Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1972

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0097|log4

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

97
1972

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

43

1

97

ACADEMIA
PRAHA

1-4, TJ

8° Z. Nat. 248

Niedersächsische Staats- u.
Universitätsbibliothek
Göttingen

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 97 • Č. 1 • STR. [illegible]12 • PRAHA 16. 2. 1972

5984

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(*Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky"*)

SVAZEK 97 (1972)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd v Praze

Redakční rada:

Zástupce vedoucího redaktora: F. Zítek,

výkonný redaktor: Vl. Doležal,

J. Bečvář, I. Černý, J. Kurzweil, L. Mišík, Z. Nádeník, J. Sedláček, M. Sova, A. Urban, V. Vilhelm, K. Winkelbauer

Redakce:

Matematický ústav Československé akademie věd v Praze
Praha 1, Žitná 25

OBSAH

Články:

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 97 * PRAHA 16. II. 1972 * ČÍSLO 1

PROJEKTIVNÍ DEFORMACE PŘÍMKOVÝCH KONGRUENCÍ VNOŘENÝCH DO ŠESTIROZMĚRNÝCH PROJEKTIVNÍCH PROSTORŮ

JAKUB BENEŠ, Brno

(Došlo dne 19. září 1968)

Tento článek navazuje na výsledky získané v práci [3], kde jsou studovány projektivní deformace 3. řádu přímkových kongruencí vnořených do n-rozměrných projektivních prostorů. Je-li $n \geqq 7$, jsou uvedené deformace ekvivalentní s bodovou deformací 1. řádu obou kongruencí. Je-li však jedna z obou kongruencí, které jsou v projektivní deformaci 3. řádu, vnořená do projektivního prostoru o dimensi 6 a není-li vnořitelná do prostoru o dimensi menší, pak totéž platí i pro druhou kongruenci. Přitom nutně musí být splněny určité podmínky (viz [3], rovnice (37)), které jsou mnohem silnější než ty, které si vynucují bodovou deformaci 1. řádu. Nebylo účelem článku [3] sledovat podrobně tento zvláštní případ a proto se k němu vracím v tomto pojednání. Je tedy hlavním úkolem tohoto článku objasnění podmínek (37) z jiných geometrických hledisek, dále důkaz existence netriviálních deformací 3. řádu a stručná zmínka o singulární deformaci 3. řádu. Omezím se však pouze na nejobecnější typy neparabolických kongruencí charakteru 3, jejichž příslušné Laplaceovy transformace nedegenerují a jimž v duálním prostoru odpovídají Laplaceovy posloupnosti ploch s konjugovanými sítěmi.

1. ZÁKLADNÍ ROVNICE KONGRUENCE L A JEJÍ DUALIZACE L^*

Vycházíme-li z podmínek (1), (2), (3), (22) a (35) v [3], které doplníme podmínkou

$$(1) \qquad [A_1, A_2, \ldots, A_7] = 1\,,$$

můžeme v případě $n = 6$ specializovat reper přímkové kongruence L obdobným způsobem jak tomu bylo v [2], takže platí

$$(2) \quad \omega_{12} = \alpha_1\omega_2\,, \quad \omega_{21} = \alpha_2\omega_1\,, \quad \omega_{14} = \omega_{23} = 0\,, \quad \omega_{1j} = \omega_{2j} = 0 \ (j = 5, 6, 7),$$
$$\omega_{31} = a_1\omega_2\,, \quad \omega_{35} = \omega_1\,, \quad \omega_{32} = \omega_{34} = \omega_{36} = \omega_{37} = 0\,,$$

$$\omega_{42} = a_2\omega_1\,, \quad \omega_{46} = \omega_2\,, \qquad \omega_{41} = \omega_{43} = \omega_{45} = \omega_{47} = 0\,,$$

$$\omega_{57} = b_2\omega_1\,, \quad \omega_{67} = b_1\omega_2\,, \quad \omega_{75} = c_1\omega_2\,, \quad \omega_{76} = c_2\omega_1\,,$$

$$\omega_{52} = \omega_{54} = \omega_{56} = \omega_{61} = \omega_{63} = \omega_{65} = \omega_{73} = \omega_{74} = 0\,.$$

(3)
$$\begin{aligned}
&\omega_1 \wedge [d\alpha_2 - \alpha_2(\omega_{33} - 2\omega_{11} + \omega_{22})] = 0\,,\\
&\omega_2 \wedge [d\alpha_1 - \alpha_1(\omega_{44} - 2\omega_{22} + \omega_{11})] = 0\,,\\
&\omega_1 \wedge (2\omega_{33} - \omega_{55} - \omega_{11}) = 0\,,\\
&\omega_2 \wedge (2\omega_{44} - \omega_{66} - \omega_{22}) = 0\,,\\
&\omega_1 \wedge [db_2 - b_2(\omega_{33} - \omega_{11} + \omega_{55} - \omega_{77})] = 0\,,\\
&\omega_2 \wedge [db_1 - b_1(\omega_{44} - \omega_{22} + \omega_{66} - \omega_{77})] = 0\,,\\
&\omega_1 \wedge [dc_2 - c_2(\omega_{33} - \omega_{11} + \omega_{77} - \omega_{66})] = 0\,,\\
&\omega_2 \wedge [dc_1 - c_1(\omega_{44} - \omega_{22} + \omega_{77} - \omega_{55})] = 0\,,\\
&\omega_1 \wedge [da_2 - a_2(\omega_{33} - \omega_{11} + \omega_{44} - \omega_{22})] + \omega_2 \wedge \omega_{62} = 0\,,\\
&\omega_1 \wedge \omega_{51} + \omega_2 \wedge [da_1 - a_1(\omega_{44} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{11})] = 0\,,\\
&\alpha_2\omega_1 \wedge \omega_{62} - b_1\omega_2 \wedge \omega_{71} = 0\,, \quad c_2\omega_1 \wedge \omega_{64} - \omega_2 \wedge \omega_{72} = 0\,,\\
&b_2\omega_1 \wedge \omega_{72} - \alpha_1\omega_2 \wedge \omega_{51} = 0\,, \quad \omega_1 \wedge \omega_{71} - c_1\omega_2 \wedge \omega_{53} = 0\,.
\end{aligned}$$

Přitom naše předpoklady o typu uvažovaných kongruencí si vynucují podmínku

(4)
$$\alpha_1\alpha_2a_1a_2b_1b_2c_1c_2 \neq 0\,.$$

Základní rovnice kongruence L při platnosti (2) jsou

(5)
$$dA_i = \sum_{j=1}^{7} \omega_{ij}A_j \quad (i = 1, 2, \ldots, 7)\,.$$

Označme symbolem P_6^* prostor duální k P_6. Repery v P_6^* jsou tvořeny analytickými nadrovinami E_k

(6)
$$E_k = (-1)^k [A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_7] \quad (k = 1, 2, \ldots, 7)$$

přitom $[A_i, E_j] = \delta_i^j$ (viz [1] str. 26).

Oskulačnímu prostoru $(A_1, A_2, \ldots, A_6)$ kongruence L podél přímky p je dualizací přiřazen bod E_7 duálního prostoru P_6^* a tedy kongruenci L v P_6 plocha L^* v P_6^*, jejíž základní rovnice jsou

(7)
$$dE_i = -\sum_{j=1}^{7} \omega_{ji}E_j\,. \quad (i = 1, 2, \ldots, 7)$$

Ze (7) vyplývá, že $\omega_1\omega_2 = 0$ je rovnicí konjugované sítě na L^*, a že plochy (E_6) a (E_4) resp. (E_5) a (E_3) jsou Laplaceovými transformacemi plochy L^* ve směru $\omega_1 = 0$ resp. $\omega_2 = 0$. Snadno se přesvědčíme, že dualizace přiřazuje fokální ploše kongruence L, na níž leží hrany vratu vrstvy rozvinutelných ploch $\omega_1 = 0$ $(\omega_2 = 0)$, kongruenci duálního prostoru vytvořenou tečnami vrstvy čar $\omega_1 = 0$ $(\omega_2 = 0)$ konjugované sítě na L^*.

Dále budeme označovat:

Laplaceovu posloupnost kongruencí v P_6 jako

$$\dots L_{-1}, L, L_1, \dots,$$

Laplaceovu posloupnost příslušných fokálních ploch jako

$$\dots S_{-1}, S_1, S_2, \dots,$$

přičemž $S_{-1} = (A_2)$, $S_1 = (A_1)$, Laplaceovu posloupnost ploch v P_6^* jako

$$\dots L_{-1}^*, L^*, L_1^*, \dots,$$

a přidruženou posloupnost kongruencí v P_6^* jako

$$\dots, S_{-1}^*, S_1^*, \dots,$$

kde $S_{-1}^*(S_1^*)$ je vytvořena tečnami vrstvy čar $\omega_1 = 0$ $(\omega_2 = 0)$ na L^*.

Je-li L' kongruence v P_6', pak o ní i o specializaci jejího reperu budeme předpokládat totéž co o kongruenci L a jejím reperu, pouze odpovídající symboly či rovnice budeme odlišovat čárkou.

Při označení $\tau_{ik} = \omega'_{ik} - \omega_{ik}$ platí o kongruencích L, L' v rozvinutelné korespondenci

$$\tau_{13} = 0\,, \quad \tau_{24} = 0\,. \tag{8}$$

Z (3), (3') a (8) vyplývají rovnice:

$$\tau_{33} - \tau_{11} = s_1\omega_1\,, \quad \tau_{44} - \tau_{22} = s_2\omega_2\,, \quad \tau_{55} - \tau_{33} = s_3\omega_1\,, \tag{9}$$
$$\tau_{66} - \tau_{44} = s_4\omega_2\,,$$
$$\mathrm{d}\frac{\alpha_2'}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2'}{\alpha_2}(\tau_{22} - \tau_{11}) = m_2\omega_1\,, \quad \mathrm{d}\frac{\alpha_1'}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1'}{\alpha_1}(\tau_{11} - \tau_{22}) = m_1\omega_2\,,$$
$$\mathrm{d}\frac{b_2'}{b_2} - \frac{b_2'}{b_2}(\tau_{55} - \tau_{77}) = n_2\omega_1\,, \quad \mathrm{d}\frac{b_1'}{b_1} - \frac{b_1'}{b_1}(\tau_{66} - \tau_{77}) = n_1\omega_2\,,$$
$$\mathrm{d}\frac{c_2'}{c_2} - \frac{c_2'}{c_2}(\tau_{77} - \tau_{66}) = p_2\omega_1\,, \quad \mathrm{d}\frac{c_1'}{c_1} - \frac{c_1'}{c_1}(\tau_{77} - \tau_{55}) = p_1\omega_2\,.$$

2. PROJEKTIVNÍ DEFORMACE 3. ŘÁDU

Nutné a postačující podmínky projektivní deformace 3. řádu kongruencí L, L' uvedené v [3] (Prop. 6) se zjednoduší vzhledem k naší specializaci reperů na

$$\alpha_1' = \varrho^{-2}\alpha_1\,, \quad \alpha_2' = \varrho^2\alpha_2\,, \quad b_1 b_2' = \varrho^{-2} b_1' b_2\,, \quad \varrho \neq 0\,, \tag{10}$$
$$2s_1 + s_3 = 0\,, \quad 2s_2 + s_4 = 0\,.$$

Diferenciálními důsledky rovnic (10) jsou pak relace

$$b_1' c_2' = b_1 c_2\,, \quad b_2' c_1' = b_2 c_1\,, \quad a_1' = a_1\,, \quad a_2' = a_2 \tag{11}$$
$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = m_1 = n_1 = p_1 = m_2 = n_2 = p_2 = 0\,.$$

Odtud a podle [3], rovnice (36), nalezeneme nejobecnější kolineaci K realizující uvedenou deformaci ve tvaru

$$KA_1 = \varrho A_1'\,, \quad KA_2 = \varrho^{-1} A_2'\,, \quad KA_3 = \varrho A_3'\,, \quad KA_4 = \varrho^{-1} A_4'\,, \tag{12}$$
$$KA_5 = \alpha_{51} A_1' + \varrho A_5'\,, \qquad KA_6 = \alpha_{62} A_2' + \varrho^{-1} A_6'\,,$$
$$KA_7 = \alpha_{71} A_1' + \alpha_{72} A_2' + \varrho \frac{b_2'}{b_2} A_7'\,,$$

přičemž

$$3\varrho^{-1}\alpha_{51}\omega_1 = \tau_{53}\,, \quad 3\varrho\alpha_{62}\omega_2 = \tau_{64}\,. \tag{13}$$

Protože $a_1\omega_1\omega_2$ $(a_2\omega_1\omega_2)$ je bodová forma kongruence L_1, (L_{-1}) (viz [3], rov. (20)) a $b_1c_2\omega_1\omega_2$ $(b_2c_1\omega_1\omega_2)$ bodová forma kongruence S_1^* (S_{-1}^*), vyplývá z (11) a z [3], Prop. 1, 2, 3, tvrzení:

Věta 1. *Nechť $C : L \to L'$ je projektivní deformace 3. řádu. Pak C i indukované korespondence $C_i : L_i \to L_i'$ a $c_i^* : S_i^* \to S_i^*$ $(i = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ jsou bodovými deformacemi 2. řádu.*

Poznámka 1. Mnohé vlastnosti kongruencí vnořených do šestirozměrných projektivních prostorů jsou podobné těm, které byly zjištěny ve [2]. Všechny důkazy lze provést metodami užitými ve [2], proto jsou v dalším většinou vypuštěny, nebo jen naznačeny.

3. EXISTENČNÍ VĚTA

Podle (1), (1') a (12) je $\varrho a'/a = 1$. Repery kongruencí lze zvolit tak, že $\varrho = 1$. Za tohoto předpokladu se podmínky (10) zjednoduší, takže trojice (C, L, L'), kde $C : L \to L'$ je projektivní deformace 3. řádu, je dána uzavřeným systémem (2), (3) a

$$\tau_{1i} = \tau_{2i} = \tau_{3i} = \tau_{4i} = 0 \; (i = 1, 2, \ldots, 7), \quad \tau_{52} = \tau_{54} = \tau_{61} = \tau_{63} = 0,$$
$$\tau_{5j} = \tau_{6j} = 0 \; (j = 5, 6, 7), \quad \tau_{7k} = 0 \; (k = 3, 4, 7),$$
$$\omega_1 \wedge \tau_{53} = 0, \quad \omega_2 \wedge \tau_{64} = 0, \quad \omega_1 \wedge \tau_{51} = 0, \quad \omega_2 \wedge \tau_{62} = 0,$$
$$\alpha_2\omega_1 \wedge \tau_{64} - b_1\omega_2 \wedge \tau_{71} = 0, \quad b_2\omega_1 \wedge \tau_{72} - \alpha_1\omega_2 \wedge \tau_{51} = 0,$$
$$\omega_1 \wedge \tau_{71} - c_1\omega_2 \wedge \tau_{53} = 0, \quad c_2\omega_1 \wedge \tau_{64} - \omega_2 \wedge \tau_{72} = 0.$$

Systém není v involuci, proto jej prodloužíme rovnicemi:

$$\tau_{53} = a_{53}\omega_1, \quad \tau_{64} = b_{64}\omega_2, \quad \tau_{51} = b_2 a_{51}\omega_1, \quad \tau_{62} = b_1 b_{62}\omega_2,$$
$$\tau_{71} = -\alpha_2 b_{62}\omega_1 - c_1 a_{53}\omega_2, \quad \tau_{72} = -c_2 b_{64}\omega_1 - \alpha_1 a_{51}\omega_2.$$

Snadno se přesvědčíme, že systém ani teď není v involuci. Dalším prodlužováním jej lze už poměrně snadno uvést do involuce, je však nutno odlišit případ, kdy a_{53} a b_{64} je současně rovné nule.

Věta 2. *Trojice (C, L, L'), kde $C : L \to L'$ je projektivní deformace 3. řádu, existují a závisí na 18 libovolných funkcích jedné proměnné. V singulárním případě, $a_{53} = b_{64} = 0$, trojice (C, L, L') existují a závisí na 14 libovolných funkcích jedné proměnné.*

Poznámka 2. K singulárnímu případu se vrátíme podrobněji v odst. 6.

4. DEFORMACE FOKÁLNÍCH PLOCH A LAPLACEOVÝCH TRANSFORMACÍ

Korespondence $C : L \to L'$ vynucuje přirozeným způsobem korespondence $c_1 : S_1 \to S'_1$, $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$, $C^* : L^* \to L'^*$. Korespondence c_1, c_{-1}, C^* jsou projektivními deformacemi 2. řádu, právě když jsou konjugované nebo C rozvinutelná. Uvažme dále, že příslušné oskulační kolineace, které realizují uvedené deformace, jsou obecně různé. Platí:

Věta 3. *Korespondence $C : L \to L'$ je projektivní deformací 3. řádu (bodovou deformací 1. řádu), právě když projektivní deformace 2. řádu $c_1 : S_1 \to S'_1$, $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$ a $C^* : L^* \to L'^*$ ($c_1 : S_1 \to S'_1$ a $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$) jsou současně realizovány společnou oskulační kolineací.*

Nutné a postačující podmínky, aby $c_1 : S_1 \to S'_1$ byla projektivní deformací 3. řádu i příslušnou oskulační kolineací 3. řádu K_1, vypočteme z rovnic

$$K_1 \, d^m A_1 = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} {}^1\vartheta_k \, d^{m-k} A'_1 \qquad \text{pro } m = 0, 1, 2, 3,$$

kde ${}^1\vartheta_k$ je vhodná k-forma, ${}^1\vartheta_0 = \varrho_1 \neq 0$.

Vychází: c_1 je konjugovaná a

$$(14) \qquad \alpha_1'\alpha_2' - \alpha_1\alpha_2 = 0\,, \quad a_1' - a_1 = 0\,.$$

Poněvadž c_1 je konjugovaná, je C rozvinutelná a podle (14) jsou si rovny bodové formy kongruencí L, L' a L_1, L_1'. Ze (14) a (9) obdržíme jako diferenciální důsledky vztahy $a_2' = a_2$, $m_1 = m_2 = 0$. Tedy také bodové formy kongruencí L_{-1} a L'_{-1} jsou si rovny. Nejobecnější oskulační kolineace 3. řádu realizující projektivní deformaci 3. řádu c_1 je vyjádřena rovnicemi:

$$(15) \qquad K_1A_1 = \varrho_1 A_1'\,, \quad K_1A_2 = \varrho \frac{\alpha_1'}{\alpha_1} A_2'\,, \quad K_1A_3 = \varrho_1 A_3'\,,$$

$$K_1A_4 = \varrho_1 \frac{\alpha_1'}{\alpha_1} A_4'\,, \quad K_1A_5 = \varrho_1 s_1 A_3' + \varrho_1 A_5'\,,$$

$$K_1A_6 = {}^1\alpha_{61}A_1' + \varrho_1 \frac{\alpha_1'}{\alpha_1} s_2 A_4' + \varrho_1 \frac{\alpha_1'}{\alpha_1} A_6'\,,$$

$$K_1A_7 = {}^1\alpha_{71}A_1' + {}^1\alpha_{73}A_3' + \varrho_1 \frac{2s_1 + s_3}{b_2} A_5' + \varrho_1 \frac{b_2'}{b_2} A_7'\,,$$

$$b_2{}^1\alpha_{73} = \varrho_1[\mathrm{d}s_1 - s_1(\omega_{33} - \omega_{11}) + \tau_{53}] + \varrho_1 s_1(2\omega_{33} - \omega_{11} - \omega_{53}) + \varrho_1 s_1^2 \omega_1\,.$$

Analytické podmínky pro projektivní deformaci 3. řádu $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$ a příslušnou oskulační kolineaci K_{-1} obdržíme ze (14) a (15) záměnou indexů

$$(16) \qquad 1 \text{ za } 2\,, \quad 3 \text{ za } 4\,, \quad 5 \text{ za } 6$$

a naopak.

