha \subset 1_{P \times W}$ pro všechna $\alpha \in R$,
(ii) $_\gamma t_\beta \circ {_\beta t_\alpha} = {_\gamma t_\alpha}$ pro všechna $\beta \in \langle \alpha, \gamma \rangle$ v R.

Říkáme, že proces t je *lokální*, resp. *globální*, právě když pro každé $(x, w, \alpha) \in E$ platí $\varepsilon(x, w, \alpha) > \alpha$, resp. $\varepsilon(x, w, \alpha) = +\infty$.

1.3. Definice. Nechť t je proces na $P \times W$ nad R. Říkáme, že t *připouští periodu* $\tau \in R^1$, právě když pro všechna $\beta \geqq \alpha$ v R platí

$$_{\beta-\tau}t_{\alpha-\tau} = {_\beta t_\alpha} = {_{\beta+\tau}t_{\alpha+\tau}}\,.$$

1.4. Definice. Nechť t je proces na $P \times W$ nad R. Říkáme, že σ je *řešením* procesu t, právě když

(i) σ je parciální zobrazení $R \to P \times W$,
(ii) domain σ je interval v R,
(iii) $(\sigma(\vartheta), \vartheta)\ t(\sigma(\alpha), \alpha)$ platí pro všechna $\vartheta \geqq \alpha$ v domain σ.

Říkáme, že t je *úplný vzhledem k řešením*, právě když ke každé dvojici (x, w, α), $(y, w_1, \beta) \in E$, $(y, w_1, \beta)\ t(x, w, \alpha)$ existuje řešení σ takové, že $\sigma(\alpha) = (x, w)$, $\sigma(\beta) = (y, w_1)$.

1.5. Poznámka. Je-li σ řešením procesu t, $\alpha \in$ domain σ, pak říkáme, že σ prochází bodem (x, w, α), právě když $\sigma(\alpha) = (x, w)$.

1.6. Definice. Nechť t je proces na $P \times W$ nad R. *Restringovaným procesem* p na P nad R nazýváme relaci p mezi $P \times W \times R$ a $P \times R$ definovanou takto:

$$(z, \vartheta)\ p(x, w, \alpha)\,, \text{ právě když existuje } w_1 \in W \text{ takové, že platí } (z, w_1, \vartheta)\ t(x, w, \alpha)\,.$$

Říkáme, že restringovaný proces p je *lokální* (*globální*), resp. *připouští periodu* $\tau \in R^1$, právě když t je lokální (globální), resp. připouští periodu τ.

1.7. Lemma. *Nechť p je restringovaný proces procesu t. Pak platí*

$$(z, \vartheta)\ p(x_1, w_1, \alpha_1),\ (x_1, w_1, \alpha_1)\ t(x, w, \alpha) \Rightarrow (z, \vartheta)\ p(x, w, \alpha)\,.$$

Důkaz plyne přímo z definice 1.6.

1.8. Definice. Nechť p je restringovaný proces procesu t. Zobrazení $V : E \to R^0$ nazýváme *ljapunovskou funkcí* restringovaného procesu p, právě když je V nerostoucí podél p, tj. právě když ze vztahů

$$(x_j, w_j, \alpha_j) \in E\,, \quad j = 1, 2\,, \quad (x_2, w_2, \alpha_2)\ t(x_1, w_1, \alpha_1) \quad \text{plyne}$$
$$V(x_2, w_2, \alpha_2) \leqq V(x_1, w_1, \alpha_1)\,.$$

1.9. Definice. Nechť p je restringovaný proces procesu t. Říkáme, že parciální zobrazení $s : R \to P$ je *řešením* restringovaného procesu p, právě když existuje řešení σ procesu t takové, že $s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$.

Říkáme, že p je *úplný vzhledem k řešením*, právě když t je úplný vzhledem k řešením.

1.10. Definice. Nechť p je restringovaný proces procesu t. Říkáme, že zobrazení $V : E \to R^0$ je *slabě ljapunovskou funkcí* restringovaného procesu p, právě když ke každému $(x, w, \alpha) \in E$ existuje řešení σ procesu t takové, že domain $\sigma \supset \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ a V je nerostoucí podél σ, tj.

$$V(\sigma(\vartheta), \vartheta) \leqq V(\sigma(\beta), \beta) \text{ pro všechna } \alpha \leqq \beta \leqq \vartheta < \varepsilon(x, w, \alpha) \quad \text{v} \quad R\,.$$

2. SILNÁ OMEZENOST RESTRINGOVANÝCH PROCESŮ

2.1. Označení. V této části předpokládáme, že jsou dány restringovaný proces p procesu t, neprázdná množina

(1) $$m \subset P \times R$$

a zobrazení

(2) $$g : P \times R \to R^0$$

tak, že platí

(3) $$g(x, \alpha) = 0 \Leftrightarrow (x, \alpha) \in m\,.$$

2.2. Definice. Říkáme, že p je *silně omezený* vzhledem k m, právě když existuje zobrazení

(1) $$\varphi : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+$$

takové, že platí

(2) $$(\vartheta, x, w, \alpha) \in D\,, \quad (z, \vartheta)\, p(x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varphi(x, \alpha)\,.$$

2.3. Věta. *p je silně omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení*

(1) $V : E \to R^0$, $\varphi_0 : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+$, $a : R^+ \to R^+$, *a je rostoucí*, $a(v) \to +\infty$ *pro* $v \to +\infty$,

mající následující vlastnosti:

(i) *V je ljapunovská funkce,*
(ii) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \varphi_0(x, \alpha)$,
(iii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \in R^+ \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, w, \alpha)$.

Důkaz. Nechť p je silně omezený. Definujme zobrazení

(2) $V : E \to R^0 : V(x, w, \alpha) = \sup\,\{g(z, \vartheta) : (z, \vartheta)\, p(x, w, \alpha)\}$,

(3) $\varphi_0 : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+ : \varphi_0(x, \alpha) = \varphi(x, \alpha)$,

(4) $a : R^+ \to R^+ : a(v) = v$.

Nyní dokážeme, že zobrazení (2), (3) a (4) mají vlastnosti (i) až (iii).

