Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

O BODOVÉ DEFORMACI KONGRUENCÍ ROVIN V PĚTIROZMĚRNÉM PROJEKTIVNÍM PROSTORU

JOSEF ČUČKA, Brno

(Došlo dne 18. června 1970)

V práci, k níž dal podnět prof. K. SVOBODA v semináři o soustavách Pfaffových rovnic, jsou studovány Cartanovou metodou pohyblivého reperu některé otázky související s bodovou deformací dvou dvojparametrických systémů rovin — dále stručněji nazývaných kongruencemi L, L' — vnořených do pětirozměrných projektivních prostorů P_5, P'_5.

Ukazuje se, že některé poznatky dnes již dobře zpracované teorie přímkových kongruencí v P_3 (např. [1]), mají své analogické protějšky v dále studovaném případě kongruencí rovin v P_5.

V **§1** je pro další účely vhodně specialisován průvodní reper kongruence L a zavedeny bodové formy φ_i.

V **§2** je zcela přirozeným způsobem modifikován pojem bodové deformace užívaný akademikem E. ČECHEM. Obsah paragrafu je shrnut ve větě 1 a existenční větě 2.

V **§3** je objasněn geometrický smysl rovnosti bodových forem kongruencí L, L'. Věta 4 poukazuje na vztah mezi bodovou deformací kongruencí L, L' a projektivní deformací prvního řádu příslušných fokálních ploch.

Na rozdíl od indexů j, k, l, jejichž průběh je vždy vyznačen, probíhá index „i" zásadně čísla 1, 2, 3.

1. Reperem pětirozměrného projektivního prostoru P_5 budeme rozumět libovolnou uspořádanou šestici lineárně nezávislých aritmetických bodů A_j $(j = 1, \ldots, 6)$, pro něž je

$$[A_1A_2A_3A_4A_5A_6] = 1\,. \tag{1}$$

O funkcích vyskytujících se dále budeme předpokládat, že jsou analytické.

Základní derivační formule jsou

$$\mathrm{d}A_j = \sum_k \omega_j^k A_k \quad (j, k = 1, \ldots, 6)\,, \tag{2}$$

kde relativní komponenty ω_j^k vyhovují rovnicím struktury

$$\mathrm{d}\omega_j^k = \sum_l \omega_j^l \wedge \omega_l^k \quad (j, k, l = 1, \ldots, 6)\,. \tag{3}$$

Hlavní parametry značme u, v. Pfaffovy formy ω_j^j splňují rovnici

$$\sum_j \omega_j^j = 0 \quad (j = 1, \ldots, 6)\,.$$

Nechť vrcholy A_1, A_2, A_3 reperu incidují s běžnou rovinou p kongruence L. Pak

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[A_1A_2A_3] &= [\mathrm{d}A_1A_2A_3] + [A_1\,\mathrm{d}A_2A_3] + [A_1A_2\,\mathrm{d}A_3] = \\ &= \sum_i \omega_i^i[A_1A_2A_3] + \sum_i\sum_l \omega_i^l[A_jA_kA_l]\,, \end{aligned}$$

kde i, j, k jsou cyklické permutace z prvků 1, 2, 3 a $l = 4, 5, 6$.

Variace (tj. diferencování jen podle vedlejších parametrů) je

$$\delta[A_1A_2A_3] = \sum_i e_i^i[A_1A_2A_3]\,,$$

kde jako obvykle

$$e_m^n = \omega_m^n(\delta)\,,$$

takže formy

$$\omega_i^{3+j} \quad (j = 1, 2, 3) \tag{4}$$

jsou hlavní a z nich lze vybrat právě dvě nezávislé; nechť jsou to

$$\omega_1^4 \equiv \omega^1\,, \quad \omega_2^5 \equiv \omega^2\,.$$

Zbývající formy (4) lze vyjádřit jako jejich kombinace s koeficienty závisejícími obecně na hlavních i vedlejších parametrech.

Ohniskem roviny (A_1, A_2, A_3) příslušným k fokálnímu směru (např. $q^1\omega^1 + q^2\omega^2 = 0$) rozumíme bod F této roviny, který při jejím pohybu ve fokálním směru splňuje relaci $[A_1A_2A_3\,\mathrm{d}F] = 0$. Jak známo [6], existují v každé rovině kongruence tři ohniska, o nichž budeme v dalším předpokládat, že neleží v jediné přímce.