Obdržené výsledky můžeme s použitím Prop. 1, 2 a 3 z [3] shrnout ve věty:

Věta 4. *Korespondence $c_1 : S_1 \to S_1'$ je projektivní deformací 3. řádu, právě když $C : L \to L'$ je bodovou deformací 2. řádu.*

Věta 5. *Nechť $c_1 : S_1 \to S_1'$ je projektivní deformací 3. řádu. Pak také $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$ a všechny indukované korespondence $c_i : S_i \to S_i'$ $(i = \pm 2, \pm 3, \ldots)$ jsou projektivními deformacemi 3. řádu.*

Souvislost mezi projektivními deformacemi 2. řádu C, C_1 a C_{-1} a projektivní deformací 3. řádu $C : L \to L'$ je vyjádřena následující větou:

Věta 6. *Nechť $C : L \to L'$ a indukované korespondence $C_1 : L_1 \to L_1'$ a $C_{-1} : L_{-1} \to L'_{-1}$ jsou projektivními deformacemi 2. řádu. Tyto deformace jsou současně realizovatelné společnou oskulační kolineací, právě když C je projektivní deformací 3. řádu.*

5. DEFORMACE DUÁLNÍCH ÚTVARŮ

Korespondence $C : L \to L'$ vynucuje prostřednictvím dualizace korespondence mezi plochami $C^* : L^* \to L'^*$, $C_i^* : L_i^* \to L_i'^*$ a mezi přidruženými kongruencemi $c_i^* : S_i^* \to S_i'^*$, kde $i = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Aby c_1^* byla projektivní deformací 3. řádu, je nutnou a postačující podmínkou její rozvinutelnost a splnění vztahů

$$(17) \qquad b_1'c_2' = b_1c_2\,, \quad \alpha_1'b_1'b_2 = \alpha_1b_1b_2'\,, \quad 2b_2n_2 + b_2's_3 = 0\,,$$
$$2s_4 + s_2 = 0\,.$$

Zkoumáním diferenciálních důsledků zjistíme, že tyto podmínky jsou ekvivalentní s (11). Platí tedy:

Věta 7. *Korespondence $C : L \to L'$ je projektivní deformací 3. řádu, právě když $c_1^* : S_1^* \to S_1'^*$ je projektivní deformací 3. řádu.*

Nejobecnější kolineace K_1^*, realizující projektivní deformaci 3. řádu c_1^* je dána rovnicemi:

(18)

$$K_1^*E_7 = {}^1\alpha_{77}^*E_7'\,, \quad K_1^*E_6 = {}^1\alpha_{66}^*E_6'\,, \quad K_1^*E_5 = {}^1\alpha_{77}^*\frac{b_2'}{b_2}E_5'\,, \quad K_1^*E_4 = {}^1\alpha_{66}^*E_4'\,,$$

$$K_1^*E_3 = {}^1\alpha_{37}^*E_7' + {}^1\alpha_{77}^*\frac{b_2'}{b_2}E_3'\,, \quad K_1^*E_2 = {}^1\alpha_{26}^*E_6' + {}^1\alpha_{66}^*E_2'\,,$$

$$K_1^*E_1 = {}^1\alpha_{17}^*E_7' + {}^1\alpha_{16}^*E_6' + {}^1\alpha_{77}^*\frac{b_2'}{b_2}E_1'\,,$$

$${}^1\alpha_{77}^*\tau_{53} + 3b_2\,{}^1\alpha_{37}^*\omega_1 = 0\,, \quad 2\,{}^1\alpha_{66}^*\tau_{64} - 3\,{}^1\alpha_{26}^*\omega_2 = 0\,,$$
$${}^1\alpha_{66}^*\,{}^1\alpha_{77}^* = \varrho_1^* \neq 0\,.$$

Nutné a postačující podmínky pro projektivní deformaci 3. řádu $c_{-1}^* : S_{-1}^* \to S_{-1}'^*$ i příslušnou oskulační kolineaci 3. řádu K_{-1}^* obdržíme z (17) a (18) záměnou indexů podle (16). Tyto podmínky jsou však ekvivalentní s (17). Platí tedy věty:

Věta 8. *Korespondence $c_{-1}^* : S_{-1}^* \to S_{-1}'^*$ je projektivní deformací 3. řádu, právě když $c_1^* : S_1^* \to S_1'^*$ je projektivní deformací 3. řádu.*

Věta 9. *Nechť $C : L \to L'$ nebo $c_1^* : S_1^* \to S_1'^*$ jsou projektivními deformacemi 3. řádu. Pak také indukované korespondence $C_i : L_i \to L_i'$ a $c_i^* : S_i^* \to S_i'^*$ $(i = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ jsou projektivními deformacemi 3. řádu.*

6. SINGULÁRNÍ PROJEKTIVNÍ DEFORMACE 3. ŘÁDU

Je-li $C : L \to L'$ projektivní deformací 3. řádu, pak podle vět 1, 4 a 5 jsou také korespondence $c_1 : S_1 \to S'_1$ a $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$ projektivními deformacemi 3. řádu. Oskulační kolineace 3. řádu K, K_1, K_{-1} realizující tyto deformace jsou obecně různé (viz (12), (15)). Aby kolineace K a K_1 resp. K a K_{-1} mohly splynout, pak nutně musí být

(19) $$\tau_{53} = 0\,, \quad \tau_{64} = 0\,.$$

Odtud máme:

Věta 10. *Nechť $C : L \to L'$ je projektivní deformace 3. řádu, $c_1 : S_1 \to S'_1$ a $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$ jsou vynucené projektivní deformace 3. řádu. Pak deformace C a c_1 jsou realizovatelné společnou oskulační kolineací právě tehdy, jsou-li takto realizovatelné deformace C a c_{-1}.*

Definice. Projektivní deformaci 3. řádu $C : L \to L'$ nazýváme *singulární*, jestliže vynucené projektivní deformace 3. řádu $c_1 : S_1 \to S'_1$ a $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$ jsou realizovány kolineací K (podle E. Čecha).

Na základě věty 2, 10 a vztahů (19) můžeme vyslovit tvrzení:

Věta 11. *Trojice (C, L, L'), kde $C : L \to L'$ je singulární projektivní deformace 3. řádu, existují a závisí na 14 funkcích jedné proměnné.*

Porovnáním kolineací K_1 a K_{-1} ihned obdržíme:

Věta 12. *Korespondence $C : L \to L'$ je singulární projektivní deformací 3. řádu, právě když indukované korespondence $c_1 : S_1 \to S'_1$ a $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$ jsou současně projektivními deformacemi 3. řádu a jsou realizovatelné společnou oskulační kolineací.*

7. SINGULÁRNÍ DEFORMACE LAPLACEOVÝCH TRANSFORMACÍ

Dále chceme určit nutné a postačující podmínky pro to, aby projektivní deformace 3. řádu $c_1^* : S_1^* \to S_1'^*$ byla singulární. Nalezneme proto známým způsobem kolineaci K^*, která realizuje projektivní deformaci 3. řádu $C^* : L^* \to L'^*$ a provonáme ji s kolineací K_1^*. Zjistíme:

Věta 13. *Korespondence $C : L \to L'$ je singulární projektivní deformací 3. řádu, právě když indukovaná korespondence $c_1^* : S_1^* \to S_1'^*$ je singulární projektivní deformací 3. řádu.*

Analogické tvrzení platí též o korespondencích C a c^*_{-1}, takže máme:

Věta 14. *Korespondence* $c^*_1 : S^*_1 \to S'^*_1$ *je singulární projektivní deformací, právě když* $c^*_{-1} : S^*_{-1} \to S'^*_{-1}$ *je singulární projektivní deformací 3. řádu.*

Aplikováním této věty na celou posloupnost c^*_i $(i = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ a užitím vět 13 a 9 obdržíme:

Věta 15. *Nechť* $C : L \to L'$ *je singulární projektivní deformace 3. řádu. Pak všechny indukované korespondence* $C_i : L_i \to L'_i$ *a* $c^*_i : S^*_i \to S^{*\prime}_i$ $(i = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *jsou singulárními projektivními deformacemi 3. řádu.*

Literatura

[1] *Švec A.:* Projective differential geometry of line congruences, Prague 1965.

[2] *Beneš J.:* Projective deformation of line congruences in five-dimensional projective spaces. Czech. Math. J., *18* (*93*) 1968, Praha.

[3] *Beneš J.:* Point deformation of 2^{nd} order and projective deformation of 3^{rd} order of congruences in projective spaces of n dimensions. Spisy přír. fakulty UJEP, Brno, A *31* (1967), 505—516.

Adresa autora: Brno 16, Klímova 10.

Summary

PROJECTIVE DEFORMATION OF LINE CONGRUENCES IN SIX-DIMENSIONAL PROJECTIVE SPACES

JAKUB BENEŠ, Brno

The contents of this paper consist in study of projective deformation of the third order of line congruences in six-dimensional projective spaces. In the first part of this paper the existence theorem is proved. Latter the projective deformation of the third order is studied in the connection with deformations of associated and dual objects. The last part contains some results on singular projective deformation.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

SPACES OF FUNCTIONS ON DOMAIN Ω, WHOSE k-TH DERIVATIVES ARE MEASURES DEFINED ON $\bar{\Omega}$

JIŘÍ SOUČEK, Praha

(Received January 8, 1970)

INTRODUCTION

In §1. a new kind of a functional space is defined, the space $W_\mu^1(\bar{\Omega})$ of functions, the first derivatives of which are measures on $\bar{\Omega}$ and the properties of this space are investigated. In §2. we use results from §1. to define the space $W_\mu^k(\bar{\Omega})$, the space of functions, the k-th derivatives of which are measures on $\bar{\Omega}$.

Let $\Omega \subset E_N$ be a bounded domain with the boundary of the class C^1. Generally speaking, we can say that the space $W_\mu^1(\bar{\Omega})$ is the completing of Sobolev's space $W_1^1(\Omega)$ in weak convergence, by this weak convergence we mean the weak convergence of the function together with weak convergence of their derivatives. Now, it can be seen that element of W_μ^1 is not already a function on Ω in usualy sense: if two weak convergent sequences of functions from W_1^1 has the same limit function in L_μ (in the sense of weak convergence in L_μ), then their derivatives need not have the same weak limit in L_μ, these limit measures can be different on $\partial\Omega$.

The space $W_\mu^1(\bar{\Omega})$ is the space of all $(N + 1)$-couples $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ of measures on $\bar{\Omega}$, for which there exists a sequence of functions $u_n \in W_1^1(\Omega)$ such that $u_n \rightharpoonup \alpha_0$ and at the same time $\partial u_n/\partial x_i \rightharpoonup \alpha_i$. It will be seen that α_0 must be absolutely continuous with respect to Lebesgue measure and hence α_0 has the density u, which is integrable on Ω. The derivatives of this function u in the sense of distributions are then the restriction $\alpha_{i|\Omega}$. Further there exists uniquelly determined measure $\beta \in L_\mu(\partial\Omega)$ (we will call it the trace of $(\alpha_0, \ldots, \alpha_N)$ such that the Green theorem holds in this form

$$\int_{\partial\Omega} \varphi v_i \, d\beta = \int_\Omega u \varphi_{x_i} \, dx + \int_{\bar{\Omega}} \varphi \, d\alpha_i \,, \quad \forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega}) \,.$$

The following important assertion is true:

If we take the function $u \in L_1(\Omega)$ and if for any measures $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in L_\mu(\bar{\Omega})$ there exists the measure $\beta \in L_\mu(\partial\Omega)$ such that Green theorem holds, then $(u, \alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in$

$\in W_\mu^1(\bar{\Omega})$. It will be seen that the element $(u, \alpha_i) \in W_\mu^1$ is uniquelly determined by the function u and by the trace $\beta \in L_\mu(\partial\Omega)$. In theorem 3 there are discussed necessary and sufficient condition for u and β to define an element from W_μ^1. It will then be shown that $\beta \in L_\mu(\partial\Omega)$ can be arbitrary and only some conditions must be supposed about the function u. The trace β depends continuously and weakly continuously on $(u, \alpha_i) \in W_\mu^1$. Further there are proved the theorems on imbedding into $L_q(\Omega)$ and the theorem on equivalent norms. The unit ball in W_μ^1 is weakly compact. A so called inner trace of $(u, \alpha_i) \in W_\mu^1$ is defined as the trace of the element $(u, \bar{\alpha}_i) \in W_\mu^1$, where $\bar{\alpha}_i$ is the restriction $\alpha_{i|\Omega}$, which is uniquelly determined by u. The side of an element (u, α_i) is, on the contrary, determined by the restriction $\alpha_{i|\partial\Omega}$ and equals the difference between the trace and the inner trace.

In the next sections the possibility of joining together of two functions is investigated, which are defined on the neighbouring domains. We can join together two such functions, if they have the same trace on the common part of the boundary. The function $(u, \alpha_i) \in W_\mu^1$ can be extended to the greater domain, if the trace of this function is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure on $\partial\Omega$. By suitable extentions it is possible to define the regularisation of element $(u, \alpha_i) \in W_\mu^1$ and by this regularisations we are able to prove that for each $(u, \alpha_i) \in W_\mu^1$ there exists a sequence of the functions $u_n \in W_\mu^1(\Omega)$ such that

$$(u_n, u_{nx_1}, \ldots, u_{nx_N}) \rightharpoonup (u, \alpha_1, \ldots, \alpha_N)$$

and moreover $\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{W_1{}^1} = \|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu{}^1}$.

In §2. the space $W_\mu^k(\bar{\Omega})$ is defined as the space of functions, the $(k-1)$-th derivatives of which belong to the space W_μ^1. The analogic properties are investigated there as was done for the space W_μ^1, but the situation is more complicated, namely for extensions of elements from W_μ^k.

The reason for investigation of these spaces is following. We can consider a functional of the type of minimal surface

$$I(u, \Omega) = \int_\Omega f(x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_N})\, \mathrm{d}x\,, \quad u \in W_1^1(\Omega)\,.$$

Let $f(x, u, p)$ be a continuous and nonnegative function, which is convex in the variable $p = (p_1, \ldots, p_N)$ and which satisfied the condition

$$c_1|p| - c_2 \leqq f(x, u, p) \leqq c_3|p| + c_4\,; \quad \forall x, u, p\,; \quad c_1, \ldots, c_4 \geqq 0\,.$$

We will look for minimum of this functional on the set of all $u \in W_1^1$, $u = u'$ on $\partial\Omega$; $u' \in L_1(\partial\Omega)$ fixed. There is one great difficulty, we cannot use direct methods of the calculus of variations because the space W_1^1 does not have a weakly compact ball. But the space W_μ^1 has a weakly compact ball and we can extend the function I to the whole space W_μ^1. Theorem 6 on weak compactness of the ball in W_μ^1 together with

Theorem 2 that the trace β of element $(u, \alpha_i) \in W_\mu^1$ depends weakly continuously on (u, α_i) are then basic for using of the direct method. Also futher properties of the space W_μ^1 are very useful for investigation of this variational problem. By this method we obtain weak solution in W_μ^1 for each boundary condition $u' \in L_1(\partial\Omega)$ and for domains Ω, which does not satisfy the usual condition of convexity.

We can also consider the analogic variational problem with derivatives to the k-th order. On this problem there were no results till now. These variational problems will be investigated in next papers.

Finally, the author wishes to thank dr. J. KAČÚR for his kindness in reading the whole text and for valuable suggestions and particulary wishes to thank Professor J. NEČAS for the leading of his aspiranture and for helpful conversations during the course of this work.

Notation

Ω	– a bounded domain in E_N with its boundary $\partial\Omega$ belonging to C^1 class,
$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_N)$	– exterior normal to Ω,
c	– a constant which depends only on Ω,
$C(E)$	– the space of all continuous functions defined on the compact $E \subset E_N$,
$W_\mu^k(\Omega)$	– Sobolev's space of functions possessing distributive derivatives up to the k-th order in $L_p(\Omega)$,
$\|\alpha\|$	– total variation of the measure α,
$L_\mu(E)$	– the Banach space of all Borel measures (σ-additive, general measures) defined on the Borel set $E \subset E_N$ and satisfying $\|\alpha\|_{L_\mu(E)} = \|\alpha\| (E) < \infty$,
$\|E\|$	– N-dimensional Lebesgue measure of the measurable set $E \subset E_N$,
$\mathrm{d}S$	– $(N-1)$-dimensional Lebesgue measure,
$\int_E \varphi \, \mathrm{d}\alpha$	– Riemann-Stieltjes's integral, where E is a compact in E_N, $\varphi \in C(E)$ and $\alpha \in L_\mu(E)$,
$u_{\|E}, \alpha_{\|E}$	– the restriction respectively of a function u and of a measure α on the Borel set $E \subset E_N$,
$K^h(x)$	– N-dimensional mollifier.

Important agreement

Each absolutely continuous measure (with respect to the N-dimensional Lebesgue measure) will be identified with its density with respect to Lebesgue measure, i.e., $\alpha \in L_\mu(\bar{\Omega})$ will be identified with the function $u \in L_1(\Omega)$ such that

$$\int_{\bar{\Omega}} \varphi \, \mathrm{d}\alpha = \int_\Omega \varphi u \, \mathrm{d}x \,, \quad \forall \varphi \in C(\bar{\Omega}) \,.$$

Each absolutely continuous measure $\beta \in L_\mu(\partial\Omega)$ will be identified with its density with respect to the measure dS on $\partial\Omega$ i.e. with such function $u' \in L_1(\partial\Omega)$ that

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \, d\beta = \int_{\partial\Omega} \varphi u' \, dS, \quad \forall \varphi \in C(\partial\Omega).$$

This identification will be used throughout the whole paper.

§1. SPACE W_μ^1

1. Definition of spaces W_μ^1 and M^1

First of all let us recall some well-known notions and theorems (see [1]).

Let E be a compact in E_N. A sequence $\alpha_n \in L_\mu(E)$, $n = 1, 2, \ldots$ is said to be w^*-convergent to $\alpha \in L_\mu(E)$, if

$$\int_E \varphi \, d\alpha_n \to \int_E \varphi \, d\alpha, \quad \forall \varphi \in C(E).$$

This convergence will be denoted by $\rightharpoonup$.

The following assertions hold (see [1]):

1) $\alpha_n \rightharpoonup \alpha$ in the space $L_\mu(E)$ iff
   (i) there exists $k > 0$ such that $\|\alpha_n\|_{L_\mu(E)} \leqq k$, $n = 1, 2, \ldots$
   (ii) $\int_E \varphi \, d\alpha_n \to \int_E \varphi \, d\alpha$ for each $\varphi \in X$, X being a dense subset of $C(E)$.
2) If $\alpha_n \in L_\mu(E)$, $n = 1, 2, \ldots$ are from a ball in $L_\mu(E)$, then there exists a subsequence $\{\alpha_{n_k}\}$, which is w^*-convergent in $L_\mu(E)$.
3) If $\alpha_n \rightharpoonup \alpha$ in $L_\mu(E)$, then $\|\alpha\|_{L_\mu(E)} \leqq \varliminf_{n\to\infty} \|\alpha_n\|_{L_\mu(E)}$.
4) The space $L_\mu(E)$ is the dual space to $C(E)$ with respect to the duality $\alpha(\varphi) = \int_E \varphi \, d\alpha$, $\alpha \in L_\mu(E)$, $\varphi \in C(E)$.

Definition 1. $W_\mu^1(\bar\Omega)$ is the space of all $(N+1)$-tuples $(\alpha_0, \ldots, \alpha_N) \in [L_\mu(\bar\Omega)]^{N+1}$ for which a sequence $u_n \in W_1^1(\Omega)$, $n = 1, 2, \ldots$ exists such that

$$(1) \qquad u_n \rightharpoonup \alpha_0, \quad u_{nx_i} \rightharpoonup \alpha_i$$

in the space $L_\mu(\bar\Omega)$, $i = 1, \ldots, N$, where $u_{nx_i} = \partial u_n / \partial x_i$ and the functions u_n, u_{nx_i} are identified with the absolute continuous measures according to the agreement. $\mathring{W}_\mu^1(\bar\Omega)$ is the space of all $(\alpha_0, \ldots, \alpha_N) \in [L_\mu(\bar\Omega)]^{N+1}$ for which there exists $u_n \in \mathring{W}_1^1(\Omega)$, $n = 1, 2, \ldots$ satisfying (1).

If the w^*-convergence by components is introduced in the space $[L_\mu(\bar\Omega)]^{N+1}$, then W_μ^1 is the "closure" of W_1^1 with respect to the w^*-convergence and $\mathring{W}_\mu^1$ is the „closure" of $\mathring{W}_1^1$. At the same time, W_1^1 is imbedded canonically into $[L_\mu(\bar\Omega)]^{N+1}$ by: $u \in W_1^1 \to (u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_N}) \in [L_\mu(\bar\Omega)]^{N+1}$.