Ad (i): Nechť $(x, w, \alpha) \in E$ a nechť $(x_1, w_1, \alpha_1)\, t\, (x, w, \alpha)$. Pak pro každé $(z, \vartheta)\, p\, (x_1, w_1, \alpha_1)$ platí podle 1.7 také $(z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha)$, a tedy

$$V(x_1, w_1, \alpha_1) = \sup\,\{g(z, \vartheta) : (z, \vartheta)\, p\, (x_1, w_1, \alpha_1)\} \leqq$$
$$\leqq \sup\,\{g(z, \vartheta) : (z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha)\} = V(x, w, \alpha)\,,$$

takže V je ljapunovskou funkcí.

Ad (ii): Nechť $(x, w, \alpha) \in E$. Pak pro každé $(z, \vartheta)\ p\,(x, w, \alpha)$ platí podle 2.2 (2) vztah $g(z, \vartheta) \leqq \varphi(x, \alpha)$, takže $V(x, w, \alpha)$ je předpisem (2) skutečně definováno a má vlastnost (ii).

Ad (iii): Zřejmě platí

$$g(x, \alpha) \in \{g(z, \vartheta) : (z, \vartheta)\ p\,(x, w, \alpha)\},$$

a tedy

$$g(x, \alpha) \leqq V(x, w, \alpha).$$

Nechť existují zobrazení (1) mající vlastnosti (i) až (iii). Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$. Definujme zobrazení φ z 2.2(1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\varphi(x, \alpha)) \geqq \varphi_0(x, \alpha).$$

Nyní se snadno ukáže, že pro každé $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $(z, w_1, \vartheta)\ t\,(x, w, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in R^+$ platí

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, w_1, \vartheta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq \varphi_0(x, \alpha) \leqq a(\varphi(x, \alpha)),$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \varphi(x, \alpha)$. Je tedy p silně omezený vzhledem k m.

2.4. Poznámka. Podmínku (iii) ve větě 2.3 lze zaměnit podmínkou:

(iii)′ *existuje zobrazení* $\zeta_1 : R^+ \to R^+$ *takové, že platí*

$$V(x, w, \alpha) \leqq \omega \Rightarrow g(x, \alpha) \leqq \zeta_1(\omega).$$

2.5. Definice. Říkáme, že p je *silně asymptoticky omezený* vzhledem k m, právě když p je silně omezený vzhledem k m a existují konstanta

$$\varkappa \in R^+ \tag{1}$$

a zobrazení

$$T : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+ \tag{2}$$

takové, že platí

$$(\vartheta, x, w, \alpha) \in D, \quad \vartheta \geqq \alpha + T(x, \alpha), \quad (z, \vartheta)\ p\,(x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varkappa. \tag{3}$$

2.6. Věta. *Restringovaný proces p procesu t je silně asymptoticky omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení* 2.3 (1) *s vlastnostmi* 2.3 (i) *až* 2.3 (iii) *a zobrazení* $T_0 : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+$, $\varkappa_0 \in R^+$ *takové, že platí*

(iv) $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $\vartheta \geqq \alpha + T_0(x, \alpha)$, $(z, w_1, \vartheta)\ t\,(x, w, \alpha) \Rightarrow V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0$.

Důkaz. Nechť p je silně asymptoticky omezený. Pak podle první části důkazu věty 2.3 existují zobrazení 2.3 (1) s vlastnostmi 2.3 (i) až 2.3 (iii). Zvolme v (iv) za $\varkappa_0 \in R^+$ konstantu $\varkappa$ z 2.5 a definujme zobrazení $T_0 : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+ : T_0(x, \alpha) = T(x, \alpha)$, kde

T je zobrazení z 2.5. Pak podle 2.5 (3) pro každé $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\, (x, w, \alpha)$, $\vartheta \geqq \alpha + T_0(x, \alpha)$ platí $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa_0$, a tedy vzhledem k 2.3 (2) je také $V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0$.

Nechť existují zobrazení 2.3 (1) s vlastnostmi 2.3 (i) až 2.3 (iii), $\varkappa_0 \in R^+$ a zobrazení T_0 mající vlastnost (iv). Z vlastností 2.3 (i) až 2.3 (iii) vyplývá podle věty 2.3, že p je silně omezený vzhledem k m. Definujme konstantu $\varkappa$ z 2.5 (1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\varkappa) \geqq \varkappa_0$$

a za zobrazení T z 2.5 (2) zvolme zobrazení T_0 z (iv). Pak pro každé $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $\vartheta \geqq \alpha + T(x, \alpha)$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\, (x, w, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in R^+$ platí

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0 \leqq a(\varkappa),$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p silně asymptoticky omezený vzhledem k m.

2.7. Věta. *Nechť p je globální restringovaný proces procesu t, úplný vzhledem k řešením. Nechť existují zobrazení* 2.3 (1) *s vlastnostmi* 2.3 (i) *až* 2.3 (iii), *konstanty* $\varkappa_0, \varkappa_1 \in R^+$ *a zobrazení* $c : \langle \varkappa_1, +\infty) \to R^+$ *zdola omezené na každém kompaktním podintervalu intervalu* $\langle \varkappa_1, +\infty)$ *kladným číslem a mající následující vlastnosti:*

(iv) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) < \varkappa_1 \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \varkappa_0$,

(v) *pro každé řešení σ procesu t a všechna* $\alpha, \vartheta \in \operatorname{domain} \sigma$, $\alpha \leqq \vartheta$ *platí* $V(\sigma(\vartheta), \vartheta) - V(\sigma(\alpha), \alpha) \leqq -\int_\alpha^\vartheta c(g(\operatorname{proj}_1 \circ \sigma(v), v))\, dv$, *kdykoliv je* $c(g(\operatorname{proj}_1 \circ \sigma(v), v))$ *definováno pro všechna* $v \in \langle \alpha, \vartheta \rangle$, $v \in R$.

Potom je p silně asymptoticky omezený vzhledem k m.