Volme nyní vrcholy A_1, A_2, A_3 reperu v ohniscích roviny p příslušných k fokálním směrům

$$\omega^1 = 0\,, \quad \omega^2 = 0\,, \quad \omega^1 + r\omega^2 \equiv \omega^3 = 0\,,$$

kde

$$r \neq 0\,. \tag{5}$$

Rovnicím

$$[A_1A_2A_3\,\mathrm{d}A_i]_{\omega^i=0} = 0$$

lze vzhledem k (2) $(j = 1, 2, 3;\ k = 1, \ldots, 6)$ vyhovět, když

$$\omega^i \wedge \omega_i^{3+j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3)\,. \tag{6}$$

Užitím Cartanova lemmatu nabývají (6) tvaru

$$\omega_i^{3+j} = a_i^{3+j}\omega^i \quad (j = 1, 2, 3;\ a_1^4 = a_2^5 = 1)\,. \tag{7}$$

Omezme se na případ, kdy každé ze tří ohnisek A_i opisuje regulární plochu (tzv. plochu fokální).

Tečné roviny fokálních ploch $\{A_i\}$ v bodech dotyků A_i leží v prostorech

$$\left(A_1, A_2, A_3, \sum_j a_i^{3+j} A_{3+j}\right) \quad (j = 1, 2, 3;\ a_1^4 = a_2^5 = 1)\,. \tag{8}$$

Zvolíme reper tak, aby tyto tečné prostory byly

$$(A_1, A_2, A_3, A_4)\,, \quad (A_1, A_2, A_3, A_5)\,, \quad (A_1, A_2, A_3, a_3^6 A_6)\,, \quad a_3^6 \neq 0\,,$$

to jest

$$a_i^{3+j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3;\ i \neq j)\,.$$

Odtud a ze (7) vyplývá

$$\omega_i^{3+j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3;\ i \neq j)\,.$$

Vnějším diferencováním rovnic (7) pro $i = j = 3$ vychází

$$\omega^1 \wedge \{\mathrm{d}a_3^6 + a_3^6(\omega_1^1 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_4^4)\} +$$
$$+ \omega^2 \wedge \{\mathrm{d}a_3^6 r + a_3^6 r(\omega_2^2 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_5^5)\} = 0\,.$$

Bez újmy na obecnosti zvolíme $a_3^6 = 1$.

Vnějším diferencováním zbývajících rovnic (7) dostaneme

$$\omega^i \wedge \omega_j^i - \omega^j \wedge \omega_{3+j}^{3+i} = 0 \quad (j = 1, 2, 3;\ i \neq j) \tag{9}$$

a vidíme, že formy

$$\omega_1^1 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_4^4,\ \omega_j^i,\ \omega_{3+j}^{3+i} \quad (j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$$

jsou hlavní.

Vzhledem k (6) a nerovnostem

$$\omega^i \wedge \omega^j \neq 0 \quad (j = 1, 2, 3;\ i \leqq j + 1)$$

můžeme na (9) aplikovat Cartanovo lemma a obdržíme

$$\omega_i^j = a_i^j \omega^i + \alpha_i^j \omega^j\,, \quad \omega_{3+i}^{3+j} = \beta_i^j \omega^i - a_i^j \omega^j \quad (j = 1, 2, 3;\ i \neq j)\,. \tag{10}$$

Přihlédneme k rovnostem

$$\mathrm{d}\omega^i = (\omega_i^i - \omega_{3+i}^{3+i}) \wedge \omega^i\,, \tag{11}$$

které okamžitě plynou z podmínek integrability (3) a prodloužíme (10). Získáme tím rovnice tvaru

$$\omega^i \wedge \Delta a_i^j + \omega^j \wedge \Delta \alpha_i^j + \omega_i^l \quad \wedge \omega_l^j \quad = 0\,,$$

$$\omega^i \wedge \Delta \beta_i^j - \omega^j \wedge \Delta a_i^j + \omega_{3+i}^{3+l} \wedge \omega_{3+l}^{3+j} = 0\,, \quad (j, l = 1, 2, 3;\ i \neq j \neq l \neq i)$$