Theorem 1. *Suppose* $(\alpha_0, \ldots, \alpha_N) \in W^1_\mu(\bar{\Omega})$. *Then*

(i) $\alpha_{i|\Omega} = \partial\alpha_0/\partial x_i$, $i = 1, \ldots, N$ *in the sense of distributions,*

(ii) *the measure* α_0 *is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure. Let us denote its density by* $u \in L_1(\Omega)$,

(iii) *there exists a unique measure* $\beta \in L_\mu(\partial\Omega)$ *such that Green's theorem holds:*

$$(2) \qquad \int_{\partial\Omega} \varphi v_i \, d\beta = \int_\Omega u\varphi_{x_i} \, dx + \int_{\bar{\Omega}} \varphi \, d\alpha_i \,, \quad \forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega}) \,, \quad i = 1, \ldots, N \,.$$

The measures α_i *are called the derivatives of the element* (u, α_i) *and the measure* β *is called the trace of the element* (u, α_i). *Analogously to the space* $W^1_1(\Omega)$, *the elements of* $W^1_\mu(\bar{\Omega})$ *are called functions.*

Proof. According to the definition of $W^1_\mu(\bar{\Omega})$ there exists a sequence $u_n \in W^1_1(\Omega)$, $n = 1, 2, \ldots$ such that (1) is satisfied. Let $u'_n \in L_1(\partial\Omega)$ denote the traces of u_n. Considering [2], we obtain that the functions u_n satisfy Green's theorem

$$(3) \qquad \int_{\partial\Omega} u'_\mu \varphi v_i \, dS = \int_\Omega u_{nx_i}\varphi \, dx + \int_\Omega u_n \varphi_{x_i} \, dx \,, \quad \forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega}) \,.$$

If we substitute functions from $C^1_0(\Omega)$ for φ in (3), we obtain with respect to (1)

$$\int_{\bar{\Omega}} \varphi_{x_i} \, d\alpha_0 = -\int_{\bar{\Omega}} \varphi \, d\alpha_i \,, \quad i = 1, \ldots, N$$

and assertion (i) is proved.

With regard to (1), there exists a constant $k > 0$ such that

$$(4) \qquad \|u_n\|_{W_1{}^1(\Omega)} \leqq k \,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Theorems of imbeddings imply

$$(5) \qquad \|u'_n\|_{L_1(\partial\Omega)} \leqq ck \,, \quad \|u_n\|_{L_q(\Omega)} \leqq ck \,, \quad 1/q = 1 - 1/N \,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

There exists a suitable subsequence $\{u_{n_k}\}$, a measure $\beta \in L_\mu(\partial\Omega)$ and $u \in L_q(\Omega)$ such that

$$(6) \qquad u'_{n_k} \rightharpoonup \beta \quad \text{in} \quad L_\mu(\partial\Omega) \,, \quad u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{in} \quad L_q(\Omega) \,.$$

Due to (1) $u_{n_k} \rightharpoonup \alpha_0$ in $L_\mu(\bar{\Omega})$ and if we pass to the limit with $k \to \infty$ we obtain

$$\int_{\bar{\Omega}} \varphi \, d\alpha_0 = \int_\Omega \varphi u \, dx \,, \quad \forall \varphi \in C(\bar{\Omega}) \,.$$

Thus, assertion (ii) is proved.

Now, we pass to the limit in Green's theorem (3) for u_{n_k}. With regard to (6) we obtain Green's theorem for $(u, \alpha_1, \ldots, \alpha_N)$. It can be seen from (2) that the measure β is independent of the sequence $\{u_n\}$.

The norm in the space $W_\mu^1(\bar{\Omega})$ is defined by

$$\|(u, \alpha_1, \ldots, \alpha_N)\|_{W_\mu{}^1(\bar{\Omega})} = \|u\|_{L\mu(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\alpha_i\|_{L\mu(\bar{\Omega})} .$$

In the space $W_\mu^1(\bar{\Omega})$ we introduce w^*-convergence by components, i.e. $(u_n, \alpha_{ni}) \rightharpoonup (u, \alpha_i)$ in $W_\mu^1(\bar{\Omega})$ iff $u_n \rightharpoonup u$, $\alpha_{ni} \rightharpoonup \alpha_i$ in $L_\mu(\bar{\Omega})$, $i = 1, \ldots, N$. Now, we shall describe the functions of $W_\mu^1(\bar{\Omega})$ explicitely using Green's theorem (2) for the purpose.

Definition 2. $M^1(\bar{\Omega})$ is the space of all $(N + 2)$-tuples $(u, \alpha_1, \ldots, \alpha_N, \beta)$ for which

(i) $u \in L_1(\Omega)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in L_\mu(\bar{\Omega})$, $\beta \in L_\mu(\partial\Omega)$,

(ii) (2) holds for each $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$.

Let us denote $\mathring{M}^1(\bar{\Omega}) = \{(u, \alpha_i, \beta) \in M^1(\bar{\Omega}); \beta = 0\}$. The norm in the space $M^1(\bar{\Omega})$ is defined by

$$\|(u, \alpha_i, \beta)\|_{M^1(\Omega)} = \|u\|_{L_1(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \|\alpha_i\|_{L_\mu(\bar{\Omega})} .$$

From Theorem 2 it will be clear that $\|\beta\|_{L_\mu(\partial\Omega)}$ can be omitted in the formula for the norm it M^1. It can be seen from (2) that the measure β is uniquely determined by the $(N + 1)$-tuple (u, α_i). Therefore (u, α_i) will be written sometimes instead of (u, α_i, β). In this sense $W_\mu^1(\bar{\Omega})$ is a subset of $M^1(\bar{\Omega})$ and $\mathring{W}_\mu^1(\bar{\Omega}) \subset \mathring{M}^1(\bar{\Omega})$. One of the aims of the next section is to prove equalities in these inclusions.

Similarly, in view of (2), the measures $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ are uniquely determined by the pair (u, β). Thus (u, β) can be written instead of (u, α_i, β). The function u uniquely determines the measures α_i in Ω, i.e. the measures $\alpha_{i|\Omega}$. Namely, $\alpha_{i|\Omega}$ are distribution derivatives of u.

The space $W_1^1(\Omega)$ is canonically imbedded into $W_\mu^1(\bar{\Omega})$ by:

$$u \in W_1^1 \to (u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_N}) \in W_\mu^1$$

in the sense of our agreement. We introduce w^*-convergence in the space $M^1(\bar{\Omega})$ as the w^*-convergence of the first $(N + 1)$ components.

2. Decomposition of the unit

Definition 3. By the product of $\psi \in C(E)$ ($E \subset E_N$ being a compact) and of a measure $\alpha \in L_\mu(E)$ we understand the measure $\bar{\alpha} = \psi . \alpha \in L_\mu(E)$ defined by

$$\int_E \varphi \, \mathrm{d}\bar{\alpha} = \int_E \varphi\psi \, \mathrm{d}\alpha , \quad \forall \varphi \in C(E) . \tag{7}$$

By the product of $\psi \in C^1(\bar{\Omega})$ and $(u, \alpha_i, \beta) \in M^1(\bar{\Omega})$ we understand a function $(\bar{u}, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}) = \psi(u, \alpha_i, \beta)$ for which $\bar{u} = u\psi$, $\bar{\alpha}_i = u\psi_{x_i} + \psi\alpha_i$, $\bar{\beta} = \psi_{|\partial\Omega}\beta$ with respect to (7) and to our agreement.

It can be seen easily that $\psi(u, \alpha_i, \beta)$ satisfies (2) and hence it belongs to $M^1(\bar{\Omega})$. At the same time there is

$$\|\psi(u, \alpha_i, \beta)\|_{M^1(\bar{\Omega})} \leqq (N + 1) \|\psi\|_{C^1(\bar{\Omega})} \cdot \|(u, \alpha_i, \beta)\|_{M^1(\bar{\Omega})} . \tag{8}$$

Suppose the domain Ω to be of the class C^1. There exists a finite number of open cubes K_r in E_N, $r = 1, \ldots, R$ covering the boundary $\partial\Omega$. Let us denote $\Omega_r = K_r \cap \Omega$. There exists a domain Ω_0, $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ such that $\Omega = \bigcup_{r=0}^{R} \Omega_r$.

For each $r \geqq 1$ a linear orthogonal transformation can be carried out such that K_r is of the form $K_r = \{x \in E_N;\ 0 < x_i < b\}$ in the new variables, where b is the edge of the cube K_r. At the same time a part of boundary $\partial\Omega \cap K_r$ can be described by $x_N = a(x_n, \ldots, x_{N-1})$ where a is a function of the class C^1. The cubes K_r and the transformations can be chosen in such manner that

$$\nu_N \geqq c > 0 \tag{9}$$

on $\partial\Omega \cap K_r$ in the new variables.

For the decompsition $\Omega = \bigcup_{r=0}^{R} \Omega_r$ there exist functions $\gamma_r \in C^1(\bar{\Omega})$ such that $\gamma_r \geqq 0$, $\operatorname{supp} \gamma_r \subset \Omega_r \cup \partial\Omega$, $\sum_{r=0}^{R} \gamma_r = 1$ on $\bar{\Omega}$. Suppose $(u, \alpha_i, \beta) \in M^1(\bar{\Omega})$. Then $(u, \alpha_i, \beta) = \sum_{r=0}^{R} (u_r, \alpha_{ri}, \beta_r)$ where

$$(u_r, \alpha_{ri}, \beta_r) = \gamma_r(u, \alpha_i, \beta) \in M^1(\bar{\Omega}) . \tag{10}$$

Due to (8) we obtain

$$\|(u_r, \alpha_{ri}, \beta_r)\|_{M^1(\bar{\Omega})} \leqq c\|(u, \alpha_i, \beta)\|_{M^1(\bar{\Omega})} ,$$

$$\|(u, \alpha_i, \beta)\|_{M^1(\bar{\Omega})} \leqq c \sum_{r=0}^{R} \|(u_r, \alpha_{ri}, \beta_r)\|_{M^1(\bar{\Omega})} . \tag{11}$$

At the same time we obtain

$$\|\beta_r\|_{L_\mu(\partial\Omega)} \leqq c\|\beta\|_{L_\mu(\partial\Omega)} , \quad \|\beta\|_{L_\mu(\partial\Omega)} \leqq c \sum_{r=0}^{R} \|\beta_r\|_{L_\mu(\partial\Omega)} . \tag{12}$$

The function $(u_r, \alpha_{ri}, \beta_r)$ belongs after the application of a linear orthogonal transformation again to $M^1(\bar{\Omega})$ and (11), (12) are satisfied.

3. The direct and inverse theorems on imbedding into the traces

First of all, we must regularise the measure $\beta \in L_\mu(\partial\Omega)$. Let us set for $x \in E_N$

$$R^h(x) = \frac{1}{\varkappa h^{N-1}} e^{|x|^2/(|x|^2 - h^2)}, \quad |x| < h , \tag{13}$$

$$R^h(x) = 0 , \qquad |x| \geqq h .$$

The constant $\varkappa$ is chosen so that

$$\int_{E_{N-1}} R^h(x_1, \ldots, x_{N-1}, 0)\, dx_1, \ldots, dx_{N-1} = 1$$

holds.

Suppose $\varphi \in C(\partial\Omega)$, $\beta \in L_\mu(\partial\Omega)$. Let us set

$$\psi_h(x) = \int_{\partial\Omega} R^h(x - y)\, dS(y)\,, \tag{14}$$

$$\varphi_h(x) = \int_{\partial\Omega} R^h(x - y)\, \varphi(y)\, dS(y)\,, \tag{15}$$

$$u_h'(x) = \int_{\partial\Omega} R^h(x - y)\, d\beta(y)\,. \tag{16}$$

Now, we prove a lemma which will turn out very useful.

Lemma 1. (i) *There exists a function $c(h)$, $h > 0$ depending only on the domain Ω and satisfying*

$$\max_{x\in\partial\Omega} |\psi_h(x) - 1| \leqq c(h)\,, \quad \lim_{h\to 0} c(h) = 0\,,$$

(ii) $\varphi_h \to \varphi$ *in* $C(\partial\Omega)$,

(iii) $u_h' \rightharpoonup \beta$ *in* $L_\mu(\partial\Omega)$ *and at the same time*

$$\|u_h'\|_{L_1(\partial\Omega)} \to \|\beta\|_{L_\mu(\partial\Omega)}\,.$$

Proof. First we prove that $\lim_{h\to 0} \min_{\partial\Omega} \psi_h \geqq 1$. Easily we find out that ψ_h is continuous on $\partial\Omega$. For each $h > 0$ there exists $x_h \in \partial\Omega$ such that $\min_{\partial\Omega} \psi_h = \psi_h(x_h)$. Let us suppose, on the contrary, that $\lim_{h\to 0} \psi_h(x_h) < 1$. Thus there exist $h_n \to 0$ and $\varepsilon_0 > 0$ such that

$$x_{h_n} \to x_0 \in \partial\Omega\,, \quad \psi_{h_n}(x_{h_n}) \leqq 1 - \varepsilon_0\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

There exists a cube K and a suitable linear orthogonal transformation such that $\partial\Omega \cap K$ is described in new variables by $x_N = a(x')$, $x' = (x_1, \ldots, x_{N-1})$ and at the same time

$$x_0 \in \partial\Omega \cap K\,, \quad a_{x_i}(x_0') = 0\,, \quad i = 1, \ldots, N - 1\,. \tag{17}$$

For large n there is

$$\psi_{h_n}(x_{h_n}) = \int_{E_{N-1}} R^{h_n}(x_{h_n}' - y'\,,\ a(x_{h_n}') - a(y'))\, \sqrt{(1 + |\nabla a(y')|^2)}\, dy'\,.$$

Applying the substitution $y' - x'_{h_n} = h_n(z' - x'_{h_n})$ we obtain

$$\psi_{h_n}(x_{h_n}) = \int_{E_{N-1}} R^1\Big(z' - x'_{h_n}, \frac{1}{h_n}\,[a(x'_{h_n} + h_n(z' - x'_{h_n})) - a(x'_{h_n})]\Big)\,. \tag{18}$$
$$.\,(1 + |\nabla a(x'_{h_n} + h_n(z' - x'_{h_n})|^2)^{1/2}\,\mathrm{d}z'\,.$$

For z' fixed there holds with regard to (17) and to the fact that $a \in C^1$

$$\frac{1}{h_n}\,[a(x'_{h_n} + h_n(z' - x'_{h_n})) - a(x'_{h_n})] =$$
$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^{N-1} a_{x_i}(x'_{h_n} + 1h_n(z' - x'_{h_n}))\,(z - x'_{h_n i})\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\to} 0\,.$$

Now, let n increase to infinity in the integral (18). Thus we obtain $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_{h_n}(x_{h_n}) = \int_{E_{N-1}} R^1(z' - x'_0, 0)\,\mathrm{d}z' = 1$ which is a contradiction.

Similarly we prove the inverse inequality $\overline{\lim\limits_{h\to 0}}\, \max\limits_{\partial\Omega} \psi_h \leqq 1$. We can set $c(h) = \max\limits_{\partial\Omega} |\psi_h - 1|$ and thus assertion (i) is proved.

$$|\varphi_h(x) - \varphi(x)| \leqq \Big|\int_{\partial\Omega} R^h(x - y)\,[\varphi(y) - \varphi(x)]\,\mathrm{d}S(y) +$$
$$+ \Big[\int_{\partial\Omega} R^h(x - y)\,\mathrm{d}S(y) - 1\Big]\,\varphi(x)\Big| \leqq$$
$$\leqq (1 + c(h))\,\delta(h) + \|\varphi\|_{C(\partial\Omega)}\,c(h)$$

where $\delta(h)$ is the modul of continuity for φ. Hence we conclude (ii).

$$\int_{\partial\Omega} u'_h \varphi\,\mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} R^h(x - y)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}\beta(y)\,\mathrm{d}S(x) =$$
$$= \int_{\partial\Omega} \varphi_h(y)\,\mathrm{d}\beta(y) \underset{h\to 0}{\to} \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\,\mathrm{d}\beta(y)\,.$$

This fact implies $u_h \rightharpoonup \beta$ and hence $\|\beta\|_{L_\mu(\partial\Omega)} \leqq \lim\limits_{h\to 0} \|u'_h\|_{L_1(\partial\Omega)}$,

$$\|u'_h\|_{L_1(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} |u'_h|\,\mathrm{d}S \leqq \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} R^h(x - y)\,\mathrm{d}|\beta|\,(y)\,\mathrm{d}S(x) \leqq$$
$$\leqq \int_{\partial\Omega} \psi_h(y)\,\mathrm{d}|\beta|\,(y) \leqq (1 + c(h))\,\|\beta\|_{L_\mu(\partial\Omega)}\,.$$

Lemma 1 is proved.

Theorem 2. (i) *The imbedding* $M^1(\bar{\Omega}) \to L_\mu(\partial\Omega)$ *is continuous, i.e. for each* $(u, \alpha_i, \beta) \in M^1(\bar{\Omega})$ *there is*

$$\|\beta\|_{L_\mu(\partial\Omega)} \leqq c\|(u, \alpha_i, \beta)\|_{M^1(\bar{\Omega})} .$$

(ii) *The imbedding* $M^1(\bar{\Omega}) \to L_\mu(\partial\Omega)$ *is w*-continuous, i.e.* $(u_n, \alpha_{ni}, \beta_n) \rightharpoonup (u, \alpha_i, \beta)$ *in* $M^1(\bar{\Omega})$ *implies that*

$$\beta_n \rightharpoonup \beta \quad in \quad L_\mu(\partial\Omega) .$$

(iii) *For each measure* $\beta \in L_\mu(\partial\Omega)$ *there exists a function* $(u, \alpha_i) \in W^1_\mu(\bar{\Omega})$ *such that* β *is the trace of* (u, α_i) *and*

$$\|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu{}^1(\bar{\Omega})} \leqq c\|\beta\|_{L_\mu(\partial\Omega)} .$$

Proof. Suppose $(u, \alpha_i, \beta) \in M^1(\bar{\Omega})$. We conclude from the section on decomposition of the unit that it suffices to prove assertion (i) for a domain of the form $\Omega = \Omega_r$, $r = 1, \ldots, R$ and for a function $(u, \alpha_i, \beta) = (u_r, \alpha_{ri}, \beta_r)$ whose support is in $\Omega_r \cup \cup (\partial\Omega \cap K_r)$. Let us set

$$B = \{\varphi \in C^1(\partial\Omega \cap \bar{K}_r);\ \|\varphi\|_{C(\partial\Omega \cap \bar{K}_r)} \leqq 1\} .$$

An arbitrary $\varphi \in B$ will be extended on Ω_r as a constant on the lines parallel to the coordinate axis x_N (in the new variables). For such φ there holds

$$\int_{\partial\Omega \cap K_r} \varphi \nu_N \, d\beta = \int_{\Omega_r} \varphi_{x_N} u \, dx + \int_{\bar{\Omega}_r} \varphi \, d\alpha_N = \int_{\bar{\Omega}_r} \varphi \, d\alpha_N .$$

According to (9) there holds $\nu_N \geqq c > 0$ and hence we conclude

$$\|\beta\|_{L_\mu(\partial\Omega \cap \bar{K}_r)} = \sup_{\varphi \in B} \int \varphi \, d\beta \leqq c\|(u, \alpha_i)\|_{M^1(\bar{\Omega}_r)} .$$

Thus, assertion (i) is proved.

Suppose $(u_n, \alpha_{ni}, \beta_n) \rightharpoonup (u, \alpha_i, \beta)$ in $M^1(\bar{\Omega})$. Let us take $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ and substitute it into (2).

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \nu_i \, d\beta_n = \int_\Omega u_n \varphi_{x_i} \, dx + \int_{\bar{\Omega}} \varphi \, d\alpha_{ni} \underset{n \to \infty}{\to} \int_\Omega u \varphi_{x_i} \, dx + \int_{\bar{\Omega}} \varphi \, d\alpha_i = \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_i \, d\beta .$$

The linear hull of the set of functions possessing the form $\varphi_{|\partial\Omega} \nu_i$, $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$, $i = 1, \ldots, N$ is a dense set in $C(\partial\Omega)$. It is sufficient to prove that the norms of β_n, $n = 1, 2, \ldots$ are bounded. $(u_n, \alpha_{ni}) \rightharpoonup (u, \alpha_i)$ implies that $\|(u_n, \alpha_{ni})\|_{M^1(\bar{\Omega})}$ are bounded and thus assertion (ii) will be proved by using assertion (i).