Důkaz. Z vlastností 2.3 (i) až 2.3 (iii) zobrazení 2.3 (1) vyplývá podle věty 2.3, že p je silně omezený vzhledem k m. Volme $\varkappa$ z 2.5 (1) tak, aby platil vztah

$$a(\varkappa) \geqq \varkappa_0 .$$

Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) < \varkappa_1$ a předpokládejme, že existují $(\beta, x, w, \alpha) \in D$, $(y, w_1, \beta)\, t\, (x, w, \alpha)$ takové, že $g(y, \beta) > \varkappa$. Pak je

$$a(\varkappa) < a(g(y, \beta)) \leqq V(y, w_1, \beta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq \varkappa_0 ,$$

odkud plyne $a(\varkappa) < \varkappa_0$, což je spor s volbou konstanty $\varkappa$. Platí tedy

$$(1) \qquad (\vartheta, x, w, \alpha) \in D\,, \quad g(x, \alpha) < \varkappa_1\,, \quad (z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varkappa\,.$$

Nechť je nyní $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \geqq \varkappa_1$. Položme

$$\lambda(x, \alpha) = \inf \{c(v) : \varkappa_1 \leqq v \leqq \varphi(x, \alpha)\}\,,$$

kde φ je zobrazení z definice 2.2.

Definujme zobrazení T z 2.5 (2) předpisem

$$T(x, \alpha) = 1 + \frac{\varphi_0(x, \alpha)}{\lambda(x, \alpha)}$$

a ukažme, že $\varkappa$ a T vyhovují definici 2.5. Předpokládejme, že pro nějaké $(y, w_1, \beta)\, t\, (x, w, \alpha)$, $\beta \geqq \alpha + T(x, \alpha)$ platí vztah $g(y, \beta) > \varkappa$. Nechť σ je řešení procesu t procházející body (x, w, α) a (y, w_1, β). Je-li $\varkappa_1 \leqq g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(\vartheta), \vartheta)$ pro všechna $\vartheta \in \langle\alpha, \beta\rangle$, $\vartheta \in R$, pak pomocí 2.3 (ii) a 2.7 (v) dostáváme vztah $V(\sigma(\beta), \beta) \leqq \leqq V(\sigma(\alpha), \alpha) - \int_\alpha^\beta c(g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(v), v)\, \mathrm{d}v \leqq \varphi_0(x, \alpha) - \lambda(x, \alpha)\, T(x, \alpha) < 0$, což je ve sporu s definicí zobrazení V. Existuje-li $\gamma \in \langle\alpha, \beta\rangle$ takové, že $g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(\gamma), \gamma) < \varkappa_1$, plyne z $(y, \beta)\, p\, (\sigma(\gamma), \gamma)$ a ze vztahu (1) nerovnost $g(y, \beta) \leqq \varkappa$, což je spor s naším předpokladem. Odtud dostáváme, že pro každé $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $\vartheta \geqq \alpha + T(x, \alpha)$, $(z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha)$ platí $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p silně asymptoticky omezený vzhledem k m.

2.8. Poznámka. Zřejmě v obou předcházejících větách lze podmínku 2.3 (iii) nahradit podmínkou 2.4 (iii)'.

2.9. Definice. Říkáme, že p je *silně stejně omezený* vzhledem k m, právě když existuje zobrazení

(1) $$\zeta : R \times R^+ \to R^+$$

takové, že platí

(2) $$(\vartheta, x, w, \alpha) \in D\,, \quad g(x, \alpha) \leqq \omega\,, \quad (z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, \omega)\,.$$

2.10. Věta. *p je silně stejně omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení*

(1) $$V : E \to R^0\,, \quad \zeta_0 : R \times R^+ \to R^+\,, \quad a : R^+ \to R^+\,, \quad a \textit{ rostoucí}\,,$$
$$a(\omega) \to +\infty \quad \textit{pro} \quad \omega \to +\infty\,,$$

mající následující vlastnosti:

(i) *V je ljapunovská funkce,*
(ii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \zeta_0(\alpha, \omega)$,
(iii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \in R^+ \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, w, \alpha)$.

Důkaz. Nechť p je silně stejně omezený. Definujme zobrazení $V : E \to R^0$ vztahem 2.3 (2), zobrazení

(2) $$\zeta_0 : R \times R^+ \to R^+ : \zeta_0(\alpha, \omega) = \zeta(\alpha, \omega)\,,$$

(3) $$a : R^+ \to R^+ : a(\omega) = \omega\,.$$

Nyní dokážeme, že zobrazení V, (2) a (3) mají vlastnosti (i) až (iii). Zobrazení V a (3) mají zřejmě podle 2.3 ad (i) a 2.3 ad (iii) vlastnosti (i) a (iii). Podle 2.9 (2) ze vztahů $(\vartheta, x, w, \alpha) \in \hat{D}$, $(z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha)$, $g(x, \alpha) \in R^+$ plyne $g(z, \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, g(x, \alpha))$, takže $V(x, w, \alpha)$ je předpisem 2.3 (2) skutečně definováno a má vlastnost (ii).

Nechť existují zobrazení (1) s vlastnostmi (i) až (iii). Definujme zobrazení ζ z 2.9 (1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\zeta(\alpha, \omega)) \geqq \zeta_0(\alpha, \omega) .$$

Pak ze vztahů $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\, (x, w, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in R^+$ dostáváme

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, w_1, \vartheta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq \zeta_0(\alpha, \omega) \leqq a(\zeta(\alpha, \omega)) ,$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, \omega)$. Je tedy p silně stejně omezený vzhledem k m.

2.11. Poznámka. Podmínku (iii) ve větě 2.10 lze zaměnit podmínkou 2.4 (iii)'.

2.12. Definice. Říkáme, že p je *silně stejně asymptoticky omezený* vzhledem k m, právě když p je silně stejně omezený vzhledem k m a existují konstanta

(1) $$\varkappa \in R^+$$

a zobrazení

(2) $$T : R \times R^+ \to R^+$$

takové, že platí

(3) $$(\vartheta, x, w, \alpha) \in D\,, \quad g(x, \alpha) \leqq \omega\,, \quad \vartheta \geqq \alpha + T(\alpha, \omega)\,,$$
$$(z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varkappa\,.$$

2.13. Věta. *Restringovaný proces p procesu t je silně stejně asymptoticky omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení* 2.10 (1) *s vlastnostmi* 2.10 (i) *až* 2.10 (iii) *a zobrazení*

(1) $$T_0 : R \times R^+ \to R^+\,, \quad \varkappa_0 \in R^+$$

takové, že platí

(iv) $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$, $\vartheta \geqq \alpha + T_0(\alpha, \omega)$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\, (x, w, \alpha) \Rightarrow$ $\Rightarrow V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0$.