kde

$$\Delta a_i^j = \mathrm{d}a_i^j + a_i^j(\omega_j^j - \omega_{3+i}^{3+i}) + \omega_{3+i}^j\,, \tag{12}$$

$$\Delta \alpha_i^j = \mathrm{d}\alpha_i^j + \alpha_i^j(2\omega_j^j - \omega_i^i - \omega_{3+j}^{3+j})\,,$$

$$\Delta \beta_i^j = \mathrm{d}\beta_i^j + \beta_i^j(\omega_i^i + \omega_{3+j}^{3+j} - 2\omega_{3+i}^{3+i}) \quad (j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$$

jsou další hlavní formy.

Ze vztahů $(12)_1$ poznáváme, že lze reper dále specialisovat volbou

$$a_i^j = 0 \quad (j = 1, 2, 3;\ i \neq j)\,,$$

přičemž se stávají formy

$$\omega_{3+i}^j \quad (j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$$

hlavními formami.

Z definice hodnoty vnějšího diferenciálu a hodnoty vnějšího součinu plyne z (11)

$$\delta\omega^i = \omega^i(e_i^i - e_{3+i}^{3+i})\,. \tag{13}$$

Uveďme ještě kvůli přehlednosti variace relativních invariantů a derivační formule reperu.

$$\delta\alpha_i^j = \alpha_i^j(e_i^i + e_{3+j}^{3+j} - 2e_j^j)\,, \quad \delta\beta_i^j = \beta_i^j(2e_{3+i}^{3+i} - e_i^i - e_{3+j}^{3+j}) \tag{14}$$

$$(j = 1, 2, 3;\ i \neq j)\,,$$

$$\delta r = r(e_5^5 + e_1^1 - e_2^2 - e_4^4) = r(e_5^5 + e_3^3 - e_2^2 - e_6^6)\,.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A_1 &= \omega_1^1 A_1 + \alpha_1^2\omega^2 A_2 + \alpha_1^3\omega^3 A_3 + \omega^1 A_4\,,\\
\mathrm{d}A_2 &= \alpha_2^1\omega^1 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \alpha_2^3\omega^3 A_3 + \omega^2 A_5\,,\\
\mathrm{d}A_3 &= \alpha_3^1\omega^1 A_1 + \alpha_3^2\omega^2 A_2 + \omega_3^3 A_3 + \omega^3 A_6\,,\\
\mathrm{d}A_4 &= \omega_4^1 A_1 + \omega_4^2 A_2 + \omega_4^3 A_3 + \omega_4^4 A_4 + \beta_1^2\omega^1 A_5 + \beta_1^3\omega^1 A_6\,,\\
\mathrm{d}A_5 &= \omega_5^1 A_1 + \omega_5^2 A_2 + \omega_5^3 A_3 + \beta_2^1\omega^2 A_4 + \omega_5^5 A_5 + \beta_2^3\omega^2 A_6\,,\\
\mathrm{d}A_6 &= \omega_6^1 A_1 + \omega_6^2 A_2 + \omega_6^3 A_3 + \beta_3^1\omega^3 A_4 + \beta_3^2\omega^3 A_5 + \omega_6^6 A_6\,.
\end{aligned} \tag{15}$$

Nyní lze snadno ověřit, že bodové formy

$$\varphi_1 = \alpha_2^3\alpha_3^2\omega^2\omega^3\,, \quad \varphi_2 = \alpha_1^3\alpha_3^1\omega^1\omega^3\,, \quad \varphi_3 = \alpha_1^2\alpha_2^1\omega^1\omega^2 \tag{16}$$

a formy

$$\psi_1 = \alpha_1^2\alpha_2^3\alpha_3^1\omega^1\omega^2\omega^3\,, \quad \psi_2 = \alpha_2^1\alpha_3^2\alpha_1^3\omega^1\omega^2\omega^3$$

jsou invariantní (tj. $\delta\varphi_i = \delta\psi_j = 0$). Z identity

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3 = \psi_1\psi_2$$

je ovšem ihned vidět, že nejsou nezávislé.