Suppose $\beta \in L_\mu(\partial\Omega)$ and $u'_h \in L_1(\partial\Omega)$ is a function from (16). According to Gagliardo's work [3] there exist functions $u_h \in W^1_1(\Omega)$, $h > 0$ such that u'_h is the trace of u_h and the estimate

$$\|u_h\|_{W_1{}^1(\Omega)} \leqq c\|u'_h\|_{L_1(\partial\Omega)} \tag{19}$$

is satisfied. Considering (iii) from Lemma 1 we conclude

$$\|u_h\|_{W_1{}^1(\Omega)} \leqq c\|\beta\|_{L_\mu(\partial\Omega)} \tag{20}$$

for small $h > 0$.

There exists a suitable subsequence $\{u_{h_n}\}_{h_n \to 0}$ and $(u, \alpha_i) \in W_\mu^1(\bar{\Omega})$ such that $u_{h_n} \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} (u, \alpha_i)$ in $W_\mu^1(\bar{\Omega})$. By limiting process in Green's theorem for u_{h_n} we conclude that (u, α_i) possesses the trace β and with respect to (20)

$$\|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu{}^1(\bar{\Omega})} \leqq \varliminf_{u\to\infty} \|u_{h_n}\|_{W_1{}^1(\Omega)} \leqq c\|\beta\|_{L_\mu(\partial\Omega)}$$

holds. Theorem 2 is proved.

From the next theorem it will be seen that the trace β of a function $(u, \alpha_i, \beta) \in M^1(\bar{\Omega})$ is independent of the function u itself.

Theorem 3. *Let us set for $u \in L_1(\Omega)$*

$$d[u] = \sup\left\{\left|\int_\Omega u\varphi_{x_i}\,\mathrm{d}x\right|;\quad \varphi \in C^1(\bar{\Omega}),\quad \|\varphi\|_{C(\bar{\Omega})} \leqq 1,\quad i = 1, \ldots, N\right\}. \tag{21}$$

A pair (u, β) is from $M^1(\bar{\Omega})$ iff $\beta \in L_\mu(\partial\Omega)$, $u \in L_1(\Omega)$ and $d[u] < \infty$. Moreover

$$\|(u, \beta)\|_{M^1(\bar{\Omega})} \leqq \|u\|_{L_1(\Omega)} + N(d[u] + \|\beta\|_{L_\mu(\partial\Omega)}), \tag{22}$$

$$d[u] \leqq c\|(u, \beta)\|_{M^1(\bar{\Omega})} \tag{23}$$

hold. These facts imply in particular that $(0, \beta)$ is in $M^1(\bar{\Omega})$ for an arbitrary $\beta \in L_\mu(\partial\Omega)$.

Proof. We shall construct measures $\alpha_i \in L_\mu(\bar{\Omega})$ so that $(u, \alpha_i, \beta) \in M^1(\bar{\Omega})$. For $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ we set

$$\int_{\bar{\Omega}} \varphi\,\mathrm{d}\alpha_i = \int_{\partial\Omega} \varphi\nu_i\,\mathrm{d}\beta - \int_\Omega u\varphi_{x_i}\,\mathrm{d}x\,,\quad i = 1, \ldots, N\,.$$

The measure α_i is defined by this formula as a functional on $C^1(\bar{\Omega})$. In order to prove that α_i is a measure, we must prove

$$\sup\left\{\left|\int_{\bar{\Omega}} \varphi\,\mathrm{d}\alpha_i\right|;\quad \varphi \in C^1(\bar{\Omega}),\quad \|\varphi\|_{C(\bar{\Omega})} \leqq 1\right\} < \infty\,.$$

For $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$, $\|\varphi\|_{C(\bar{\Omega})} \leqq 1$ there holds

$$\left|\int_{\bar{\Omega}} \varphi\,\mathrm{d}\alpha_i\right| \leqq \|\beta\|_{L_\mu(\partial\Omega)} + d[u]\,.$$

Hence the estimate (22) follows. On the contrary, let us suppose $(u, \alpha_i, \beta) \in M^1(\bar{\Omega})$. Then for $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$, $|\varphi| \leqq 1$ on $\bar{\Omega}$ there is

$$\left|\int_\Omega u\varphi_{x_i}\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{\partial\Omega} \varphi\nu_i\,\mathrm{d}\beta - \int_{\bar{\Omega}} \varphi\,\mathrm{d}\alpha_i\right| \leqq$$
$$\leqq \|\beta\|_{L_\mu(\partial\Omega)} + \|\alpha_i\|_{L_\mu(\bar{\Omega})} \leqq C\|(u, \alpha_i)\|_{M^1(\bar{\Omega})} < \infty\,.$$

4. The equality $W^1_\mu = M^1$

Let us set

(24)
$$K^h(x) = \frac{1}{\varkappa h^N}\,\mathrm{e}^{\,|x|^2/(|x|^2 - h^2)}\,, \quad |x| < h\,,$$
$$K^h(x) = 0\,, \qquad |x| \geqq h$$

where $\varkappa$ is a constant satisfying $\int_{E_N} K^h(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Let us denote

(25)
$$S_h = \{x \in \Omega;\ \mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega) < h\}\,.$$

Lemma 2. *Let us suppose $(u, \alpha_i, \beta) \in \mathring{M}^1(\bar{\Omega})$, i.e. $\beta = 0$. Then for each $h > 0$ with $h < c$ there holds*

(26)
$$\int_{S_h} |u|\,\mathrm{d}x \leqq ch\|(u, \alpha_i)\|_{M^1(\bar{\Omega})}\,.$$

Proof. We decompose the function $(u, \alpha_i, 0)$ using the decomposition of the unit

$$(u, \alpha_i) = \sum_{r=0}^{R} (u_r, \alpha_{ri}).$$

From Section 2 it is clear that it suffices to prove Lemma 2 in the case when $\Omega = \Omega_r$, $(u, \alpha_i) = (u_r, \alpha_{ri})$, $r = 1, \ldots, R$ and (u, α_i) has its support in $\Omega_r \cup (\partial\Omega \cap K_r)$. First of all we prove the following assertion:

(27)
$$u \in L_1(S_h) \Rightarrow \int_{S_h} |u|\,\mathrm{d}x = \sup\left\{\int_\Omega u\psi\,\mathrm{d}x\,;\ \ \psi \in C_0^\infty(S_h)\,,\ \ \|\psi\|_{C(S_h)} \leqq 1\right\}.$$

Let ε be a positive number. Then there exists $\Omega' \subset S_h$, $\bar{\Omega}' \subset S_h$ such that $\int_{S_h - \Omega'} |u|\,\mathrm{d}x < \varepsilon$.
Let us set

$$\psi = \mathrm{sign}\,u \quad \text{on} \quad \Omega'\,, \quad \psi = 0 \quad \text{on} \quad E_N - \Omega'\,.$$

Obviously $\int_{\Omega'} |u|\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega'} u\psi\,\mathrm{d}x$ holds. Let us set for $k > 0$

(28)
$$\psi_k(x) = \int_{E_N} K^k(x - y)\,\psi(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

For small K function ψ_k belongs to $C_0^\infty(S_h)$. Then $\psi_k \to \psi$ a.e. on Ω' and

$$\|\psi\|_{C(S_h)} \leqq 1 , \quad \int_{\Omega'} u\psi_k \, dx \underset{k\to 0}{\to} \int_{\Omega'} u\psi \, dx .$$

For small $k > 0$ there holds

$$\int_{S_h} u\psi_k \, dx \geqq \int_{\Omega'} u\psi_k \, dx - \varepsilon \geqq \int_{\Omega'} u\psi \, dx - 2\varepsilon =$$
$$= \int_{\Omega'} |u| \, dx - 2\varepsilon \geqq \int_{S_h} |u| \, dx - 3\varepsilon .$$

Now, we can prove Lemma 2. Let us take $\psi \in C^1(\bar{\Omega})$ with $\psi = 0$ on $\Omega - S_h$ and $\|\psi\|_{C(\bar{\Omega})} \leqq 1$. Let us denote

$$\varphi(x', x_N) = \int_0^{x_N} \psi(x', \xi) \, d\xi .$$

Then $\|\varphi\|_{C(\bar{\Omega})} \leqq ch$ holds and with respect to (2) we obtain

$$\int_{S_h} u\psi \, dx = \int_{S_h} u\varphi_{x_N} \, dx = - \int_{S_h} \varphi \, d\alpha_N \leqq ch\|(u, \alpha_i)\|_{M^1(\bar{\Omega})} .$$

Theorem 4. (i) *For each $(u, \alpha_i) \in M^1(\bar{\Omega})$ there exist $u_n \in W_1^1(\Omega)$, $u = 1, 2, \ldots$ such that*

(29) $$u_n \rightharpoonup (u, \alpha_i) \quad in \quad M^1(\bar{\Omega}) ,$$

(30) $$\|u_n\|_{W_1^1(\Omega)} \leqq c\|(u, \alpha_i)\|_{M^1(\bar{\Omega})} .$$

(ii) *For each $(u, \alpha_i) \in \mathring{M}^1(\bar{\Omega})$ there exist $u_n \in \mathring{W}_1^1$ such that* (29) *and* (30) *hold. This fact imply the equalities $M^1(\bar{\Omega}) = W_\mu^1(\bar{\Omega})$ and $\mathring{M}^1(\bar{\Omega}) = \mathring{W}_\mu^1(\bar{\Omega})$.*

Proof. We prove assertion (ii). Let us denote

(31) $$\Omega_h = \{x \in \Omega;\ \mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega) > h\} = \Omega - \bar{S}_h .$$

There exist functions $\psi_h \in C_0^\infty(\Omega)$, $h > 0$ (h being small) with properties

(32) $$0 \leqq \psi_h \leqq 1 \quad \text{on} \quad \Omega , \qquad \psi_h = 1 \quad \text{on} \quad \Omega_{4h} , \qquad \psi_h = 0 \quad \text{on} \quad S_{3h} ,$$

$$\max_{\Omega} |\psi_{hx_i}| \leqq \frac{c}{h} , \quad i = 1, \ldots, N .$$

Let us set

(33) $$u_h(x) = \int_{\Omega} K^h(x - \xi) \, u(\xi) \, \psi_h(\xi) \, d\xi .$$

Evidently u_h belongs to $C_0^\infty(\Omega)$. We prove the inequality

(34) $$\|u_h\|_{W_1^1(\Omega)} \leqq c\|(u, \alpha_i)\|_{M^1(\bar{\Omega})} .$$

The assertion

$$\int_\Omega |u_h| \, \mathrm{d}x \leqq \int_\Omega \int_\Omega K^h(x - \xi) \, |u(\xi)| \, \psi_h(\xi) \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}x \leqq \int_\Omega |u| \, \mathrm{d}\xi$$

holds. With respect to (2) and $(u, \alpha_i) \in \mathring{M}^1$ we obtain for $x \in \Omega$

$$u_{hx_i}(x) = - \int_\Omega K^h_{\xi_i}(x - \xi) \, u(\xi) \, \psi_h(\xi) \, \mathrm{d}\xi =$$

$$= \int_\Omega K^h(x - \xi) \, u(\xi) \, \psi_{h\xi_i}(\xi) \, \mathrm{d}\xi - \int_\Omega [K^h(x - \xi) \, \psi_h(\xi)]_{\xi_i} \, u(\xi) \, \mathrm{d}\xi =$$

$$= \int_\Omega K^h(x - \xi) \, u(\xi) \, \psi_{h\xi_i}(\xi) \, \mathrm{d}\xi + \int_{\bar{\Omega}} K^h(x - \xi) \, \psi_h(\xi) \, \mathrm{d}\alpha_i(\xi) .$$

Further, we use Lemma 2 and assumption (32):

$$\int_\Omega |u_{hx_i}| \, \mathrm{d}x \leqq \int_{\bar{\Omega}} \mathrm{d}|\alpha_i| \, (\xi) + \int_\Omega |u(\xi)| \, |\psi_{h\xi_i}(\xi)| \, \mathrm{d}\xi \leqq$$

$$\leqq \|(u, \alpha_i)\|_{M^1(\bar{\Omega})} + \frac{c}{h} \int_{S_{4h}} |u| \, \mathrm{d}\xi \leqq c\|(u, \alpha_i)\|_{M^1(\bar{\Omega})}$$

which proves the estimate (34).

Easily we find out that $u_h \rightarrow u$ in $L_1(\Omega)$. For $\varphi \in C(\bar{\Omega})$ we obtain

$$\int_\Omega u_h \varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \int_\Omega K^h(x - \xi) \, \varphi(x) \, u(\xi) \, \psi_h(\xi) \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}x ,$$

$$\int_\Omega K^h(x - \xi) \, \varphi(x) \, \mathrm{d}x \rightarrow \varphi(\xi) \quad \text{in} \quad L_1(\Omega)$$

and hence

$$\left[\int_\Omega K^h(x - \xi) \, \varphi(x) \, \mathrm{d}x\right] u(\xi) \, \psi_h(\xi) \rightarrow u(\xi) \, \varphi(\xi) \quad \text{a.e. in} \quad \Omega , \quad \text{i.e.}$$

$$\int_\Omega u_h(x) \, \varphi(x) \, \mathrm{d}x \rightarrow \int_\Omega u(x) \, \varphi(x) \, \mathrm{d}x .$$

Suppose $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$. On account of (2) we have

$$\int_\Omega u_{hx_i} \varphi \, \mathrm{d}x = - \int_\Omega u_h \varphi_{x_i} \, \mathrm{d}x \rightarrow - \int_\Omega u \varphi_{x_i} \, \mathrm{d}x = \int_{\bar{\Omega}} \varphi \, \mathrm{d}\alpha_i .$$

The estimate (34) implies the assertion (29) and (ii) is proved.

Suppose $(u, \alpha_i, \beta) \in M^1(\bar{\Omega})$. Assertion (iii) from Theorem 2 implies that there exists $(u^1, \alpha_i^1, \beta) \in W_\mu^1(\bar{\Omega})$. In the proof of the Theorem 2 we found $u_\mu^1 \in W_1^1(\Omega)$, $n = 1, 2, \ldots$ satisfying with respect to (20)

$$(35) \qquad u_n^1 \rightharpoonup (u^1, \alpha_i^1, \beta) \quad \text{in} \quad W_\mu^1(\bar{\Omega}), \quad \|u_n^1\|_{W_1^1(\Omega)} \leqq C\|\beta\|_{L_\mu(\partial\Omega)}.$$

Function $(u^2, \alpha_i^2, 0) = (u, \alpha_i, \beta) - (u^1, \alpha_i^1, \beta)$ belongs to the space $\mathring{M}^1(\bar{\Omega})$. Making use of Theorem 2 we obtain the estimate

$$(36) \qquad \|(u^2, \alpha_i^2)\|_{M^1(\bar{\Omega})} \leqq c\|(u, \alpha_i)\|_{M^1(\bar{\Omega})}.$$

On account of the assertion (ii) just proved there exist $u_n^2 \in \mathring{W}_1^1(\Omega)$

$$(37) \qquad u_n^2 \rightharpoonup (u^2, \alpha_i^2, 0) \quad \text{in} \quad M^1(\bar{\Omega}), \quad \|u_n^2\|_{W_1^1} \leqq c\|(u^2, \alpha_i^2)\|_{M^1(\bar{\Omega})}.$$

Relations (35), (36), (37) and Theorem 2 yield

$$u_n^1 + u_n^2 \rightharpoonup (u, \alpha_i) \quad \text{in} \quad M^1(\bar{\Omega})$$

$$\|u_n^1 + u_n^2\|_{W_1^1(\Omega)} \leqq c\|(u, \alpha_i)\|_{M^1(\Omega)}.$$

5. Theorems on imbedding and on w^*-compactness of the ball in W_μ^1

Theorems on imbedding $W_\mu^1(\bar{\Omega})$ into $L_q(\Omega)$ are the same as those for the space $W_1^1(\Omega)$.

Theorem 5. *Suppose $(u, \alpha_i) \in W_\mu^1(\bar{\Omega})$. Then $u \in L_q(\Omega)$ and the following estimate is valid:*

$$(38) \qquad \|u\|_{L_q(\Omega)} \leqq c\|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu^1(\bar{\Omega})}, \quad \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{N}.$$

The imbeding $W_\mu^1(\bar{\Omega}) \to L_{q^*}(\Omega)$ is compact for $q^* < q$, $q^* \geqq 1$.

Proof. According to Theorem 4 there exist $u_n \in W_1^1$ such that

$$u_n \rightharpoonup (u, \alpha_i) \quad \text{in} \quad W_\mu^1(\bar{\Omega}), \quad \|u_n\|_{W_1^1} \leqq C\|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu^1}.$$

On account of the theorem on imbedding $W_1^1(\Omega) \to L_q(\Omega)$ we obtain

$$(39) \qquad \|u_n\|_{L_q(\Omega)} \leqq c\|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu^1(\bar{\Omega})}.$$

From the convergence $u_n \rightharpoonup u$ in $L_\mu(\bar{\Omega})$ and from (39) we have $u \in L_q$. It is sufficient to choose $u_{n_k} \rightharpoonup \bar{u}$ in $L_{q(\Omega)}$ which implies $u = \bar{u}$, $u_n \rightharpoonup u$ in $L_q(\Omega)$.

Hence

$$\|u\|_{L_q} \leqq \lim \|u_n\|_{L_q} \leqq c\|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu^1}$$

holds.

Now we prove the compactness of the imbedding of W_μ^1 into L_{q^*}. Let us suppose that the norms of $(u_n, \alpha_{ni}) \in W_\mu^1$ are bounded. Due to Theorem 2 there exist $u_{nk} \in W_1^1$ such that

$$(40) \qquad u_{nk} \xrightarrow[k\to\infty]{} (u_n, \alpha_{ni}) \quad \text{in} \quad W_\mu^1\,, \quad \|u_{nk}\|_{W_1{}^1} \leqq c\,, \quad n, k = 1, 2, \ldots$$

For each n there exists a subsequence $\{u_{nk_m}\}_{m=1}^\infty$ which is convergent in L_{q^*}, and it must converge to $u_n \in L_{q^*}$, because $u_{nk} \xrightarrow[k\to\infty]{} u_n$ in $L_\mu(\bar{\Omega})$. For each n there exists an index m such that $v_n = u_{nk_m}$ satisfies

$$(41) \qquad \|v_n - u_n\|_{L_{q^*}} \leqq \frac{1}{n}\,.$$

With respect to (40) there exists a subsequence $\{v_{n_k}\}$ converging in L_{q^*} (due to the theorem on imbedding $W_1^1 \to L_{q^*}$). This implies that the subsequence $\{u_{n_k}\}$ is convergent in L_{q^*} regarding (41).

Theorem 6. *The space $W_\mu^1(\bar{\Omega})$ is closed with respect to the w*-topology as a subspace of $[L_\mu(\bar{\Omega})]^{N+1}$* (see Section 1). *Any ball in the space $W_\mu^1(\bar{\Omega})$ is compact in the w*-topology. The same assertions hold also for the space $\mathring{W}_\mu^1(\bar{\Omega})$.*

Proof. Firstly, we show that W_μ^1 is closed with respect to w*-convergence. Suppose $(u_n, \alpha_{ni}) \in W_\mu^1$, $(\alpha_0, \ldots, \alpha_N) \in L_\mu^{N+1}$ and

$$(42) \qquad u_n \rightharpoonup \alpha_0\,, \quad \alpha_{n_i} \rightharpoonup \alpha_i \quad \text{in} \quad L_{n(\bar{\Omega})}\,, \quad i = 1, \ldots, N\,.$$

This implies that there exists a constant $K > 0$ such that

$$(43) \qquad \|(u_n, \alpha_{ni})\|_{W_\mu{}^1} \leqq K\,.$$

From Theorem 5 we conclude that there exists a subsequence $\{u_{n_k}\}$ converging to $u \in L_1(\Omega)$ in the L_1-norm. Considerating (42) we obtain $\alpha_0 = u$ (see our agreement). Let us denote by β_n the trace of (u_n, α_{n_i}). With respect to Theorem 2 we have $\|\beta_n\|_{L_\mu(\partial\Omega)} \leqq cK$ and hence there exists a subsequence $\{\beta_{n_k}\}$ such that $\beta_{n_k} \rightharpoonup \beta \in$ $\in L_\mu(\partial\Omega)$.