Důkaz. Nechť p je silně stejně asymptoticky omezený. Pak podle první části důkazu věty 2.10 existují zobrazení 2.10 (1) s vlastnostmi 2.10 (i) až 2.10 (iii). Zvolme v (1) za $\varkappa_0 \in R^+$ konstantu $\varkappa$ z definice 2.12 a zobrazení $T_0 : R \times R^+ \to R^+$ definujme předpisem

$$T_0(\alpha, \omega) = T(\alpha, \omega)\,,$$

kde T je zobrazení z 2.12. Pak podle 2.12 (3) pro každé $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\, (x, w, \alpha)$ a $\vartheta \geqq \alpha + T_0(\alpha, \omega)$ platí $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa_0$, a tedy vzhledem k 2.3 (2) je $V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0$. Odtud plyne, že zobrazení V má také vlastnost (iv).

Nechť existují zobrazení 2.10 (1) s vlastnostmi 2.10 (i) až 2.10 (iii) a (1) mající vlastnost (iv). Z vlastností 2.10 (i) až 2.10 (iii) vyplývá podle věty 2.10, že p je silně stejně omezený vzhledem k m. Definujme konstantu $\varkappa$ z 2.12 (1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\varkappa) \geqq \varkappa_0$$

a za zobrazení T z 2.12 (2) zvolme zobrazení T_0 z (1). Pak pro každé $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$, $\vartheta \geqq \alpha + T(\alpha, \omega)$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\, (x, w, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in R^+$ platí

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0 \leqq a(\varkappa)\,,$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p silně stejně asymptoticky omezený vzhledem k m.

2.14. Věta. *Nechť p je globální restringovaný proces procesu t, úplný vzhledem k řešením. Nechť existují zobrazení* 2.10 (1) *s vlastnostmi* 2.10 (i) *až* 2.10 (iii), *konstanty $\varkappa_0, \varkappa_1 \in R^+$ a zobrazení $c : \langle \varkappa_1, +\infty) \to R^+$ zdola omezené na každém kompaktním podintervalu intervalu $\langle \varkappa_1, +\infty)$ kladným číslem a mající následující vlastnosti:*

(iv) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) < \varkappa_1 \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \varkappa_0$,

(v) *pro každé řešení σ procesu t a všechna $\alpha, \vartheta \in \operatorname{domain} \sigma$, $\alpha \leqq \vartheta$ platí*

$$V(\sigma(\vartheta), \vartheta) - V(\sigma(\alpha), \alpha) \leqq -\int_\alpha^\vartheta c(g(\operatorname{proj}_1 \circ \sigma(v), v))\, \mathrm{d}v\,,$$

kdykoliv je $c(g(\operatorname{proj}_1 \circ \sigma(v), v))$ definováno pro všechna $v \in \langle \alpha, \vartheta \rangle$, $v \in R$.

Potom je p silně stejně asymptoticky omezený vzhledem k m.

Důkaz. Z vlastností 2.10 (i) až 2.10 (iii) zobrazení 2.10 (1) vyplývá podle věty 2.10, že p je silně stejně omezený vzhledem k m. Nechť ζ je zobrazení z definice 2.9. Položme $\lambda(\alpha, \omega) = \inf\{c(v) : \varkappa_1 \leqq v \leqq \zeta(\alpha, \omega)\}$. Definujeme-li zobrazení T z 2.12 (2) předpisem

$$T(\alpha, \omega) = 1 + \frac{\zeta_0(\alpha, \omega)}{\lambda(\alpha, \omega)}\,,$$

konstantu $\varkappa \in R^+$ tak, aby platilo $a(\varkappa) \geqq \varkappa_0$, ukážeme podobně jako v důkazu věty 2.7, že pro $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$, $\vartheta \geqq \alpha + T(\alpha, \omega)$, $(z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha)$ je $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p silně stejně asymptoticky omezený vzhledem k m.

2.15. Poznámka. Zřejmě v obou předcházejících větách lze podmínku 2.10 (iii) nahradit podmínkou 2.4 (iii)′.

2.16. Definice. Říkáme, že p je *silně stejnoměrně omezený* vzhledem k m, právě když existuje zobrazení

$$(1) \qquad \xi : R^+ \to R^+$$

takové, že platí

$$(2) \qquad (\vartheta, x, w, \alpha) \in D\,, \quad g(x, \alpha) \leqq \psi\,, \quad (z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \xi(\psi)\,.$$

2.17. Věta. *p je silně stejnoměrně omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení*

(1) *$V : E \to R^0$, rostoucí $a : R^+ \to R^+$, $a(\psi) \to +\infty$ pro $\psi \to \infty$, neklesající $b : R^0 \to R^+$,*

s následujícími vlastnostmi:

(i) *V je ljapunovská funkce,*
(ii) *$(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \in R^+ \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, w, \alpha)$,*
(iii) *$(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq b(g(x, \alpha))$.*

Důkaz. Nechť p je silně stejnoměrně omezený. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že zobrazení ξ z 2.16 je rostoucí. Definujme zobrazení $V : E \to R^0$ předpisem 2.3 (2). Odtud a z 2.16 (2) plyne, že zobrazení V je tímto předpisem skutečně definováno a má vlastnost (i). Definujme zobrazení a, b z (1) vztahy

$$a(\psi) = \psi\,; \quad b(\psi) = \xi(\psi) \quad \text{pro} \quad \psi \geqq 1\,, \quad b(\psi) = \xi(1) \quad \text{pro} \quad \psi \in \langle 0, 1 \rangle\,.$$

Ze vztahů $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \in R^+$, $(z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha)$ plyne $g(z, \vartheta) \leqq \xi(g(x, \alpha))$, takže také $V(x, w, \alpha) \leqq \xi(g(x, \alpha))$. Zřejmě platí $g(x, \alpha) \leqq V(x, w, \alpha)$, a tedy zobrazení (1) mají vlastnosti (ii) a (iii).