2. Předně připomeňme [1] pojem bodové deformace.

Budiž dána

- kongruence $L \subset P_5$ rovin $p = p(u, v)$,
- kongruence $L' \subset P'_5$ rovin $p' = p'(u', v')$,
- regulární korespondence $C : L \to L'$, $Cp(u, v) = p'(u', v')$ rovnicemi $u' = u'(u, v)$, $v' = v'(u, v)$.

Řekneme, že C^b je bodové rozšíření korespondence C, jestliže je pro každou dvojici odpovídajících si rovin $p \in L$, $Cp = p' \in L'$ dána kolineace

$$\pi = \pi(u, v) : p(u, v) \to p'\{u'(u, v); v'(u, v)\}\,.$$

Dostáváme tak bodovou korespondenci $C^b : V_4(L) \to V'_4(L')$ mezi čtyřrozměrnými bodovými varietami $V_4(L)$, $V'_4(L')$.

Korespondence C se nazývá bodovou deformací, jestliže existuje takové bodové rozšíření C na C^b, že lze pro každou dvojici (u, v) najít kolineaci $K(u, v) : P_5 \to P'_5$ takovou, že platí:

Je-li $A \in p(u, v)$ bod a Γ libovolná křivka ($A \in \Gamma \subset V_4(L)$), pak křivky $C^b\Gamma$ a $K(u, v)\,\Gamma$ mají v bodě C^bA analytický styk prvního řádu, tj. při

$$KA = C^bA \tag{17}$$

platí rovnost

$$K\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}(C^bA) + \vartheta C^bA\,, \tag{18}$$

kde ϑ je jistá hlavní forma. Říkáme pak, že K realizuje (v rovině $p(u, v)$) bodovou deformaci.

Jde nám nyní o nalezení podmínek při jejichž splnění budou kongruence $L \subset P_5$, $L' \subset P'_5$ v bodové deformaci.

Ke kongruenci L přiřadíme ovšem reper s derivačními formulemi (15) a ke kongruenci L' zcela analogický reper čárkovaný.

Korespondence C nechť je určena relacemi

$$\omega'^k = \sum_l b_k^l\omega^l \quad (k, l = 1, 2)\,, \tag{19}$$

kde

(20) $$|b_k^l| \neq 0 \quad (k, l = 1, 2).$$

Pak je ovšem

$$\omega'^3 = b_1^1\omega^1 + b_1^2\omega^2 + r'(b_2^1\omega^1 + b_2^2\omega^2).$$

Bodové rozšíření C^b korespondence $C : L \to L'$ nechť je dáno kolineací $\pi : p \to p'$ určenou rovnicemi

$$\pi A_i = \sum_j c_i^j A'_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

s determinantem

(21) $$|c_i^j| \neq 0 \quad (j = 1, 2, 3).$$

Předpokládejme, že kolineace K

$$KA_i = c_i^k A'_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$KA_{3+i} = c_{3+i}^l A'_l \quad (l = 1, \ldots, 6)$$

realizuje bodovou deformaci kongruencí L, L'.

Nechť je křivka Γ opisována bodem

$$A = \sum_i x^i(t)\, A_i(u, v),$$

kde

$$u = u(t), \quad v = v(t).$$

Pak

$$\mathrm{d}A = \sum_j\sum_i \{(\mathrm{d}x^i + x^j\omega_j^i)\, A_i + x^i\omega^i A_{3+i}\} \quad (j = 1, 2, 3)$$

a

(22) $$K\,\mathrm{d}A = \sum_i\sum_j\sum_k \{c_i^j(\mathrm{d}x^i + x^k\omega_k^i) + c_{3+i}^j x^i\omega^i\}\, A'_j \quad (j = 1, \ldots, 6;\ k = 1, 2, 3).$$

Dále je

(23) $$C^bA = KA = \sum_i\sum_j c_i^j x^i A'_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

a

(24) $$\mathrm{d}(C^bA) = \sum_i\sum_j\sum_k \{[c_i^j\,\mathrm{d}x^i + x^i(\mathrm{d}c_i^j + c_i^k\omega_k'^j)]\, A'_j + c_k^j x^k \omega'^j A'_{3+j}\} \quad (j, k = 1, 2, 3).$$

Dosadíme z (22), (23) a (24) do (18) a porovnáme koeficienty u $x^i A'_l$ ($l = 4, 5, 6$). Dostaneme