By limiting process in Green's theorem for $(u_{n_k}, \alpha_{n_k i}, \beta_{n_k})$ we obtain Green's theorem for (u, α_i, β) on account of (42). Thus $(u, \alpha_i, \beta) \in M^1(\bar{\Omega}) = W_\mu^1(\bar{\Omega})$. Banach's theorem ([4], section V. 4.) implies that $W_\mu^1(\bar{\Omega})$ is closed in the w*-topology. The ball in the space $[L_\mu(\bar{\Omega})]^{N+1}$ is compact in the w*-topology ([4], addition to V.) and this implies the compactness of the ball in $W_\mu^1(\bar{\Omega})$. The assertions on the space $\mathring{W}_\mu^1(\bar{\Omega})$ are obtained by Theorem 2.

In the space $W_\mu^1(\bar{\Omega})$ the theorem on the equivalence of the norms is valid.

Theorem 7. *Suppose $(u, \alpha_i, \beta) \in W_\mu^1(\bar{\Omega})$. Then the function*

$$(44) \qquad \|(u, \alpha_i, \beta)\|'_{W_\mu{}^1} = \|\beta\|_{L_\mu(\partial\Omega)} + \sum_{i=1}^N \|\alpha_i\|_{L_\mu(\bar{\Omega})}$$

is an equivalent norm in the space $W_\mu^1(\bar{\Omega})$.

Proof. *Inequality* $\|(u, \alpha_i)\|'_{W_\mu^1} \leqq c\|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu^1}$ follows from Theorem 2. On the contrary, let us suppose that the inequality

$$\|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu^1} \leqq c\|(u, \alpha_i)\|'_{W_\mu^1}$$

is not valid. The there exist functions $(u_n, \alpha_{ni}, \beta_n) \in W_\mu^1$ such that

$$\|(u_n, \alpha_{n_i}, \beta_n)\|_{W_\mu^1} = 1\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,, \tag{45}$$

$$\|(u_n, \alpha_{ni}, \beta_n)\|'_{W_\mu^1} \to 0\,, \quad n \to \infty\,. \tag{46}$$

If we choose a suitable subsequence with regard to Theorems 5 and 6, we can suppose

$$(u_n, \alpha_{ni}, \beta_n) \rightharpoonup (u, \alpha_i, \beta) \quad \text{in} \quad W_\mu^1 \tag{47}$$

$$u_n \to u \quad \text{in} \quad L_1\,. \tag{48}$$

From (45) and (46) we conclude that $\|u_n\|_{L_1} \to 1$ and hence, with respect to (48), we obtain $\|u\|_{L_1} = 1$. Theorem 2 and (47) imply $\beta_n \rightharpoonup \beta$ in $L_\mu(\partial\Omega)$. From (46) and (47) we have

$$\|\alpha_i\|_{L_\mu} \leqq \lim \|\alpha_{n_\mu i}\|_L = 0\,, \quad \|\beta\|_{L_\mu(\partial\Omega)} \leqq \lim \|\beta_n\|_{L_\mu(\partial\Omega)} = 0\,.$$

Thus we have

$$\|u\|_{L_1} = 1\,, \quad \alpha_i = 0 \text{ on } \bar{\Omega}\,, \quad i = 1, \ldots, N\,, \quad \beta = 0 \text{ on } \partial\Omega\,. \tag{49}$$

There exists a function $\psi \in C_0^\infty(E_N)$ satisfying $\int_\Omega u\psi \,\mathrm{d}x \neq 0$. Easily we find a function $\varphi \in C^\infty(E_N)$ such that $\varphi_{x_1} = \psi$. From Green's theorem we conclude

$$\int_\Omega u\psi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u\varphi_{x_1} \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \varphi\nu_1 \,\mathrm{d}\beta - \int_{\bar{\Omega}} \varphi \,\mathrm{d}\alpha_i = 0$$

and hence we obtain a contradiction.

6. The sides and the inner traces of functions from W_μ^1

Theorem 8. *Suppose* $(u, \alpha_i, \beta) \in W_\mu^1(\bar{\Omega})$. *Let us set*

$$\alpha_i' = \alpha_i \text{ on } \partial\Omega\,, \quad \alpha_i' = 0 \text{ on } \Omega\,, \quad \bar{\alpha}_i = \alpha_i - \alpha_i' \text{ on } \bar{\Omega}\,. \tag{50}$$

Then $(u, \bar{\alpha}_i)$, $(0, \alpha_i') \in W_\mu^1(\bar{\Omega})$.

Proof. Let us suppose $\beta = 0$ and let us denote

$$u_h(x) = \int_\Omega K^h(x - y)\, u(y) \,\mathrm{d}y\,, \quad x \in \Omega\,. \tag{51}$$

On the ground of Green's theorem we obtain

(52) $$u_{hx_i}(x) = \int_{\bar{\Omega}} K^h(x - y)\, d\alpha_i(y)\,, \quad x \in \Omega\,, \quad i = 1, \ldots, N\,.$$

Let us consider $\varphi \in C(\bar{\Omega})$, extending it continuously on E_N. Denote

(53) $$\psi_h(x) = \int_{\Omega} K^h(x - y)\, dy\,, \qquad x \in \partial\Omega\,,$$

(54) $$\varphi_h(x) = \int_{\Omega} K^h(x - y)\, \varphi(y)\, dy\,, \quad x \in E_N\,,$$

(55) $$\bar{\varphi}_h(x) = \int_{E_N} K^h(x - y)\, \varphi(y)\, dy\,, \quad x \in E_N\,.$$

Evidently $\bar{\varphi}_h \to \varphi$ in $C(\bar{\Omega})$. From the fact that the domain Ω belongs to the class C^1 we obtain (see Remark below)

(56) $$\psi_h \to \tfrac{1}{2} \quad \text{in} \quad C(\partial\Omega)\,.$$

By the same method as in the proof of Lemma 1 (ii) we obtain

(57) $$\varphi_h \to \tfrac{1}{2}\varphi \quad \text{in} \quad C(\partial\Omega)\,.$$

Now we prove

(58) $$u_h \to (u, \bar{\alpha}_i + \tfrac{1}{2}\alpha_i') \quad \text{in} \quad W_\mu^1(\bar{\Omega})\,.$$

Evidently $u_h \to u$ in $L_1(\Omega)$. Making use of (52) and (57) we conclude

$$\int_{\Omega} \varphi u_{hx_i}\, dx = \iint_{\substack{x \in \Omega \\ y \in \bar{\Omega}}} \varphi(x)\, K^h(x - y)\, d\alpha_i(y)\, dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \varphi_h\, d\alpha_i + \int_{\Omega} \bar{\varphi}_h\, d\alpha_i + \int_{S_h} (\varphi_h - \bar{\varphi}_h)\, d\alpha_i \to$$

$$\to \int_{\partial\Omega} \tfrac{1}{2}\varphi\, d\alpha_i + \int_{\Omega} \varphi\, d\alpha_i = \int_{\bar{\Omega}} \varphi\, d(\bar{\alpha}_i + \tfrac{1}{2}\alpha_i')\,,$$

because $\varphi_h = \bar{\varphi}_h$ on Ω_h and for small h there is

$$\left| \int_{S_h} (\varphi - \bar{\varphi}_h)\, d\alpha_i \right| \leqq c \|\varphi\|_{C(\bar{\Omega})} \cdot |\alpha_i| \, (S_h) \to 0\,.$$

Successively we obtain from (58)

$$(u, \bar{\alpha}_i + \tfrac{1}{2}\alpha_i')\,, \quad (0, \tfrac{1}{2}\alpha_i')\,, \quad (0, \alpha_i') \in W_\mu^1$$

and hence

$$(u, \bar{\alpha}_i) = (u, \alpha_i) - (0, \alpha_i') \in W_\mu^1 .$$

In the case $\beta \neq 0$, $(u, \alpha_i, \beta) \in W_\mu^1$ Theorem 3 implies that there exist measures $\tilde{\alpha}_i \in L_\mu(\bar{\Omega})$ such that $(u, \tilde{\alpha}_i, 0) \in W_\mu^1$. At the same time $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i$ in Ω. From the facts just proved we conclude $(u, \bar{\alpha}_i) \in W_\mu^1$, where $\bar{\alpha}_i = \tilde{\alpha}_i = \alpha_i$ in Ω, $\bar{\alpha}_i = 0$ on $\partial\Omega$.

Remark. We prove assertion (56). The normal ν is uniformly continuous on $\partial\Omega$. Suppose $x_0 \in \partial\Omega$. We realise a linear orthogonal transformation of coordinate variables such that x_0 will be mapped into point 0 and $x_N = 0$ will be tangent hyperplane with respect to $\partial\Omega$ at the point 0.

For $|x|$ "small" $\partial\Omega$ will be described by $x_N = a(x')$. The normal ν can be expressed by

$$\nu(x', a(x')) = \left(\frac{-a_{x_1}(x')}{(1 + |\nabla a(x')|^2)^{1/2}}, \ldots, \frac{-a_{x_{N-1}}(x')}{(1 + |\nabla a(x')|^2)^{1/2}}, \frac{1}{(1 + |\nabla a(x')|^2)^{1/2}}\right).$$

On account of the uniform continuity of the normal ν we conclude that for "small" $|x|$ even $|\nabla a(x')|$ is "small". From

$$a(x') = \int_0^1 a_{x_i}(tx')\, x_i'\, \mathrm{d}t$$

we obtain $-c|x'| \leqq a(x') \leqq c|x'|$ where c is sufficiently "small".

Definition 4. Suppose $(u, \alpha_i, \beta) \in W_\mu^1(\bar{\Omega})$. The measure $\alpha_\nu \in L_\mu(\partial\Omega)$ satisfying

$$(59) \qquad \alpha_\nu = \sum_{i=1}^N \nu_i \alpha_{i|\partial\Omega} \quad \text{i.e.} \quad \int_{\partial\Omega} \varphi \,\mathrm{d}\alpha_\nu = \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_i \,\mathrm{d}\alpha_i\,, \quad \varphi \in C(\partial\Omega)\,,$$

is called the side of the function (u, α_i, β) on $\partial\Omega$.

The trace β^0 of the function $(u, \bar{\alpha}_i) \in W_\mu^1$ from Theorem 8 is called the inner trace of the function (u, α_i, β). It is evident that the measure β^0 is uniquely determined by the function u.

If $\beta = \beta^0$, then $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$ must hold, i.e. $\alpha_i = 0$ on $\partial\Omega$ and hence $\alpha_\nu = 0$.

Theorem 9. *Suppose $(u, \alpha_i, \beta) \in W_\mu^1(\bar{\Omega})$, let β^0 be the inner trace of (u, α_i, β) and $\bar{\alpha}_i$, α_i' the measures from (50), i.e. $(u, \bar{\alpha}_i, \beta^0) \in W_\mu^1$.*

Then $\beta = \beta^0 + \alpha_\nu$ and $\alpha_i = \nu_i \alpha_\nu$ on $\partial\Omega$, i.e.

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \,\mathrm{d}\alpha_i = \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_i \,\mathrm{d}\alpha_\nu\,, \quad \forall \varphi \in C(\partial\Omega)\,, \quad i = 1, \ldots, N\,.$$

Proof. On account of Theorem 8, $(0, \alpha_i') = (u, \alpha_i) - (u, \bar{\alpha}_i)$ belongs to the space W_μ^1 and hence the function $(0, \alpha_i')$ possesses the trace $\beta - \beta^0$, i.e.

$$(60) \qquad \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_i \,\mathrm{d}(\beta - \beta^0) = \int_{\partial\Omega} \varphi \,\mathrm{d}\alpha_i\,, \quad \varphi \in C(\partial\Omega)$$

holds with respect to (2). We substitute the function φ by $\varphi \nu_i$ and then we add (60) for $i = 1, \ldots, N$. Thus we obtain

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_i^2 \, d(\beta - \beta^0) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_i \, d\alpha_i \quad \text{i.e.} \quad \beta - \beta^0 = \alpha_\nu \, .$$

Formula (60) implies

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \nu_i \, d\alpha_\nu = \int_{\partial\Omega} \varphi \, d\alpha_i \, .$$

Theorem 10. *The inner trace of a function from $W_\mu^1(\bar{\Omega})$ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue area measure* dS *on* $\partial\Omega$.

Proof. According to the definition we can suppose

$$(u, \alpha_i, \beta^0) \in W_\mu^1 \, , \quad \alpha_i = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \, , \quad i = 1, \ldots, N \, .$$

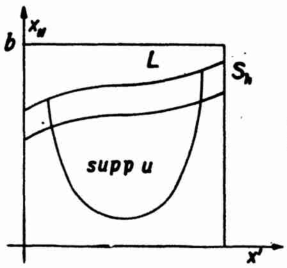

Fig. 1

From the Section 2 on the decomposition of the unit it is evident that it is sufficient to prove the theorem in the case when Ω has the shape as suggested in the figure.

$$L = \partial\Omega \cap K \, , \quad S_h = \{(x', x_N) \in \Omega; \; a(x') - h < x_N < a(x')\} \, .$$

Let $\varepsilon > 0$ be an arbitrary number. We prove that there exists a $\delta > 0$ such that

$$\varphi \in C^1(L) \, , \quad \|\varphi\|_{C(L)} \leqq 1 \, , \quad \int_{\operatorname{supp}\varphi} dS \leqq \delta \Rightarrow \left| \int_L \varphi \, d\beta \right| \leqq \varepsilon \, . \tag{61}$$

Let h be a positive number such that

$$\int_{S_h} d|\alpha_N| < \varepsilon \, . \tag{62}$$

There exists $\delta > 0$ such that

$$M \subset \Omega \, , \quad |M| < \delta \, b \Rightarrow \int_M |u| \, dx < h \, \varepsilon \, . \tag{63}$$

Suppose that φ satisfied assumptions from (61). We extend φ on Ω so that $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$, $\varphi = 0$ on $\Omega - S_h$ $|\varphi_{x_N}| \leqq c/h$ on S_h and $\varphi(x', x_N) = 0$ if $\varphi(x', a(x')) = 0$. Let us denote

$$M = \{(x', x_N);\ (x', a(x')) \in \operatorname{supp} \varphi,\ 0 < x_N < a(x')\} .$$

Then $|M| < \delta b$ and with respect to $\alpha_N = 0$ on L we obtain

$$\int_L \varphi \nu_N \, d\beta = \int_\Omega u \varphi_{x_N} \, dx + \int_\Omega \varphi \, d\alpha_N .$$

Due to (62) and (63) the following estimate holds:

$$\left|\int_L \varphi \nu_N \, d\beta\right| \leqq \frac{c}{h} \int_M |u| \, dx + \int_{S_h} d|\alpha_N| \leqq c\,\varepsilon .$$

Since $\nu_N \geqq c > 0$ on L (see (9)),

$$\left|\int_L \varphi \, d\beta\right| \leqq \frac{1}{\nu_N} \left|\int_L \varphi \nu_N \, d\beta\right| \leqq c\,\varepsilon$$

holds. Thus (61) is proved.

Let $M \subset L$ be a Borel set with $\int_M dS = 0$. There exists an open in L set $G \supset M$, $G \subset L$ such that $\int_G dS < \delta$. Then we obtain with respect to (61)

$$|\beta|\,(M) \leqq |\beta|\,(G) = \sup \left\{ \left|\int_L \varphi \, d\beta\right| ;\ \varphi \in C^1(L),\ \|\varphi\|_{C(L)} \leqq 1,\ \operatorname{supp} \varphi \subset \bar{G} \right\} \leqq \varepsilon .$$

7. Restrictions and extensions of functions from W_μ^1

Suppose $\Omega' \subset \Omega$ is a domain of the class C^1 with $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ and $(u, \alpha_i, \beta) \in W_\mu^1(\Omega)$. The restriction of this function may be defined in many ways. It depends on the part of the side on $\partial\Omega$ which we add to the restricted function.

Let us denote

$$u' = u_{|\Omega'} , \quad \alpha_i' = \alpha_{i|\bar{\Omega}'} . \tag{64}$$

Theorem 11. *Under the above assumptions, the function (u', α_i') from (64) belongs to the space $W_\mu^1(\bar{\Omega}')$ and its trace $\beta' \in L_\mu(\partial\Omega')$ is absolutely continuous with respect to the measure dS on $\partial\Omega'$.*

Proof. With regard to Theorem 8 we can suppose $\alpha_i = 0$ on $\partial\Omega$ and hence $\beta = \beta^0 \in L_1(\partial\Omega)$ is the trace of (u, α_i). From Theorem 4 we conclude that there exist $u_n \in W_1^1(\Omega)$ such that $u_n \rightharpoonup (u, \alpha_i)$ in $W_\mu^1(\bar{\Omega})$, $\|u_n\|_{W_1{}^1(\Omega)} \leqq c\|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu{}^1(\bar{\Omega})}$. Let us denote $\Omega'' = \Omega - \bar{\Omega}'$, $u'' = u|\Omega''$, $\alpha_i'' = \alpha_i$ in Ω'' and $\alpha_i'' = 0$ on $\partial\Omega''$. $\{u_{n|\Omega''}\}_{n=1}^\infty$ is a bounded sequence and there exists its subsequence such that $u_{n_k|\Omega''} \rightharpoonup (\bar{u}, \bar{\alpha}_i)$ in

$W_\mu^1(\bar{\Omega}'')$. Evidently $\bar{u} = u$ in Ω'' and $\bar{\alpha}_i = \alpha_i$ inside of Ω''. Due to Theorem 8 $(u'', \alpha_i'') \in W_\mu^1(\bar{\Omega}'')$. Let v_i' be the i-th component of the exterior normal to Ω'. The function (u'', α_i'') possesses the trace β^0 on $\partial\Omega$. Let us denote its trace on $\partial\Omega'$ by β'. β' is at the same time inner trace of (u'', α_i'') and hence $\beta' \in L_1(\partial\Omega')$ according to Theorem 10. Now we prove that $(u', \alpha_i', \beta') \in W_\mu^1(\bar{\Omega}')$.

Green's theorem holds for (u, α_i) and (u'', α_i'') with a function $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$:

$$\int_{\partial\Omega} \varphi v_i \, d\beta^0 = \int_\Omega u\varphi_{x_i} \, dx + \int_\Omega \varphi \, d\alpha_i ,$$

$$\int_{\partial\Omega} \varphi v_i \, d\beta^0 - \int_{\partial\Omega'} \varphi v_i' \, d\beta' = \int_{\Omega''} u\varphi_{x_i} \, dx + \int_{\Omega''} \varphi \, d\alpha_i .$$

Subtracting these formulas we obtain Green's theorem for the function (u', α_i', β').

By the same method we can prove $(u_{|\Omega''}, \alpha_{i|\bar{\Omega}''}) \in W_\mu^1(\bar{\Omega}'')$ and at the same time the trace of this function is the inner trace of the function $(u', \alpha_i') \in W_\mu^1(\bar{\Omega}')$.

If two functions from W_μ^1 possess the same trace on the common boundary, then it is possible to join them together. Suppose $\Omega^* \supset \bar{\Omega}$ is a domain of the class C^1, $\Omega' = \Omega^* - \bar{\Omega}$.

Theorem 12. *Let $(u, \alpha_i, \beta) \in W_\mu^1(\bar{\Omega})$, $(u', \alpha_i') \in W_\mu^1(\bar{\Omega}')$ and suppose that (u', α_i') possesses the trace β^* on $\partial\Omega^*$ and β on $\partial\Omega$, i.e. the same trace as (u, α_i, β) on $\partial\Omega$. Let us set*

$$u^* = u \text{ on } \Omega , \quad u^* = u' \text{ on } \Omega' , \tag{65}$$

$$\alpha_i^* = \alpha_i \text{ on } \Omega , \quad \alpha_i^* = \alpha_i + \alpha_i' \text{ on } \partial\Omega , \quad \alpha_i^* = \alpha_i \text{ on } \bar{\Omega}^* - \bar{\Omega} .$$

Then $(u^*, \alpha_i^*, \beta^*) \in W_\mu^1(\bar{\Omega}^*)$.

Proof. It suffices to consider Green's theorem for (u, α_i) and for (u', α_i'). By adding them we obtain Green's theorem for the function (u^*, α_i^*).

8. Regularizations of functions from W_μ^1

In order that the mollified functions u_h of u satisfy $u_h \xrightarrow{w^\circ} u$, we must take into account the side of the function (u, α_i). We proceed in the following way:

First we extend (u, α_i) on a larger domain, so that the side of the extended function on $\partial\Omega$ is twice the side of (u, α_i). Then we mollify the extended function. This method we can use only for functions possessing the traces from $L_1(\partial\Omega)$. A similar result is obtained for the functions possessing the trace from $L_\mu(\partial\Omega)$ by the diagonal method and Lemma 1.