Nechť existují zobrazení (1) s vlastnostmi (i) až (iii). Definujme zobrazení ξ z 12 (1) tak, aby platilo

$$a(\xi(\psi)) \geqq b(\psi)\,.$$

Pak ze vztahů $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\, (x, w, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in R^+$ dostáváme

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, w_1, \vartheta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq b(\psi) \leqq a(\xi(\psi))\,,$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \xi(\psi)$. Je tedy p silně stejnoměrně omezený vzhledem k m.

2.18. Poznámka. Podmínku (iii) ve větě 2.17 můžeme zaměnit následující podmínkou:

(iii)′ *existuje zobrazení $\xi_0 : R^+ \to R^+$ takové, že platí $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi \Rightarrow$ $\Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \xi_0(\psi)$.*

2.19. Poznámka. Podmínku (ii), resp. (iii), ve větě 2.17 můžeme zřejmě zaměnit podmínkou 2.4 (iii)', resp. 2.18 (iii)'.

2.20. Poznámka. *Nechť restringovaný proces p připouští periodu $\tau > 0$ a nechť zobrazení g z* 2.1 (2) *je periodické v druhé proměnné s periodou τ. Je-li p silně stejně omezený vzhledem k m a existuje-li zobrazení $\mu : R^+ \to R^+$ takové, že $\mu(\omega) \geqq \zeta(\alpha, \omega)$ pro všechna $\alpha \in \langle 0, \tau \rangle$, $\alpha \in R$, $\omega \in R^+$ a nějaké ζ vyhovující definici* 2.9, *pak platí:*

(i) *p je silně stejnoměrně omezený vzhledem k m,*
(ii) *existuje ljapunovská funkce V periodická v poslední proměnné s periodou τ a mající vlastnosti* 2.17 (ii), 2.17 (iii), 2.4 (iii)' *a* 2.18 (iii)'.

Důkaz je zřejmý.

2.21. Definice. Říkáme, že p je *silně stejnoměrně asymptoticky omezený* vzhledem k m, právě když p je silně stejnoměrně omezený vzhledem k m a existují konstanta

(1) $$\varkappa \in R^+$$

a zobrazení

(2) $$T : R^+ \to R^+$$

takové, že platí

(3) $$(\vartheta, x, w, \alpha) \in D\,,\quad g(x, \alpha) \leqq \psi\,,\quad \vartheta \geqq \alpha + T(\psi)\,,$$
$$(z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varkappa\,.$$

2.22. Věta. *Restringovaný proces p procesu t je silně stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení* 2.17 (1) *s vlastnostmi* 2.17 (i) *až* 2.17 (iii) *a zobrazení*

(1) $$T_0 : R^+ \to R^+\,,\quad \varkappa_0 \in R^+$$

takové, že platí

(iv) $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$, $\vartheta \geqq \alpha + T_0(\psi)$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\, (x, w, \alpha) \Rightarrow$
$\Rightarrow V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0$.

Důkaz je zřejmý, neboť věta 2.22 je stejnoměrnou modifikací věty 2.13.

2.23. Věta. *Nechť p je globální restringovaný proces procesu t, úplný vzhledem k řešením. Nechť existují zobrazení* 2.17 (1) *s vlastnostmi* 2.17 (i) *až* 2.17 (iii), *konstanta $\varkappa_1 \in R^+$ a zobrazení $c : \langle \varkappa_1, +\infty) \to R^+$ zdola omezené na každém kompaktním podintervalu intervalu $\langle \varkappa_1, +\infty)$ kladným číslem a mající následující vlastnost:*

(iv) *pro každé řešení σ procesu t a všechna* α, $\vartheta \in$ domain σ, $\alpha \leqq \vartheta$ *platí* $V(\sigma(\vartheta), \vartheta) - V(\sigma(\alpha), \alpha)) \leqq -\int_\alpha^\vartheta c(g(\text{proj}_1 \circ \sigma(v), v))\,dv$, *kdykoliv je* $c(g(\text{proj}_1 \circ \sigma(v), v))$ *definováno pro všechna* $v \in \langle \alpha, \vartheta \rangle$, $v \in R$.

Potom je p silně stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k m.

Důkaz. Z vlastností 2.17 (i) až 2.17 (iii) zobrazení 2.17 (1) vyplývá podle věty 2.17, že p je silně stejnoměrně omezený vzhledem k m. Nechť ξ je zobrazení z definice 2.16. Položme $\lambda(\psi) = \inf\{c(v) : \varkappa_1 \leqq v \leqq \xi(\psi)\}$. Definujeme-li konstantu $\varkappa$ z 2.16 (1) předpisem

$$\varkappa = \xi(\varkappa_1)$$

a zobrazení T z 2.16 (2) předpisem

$$T(\psi) = 1 + \frac{b(\psi)}{\lambda(\psi)},$$

ukážeme podobně jako v důkazu věty 2.7, že pro $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$, $\vartheta \geqq \alpha + T(\psi)$, $(z, \vartheta)\, p(x, w, \alpha)$ je $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p silně stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k m.

2.24. Poznámka. Zřejmě v obou předcházejících větách lze podmínku 2.17 (ii), resp. 2.17 (iii), nahradit podmínkou 2.4 (iii)', resp. 2.18 (iii)'.