(25) $$\omega^i c_{3+i}^{3+j} = \omega'^j c_i^j \quad (j = 1, 2, 3).$$

S uvážením (19) porovnejme v (25) koeficienty nyní u forem ω^1, ω^2. Získáme tak systém rovnic

$$
\begin{gathered}
c_1^1 b_1^2 = c_2^1 b_1^1 = c_1^2 b_2^2 = c_2^2 b_2^1 = 0 , \\
c_1^3(b_1^2 + r' b_2^2) = 0 , \quad c_2^3(b_1^1 + r' b_2^1) = 0 , \\
c_4^6 = c_1^3(b_1^1 + r' b_2^1) , \quad c_5^6 = c_2^3(b_1^2 + r' b_2^2) , \\
c_6^6 = c_3^3(b_1^1 + r' b_2^1) , \quad c_6^6 r = c_3^3(b_1^2 + r' b_2^2) , \\
c_4^4 = c_1^1 b_1^1 , \quad c_6^4 = c_3^1 b_1^1 , \quad c_6^4 r = c_3^1 b_1^2 , \quad c_5^4 = c_2^1 b_1^1 , \\
c_4^5 = c_1^2 b_2^1 , \quad c_5^5 = c_2^2 b_2^2 , \quad c_6^5 = c_3^2 b_2^1 , \quad c_6^5 r = c_3^2 b_2^2 .
\end{gathered}
\tag{26}
$$

Po přihlédnutí k podmínkám (20), (21), (5) a analogické $r' \neq 0$, lze diskusí systému (26) ukázat, že je řešitelný jen když

$$
b_1^2 = b_2^1 = 0 ,
\tag{27}
$$

nebo $b_1^1 = b_2^2 = 0$. Výběr jedné z těchto dvou možností je geometricky nepodstatný a my zvolíme (27).

Všimněme si ještě rovnic (25). Lehce z nich plyne

(28)

$$
(c_4^4 c_5^5 c_6^6 + c_4^5 c_5^6 c_6^4 + c_4^6 c_5^4 c_6^5)\, \omega^1 \omega^2 \omega^3 = (c_1^1 c_2^2 c_3^3 + c_1^2 c_2^3 c_3^1 + c_1^3 c_2^1 c_3^2)\, \omega'^1 \omega'^2 \omega'^3 .
$$

Korespondence $C : L \rightarrow L'$ tedy transformuje rozvinutelné variety (torsy) kongruence L do rozvinutelných variet kongruence L'. Taková korespondence se nazývá rozvinutelná (torsální).

Vraťme se nyní k relacím (26) a (27). Nahlédneme z nich platnost rovností

$$
c_1^2 = c_1^3 = c_2^1 = c_2^3 = c_3^1 = c_3^2 = c_4^5 = c_4^6 = c_5^4 = c_5^6 = c_6^4 = c_6^5 = 0 .
\tag{29}
$$

Vztahy (19) vzhledem k (27) jsou nyní

$$
\omega'^1 = b_1^1 \omega^1 , \quad \omega'^2 = b_2^2 \omega^2
\tag{30}
$$

a po přihlédnutí ke (29) nabývá (28) tvaru

$$
c_6^6 c_5^5 c_4^4 \omega^1 \omega^2 \omega^3 = c_3^3 c_2^2 c_1^1 \omega'^1 \omega'^2 \omega'^3 .
$$

Označme

$$
\omega_k'^k - \omega_k^k = \tau_k^k .
$$

Vnějším diferencováním (30) vychází

$$
\{\mathrm{d}b_1^1 + b_1^1(\tau_4^4 - \tau_1^1)\} \wedge \omega^1 = 0 , \quad \{\mathrm{d}b_2^2 + b_2^2(\tau_5^5 - \tau_2^2)\} \wedge \omega^2 = 0
$$

a tím se přesvědčujeme, že b_1^1, b_2^2 jsou relativní invarianty. Můžeme tedy klást

$$
b_1^1 = b_2^2 = 1 .
$$

Pak ovšem

$$\tau^{3+k}_{3+k} - \tau^k_k = f_k \omega^k \quad (k = 1, 2)$$

jsou hlavní formy.