Theorem 13. *Suppose $(u, \alpha_i, \beta) \in W_\mu^1(\bar{\Omega})$ and let β be absolutely continuous with respect to the measure dS on $\partial\Omega$. Suppose $\Omega^* \supset \bar{\Omega}$ is a bounded domain of the* *class c^1. Then there exists $(u^*, \alpha_i^*, \beta^*) \in W_\mu^1(\bar{\Omega}^*)$ such that*

$$(66) \qquad u^* = u \text{ on } \Omega, \quad \alpha_i^* = \alpha_i \text{ on } \Omega, \quad \alpha_i^* = 2\alpha_i \text{ on } \partial\Omega.$$

For small $h > 0$ let us set

$$(67) \qquad u_h(x) = \int_{\Omega^*} K^h(x - y)\, u^*(y)\, \mathrm{d}y, \quad x \in \Omega.$$

Then $u_h \in W_\mu^1(\Omega)$ and

$$(68) \qquad u_h \to (u, \alpha_i) \quad in \quad W_\mu^1(\bar{\Omega}), \quad \|u_h\|_{W_1{}^1(\Omega)} \to \|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu{}^1(\bar{\Omega})}.$$

Proof. Suppose α_i' are the measures defined by (50). With regard to Theorem 8, $(0, \alpha_i') \in W_\mu^1(\bar{\Omega})$ and the trace of this function is equal to the side of the function (u, α_i), i.e. $(0, \alpha_i', \alpha_\nu) \in W_\mu^1(\bar{\Omega})$ on account of Theorem 9. From this fact it follows $(u, \alpha_i + \alpha_i', \beta + \alpha_\nu) = (u, \alpha_i, \beta) + (0, \alpha_i', \alpha_\nu) \in W_\mu^1(\bar{\Omega})$. β being absolutely continuous implies that $\alpha_\nu = \beta - \beta^0$ is absolutely continuous (see Theorem 10), i.e. $\beta + \alpha_\nu$ is absolutely continuous. With respect to [3] there exists $u' \in W_1^1(\Omega^* - \bar{\Omega})$ with the trace $\beta + \alpha_\nu$ on $\partial\Omega$ (see our agreement). Now, we join together the function $u' \in W_1^1(\Omega^* - \bar{\Omega})$ and the function $(u, \alpha_i + \alpha_i', \beta + \alpha_\nu) \in W_\mu^1(\bar{\Omega})$ and thus, by means of Theorem 12, we define the function $(u^*, \alpha_i^*) \in W_\mu^1(\bar{\Omega}^*)$. The first part of the theorem is proved. Evidently $u_h \to u$ in $L_1(\Omega)$. Suppose $\varphi \in C(\bar{\Omega}^*)$. Let us denote

$$S_h = \{x \in \Omega;\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < h\}, \quad S_h^* = \{x \in \Omega^* - \bar{\Omega};\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < h\}.$$

For $y \in \Omega^*$ we set

$$\varphi_h(y) = \int_\Omega K^h(x - y)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x, \quad \bar{\varphi}_h(y) = \int_{\Omega^*} K^h(x - y)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x.$$

With regard to (57) $\varphi_h \to \frac{1}{2}\varphi$ holds in $C(\partial\Omega)$. Easily we find that $\bar{\varphi}_h \to \varphi$ in $C(\bar{\Omega})$, $\varphi_h = \bar{\varphi}_h$ on $\Omega - S_h$ and

$$(69) \qquad u_{hx_i}(x) = \int_{\Omega^*} K^h(x - y)\, \mathrm{d}\alpha_i^*(y), \quad x \in \Omega.$$

Then

$$\int_\Omega u_{hx_i}\varphi\, \mathrm{d}x = \iint\limits_{\substack{x\in\Omega\\ y\in\Omega^*}} K^h(x - y)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\alpha_i^*(y) =$$

$$= \iint\limits_{\substack{x\in\Omega\\ y\in\Omega}} \ldots + \iint\limits_{\substack{x\in\Omega\\ y\in\partial\Omega}} \ldots + \iint\limits_{\substack{x\in\Omega\\ y\in S_h^*}} \ldots =$$

$$= \int_\Omega \bar{\varphi}_h\, \mathrm{d}\alpha_i + \int_{S_h} (\varphi_h - \bar{\varphi}_h)\, \mathrm{d}\alpha_i + \int_{\partial\Omega} 2\varphi_h\, \mathrm{d}\alpha_i + \int_{S_h^*} \varphi_h\, \mathrm{d}\alpha_i^*.$$

For $h \to 0$, $\int_\Omega \bar{\varphi}_h \, d\alpha_i \to \int_\Omega \varphi \, d\alpha_i$ holds

$$\left|\int_{S_h^*} (\varphi_h - \bar{\varphi}_h) \, d\alpha_i\right| \leqq 2\|\varphi\|_{C(\bar{\Omega}^*)}, \quad \int_{S_h} d(\alpha_i) \to 0 .$$

With respect to (57), $\int_{\partial\Omega} 2\varphi_h \, d\alpha_i \to \int_{\partial\Omega} \varphi \, d\alpha_i$,

$$\left|\int_{S_h^*} \varphi_h \, d\alpha_i^*\right| \leqq \|\varphi\|_{C(\bar{\Omega}^*)}, \quad \int_{S_h^*} d|\alpha_i^*| \to 0 .$$

This implies $u_h \rightharpoonup (u, \alpha_i)$ in $W_\mu^1(\bar{\Omega})$ and thus

$$\|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu^1(\bar{\Omega})} \leqq \varliminf_{h \to 0} \|u_h\|_{W_1^1(\Omega)} .$$

Now we prove the converse inequality. $\int_\Omega |u_h| \, dx \to \int_\Omega |u| \, dx$ holds on account of the convergence $u_h \to u$ in $L_1(\Omega)$. From (69) we deduce

$$\int_\Omega |u_{hx_i}| \, dx \leqq \iint_{\substack{x \in \Omega \\ y \in \Omega^*}} K^h(x - y) \, d|\alpha_i^*(y)| \, dx =$$

$$= \iint_{\substack{x \in \Omega \\ y \in \Omega}} \ldots + \iint_{\substack{x \in \Omega \\ y \in \partial\Omega}} \ldots + \iint_{\substack{x \in \Omega \\ y \in S_h^*}} \ldots \leqq$$

$$\leqq \int_\Omega d|\alpha_i| + \iint_{\substack{x \in \Omega \\ y \in \partial\Omega}} 2K^h(x - y) \, dx \, d|\alpha_i| \, (y) + \int_{S_h^*} d|\alpha_i^*| .$$

The third right-hand side term converges to zero for $h \to 0$. From (56) we conclude $\int_\Omega K^h(x - y) \, dx \to \frac{1}{2}$ uniformly for $y \in \partial\Omega$ and thus the second term converges to $\int_{\partial\Omega} d|\alpha_i|$.

Theorem 14. *Suppose $(u, \alpha_i, \beta) \in W_\mu^1(\bar{\Omega})$. Then there exists a sequence $u_n \in W_1^1(\Omega)$ such that*

$$u_n \rightharpoonup (u, \alpha_i) \quad \textit{in} \quad W_\mu^1(\bar{\Omega}) \quad \textit{and} \quad \|u_n\|_{W_1^1(\Omega)} \to \|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu^1(\bar{\Omega})} .$$

Proof. As in (50) we set

$$\alpha_i' = \alpha_i \quad \text{on} \quad \partial\Omega , \qquad \alpha_i' = 0 \quad \text{on} \quad \Omega , \qquad \bar{\alpha}_i = \alpha_i - \alpha_i' \quad \text{on} \quad \bar{\Omega} .$$

Then $(u, \bar{\alpha}_i, \beta^0)$, $(0, \alpha_i', \alpha_\nu) \in W_\mu^1(\bar{\Omega})$ where β^0 is the inner trace of the function (u, α_i) and α_ν is its side.

Similarly as in Lemma 1 we set

$$u_h'(x) = \int_{\partial\Omega} R^h(x - y) \, d\alpha_\nu(y) , \quad x \in \partial\Omega .$$

Making use of Lemma 1 we obtain

$$u_h' \rightharpoonup \alpha_\nu \quad \text{in} \quad L_\mu(\partial\Omega), \qquad \|u_h'\|_{L_1(\partial\Omega)} \to \|\alpha_\nu\|_{L_\mu(\partial\Omega)}.$$

From Theorem 9 we conclude $\alpha_i' = \nu_i\alpha_\nu$ on $\partial\Omega$. Let us define $\alpha_{hi}' \in L_\mu(\bar{\Omega})$ by

$$\text{(70)} \qquad \int_{\partial\Omega} \varphi \, \mathrm{d}\alpha_{hi}' = \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_i u_h' \, \mathrm{d}S, \quad \varphi \in C(\partial\Omega); \qquad \alpha_{hi}' = 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

We find easily that $(0, \alpha_{hi}', u_h') \in W_\mu^1(\bar{\Omega})$ and

$$\text{(71)} \qquad (0, \alpha_{hi}') \rightharpoonup (0, \alpha_i') \quad \text{in} \quad W_\mu^1(\bar{\Omega}).$$

We prove that

$$\text{(72)} \qquad \|(0, \alpha_{hi}')\|_{W_\mu^1} \to \|(0, \alpha_i')\|_{W_\mu^1}.$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{d}|\alpha_{hi}'| = \int_{\partial\Omega} |\nu_i| \cdot |u_h'| \, \mathrm{d}S \leqq \iint_{\substack{x\in\partial\Omega \\ y\in\partial\Omega}} |\nu_i(x)| \, R^h(x-y) \, \mathrm{d}|\alpha_\nu| (y) \, \mathrm{d}S(x) \leqq$$

$$\leqq \int_{\partial\Omega} (|\nu_i|)_h (y) \, \mathrm{d}|\alpha_\nu| (y) \to \int_{\partial\Omega} |\nu_i| \, \mathrm{d}|\alpha_\nu| = \|\alpha_i\|_{L_\mu(\partial\Omega)}.$$

We used

$$\text{(73)} \qquad |\psi\alpha| = |\psi| \cdot |\alpha|, \quad \psi \in C(\partial\Omega), \quad \alpha \in L_\mu(\partial\Omega)$$

in our reasoning.

The converse inequality can be obtained from (71). Let us set

$$\text{(74)} \qquad (u, \alpha_{hi}, \beta_h) = (u, \bar{\alpha}_i + \alpha_{hi}', \beta^0 + u_h') \in W_\mu^1(\bar{\Omega})$$

(see our agreement), where β_h is absolutely continuous with respect to $\mathrm{d}S$. Theorem 13 implies the existence of $u_{hk} \in W_1^1(\Omega)$, $k > 0$ such that

$$\text{(75)} \qquad u_{hk} \underset{k\to 0}{\rightharpoonup} (u, \alpha_{hi}) \quad \text{in} \quad W_\mu^1, \qquad \|u_{hk}\|_{W_1^1} \underset{k\to 0}{\to} \|(u, \alpha_{hi})\|_{W_\mu^1}.$$

From (71), (72) and (74) we conclude

$$\text{(76)} \qquad (u, \alpha_{hi}) \rightharpoonup (u, \alpha_i) \quad \text{in} \quad W_\mu^1, \qquad \|(u, \alpha_{hi})\|_{W_\mu^1} \to \|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu^1}.$$

Suppose $\{\varphi^j\}_{j=1}^\infty$ is a dense subset in the space $[C(\bar{\Omega})]^{N+1}$. For $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_N) \in C^{N+1}$, $(u, \alpha_i) \in W_\mu^1(\bar{\Omega})$ we define

$$\text{(77)} \qquad \langle (u, \alpha_i), \varphi \rangle = \int_\Omega u\varphi_0 \, \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^N \int_{\bar{\Omega}} \varphi_i \, \mathrm{d}\alpha_i.$$

For each positive integer n, there exists $h_n > 0$ such that

$$|\langle(u, \alpha_{h_n i}), \varphi^j\rangle - \langle(u, \alpha_i), \varphi^j\rangle| < \frac{1}{n} \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\left|\|(u, \alpha_{h_n i})\|_{W_\mu^1} - \|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu^1}\right| < \frac{1}{n}.$$

To this h_n there exists according to (75) such $k_n \geqq 0$ that

$$|\langle u_{h_n k_n}, \varphi^j\rangle - \langle(u, \alpha_{h_n i}), \varphi^j\rangle| < \frac{1}{n} \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\left|\|u_{h_n k_n}\|_{W_1^1} - \|(u, \alpha_{h_n i})\|_{W_\mu^1}\right| < \frac{1}{n}.$$

Hence we deduce $\|u_{h_n k_n}\|_{W_1^1} \underset{n\to\infty}{\to} \|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu^1}$,

$$\langle u_{h_n k_n}, \varphi^j\rangle \underset{n\to\infty}{\to} \langle(u, \alpha_i); \varphi^j\rangle \quad \text{for} \quad j = 1, 2, \ldots$$

Thus, we obtain $u_{h_n k_n} \underset{n\to\infty}{\to} (u, \alpha_i)$ in $W_\mu^1(\bar{\Omega})$. The theorem is proved.

§. 2. SPACE W_μ^k

9. Definition and fundamental properties of W_μ^k

Let us denote $e_m = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ the N-dimensional vector with the unit in the m-th place. Let $\varkappa$ be the number of multiindices i with $|i| = k$.

Definition 5. $W_\mu^k(\bar{\Omega})$ is the space of all $(\varkappa + 1)$-tuples $(u, \alpha_i)_{|i|=k}$ such that $u \in W_1^{k-1}(\Omega)$, $\alpha_i \in L_\mu(\bar{\Omega})$ and

(78) $$(D^i u, \alpha_{i+e_1}, \ldots, \alpha_{i+e_N}) \in W_\mu^1(\bar{\Omega}) \quad \text{for all} \quad |i| = k - 1.$$

The norm is defined by

$$\|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu^k(\bar{\Omega})} = \|u\|_{W_1^{k-1}(\Omega)} + \sum_{|i|=k} \|\alpha_i\|_{L_\mu(\bar{\Omega})}.$$

The w^*-convergence in the space W_μ^k is defined as the w^*-convergence in the space W_1^{k-1} for the first component and as the w^*-convergence in $L_\mu(\bar{\Omega})$ for the other components. The space $W_1^k(\Omega)$ can be canonically imbedded into the space $W_\mu^k(\bar{\Omega})$ by the rule (in the sense of our agreement)

$$u \in W_1^k(\Omega) \to (u, D^i u)_{|i|=k} \in W_\mu^k(\bar{\Omega}).$$

The space $\mathring{W}_\mu^k(\bar{\Omega})$ is defined in the following way: $(u, \alpha_i) \in \mathring{W}_\mu^k(\bar{\Omega})$ iff $u \in \mathring{W}_1^{k-1}(\Omega)$ and for all $|i| = k - 1$ the function from (78) belongs to the space $\mathring{W}_\mu^1(\bar{\Omega})$.

Suppose $(u, \alpha_i) \in W_\mu^k(\bar{\Omega})$. The same decomposition as in Theorem 8 can be realized. For $|i| = k$ let us set

(79) $$\alpha_i' = \alpha_i \text{ on } \partial\Omega\,, \quad \alpha_i' = 0 \text{ on } \Omega\,, \quad \bar{\alpha}_i = \alpha_i - \alpha_i' \text{ on } \bar{\Omega}\,.$$

Regarding Theorem 8 we find that $(u, \bar{\alpha}_i)$, $(0, \alpha_i') \in W_\mu^k(\bar{\Omega})$.

Definition 6. The measure $\alpha_\nu \in L_\mu(\partial\Omega)$ defined by

(80) $$\alpha_\nu = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{N} \nu_{i_1} \dots \nu_{i_k} \alpha_{e_{i_1}+\dots+e_{i_k}} \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

is called the side of the function $(u, \alpha_i) \in W_\mu^k(\bar{\Omega})$.

The formula for α_ν corresponds to the formula for the k-th derivative with respect to the normal ν for the functions from W_1^k. An analogical theorem to Theorem 9 is valid.

Theorem 15. *If* $(u, \alpha_i) \in W_\mu^k(\bar{\Omega})$, *then*

$$\alpha_i = \nu_1^{i_1} \dots \nu_N^{i_N} \alpha_\nu\,, \quad i = (i_1, \dots, i_N) \quad on \quad \partial\Omega$$

for all $|i| = k$.

Proof. Let us rewrite the assertion of the theorem into a more suitable form

$$\alpha_{e_{i_1}+\dots+e_{i_k}} = \nu_{i_1} \dots \nu_{i_k} \alpha_\nu\,, \quad i_1, \dots, i_k = 1, \dots, N\,.$$

For $k = 1$, the assertion is proved in Theorem 9. With respect to the Definition 5 we have

$$\left(D^{e_{i_2}+\dots+e_{i_k}} u, \alpha_{e_{i_1}+\dots+e_{i_k}}\right)_{i_1=1}^{N} \in W_\mu^1(\bar{\Omega})\,.$$

The side of this function is equal to $\sum_{i_1=1}^{N} \nu_{i_1} \alpha_{e_{i_1}+\dots+e_{i_k}}$.

From Theorem 9 we obtain

(81) $$\alpha_{e_{i_1}+\dots+e_{i_k}} = \nu_{i_1} \sum_{j_1=1}^{N} \nu_{j_1} \alpha_{e_{j_1}+e_{i_2}+\dots+e_{i_k}}\,, \quad i_1 = 1, \dots, N\,.$$

The same assertion is valid for the index i_2

(82) $$\alpha_{e_{i_1}+\dots+e_{i_k}} = \nu_{i_2} \sum_{j_2=1}^{N} \nu_{j_2} \alpha_{e_{i_1}+e_{j_2}+e_{i_3}+\dots+e_{i_k}}\,, \quad i_2 = 1, \dots, N\,.$$

If we substitute (82) into (81), then

$$\alpha_{e_{i_1}+\dots+e_{i_k}} = \nu_{i_1} \nu_{i_2} \sum_{j_1,j_2=1}^{N} \nu_{j_1} \nu_{j_2} \alpha_{e_{j_1}+e_{j_2}+e_{i_3}+\dots+e_{i_k}}\,.$$

After k steps we obtain

$$\alpha_{e_{i_1}+\ldots+e_{i_k}} = v_{i_1} \ldots v_{i_k} \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{N} v_{j_1} \ldots v_{j_k} \alpha_{e_{j_1}+\ldots+e_{j_k}} = v_{i_1} \ldots v_{i_k} \alpha_v .$$

Analogous theorems on imbedding are valid for $W_\mu^k(\bar{\Omega})$ as in the case of W_μ^1.

The imbedding $W_\mu^k(\bar{\Omega}) \to W_q^{k-1}(\Omega)$, $1/q = 1 - 1/N$ is continuous and the imbedding $W_\mu^k(\bar{\Omega}) \to W_{q^*}^{k-1}(\Omega)$, $q^* < q$ is compact. This imbeddings are defined by the rule $(u, \alpha_i) \to u$.

Proof. The morms $\|D^i u\|_{L_q}$, $|i| = k - 1$ can be estimated from Theorem 5 and the norms $\|D^i u\|_{L_q}$, $|i| \leqq k - 2$ can be estimated by means of the imbedding $W_1^{k-1} \to \to W_q^{k-2}$.

Compactness can be proved similarly.

Theorems on imbedding of $W_\mu^k(\bar{\Omega})$ into $W_p^e(\Omega)$, $C^{e,\alpha}(\bar{\Omega})$, $e \leqq k - 2$, are valid in the same form as for the space $W_1^k(\Omega)$. This is a consequence of the transitivity of imbeddings, which makes it possible to obtain them from the imbedding $W_\mu^k \to W_q^{k-1}$. $\sum_{|i|=k} \|\alpha_i\|_{L_\mu(\bar{\Omega})}$ is an equivalent norm in the space $\mathring{W}_\mu^k(\bar{\Omega})$.

Proof. Using Theorem 7 we can estimate the norms $\|D^i u\|_{L_1}$, $|i| = k - 1$ and then we apply the theorem on equivalent norms in the space $\mathring{W}_1^{k-1}$.

If $(u, \alpha_i) \in W_\mu^k(\bar{\Omega})$, then $(u_{|\Omega'}, \alpha_{i|\bar{\Omega}'}) \in W_\mu^k(\bar{\Omega}')$, where $\Omega' \subset \Omega$. This assertion follows immediately from Theorem 11 and from the definition of the space W_μ^k.