3. SLABÁ OMEZENOST RESTRINGOVANÝCH PROCESŮ

3.1. Označení. V celé této části používáme i nadále označení zavedených v předcházejícím textu. Speciálně bude t značit lokální proces na $P \times W$ nad R, p jemu odpovídající lokální restringovaný proces. Podobně jako v předchozí části je dána množina $m \subset P \times R$ a zobrazení 2.1 (2) vyhovující vztahu 2.1 (3). Kromě toho pro dané $(x, w, \alpha) \in E$ označíme symbolem $\Sigma(x, w, \alpha)$ množinu všech řešení σ procesu t takových, že $\sigma(\alpha) = (x, w)$ a domain $\sigma \supset \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$; symbolem $S(x, w, \alpha)$ pak množinu všech řešení s restringovaného procesu p takových, že existuje $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$, pro které $s = \text{proj}_1 \circ \sigma$.

3.2. Definice. Říkáme, že p je *slabě omezený* vzhledem k m, právě když existuje zobrazení

(1) $$\varphi : \text{proj}_{1,3}\, E \to R^+$$

takové, že platí

(2) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varphi(x, \alpha)$ pro nějaké $s \in S(x, w, \alpha)$ a všechna $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R.

3.3. Věta. *p je slabě omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení*

(1) $V : E \to R^0$, $\varphi_0 : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+$, $a : R^+ \to R^+$, *a je rostoucí,* $a(v) \to +\infty$ *pro* $v \to +\infty$,

mající následující vlastnosti:

(i) *V je slabě ljapunovská funkce,*
(ii) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \varphi_0(x, \alpha)$,
(iii) $(x, w, \alpha) \in E,\ g(x, \alpha) \in R^+ \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, w, \alpha)$.

Důkaz. Nechť p je slabě omezený. Podle definice 3.2 k danému $(x, w, \alpha) \in E$ existuje řešení $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že pro $s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$ platí 3.2 (2). Definujme zobrazení

$$V : E \to R^0 : V(x, w, \alpha) = \sup \{g(s(\vartheta), \vartheta) : \vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha)) \text{ v } R\}\,, \tag{2}$$

$$\varphi_0 : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+ : \varphi_0(x, \alpha) = \varphi(x, \alpha)\,, \tag{3}$$

$$a : R^+ \to R^+ : a(v) = v \tag{4}$$

a ukažme, že (2), (3), (4) mají vlastnosti (i), (ii) a (iii). Podle 3.2 (2) je vidět, že $V(x, w, \alpha)$ je předpisem (2) skutečně definováno a má vlastnost (ii). Zřejmě pro každé $(x, w, \alpha) \in E$ platí

$$g(x, \alpha) \in \{g(s(\vartheta), \vartheta) : \vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha)) \text{ v } R\}\,,$$

takže podle (2) je také $g(x, \alpha) \leqq V(x, w, \alpha)$, což je vlastnost (iii). Zbývá ještě dokázat, že V je slabě ljapunovskou funkcí restringovaného procesu p. Jsou-li $\beta, \gamma \in R$ taková, že $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma < \varepsilon(x, w, \alpha)$, pak je

$$\{(\sigma(\vartheta), \vartheta) : \vartheta \in \langle \gamma, \varepsilon(x, w, \alpha)) \text{ v } R\} \subset \{(\sigma(\vartheta), \vartheta) : \vartheta \in \langle \beta, \varepsilon(x, w, \alpha)) \text{ v } R\}\,.$$

Odtud snadno plyne

$$V(\sigma(\gamma), \gamma) = \sup \{g(s(\vartheta), \vartheta) : \vartheta \in \langle \gamma, \varepsilon(x, w, \alpha)) \text{ v } R\} \leqq$$
$$\leqq \sup \{g(s(\vartheta), \vartheta) : \vartheta \in \langle \beta, \varepsilon(x, w, \alpha)) \text{ v } R\} = V(\sigma(\beta), \beta)\,,$$

takže zobrazení V z (2) je slabě ljapunovskou funkcí.

Nechť nyní existují zobrazení (1) s vlastnostmi (i) až (iii). Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$. Definujme zobrazení φ z 3.2 (1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\varphi(x, \alpha)) \geqq \varphi_0(x, \alpha)\,.$$

Podle (i) existuje $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že V je nerostoucí podél σ. Nyní se snadno ukáže, že řešení $s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$ vyhovuje definici 3.2 (2). Platí totiž pro každé $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$, ϑ v R, $g(s(\vartheta), \vartheta) \in R^+$, $a(g(s(\vartheta), \vartheta)) \leqq V(\sigma(\vartheta), \vartheta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq \varphi_0(x, \alpha) \leqq a(\varphi(x, \alpha))$, odkud vzhledem k tomu, že a je rostoucí, plyne $g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varphi(x, \alpha)$. Je tedy p slabě omezený vzhledem k m.

3.4. Definice. Říkáme, že p je *slabě asymptoticky omezený* vzhledem k m, právě když p je slabě omezený vzhledem k m a existují konstanta

(1) $$\varkappa \in R^+$$

a zobrazení

(2) $$T : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+$$

takové, že platí

(3) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varkappa$ pro nějaké s z 3.2 (2) a všechna $\vartheta \geqq \alpha + T(x, \alpha)$ v domain s.

3.5. Věta. *Nechť p je globální restringovaný proces. Nechť existují zobrazení* 3.3 (1) *s vlastnostmi* 3.3 (ii) *a* 3.3 (iii), *zobrazení $c : R^0 \to R^+$ zdola omezené na každém kompaktním podintervalu intervalu R^+ kladnou konstantou a konstanty $\varkappa_0, \varkappa_1 \in R^+$ s následujícími vlastnostmi*:

(iv) $(x, w, \alpha) \in E,\ g(x, \alpha) < \varkappa_1 \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \varkappa_0$,

(v) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow V(\sigma(\gamma), \gamma) - V(\sigma(\beta), \beta) \leqq -\int_\beta^\gamma c(g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(v), v))\, dv$ *pro nějaké $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ a každé $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma \in$ domain σ.*

Potom je p slabě asymptoticky omezený vzhledem k m.