Dosáhli jsme tak bez obsahové újmy na obecnosti situace, kdy

$$\omega'^k = \omega^k \quad (k = 1, 2)\,. \tag{31}$$

Systém (26) se tak zredukoval na

$$c^4_4 = c^1_1\,, \quad c^5_5 = c^2_2\,, \quad c^6_6 = c^3_3\,, \quad c^6_6 r = c^3_3 r'\,. \tag{32}$$

Z posledních dvou rovnic (32) ihned vyplývá

$$r = r'\,. \tag{33}$$

S použitím (29), (31), (32), (33) porovnávejme dále koeficienty v (18) nyní u $x^i A'_j$ $(j = 1, 2, 3)$. Současně použijme vyjádření hlavních forem přichystaného v (15). Dostaneme

$$\mathrm{d}c^i_i = c^i_i \tau^i_i + c^i_i \vartheta = c^i_{3+i} \omega^i \tag{$(34)_{1-3}$}$$

$$c^i_i \alpha^i_j \omega^i + c^i_{3+j} \omega^j = c^j_j \alpha'^i_j \omega^i \quad (j = 1, 2, 3;\ i \neq j)\,. \tag{$(34)_{4-9}$}$$

Porovnáním koeficientů u forem ω^1, ω^2 v rovnicích $(34)_{4-9}$ máme ihned

$$c^2_4 = c^3_4 = c^1_5 = c^3_5 = c^1_6 = c^2_6 = 0$$

a

$$c^i_i \alpha^i_j = c^j_j \alpha'^i_j \quad (j = 1, 2, 3;\ i \neq j)\,. \tag{35}$$

Jelikož lze požadavku (21) vzhledem k (29) vyhovět právě když

$$c^1_1 c^2_2 c^3_3 \neq 0\,, \tag{36}$$

dospíváme ze systému rovnic (35) pro neznámé c^1_1, c^2_2, c^3_3 k podmínkám

$$\begin{gathered} \alpha^2_1 \alpha^1_2 = \alpha'^2_1 \alpha'^1_2\,, \quad \alpha^3_1 \alpha^1_3 = \alpha'^3_1 \alpha'^1_3\,, \quad \alpha^3_2 \alpha^2_3 = \alpha'^3_2 \alpha'^2_3\,, \\ \alpha^2_1 \alpha^3_2 \alpha^1_3 = \alpha'^2_1 \alpha'^3_2 \alpha'^1_3\,, \quad \alpha^1_2 \alpha^2_3 \alpha^3_1 = \alpha'^1_2 \alpha'^2_3 \alpha'^3_1\,, \end{gathered} \tag{37}$$

které ovšem nejsou nezávislé.

Kolineace K realizující bodovou deformaci C je tedy určena rovnicemi

$$K A_i = c^i_i A'_i\,, \quad K A_{3+i} = c^i_{3+i} A'_i + c^i_i A'_{3+i}\,, \tag{38}$$

kde koeficienty c^i_i, c^i_{3+i} jsou řešením systému rovnic (35) a $(34)_{1-3}$.

Shrnutím dosavadních úvah a porovnáním (37) a (16) je dokázána

Věta 1. *Bodová deformace $C : L \to L'$ je rozvinutelná korespondence; kolineace K ji realisující transformuje ohniska A_1, A_2, A_3 do ohnisek A'_1, A'_2, A'_3.*

Kongruence L, L' jsou v bodové deformaci $C : L \to L'$ právě tehdy, platí-li

$$\varphi_1 = \varphi'_1\,, \quad \varphi_2 = \varphi'_2\,, \quad \varphi_3 = \varphi'_3$$

a aspoň jedna z rovností

$$\psi_1 = \psi'_1\,, \quad \psi_2 = \psi'_2\,.$$

Vyšetřujme nyní, zda k dané kongruenci $L \subset P_5$ opravdu existuje korespondence C a kongruence $L' \subset P'_5$ – dále stručněji dvojice (C, L') – tak, že $C : L \to L'$ je bodovou deformací.