Let us denote $[L_\mu(\bar{\Omega})]^{\kappa'} = \{\{\alpha_i\};\ |i| \leqq k,\ \alpha_i \in L_\mu(\bar{\Omega})\}$. The space $W_\mu^k(\bar{\Omega})$ can be canonically imbedded into $[L_\mu(\bar{\Omega})]^{\kappa'}$ by: the rule $(u, \alpha_i) \to \{\alpha_i\}_{|i| \leqq k}$, where α_i are the same for $|i| = k$ and $\alpha_i = D^i u$ (in sense of our agreement) for $|i| \leqq k - 1$. The next theorem is valuable in applications.

Theorem 16. *The space $W_\mu^k(\bar{\Omega})$ is closed with respect to the w*-topology as a subspace of $[L_\mu(\bar{\Omega})]^{\kappa'}$.*

The ball in the space $W_\mu^k(\bar{\Omega})$ is compact with respect to the w-topology.*

The same assertion is true for $\mathring{W}_\mu^k(\bar{\Omega})$.

Proof. Let $(u_n, \alpha_{n_i}) \rightharpoonup \{\alpha_i\}_{|i| \leqq k}$ (w*-convergence) in $[L_\mu(\bar{\Omega})]^{\kappa'}$. By the same method as in the proof of Theorem 6 we find from the theorems on imbedding that $u = = \alpha_0 \in W_1^{k-1}(\Omega)$ and that $\alpha_i \in L_1(\Omega)$, $|i| \leqq k - 1$ (in the sense of our agreement). Analogously as in the proof of Theorem 1 we can prove that $\alpha_i = D^i u$, $|i| \leqq k - 1$ in the sense of distributions. It remains to prove that $(D^i u, \alpha_{i+e_m})_{m=1}^N \in W_\mu^1$ for $|i| = = k - 1$. However, this is a consequence of the Theorem 6 and of the fact that

$$(D^i u_n, \alpha_{n,i+e_m})_{m=1}^N \rightharpoonup (D^i u, \alpha_{i+e_m})_{m=1}^N \quad \text{in} \quad W_\mu^1(\bar{\Omega}) .$$

The rest of the proof is the same as that of Theorem 6.

Now we prove that $\mathring{W}_\mu^k$ is closed in $[L_\mu(\Omega)]^{\kappa'}$ with respect to the w^*-convergence. Suppose $(u_n, \alpha_{ni}) \rightharpoonup \{\alpha_i\}_{|i| \leq k}$ and $(u_n, \alpha_{ni}) \in \mathring{W}_\mu^k$. The first part of the proof implies $\{\alpha_i\}_{|i| \leq k} = (u, \alpha_i) \in W_\mu^k$ in the sense of canonical imbedding. Owing to the theorem on imbedding, there exists a subsequence $\{u_{n_k}\}$ converging to u in the norm of the space W_1^{k-1} and hence $u \in \mathring{W}_1^{k-1}$. For $|i| = k - 1$ we have

$$(D^i u_n, \alpha_{n,i+e_m}) \rightharpoonup (D^i u, \alpha_{i+e_m}) \quad \text{in} \quad W_\mu^1 .$$

From the fact $(D^i u_\mu, \alpha_{n,i+e_m}) \in \mathring{W}_\mu^1$ and from Theorem 2 we conclude $(D^i u, \alpha_{i+e_m}) \in \in \mathring{W}_\mu^1$.

The rest of the proof is the same as that of Theorem 6.

10. Regularisation of functions from W_μ^k

We use the same method as that in Section 8. In order to prove the existence of the extension similar to the extension (u^*, α_i^*) from Theorem 13, we prove first of all two lemmas. We shall assume that the boundary $\partial\Omega$ is sufficiently smooth, so that we were able to transform suitably pieces of the boundary in the proofs of lemmas 3 and 4. It suffices to assume that $\partial\Omega$ is of the class C^{k+1}.

Lemma 3. *Suppose $(u, \alpha_i) \in W_\mu^k(\bar{\Omega})$. If $\alpha_{i|\partial\Omega} = 0$, $|i| = k$ then there exists a domain $\Omega^* \supset \bar{\Omega}$ and a function $(u^*, \alpha_i^*) \in W_\mu^k(\bar{\Omega}^*)$ such that*

$$u^* = u \text{ on } \Omega , \qquad \alpha_i^* = \alpha_i \text{ on } \bar{\Omega} .$$

Proof. First we prove the assertion in the case of the cube. Let us denote

$$\begin{aligned}
K \ &= \{x;\ 0 < x_i < b,\ i = 1, \ldots, N - 1,\ -b < x_N < 0\} ,\\
K_1 &= \{x;\ 0 < x_i < b,\ i = 1, \ldots, N - 1,\quad 0 < x_N < b\} ,\\
L \ &= \{x;\ 0 < x_i < b,\ i = 1, \ldots, N - 1,\quad x_N = 0\} .
\end{aligned}$$

Let us assume that the support of $(u, \alpha_i) \in W_\mu^k(\bar{\Omega})$ is a subset of $K \cup L$. We extend the function (u, α_i) by zero on $\{x;\ x_N \leq 0\}$. We use the method of Nikolsky – see [2]. Let $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ be real numbers such that

$$\sum_{m=1}^{k} \lambda_m (-m)^j = 1 \quad \text{for} \quad j = 0, \ldots, N - 1 . \tag{83}$$

Let us define the function $\bar{u} \in W_1^{k-1}(K_1)$ by the rule

$$\bar{u}(x', x_N) = \sum_{m=1}^{k} \lambda_m u(x', -m x_N) . \tag{84}$$

Then for $i = (i_1 \ldots i_N)$ $|i| \leqq k - 1$ we obtain

$$(85) \qquad D^i\bar{u}(x', x_N) = \sum_{m=1}^{k} \lambda_m(-m)^{i_N} D^i u(x', -mx_N).$$

Let us define the measures $\bar{\alpha}_i \in L_\mu(\bar{K}_1)$ $|i| = k$ by formula

$$(86) \quad \int_{\bar{K}_1} \varphi(x', x_N)\, d\bar{\alpha}_i(x', x_N) = \sum_{m=1}^{k} \lambda_m(-m)^{i_N} \frac{1}{m} \int_{\bar{K}} \varphi\left(x', -\frac{x_N}{m}\right) d\alpha_i(x', x_N).$$

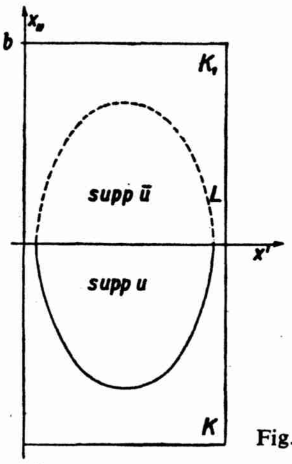

Fig. 2

If $|i| = k - 1$ then there exists $u_n \in W_1^1(K)$ such that

$$u_n \rightharpoonup (D^i u \;\; \alpha_{i+e_j})_{j=1}^N \quad \text{in} \quad W_\mu'(\bar{K}).$$

Now, let us define $\bar{u}_n \in W_1^1(K_1)$ by formula

$$(87) \qquad \bar{u}_n(x', x_N) = \sum_{m=1}^{k} \lambda_m(-m)^{i_N} u_n(x', -mx_N), \quad (x', x_N) \in K_1.$$

By direct computation we find that

$$\bar{u}_n \rightharpoonup (D^i\bar{u}, \bar{\alpha}_{i+e_j})_{j=1}^N \quad \text{in} \quad W_\mu^1(\bar{K}_1).$$

From (84) we deduce that $\bar{u} \in W_1^{k-1}(K_1)$ and hence $(\bar{u}, \bar{\alpha}_i) \in W_\mu^k(\bar{K}_1)$. According to (83) $\bar{u}_n(x', 0) = u_n(x', 0)$ is valid on L in the sense of traces. Owing to Theorem 2 the functions $(D^i u, \alpha_{i+e_j})$ and $(D^i\bar{u}, \bar{\alpha}_{i+e_j})$ possess the same trace on L. Thus Theorem 12 enables us to fasten these functions together. Let us set $u^* = u$ on K, $u^* = \bar{u}$ on K_1, $\alpha_i^* = \alpha_i$ on K, $\alpha_i^* = \bar{\alpha}_i$ on K_1, $\alpha_i^* = \alpha_i + \bar{\alpha}_i$ on L, $|i| = K$.

We obtain $u^* \in W_1^{k-1}(K \cup L \cup K_1)$ from (83). Thus we conclude $(u^*, \alpha_i^*) \in W_\mu^k(\overline{K \cup K_1})$. From formula (86) it can be seen easily that $\bar{\alpha}_i = 0$ on L and hence

$\alpha_i^* = 0$ on L, $|i| = K$. The support of the function (u^*, α_i^*) is in $K \cup L \cup K_1$ and thus (u^*, α_i^*) can be extended by zero on any larger domain. It can be seen from the proof that the following estimate is true:

$$\|(u^*, \alpha_i^*)\|_{W_\mu{}^k(\overline{K \cup K_1})} \leqq c\|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu{}^k(\bar{K})} .$$

Now, let us assume $(u, \alpha_i) \in W_\mu^k(\bar{\Omega})$ with $\alpha_i = 0$ on $\partial\Omega$, $|i| = k$. Let the cubes K_r cover $\partial\Omega$ similarly as in Section 2 and let $\gamma_r \in C^{k+1}(\bar{\Omega})$, $r = 0, \ldots, R$ be the corresponding decomposition of the unit. We extend smoothly each function γ_r, $r = 1, \ldots, R$ on E_N so that its support is in K_r and $\gamma_r = C_0^{k+1}(E_N)$. Let us denote $u_r = u \,.\, \gamma_r$ on Ω, $\alpha_{ri} = D^i u_r$ in Ω, $|i| = k$ in the sense of distributions and $\alpha_{ri} = 0$ on $\partial\Omega$. Owing to Theorem 3 and 8 we find easily that $(u_r, \alpha_{ri}) \in W_\mu^k(\bar{\Omega})$. Then we carry out a corresponding linear orthogonal transformation of coordinates, after which there will be $K_r = \{x; 0 < x_i < b\}$ and $\partial\Omega \cap K_r$ will be described by formula $x_N = a(x')$ where a possesses the corresponding smoothness. At last we use the transformation of coordinates

$$A : (x', x_N) \to \left(x', \frac{b}{a(x')}\, x_N\right)$$

A transforms the domain $\Omega \cap K_r$ onto K_r. We extend the function (u_r, α_{ri}) on (u_r^*, α_{ri}^*) as at the beginning of the proof, then we pass to the original coordinates and finally we put together the functions (u_r^*, α_{ri}^*).

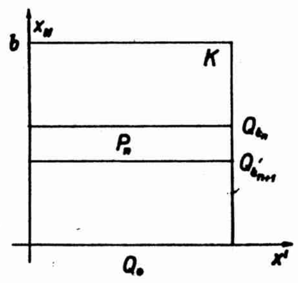

Fig. 3

Lemma 4. *If $u' \in L_1(\partial\Omega)$, then there exists a function $u \in W_1^k(\Omega)$ satisfying*

$$\|u\|_{W_1{}^k(\Omega)} \leqq c\|u'\|_{L_1(\partial\Omega)}$$

and

$$u = \frac{\partial u}{\partial v} = \ldots = \frac{\partial^{k-2} u}{\partial v^{k-2}} = 0\,, \quad \frac{\partial^{k-1} u}{\partial v^{k-1}} = u' \quad \text{on} \quad \partial\Omega\,,$$

where $\partial/\partial v$ is the derivative with respect to the exterior normal on $\partial\Omega$.

Proof. The proof is completely analogous to that of Theorem in [3]. First we prove the theorem in the case of the cube.

For $0 \leqq t \leqq b$ let us denote

$$Q_t = \{(x', t);\ 0 < x_i < b,\ i = 1, \ldots, N-1\}.$$

There exist functions $u'_n \in C_0^\infty(Q_0)$ satisfying

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{Q_0} |u'_{n+1} - u'_n| \, \mathrm{d}x' \leqq c \|u'\|_{L_1(Q_0)} \quad \text{(see [3])}. \tag{88}$$

Suppose that $t_1, t_2, \ldots$ is a decreasing sequence of positive numbers, $t_n \to 0$. Let us denote

$$P_n = \{(x', x_N);\ 0 < x_i < b,\ i = 1, \ldots, N-1,\ t_{n+1} < x_N < t_n\}.$$

Let us define the function $\bar{u}$ in the following way:

$$\bar{u} = u'_n \text{ on } Q_{t_n}, \quad \text{i.e. } \bar{u}(x', t_n) = u'_n(x'),$$

$$\bar{u}(x', x_N) = \frac{t_n - x_N}{t_n - t_{n+1}} \bar{u}(x', t_n) + \frac{x_N - t_{n+1}}{t_n - t_{n+1}} \bar{u}(x', t_{n+1}) \quad \text{for } (x', x_N) \in P_n \tag{89}$$

and $\bar{u}(x', x_N) = 0$ for $x_N \geqq t_1$.

Let us estimate $\partial\bar{u}/\partial x_N$ in $L_1(K)$. For $(x', x_N) \in P_n$ we obtain

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_N}(x', x_N) = \frac{u'_{n+1}(x') - u'_n(x')}{t_n - t_{n+1}}$$

and hence

$$\int_{P_n} \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_N}\right| \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}x_N = \int_{Q_0} \mathrm{d}x' \int_{t_{n+1}}^{t_n} \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_N}\right| \mathrm{d}x_N = \int_{Q_0} |u'_{n+1}(x') - u'_n(x')| \, \mathrm{d}x'.$$

With respect to (88) we obtain the estimate

$$\int_K \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_N}\right| \mathrm{d}x_N \leqq c \|u'\|_{L_1(Q_0)}. \tag{90}$$

This estimate is independent of the sequence $t_1, t_2, \ldots$. Now, let us estimate $\int_K |D^i \bar{u}| \, \mathrm{d}x$, $|i| \leqq k$, where D^i is the tangent derivative (i.e. $i_N = 0$). Owing to (89) we obtain

$$|D^i \bar{u}(x', x_N)| \, \mathrm{d}x \leqq |D^i u'_n(x')| + |D^i u'_{n+1}(x')|,$$

for $(x', x_N) \in P_n$. Let us denote

$$a_n = \|D^i u'_n\|_{L_1(Q_0)} + \|D^i u'_{n+1}\|_{L_1(Q_0)}.$$

Then

$$\int_K |D^i\bar{u}|\,\mathrm{d}x \leqq \sum_{n=1}^{\infty}(t_n - t_{n+1})\,a_n \leqq \sum_{n=1}^{\infty} t_{n+1}(a_n + a_{n+1}) + t_1 a_1\,.$$

The sequence $\{t_n\}$ can be chosen so that the following inequality be valid

$$\int_K |D^i\bar{u}|\,\mathrm{d}x = \|u'\|_{L_1(Q_0)} \quad \text{for} \quad |i| \leqq k\,, \quad i_N = 0\,. \tag{91}$$

Let us set

$$\begin{aligned}
u_{k-1} &= \bar{u}\,,\\
u_{k-2}(x', x_N) &= \int_0^{x_N} u_{k-1}(x', \xi)\,\mathrm{d}\xi\,,\\
u_{k-3}(x', x_N) &= \int_0^{x_N} u_{k-2}(x', \xi)\,\mathrm{d}\xi\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u(x', x_N) = u_0(x', x_N) &= \int_0^{x_N} u_1(x', \xi)\,\mathrm{d}\xi\,.
\end{aligned}$$

We shall estimate $\int_K |D^i u|\,\mathrm{d}x$ for $|i| \leqq k$. If $i = (0, \ldots, 0, k)$, then $D^i u = \partial\bar{u}/\partial x_N$ and thus (90) implies the required estimate. If $i = (i_1, \ldots, i_N)$, $i_N \leqq k - 1$ then $D^i u = D^{(i_1, \ldots, i_{N-1}, 0)} u_{i_N}$. Thus, it suffices to estimate the tangent derivative for the functions $u_0, \ldots, u_{k-2}$ in $L_1(K)$. Let D^i denote the tangent derivative. Then, with respect to (91), we obtain

$$\int_K |D^i u_{k-2}|\,\mathrm{d}x \leqq \int_0^b \mathrm{d}x_N \int_{Q_0} \mathrm{d}x' \int_0^{x_N} |D^i\bar{u}(x', \xi)|\,\mathrm{d}\xi \leqq$$

$$\leqq \int_0^b \mathrm{d}x_N \int_K |D^i\bar{u}(x', \xi)|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x' \leqq b\|u'\|_{L_1(Q_0)}\,.$$

Similar estimates for the functions $u_0, \ldots, u_{k-3}$ can be deduced recurrently. Altogether we obtain the estimate

$$\|u\|_{W_1^k(K)} \leqq c\|u'\|_{L_1(Q_0)}\,.$$

We find easily that

$$u = \frac{\partial u}{\partial x_N} = \ldots = \frac{\partial^{k-2} u}{\partial x_N^{k-2}} = 0\,, \quad \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x_N^{k-1}} = \bar{u} = u'$$

in the sense of traces on Q_0.

The assertion follows in the usual way, by means of the decomposition of the unit and by a transformation of the boundary.

Lemma 5. *Let $(u, \alpha_i) \in W_\mu^k(\bar{\Omega})$ be such a function that its side α_ν is absolutely continuous with respect to the measure* dS *on $\partial\Omega$. Then there exists a bounded domain $\Omega^* \supset \bar{\Omega}$ and a function $(u^*, \alpha_i^*) \in W_\mu^k(\bar{\Omega}^*)$ with compact support in Ω^* which satisfies*

$$u^* = u \text{ on } \Omega, \quad \alpha_i^* = \alpha_i \text{ on } \Omega, \quad \alpha_i^* = 2\alpha_i \text{ on } \partial\Omega.$$

Proof. Let us decompose the measure $\alpha_i = \bar{\alpha}_i + \alpha'_i$ as in (79). There exists a function $u' \in L_1(\partial\Omega)$, $u' = \alpha_\nu$ in the sense of the agreement. We choose such Ω^* that it contains the cubes K_r from the decompositions of the unit used in the proofs of Lemmas 3 and 4. Owing to Theorem 15 it holds $\alpha'_{i|\partial\Omega} = \nu_1^{i_1} \dots \nu_N^{i_N} u'$ (see the agreement), $i = (i_1, \dots, i_N)$. According to Lemma 4, there exists a function $u'_1 \in W_1^k(\Omega^* - \bar{\Omega})$ satisfying

(92)

$$u'_1 = \frac{\partial u'_1}{\partial \nu'} = \dots = \frac{\partial^{k-2} u'_1}{\partial \nu'^{k-2}} = 0, \quad \frac{\partial^{k-1} u'_1}{\partial \nu'^{k-1}} = (-1)^{k-1} u' \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \quad \nu' = -\nu$$

and moreover $u'_1 = 0$ on the boundary $\partial\Omega^*$. Let us set

$$u_1 = u'_1 \quad \text{on} \quad \Omega^* - \bar{\Omega}, \qquad u_1 = 0 \quad \text{on} \quad \bar{\Omega}$$
$$\alpha_{1i} = D^i u'_1 \quad \text{on} \quad \Omega^* - \bar{\Omega}, \qquad \alpha_{1i} = \alpha'_i \quad \text{on} \quad \bar{\Omega}, \qquad |i| = k.$$

We prove that $(u_1, \alpha_{1i}) \in W_\mu^k(\bar{\Omega}^*)$. It is easily to find that $u_1 \in W_1^{k-1}(\Omega^*)$. Let us consider $|i| = k - 1$. We prove that the function $(D^i u_1, \alpha_{1,i+e_m})_{m=1}^N$ can be obtained by the fastening together the functions $(D^i u'_1, D^{i+e_m} u'_1) \in W'_\mu(\bar{\Omega}^* - \Omega)$ and $(0, \alpha'_{i+e_m}) \in W_\mu^1(\bar{\Omega})$. Hence it belongs to $W_\mu^1(\bar{\Omega}^*)$. The function $(0, \alpha'_{i+e_m})$ possesses the trace (Theorem 9)

$$\sum_{m=1}^N \nu_m \alpha'_{i+e_m} = \sum_{m=1}^N \nu_m \nu_1^{i_1} \dots \nu_N^{i_N} \nu_m u' = \nu_1^{i_1} \dots \nu_N^{i_N} u'.$$

We can see from (92) that for $|i| = k - 1$

$$D^i u'_1 = \nu_1'^{i_1} \dots \nu_N'^{i_N} (-1)^{k-1} u' = \nu_1^{i_1} \dots \nu_N^{i_N} u',$$

holds on $\partial\Omega$ in the sense of traces. From Theorem 12 we conclude $(D^i u_1, \alpha_{1,i+e_m}) \in W_\mu^1(\bar{\Omega}^*)$ and $(u_1, \alpha_{1i}) \in W_\mu^k(\bar{\Omega}^*)$. According to Lemma 3 there exists a function $(u_2, \alpha_{2i}) \in W_\mu^k(\bar{\Omega}^*)$ such that $u_2 = u$ on Ω, $\alpha_{2i} = \alpha_i$ on $\bar{\Omega}$, $|i| = k$. It suffices to set $(u^*, \alpha_i^*) = 2(u_1, \alpha_{1i}) + (u_2, \alpha_{2i})$.