Důkaz. Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$. Podle vlastnosti (v) existuje $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že V je nerostoucí podél σ. Odtud a z věty 3.3 vyplývá, že p je slabě omezený vzhledem k m. Volme $\varkappa$ z 3.4 (1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\varkappa) \geqq \varkappa_0 .$$

Nechť $g(x, \alpha) < \varkappa_1$ a předpokládejme, že existuje $\beta \geqq \alpha$ takové, že platí $g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(\beta), \beta) > \varkappa$. Pak je

$$a(\varkappa) < a(g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(\beta), \beta)) \leqq V(\sigma(\beta), \beta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq \varkappa_0 ,$$

odkud plyne $a(\varkappa) < \varkappa_0$, což je spor s volbou konstanty $\varkappa$. Platí tedy

(1) $(x, w, \alpha) \in E,\ g(x, \alpha) < \varkappa_1 \Rightarrow g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(\vartheta), \vartheta) \leqq \varkappa$ pro všechna $\alpha \leqq \vartheta \in$ domain σ.

Nechť je nyní $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \geqq \varkappa_1$. Položme

$$\lambda(x, \alpha) = \inf \{c(v) : \varkappa_1 \leqq v \leqq \varphi(x, \alpha)\} ,$$

kde φ je zobrazení z definice 3.2. Definujme zobrazení T z 3.4 (2) předpisem

$$T(x, \alpha) = 1 + \frac{\varphi_0(x, \alpha)}{\lambda(x, \alpha)} ,$$

řešení s restringovaného procesu p vztahem

$$s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$$

a ukažme, že $\varkappa$, T a s vyhovují definici 3.4. Předpokládejme, že pro nějaké $\beta \geqq \alpha + T(x, \alpha)$ platí vztah $g(s(\beta), \beta) > \varkappa$. Je-li $\varkappa_1 \leqq g(s(\vartheta), \vartheta)$ pro všechna $\vartheta \in \langle \alpha, \beta \rangle$ v R, pak pomocí 3.3 (ii) a (v) dostáváme vztah

$$V(\sigma(\beta), \beta) \leqq V(x, w, \alpha) - \int_\alpha^\beta c(g(s(v), v)) \, dv \leqq \varphi_0(x, \alpha) - \lambda(x, \alpha) \, T(x, \alpha) < 0 ,$$

což je ve sporu s definicí zobrazení V.

Existuje-li $\gamma \in \langle \alpha, \beta \rangle$ takové, že $g(s(\gamma), \gamma) < \varkappa_1$, plyne z $(s(\beta), \beta) \, p \, (\sigma(\gamma), \gamma)$ a vztahu (1) nerovnost $g(s(\beta), \beta) \leqq \varkappa$, což je spor s naším předpokladem. Odtud dostáváme, že platí $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varkappa$ pro všechna $\vartheta \geqq \alpha + T(x, \alpha)$ v R. Je tedy p slabě asymptoticky omezený vzhledem k m.

3.6. Poznámka. Zřejmě v obou předcházejících větách lze podmínku 3.3 (iii) nahradit podmínkou 2.4 (iii)'.

3.7. Definice. Říkáme, že p je *slabě stejně omezený* vzhledem k m, právě když existuje zobrazení

(1) $$\zeta : R \times R^+ \to R^+$$

takové, že platí

(2) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega \Rightarrow g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, \omega)$ pro nějaké $s \in S(x, w, \alpha)$ a všechna $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R.

3.8. Věta. *p je slabě stejně omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení*

(1) $V : E \to R^0$, $\zeta_0 : R \times R^+ \to R^+$, $a : R^+ \to R^+$, *a rostoucí, $a(\omega) \to +\infty$ pro $\omega \to +\infty$, s následujícími vlastnostmi:*

(i) *V je slabě ljapunovská funkce,*
(ii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \zeta_0(\alpha, \omega)$,
(iii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \in R^+ \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, w, \alpha)$.

Důkaz. Nechť p je slabě stejně omezený. Podle definice 3.7 k danému $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$ existuje řešení $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že pro $s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$ platí 3.7 (2). Definujme zobrazení $V : E \to R^0$ vztahem 3.3 (2), zobrazení

(2) $$\zeta_0 : R \times R^+ \to R^+ : \zeta_0(\alpha, \omega) = \zeta(\alpha, \omega) ,$$

(3) $$a : R^+ \to R^+ : a(\omega) = \omega .$$

Nyní dokážeme, že zobrazení V, (2) a (3) mají vlastnosti (i) až (iii). Stejným způsobem jako v důkazu věty 3.3 se ukáže, že zobrazení V a (3) mají vlastnosti (i) a (iii). Podle 3.7 (2) ze vztahů $\vartheta \in \langle\alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R, $g(x, \alpha) \in R^+$ plyne $g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, g(x, \alpha))$, takže $V(x, w, \alpha)$ je předpisem 3.3 (2) skutečně definováno a má vlastnost (ii).

Nechť existují zobrazení (1) s vlastnostmi (i) až (iii). Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$. Definujme zobrazení z 3.7 (1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\zeta(\alpha, \omega)) \geqq \zeta_0(\alpha, \omega) .$$

Podle vlastnosti (i) existuje řešení $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že zobrazení V je nerostoucí podél σ. Nyní se snadno ukáže, že řešení $s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$ a zobrazení ζ vyhovují definici 3.7. Platí totiž pro $g(s(\vartheta), \vartheta) \in R^+$, $\vartheta \in \langle\alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R vztah

$$a(g(s(\vartheta), \vartheta)) \leqq V(\sigma(\vartheta), \vartheta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq \zeta_0(\alpha, \omega) \leqq a(\zeta(\alpha, \omega)) ,$$

odkud plyne $g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, \omega)$. Je tedy p slabě stejně omezený vzhledem k m.

3.9. Definice. Říkáme, že p je *slabě stejně asymptoticky omezený* vzhledem k m, právě když p je slabě stejně omezený vzhledem k m a existují konstanta

(1) $$\varkappa \in R^+$$

a zobrazení

(2) $$T : R \times R^+ \to R^+$$

takové, že platí

(3) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega \Rightarrow g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varkappa$ pro nějaké s z 3.7 (2) a všechna $\vartheta \geqq \alpha + T(\alpha, \omega)$ v domain s.