Bez újmy na obecnosti volme v relacích (35) $\alpha_i^j = \alpha_i'^j$ $(j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$ a pamatujme na (31) a (33). Při dané kongruenci L je pak dvojice (C, L') určena systémem

$$\tau_i^j = 0 \quad (j = 1, \ldots, 6;\ i \neq j) \tag{39}$$

s uzávěrem

$$\omega^1 \wedge \Omega_3 = 0\,, \quad \omega^2 \wedge \Omega_4 = 0\,, \quad \omega^3 \wedge \Omega_5 = 0\,, \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
&\omega^1 \wedge \tau_4^2 + \omega^2 \wedge \alpha_1^2\Omega_1 = 0 && \omega^2 \wedge \tau_5^1 - \omega^1 \wedge \alpha_2^1\Omega_1 = 0\\
&\omega^1 \wedge \tau_4^3 + \omega^3 \wedge \alpha_1^3(\Omega_1 + \Omega_2) = 0 && \omega^3 \wedge \tau_6^1 - \omega^1 \wedge \alpha_3^1(\Omega_1 + \Omega_2) = 0\\
&\omega^2 \wedge \tau_5^3 + \omega^3 \wedge \alpha_2^3\Omega_2 = 0 && \omega^3 \wedge \tau_6^2 - \omega^2 \wedge \alpha_3^2\Omega_2 = 0\,,
\end{aligned}$$

kde

$$\Omega_1 = \tau_2^2 - \tau_1^1\,, \quad \Omega_2 = \tau_3^3 - \tau_2^2\,, \quad \Omega_3 = \tau_4^4 - \tau_1^1\,,$$
$$\Omega_4 = \tau_5^5 - \tau_2^2\,, \quad \Omega_5 = \tau_6^6 - \tau_3^3\,.$$

Snadno nahlédneme, že hlavní formy

$$\tau_4^2, \tau_4^3, \tau_5^1, \tau_5^3, \tau_6^1, \tau_6^2, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5\,,$$

stejně jako vnější kvadratické rovnice (40), jsou lineárně nezávislé. Při obvyklém označení je tedy

$$q = 11\,, \quad s_1 = 9\,, \quad s_2 = 11 - 9 = 2\,.$$

Cartanovo číslo

$$Q = s_1 + 2s_2 = 9 + 4 = 13\,.$$

Rozřešme (40) užitím Cartanova lemmatu.

$$\begin{aligned}
&\Omega_3 = f_1\omega^1\,, \quad \Omega_4 = f_2\omega^2\,, \quad \Omega_5 = f_3\omega^3\,,\\
&\tau_4^2 = f_4\omega^1 + f_5\omega^2\,, \qquad \tau_5^1 = f_{13}\omega^2 + f_{14}\omega^1\,,\\
&\alpha_1^2\Omega_1 = f_5\omega^1 + f_6\omega^2\,, \qquad \alpha_2^1\Omega_1 = -f_{14}\omega^2 + f_{15}\omega^1\,,
\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
\tau_4^3 &= f_7\omega^1 + f_8\omega^2\,, & \tau_6^1 &= f_{16}\omega^3 + f_{17}\omega^1\,,\\
\alpha_1^3(\Omega_1 + \Omega_2) &= f_8\omega^1 + f_9\omega^2\,, & \alpha_3^1(\Omega_1 + \Omega_2) &= -f_{17}\omega^3 + f_{18}\omega^1\,,\\
\tau_5^3 &= f_{10}\omega^2 + f_{11}\omega^3\,, & \tau_6^2 &= f_{19}\omega^3 + f_{20}\omega^2\,,\\
\alpha_2^3\Omega_2 &= f_{11}\omega^2 + f_{12}\omega^3\,, & \alpha_3^2\Omega_2 &= -f_{20}\omega^3 + f_{21}\omega^2\,.
\end{aligned}$$

Dosadíme-li ze (41) do (40), najdeme mezi koeficienty f_k ($k = 1, \ldots, 21$) osm lineárních relací, tedy $N = 21 - 8 = 13$. Protože $Q = N$ je systém (39) v involuci a je dokázána existenční

Věta 2. *Je-li dána kongruence $L \subset P_5$ pak dvojice (C, L') existuje a závisí na dvou funkcích dvou proměnných.*

3. Předně se budeme zabývat otázkou, kdy jsou dvojice fokálních ploch $\{A_i\}$, $\{A'_i\}$ v projektivních deformacích C_i prvního řádu [5], které budeme realisovat současně jednou kolineací $\mathscr{K}$, transformující ohniska A_i do ohnisek A'_i.