3.10. Věta. *Nechť p je globální restringovaný proces. Nechť existují zobrazení 3.8 (1) s vlastnostmi 3.8 (ii) a 3.8 (iii), zobrazení $c : R^0 \to R^+$ zdola omezené na každém kompaktním podintervalu intervalu R^+ kladnou konstantou a konstanty $\varkappa_0, \varkappa_1 \in R^+$ s následujícími vlastnostmi:*

(iv) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) < \varkappa_1 \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \varkappa_0$,

(v) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow V(\sigma(\gamma), \gamma) - V(\sigma(\beta), \beta) \leqq -\int_\beta^\gamma c(g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(v), v))\, dv$ *pro nějaké $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ a každé $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma \in$ domain σ.*

Potom je p slabě stejně asymptoticky omezený vzhledem k m.

Důkaz. Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$. Podle vlastnosti (v) existuje $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že V je nerostoucí podél σ. Odtud a z vlastností 3.8 (ii), 3.8 (iii) dostáváme podle věty 3.8, že p je slabě stejně omezený vzhledem k m. Nechť ζ je zobrazení z definice 3.7. Položme

$$\lambda(\alpha, \omega) = \inf \{c(v) : \varkappa_1 \leqq v \leqq \zeta(\alpha, \omega)\} .$$

Definujeme-li zobrazení T z 3.9 (2) předpisem

$$T(\alpha, \omega) = 1 + \frac{\zeta_0(\alpha, \omega)}{\lambda(\alpha, \omega)},$$

řešení s restringovaného procesu p vztahem

$$s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$$

a konstantu $\varkappa$ z 3.9 (1) tak, aby platilo

$$a(\varkappa) \geqq \varkappa_0,$$

ukážeme podobně jako u důkazu věty 3.5, že pro $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$ a všechna $\vartheta \geqq \alpha + T(\alpha, \omega)$ v domain s platí $g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p slabě stejně asymptoticky omezený vzhledem k m.

3.11. Poznámka. V obou předcházejících větách lze podmínku 3.8 (iii) nahradit podmínkou 2.4 (iii)'.

3.12. Definice. Říkáme, že p je *slabě stejnoměrně omezený* vzhledem k m, právě když existuje zobrazení

(1) $$\xi : R^+ \to R^+$$

takové, že platí

(2) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi \Rightarrow g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \xi(\psi)$ pro nějaké $s \in S(x, w, \alpha)$ a všechna $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R.

3.13. Věta. *p je slabě stejnoměrně omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení*

(1) $V : E \to R^0$, *rostoucí* $a : R^+ \to R^+$, $a(\psi) \to +\infty$ *pro* $\psi \to +\infty$, *neklesající* $b : R^0 \to R^+$,

s následujícími vlastnostmi:

(i) *V je slabě ljapunovská funkce,*
(ii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \in R^+ \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, w, \alpha)$,
(iii) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq b(g(x, \alpha))$.

Důkaz. Nechť p je slabě stejnoměrně omezený. Podle definice 3.12 k danému $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$ existuje řešení $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že pro $s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$ platí 3.12 (2). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že zobrazení ξ z 3.12 je rostoucí. Definujme zobrazení $V : E \to R^0$ předpisem 3.3 (2). Odtud a z 3.12 (2) plyne, že zobrazení V je tímto vztahem skutečně definováno a má vlastnost (i). Definujme zobrazení a, b z (1) vztahy

$$a(\psi) = \psi\,; \quad b(\psi) = \xi(\psi) \quad \text{pro} \quad \psi \geqq 1\,, \quad b(\psi) = \xi(1) \quad \text{pro} \quad \psi \in \langle 0, 1 \rangle\,.$$

Ze vztahů $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R, $g(x, \alpha) \in R^+$ plyne $g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \xi(g(x, \alpha))$, takže také $V(x, w, \alpha) \leqq \xi(g(x, \alpha))$. Zřejmě platí $g(x, \alpha) \leqq V(x, w, \alpha)$, a tedy zobrazení (1) mají vlastnosti (ii) a (iii).

Nechť existují zobrazení (1) s vlastnostmi (i) až (iii). Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$. Definujme zobrazení ξ z 3.12 (1) tak, aby platilo

$$a(\xi(\psi)) \geqq b(\psi)\,.$$

Podle vlastnosti (i) existuje řešení $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že zobrazení V je nerostoucí podél σ. Označme $s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$. Pak ze vztahů $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R, $g(s(\vartheta), \vartheta) \in R^+$ dostáváme

$$a(g(s(\vartheta, \vartheta)) \leqq V(\sigma(\vartheta), \vartheta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq b(\psi) \leqq a(\xi(\psi))\,,$$

odkud plyne $g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \xi(\psi)$. Je tedy p slabě stejnoměrně omezený vzhledem k m.

3.14. Poznámka. Podmínku (ii), resp. (iii), ve větě 3.13 můžeme zřejmě zaměnit podmínkou 2.4 (iii)′, resp. 2.18 (iii)′.

3.15. Poznámka. *Nechť restringovaný proces p připouští periodu $\tau > 0$ a nechť zobrazení g z* 2.1 (2) *je periodické v druhé proměnné s periodou τ. Je-li p slabě stejně omezený vzhledem k m a existuje-li zobrazení $\mu : R^+ \to R^+$ takové, že $\mu(\omega) \geqq \zeta(\alpha, \omega)$ pro všechna $\alpha \in \langle 0, \tau \rangle$, $\alpha \in R$, $\omega \in R^+$ a nějaké ζ vyhovující definici* 3.7, *pak platí:*

(i) *p je slabě stejnoměrně omezený vzhledem k m,*
(ii) *existuje slabě ljapunovská funkce V periodická v poslední proměnné s periodou τ a mající vlastnosti* 3.13 (ii), 3.13 (iii), 2.4 (iii)′ a 2.18 (iii)′.

Důkaz je zřejmý.

3.16. Definice. Říkáme, že p je *slabě stejnoměrně asymptoticky omezený* vzhledem k m, právě když p je slabě stejnoměrně omezený vzhledem k m a existují konstanta

(1) $$\varkappa \in R^+$$

a zobrazení

(2) $$T : R^+ \to R^+$$

takové, že platí