Rovnice kolineace $\mathscr{K}$ předpokládejme ve tvaru

(42) $$\mathscr{K}A_i = K_i^i A'_i$$

(43) $$\mathscr{K}A_{3+i} = \sum_j K_{3+i}^j A'_j \quad (j = 1, \ldots, 6)\,,$$

kde

(44) $$K_1^1 K_2^2 K_3^3 \neq 0\,.$$

Fokální plochy $\{A_i\}$, $\{A'_i\}$ jsou v projektivních deformacích $C_i : \{A_i\} \to \{A'_i\}$ prvního řádu realizovaných kolineací $\mathscr{K}$, platí-li při

$$\mathscr{K}A_i = K_i^i A'_i$$

relace $\mathscr{K}(\mathrm{d}A_i) = \mathrm{d}(K_i^i A'_i) + \vartheta_i K_i^i A'_i$, neboli

(45) $$\mathscr{K}(\mathrm{d}A_i) = K_i^i\,\mathrm{d}A'_i + \gamma_i A'_i\,,$$

kde ϑ_i jsou vhodné Pfaffovy formy a $\gamma_i = \mathrm{d}K_i^i + \vartheta_i K_i^i$.

Jest

$$\mathrm{d}A_i = \sum_j \omega_i^j A_j\,, \quad \mathrm{d}A'_i = \sum_j \omega_i'^j A'_j \quad (j = 1, \ldots, 6)\,,$$

tedy

(46) $$\sum_j \omega_i^j(\mathscr{K}A_j) = K_i^i \sum_j \omega_i'^j A'_j + \gamma_i A'_i \quad (j = 1, \ldots, 6)\,.$$

Nyní dosadíme za $\mathscr{K}A_j$ do (46) ze (42), resp. (43), a za ω_i^j jejich vyjádření z matice koeficientů (15). Porovnáním koeficientů u $A'_j (j = 1, \ldots, 6)$ a pak u ω^1 a ω^2 dospějeme po snadných výpočtech ke vztahům

$$K_4^2 = K_4^3 = K_4^5 = K_4^6 = K_5^1 = K_5^3 = K_5^4 = K_5^6 = K_6^1 = K_6^2 = K_6^4 = K_6^5 = 0$$

(47) $$K_i^i \alpha_j^i = K_j^j \alpha_j'^i \qquad (j = 1, 2, 3; \quad i \neq j)$$

(48) $$K_{3+i}^{3+i} = K_i^i$$

(49) $$K_i^i \tau_i^i + \gamma_i = K_{3+i}^i \omega^i .$$

Systém rovnic (47) je až na označení hledaných funkcí K_i^i identický se systémem (35). Obsahově jsou stejné i požadavky (44) a (36). Jest tedy

$$K_i^i = c_i^i$$

a vzhledem k (48)

$$K_{3+i}^{3+i} = c_i^i .$$

Rovnice (49) nabývají nyní tvaru

$$c_i^i \tau_i^i + \gamma_i = K_{3+i}^i \omega^i$$

a lze z nich určit K_{3+i}^i. Tím je dokázána

Věta 3. *Fokální plochy $\{A_i\}$, $\{A'_i\}$ kongruencí L, L' jsou v projektivních deformacích prvního řádu $C_i : \{A_i\} \to \{A'_i\}$ realisovaných současně jedinou kolineací $\mathcal{K}$ právě tehdy, platí-li*

$$\varphi_i = \varphi'_i$$

a aspoň jedna z rovností

$$\psi_1 = \psi'_1 , \quad \psi_2 = \psi'_2 .$$

Rovnice kolineace $\mathcal{K}$ jsou tvaru

$$\begin{aligned} \mathcal{K} A_i &= c_i^i A'_i \\ \mathcal{K} A_{3+i} &= c_{3+i}^i A'_i + c_i^i A'_{3+i} . \end{aligned}$$

Z obsahů věty 1 a věty 2 vyplývá tvrzení, které podává

Věta 4. *Rozvinutelná korespondence $C : L \to L'$ mezi kongruencemi L, L' je bodovou deformací právě tehdy, jsou-li korespondence $C_i : \{A_i\} \to \{A'_i\}$ mezi fokálními plochami $\{A_i\}$, $\{A'_i\}$ projektivními deformacemi prvního řádu.*