Now it is possible to prove theorems analogous to Theorem 13 and 14.

Theorem 17. *Let us consider a function $(u, \alpha_i) \in W_\mu^k(\bar{\Omega})$ with the side α_ν absolutely continuous with respect to* dS *on $\partial\Omega$. Suppose that $(u^*, \alpha_i^*) \in W_\mu^k(\bar{\Omega}^*)$ is the function* *from Lemma 5, i.e. $u^* = u$ on Ω, $\alpha_i^* = \alpha_i$ on Ω, $\alpha_i^* = 2\alpha_i$ on $\partial\Omega$. For small $h > 0$ let us set*

$$u_h(x) = \int_{\Omega^*} K^h(x - y)\, u^*(y)\, \mathrm{d}y\,, \quad x \in \Omega\,. \tag{93}$$

Then there holds

$$u_h \rightharpoonup (u, \alpha_i) \quad in \quad W_\mu^k(\bar{\Omega})\,, \qquad \|u_h\|_{W_1^k(\Omega)} \to \|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu^k(\Omega)}\,.$$

Proof. For small $h > 0$ and $|i| = k - 1$ we obtain

$$D^i u_h(x) = \int_{\Omega^*} K^h(x - y)\, D^i u^*(y)\, \mathrm{d}y\,, \quad x \in \Omega\,.$$

Since $(D^i u^*, \alpha^*_{i+e_m}) \in W_\mu^1(\bar{\Omega}^*)$ we deduce

$$D^{i+e_m} u_h(x) = \int_{\bar{\Omega}^*} K^h(x - y)\, \mathrm{d}\alpha^*_{i+e_m}(y)\,, \quad x \in \Omega\,, \quad m = 1, \ldots, N\,,$$

where $|i| = k - 1$.

Thus we obtain

$$D^i u_h(x) = \int_{\bar{\Omega}^*} K^h(x - y)\, \mathrm{d}\alpha_i^*(y)\,, \quad x \in \Omega\,, \tag{94}$$

for $|i| = k$. Evidently

$$u_h \to u \quad \text{in} \quad W_1^{k-1}(\Omega)\,, \qquad \|u_h\|_{W_1^{k-1}(\Omega)} \to \|u\|_{W_1^{k-1}(\Omega)}\,.$$

Following step by step the proof of Theorem 13 we prove $D^i u_h \rightharpoonup \alpha_i$ in $L_\mu(\bar{\Omega})$, $|i| = k$ and

$$\|D^i u_h\|_{L_1(\Omega)} \to \|\alpha_i\|_{L_\mu(\bar{\Omega})}\,, \quad |i| = k\,.$$

Theorem 18. *For each function $(u, \alpha_i) \in W_\mu^k(\bar{\Omega})$ there exists $u_n \in W_1^k(\Omega)$ such that*

$$u_n \rightharpoonup (u, \alpha_i) \quad in \quad W_\mu^k(\bar{\Omega})\,, \qquad \|u_n\|_{W_1^k(\Omega)} \to \|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu^k(\bar{\Omega})}\,.$$

Proof. Let us decompose the function $(u, \alpha_i) = (u, \bar{\alpha}_i) + (0, \alpha_i')$ as in formula (79). As a consequence of Theorem 15 it is $\alpha_{i|\partial\Omega} = \nu^i \alpha_\nu$, where α_ν is the side of the function (u, α_i) as well as the side of the function $(0, \alpha_i')$, $\nu^i = \nu_1^{i_1} \ldots \nu_N^{i_N}$. Similarly as in Lemma 1 let us set

$$u_h'(x) = \int_{\partial\Omega} R^h(x - y)\, \mathrm{d}\alpha_\nu(y)\,.$$

Let us define the measures $\alpha_{hi}' \in L_\mu(\bar{\Omega})$ by the rule $\alpha_{hi}' = \nu^i u_h'$ on $\partial\Omega$, $\alpha_{hi}' = 0$ on Ω.

It is easy to see that $(0, \alpha'_{hi}) \in W^k_\mu(\bar{\Omega})$ and the function $(0, \alpha'_{hi})$ possesses the side u'_h. Because of Lemma 1 and Theorem 15 we obtain

$$\int_{\bar{\Omega}} \varphi \, d\alpha'_{hi} = \int_{\partial\Omega} \varphi v^i u'_h \, dS \to \int_{\partial\Omega} \varphi v^i \, d\alpha_v = \int_{\bar{\Omega}} \varphi \, d\alpha'_i$$

for all $\varphi \in C(\bar{\Omega})$ and hence $(0, \alpha'_{hi}) \rightharpoonup (0, \alpha'_i)$ in $W^k_\mu(\bar{\Omega})$. By the same argument as in the proof of Theorem 14 we deduce

$$\|\alpha'_{hi|\partial\Omega}\|_{L_\mu(\partial\Omega)} \to \|\alpha'_{i|\partial\Omega}\|_{L_\mu(\partial\Omega)}$$

and hence $\|\alpha'_{hi}\|_{L_\mu(\bar{\Omega})} \to \|\alpha'_i\|_{L_\mu(\bar{\Omega})}$. Let us set $(u, \alpha_{hi}) = (u, \bar{\alpha}_i + \alpha'_{hi}) \in W^k_\mu(\bar{\Omega})$. It can be seen easily that

$$\|(u, \alpha_{hi})\|_{W_\mu{}^k} = \|(u, \bar{\alpha}_i)\|_{W_\mu{}^k} + \|(0, \alpha'_{hi})\|_{W_\mu{}^k} \to$$
$$\to \|(u, \bar{\alpha}_i)\|_{W_\mu{}^k} + \|(0, \alpha'_i)\|_{W_\mu{}^k} = \|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu{}^k}.$$

At the same time the side of the function (u, α_{hi}) is absolutely continuous.

The rest of the proof is the same as that of Theorem 14. The duality is defined for $\varphi = \{\varphi_i\}_{|i| \leq k}$, $\varphi_i \in C(\bar{\Omega})$ and for $(u, \alpha_i) \in W^k_\mu(\bar{\Omega})$ by the formula

$$\langle (u, \alpha_i), \varphi \rangle = \sum_{|i| \leq k-1} \int_\Omega D^i u \varphi_i \, dx + \sum_{|i| = k} \int_{\bar{\Omega}} \varphi_i \, d\alpha_i .$$

The same theorem on equivalent norms is valid in the space $W^k_\mu(\bar{\Omega})$ as in the space $W^k_1(\Omega)$.

Theorem 19. *The formula* $\|u\|_{L_1(\Omega)} + \sum_{|i|=k} \|\alpha_i\|_{L_\mu(\Omega)}$ *is an equivalent norm in the space* $W^k_\mu(\bar{\Omega})$.

Proof. Let us suppose that the functions $u_n \in W^k_1$ are those from Theorem 18. $u_n \rightharpoonup (u, \alpha_i)$ in W^k_μ implies

$$\|D^i u\|_{L_1} \leq \lim \|D^i u_n\|_{L_1} \quad \text{for} \quad |i| \leq k - 1 \quad \text{and}$$
$$\|\alpha_i\|_{L_\mu} \leq \lim \|D^i u_n\|_{L_1} \quad \text{for} \quad |i| = k .$$

The convergence $\|u_n\|_{W_1{}^k} \to \|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu{}^k}$ implies

(95) $$\|D^i u_n\|_{L_1} \to \|D^i u\|_{L_1}, \quad |i| \leq k - 1$$
$$\|D^i u_n\|_{L_1} \to \|\alpha_i\|_{L_\mu}, \quad |i| = k .$$

However the expression $\|u\|_{L_1} + \sum_{|i|=k} \|D^i u\|_{L_1}$ is an equivalent norm in the space W^k_1.

Using (95) we conclude

$$\|(u, \alpha_i)\|_{W_\mu{}^k} = \lim \|u_n\|_{W_1{}^k} \leqq c \lim \left[\|u_n\|_{L_1} + \sum_{|i|=k} \|D^i u_n\|_{L_1}\right] =$$
$$= c\left[\|u\|_{L_1} + \sum_{|i|=k} \|\alpha_i\|_{L_\mu}\right].$$

References

[1] *N. Dunford, J. T. Schwartz:* Linear Operatores.

[2] *J. Nečas:* Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Prague 1967.

[3] *E. Gagliardo:* Caratterizzazioni delle trace sulla frontiera relative ad aleune clossi di funzioni in $\acute{n}$-variabili. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova *27* (1957), 284—305.

[4] *K. Yosida:* Functional analysis, Springer 1965.

[5] *Г. Е. Шилов. В, Л. Гуревич:* Интеграл, мера и производная, Москва 1967.

Author's address: Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV v Praze).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

A NOTE ON WEAKLY BOREL MEASURES

ZDENA RIEČANOVÁ, Bratislava

(Received March 16, 1970)

In [1] S. K. BERBERIAN compared several of the commonly used definitions of "regular measure". In Theorem 3 he proved that

if ϱ is a finite measure on the weakly Borel sets of a locally compact Hausdorff space X, the following conditions are equivalent:

(A) ϱ is inner regular,

(B) ϱ is biregular,

(C) ϱ is sesquiregular,

(D) ϱ is outer regular, and there exists a Borel set E such that $\varrho(X - E) = 0$.

In the present paper we show: 1. the assumption of the local compactness of X can be dropped, 2. the conditions (A) and (D) can be replaced by weaker ones, 3. the finiteness of ϱ can be replaced by $(\mathbf{U}, \sigma)$-finiteness.

Let X be an arbitrary nonvoid set of elements. Let $\mathbf{S}$ be the σ-ring of subsets of X, and $\mathbf{C}$ and $\mathbf{U}$ nonempty subfamilies of $\mathbf{S}$. Let μ be a measure defined on $\mathbf{S}$. Measure μ is said to be *inner* $\mathbf{C}$*-regular* on $\mathbf{S}$ if

$$\mu(A) = \sup \{\mu(C) : A \supset C \in \mathbf{C}\} \quad \text{for all sets} \quad A \in \mathbf{S},$$

outer $\mathbf{U}$*-regular* on $\mathbf{S}$ if

$$\mu(A) = \inf \{\mu(U) : A \subset U \in \mathbf{U}\} \quad \text{for all sets} \quad A \in \mathbf{S},$$

and $(\mathbf{C}, \mathbf{U})$*-regular* on $\mathbf{S}$ if it is both inner $\mathbf{C}$-regular and outer $\mathbf{U}$-regular on $\mathbf{S}$.

Troughout the paper X denotes an arbitrary Hausdorff space, $\mathbf{C}$ the family of all compact subsets of X, $\mathbf{D}$ the family of all closed subsets of X and $\mathbf{U}$ denotes the family of all open subsets of X. By $\mathbf{S}(\mathbf{C})$ and $\mathbf{S}(\mathbf{D})$ we denote the σ-rings generated by $\mathbf{C}$ and $\mathbf{D}$ respectively.

A measure μ on $\mathbf{S}(\mathbf{D})$ is said to be $(\mathbf{U}, \sigma)$*-finite* if $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, $U_n \in \mathbf{U}$, $\mu(U_n) < \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Remark 1. If μ is a σ-finite and outer $\mathbf{U}$-regular measure on $\mathbf{S}(\mathbf{D})$ then μ is $(\mathbf{U}, \sigma)$-finite. In fact, if $E \in \mathbf{S}(\mathbf{D})$ and $\mu(E) < \infty$ then there exists a set $U \in \mathbf{U}$ such that $U \supset E$ and $\mu(U) < \infty$.

We compare the following conditions:

(a) $\mu(U) = \sup \{\mu(D) : U \supset D \in \mathbf{D}\}$ for all sets $U \in \mathbf{U}$ and there exists a set $Y \in \mathbf{S}(\mathbf{C})$ such that $\mu(X - Y) = 0$,

(b) $\mu(U) = \sup \{\mu(C) : U \supset C \in \mathbf{C}\}$ for all sets $U \in \mathbf{U}$,

(c) μ is inner $\mathbf{C}$-regular on $\mathbf{S}(\mathbf{D})$,

(d) μ is sesquiregular on $\mathbf{S}(\mathbf{D})$ (i.e. μ is outer $\mathbf{U}$-regular on $\mathbf{S}(\mathbf{D})$ and satisfies the condition (b)),

(e) μ is $(\mathbf{C}, \mathbf{U})$-regular on $\mathbf{S}(\mathbf{D})$,

(f) μ is $(\mathbf{D}, \mathbf{U})$-regular on $\mathbf{S}(\mathbf{D})$ and there exists a set $Y \in \mathbf{S}(\mathbf{C})$ such that $\mu(X - Y) = 0$,

(g) μ is outer $\mathbf{U}$-regular on $\mathbf{S}(\mathbf{D})$ and there exists a set $Y \in \mathbf{S}(\mathbf{C})$ such that $\mu(X - Y) = 0$,

(h) $\mu(D) = \inf \{\mu(U) : D \subset U \in \mathbf{U}\}$ for all sets $D \in \mathbf{D}$ and there exists a set $Y \in \mathbf{S}(\mathbf{C})$ such that $\mu(X - Y) = 0$.

Theorem 1. *If X is an arbitrary Hausdorff topological space and μ is a $(\mathbf{U}, \sigma)$-finite measure on $\mathbf{S}(\mathbf{D})$, the conditions* (a)–(f) *are equivalent.*

Proof. (a) $\Rightarrow$ (f): Let $E \in \mathbf{S}(\mathbf{D})$ such that $E \subset U_0 \in \mathbf{U}$, $\mu(U_0) < \infty$. The formula $\mu^0(A) = \mu(A \cap U_0)$ defines a finite measure on $\mathbf{S}(\mathbf{D})$. If $U \in \mathbf{U}$ then

$$\mu^0(U) = \mu(U \cap U_0) = \sup \{\mu(D) : U \cap U_0 \supset D \in \mathbf{D}\} =$$
$$= \sup \{\mu^0(D) : U \cap U_0 \supset D \in \mathbf{D}\} \leqq \sup \{\mu^0(D) : U \supset D \in \mathbf{D}\} \leqq \mu^0(U).$$

By ([2], Theorem 8, p. 43, or example 3, p. 45) μ^0 is $(\mathbf{D}, \mathbf{U})$-regular on $\mathbf{S}(\mathbf{D})$. Hence

$$\mu(E) = \mu^0(E) = \sup \{\mu^0(D) : E \supset D \in \mathbf{D}\} = \sup \{\mu(D) : E \supset D \in \mathbf{D}\}$$

and

$$\mu(E) = \mu^0(E) = \inf \{\mu^0(U) : E \subset U \in \mathbf{U}\} = \inf \{\mu(U \cap U_0) : E \subset U \in \mathbf{U}\} \geqq$$
$$\geqq \inf \{\mu(U) : E \subset U \in \mathbf{U}\} \geqq \mu(E).$$

Let A be an arbitrary set of $\mathbf{S}(\mathbf{D})$. From the $(\mathbf{U}, \sigma)$-finiteness of μ it follows that $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap U_n)$, where $U_n \in \mathbf{U}$, $U_n \subset U_{n+1}$ and $\mu(U_n) < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$ According to what was said above, $A \cap U_n$ and hence also A (see the proof of Theorem 3, [5], p. 220) are $(\mathbf{D}, \mathbf{U})$-regular sets according to μ. Hence μ is $(\mathbf{D}, \mathbf{U})$-regular on $\mathbf{S}(\mathbf{D})$.

(f) $\Rightarrow$ (e): Let $E_0 \in \mathbf{S}(\mathbf{C})$ such that $E_0 \subset C \in \mathbf{C}$. Then

$$\mu(E_0) = \sup \{\mu(D) : E_0 \supset D \in \mathbf{D}\} = \sup \{\mu(C) : E_0 \supset C \in \mathbf{C}\},$$

since $D \in \mathbf{D}$, $D \subset E_0$ implies $D \in \mathbf{C}$.

Let $E \in \mathbf{S}(\mathbf{C})$ be an arbitrary set. Then $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, where $E_n \in \mathbf{S}(\mathbf{C})$, $E_n \subset E_{n+1}$, $E_n \subset C_n \in \mathbf{C}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Hence μ is inner $\mathbf{C}$-regular on $\mathbf{S}(\mathbf{C})$. By ([3], Theorem 1, p. 135) μ is $(\mathbf{C}, \mathbf{U})$-regular on $\mathbf{S}(\mathbf{D})$.

It is trivial that (e) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (b) and (e) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (b).

(b) $\Rightarrow$ (a): Since $\mathbf{C} \subset \mathbf{D}$, it is

$$\mu(U) = \sup \{\mu(D) : U \supset D \in \mathbf{D}\} \quad \text{for all} \quad U \in \mathbf{U}\,.$$

From the $(\mathbf{U}, \sigma)$-finiteness of μ it follows that $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, $U_n \in \mathbf{U}$, $\mu(U_n) < \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$. By ([3], Lemma 1, p. 136) there exist sets $Y_n \in \mathbf{S}(\mathbf{C})$ such that $\mu(U_n - Y_n) = 0$. Let $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$. Then $Y \in \mathbf{S}(\mathbf{C})$ and $\mu(X - Y) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n - Y_n) = 0$.

Theorem 2. *If X is a locally compact Hausdorff space and μ is a $(\mathbf{U}, \sigma)$-finite measure on $\mathbf{S}(\mathbf{D})$, the conditions* (a)–(h) *are equivalent.*

Proof. It is trivial that (f) $\Rightarrow$ (g) $\Rightarrow$ (h).

(h) $\Rightarrow$ (e): From the $(\mathbf{U}, \sigma)$-finiteness of μ it follows that $\mu(C) < \infty$ for all $C \in \mathbf{C}$. If $C \in \mathbf{C}$ and $C \subset U \in \mathbf{U}$, there exists an open Baire set O such that $C \subset O \subset U$. Hence

$$\mu(C) = \inf \{\mu(U) : C \subset U,\ U \text{ open Baire set}\}\,.$$

This proves the $(\mathbf{C}, \mathbf{U})$-regularity of μ on $\mathbf{S}(\mathbf{C})$. By ([3], Theorem 1 p. 135) μ is $(\mathbf{C}, \mathbf{U})$-regular on $\mathbf{S}(\mathbf{D})$.

The other implications follow from Theorem 1.

Theorem 3. *If X is an arbitrary Hausdorff topological space and μ is a finite measure on $\mathbf{S}(\mathbf{D})$, the conditions* (a)–(h) *are equivalent.*

Proof. It is trivial that (f) $\Rightarrow$ (g) $\Rightarrow$ (h).

(h) $\Rightarrow$ (f): By ([2], Theorem 8, p. 43, or example 3 p. 45). The other implications follow from Theorem 1.

References

[1] *S. K. Berberian:* Sesquiregular measures, Amer. Math. Monthly *74* (1967), 986—990.

[2] *З. Риечанова:* О регулярности меры. Mat. časop. *17* (1967), 38—47.

[3] *Z. Riečanová:* On regularity of a measure on a σ-algebra, Mat. časop. *19* (1969), 135—137.

[4] *S. K. Berberian:* Measure and integration, Macmillan, New York, 1965.

[5] *П. Р. Халмош:* Теория меры. Москва 1953.

Author's address: Bratislava, Gottwaldovo nám. 2 (SVŠT).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

ON DECOMPOSITIONS OF GROUPOIDS

MARSHALL SAADE, Athens

(Received April 8, 1970)

1. Introduction. In this paper some decomposition theorems for groupoids satisfying certain identities are given. These theorems were motivated by studying examples of groupoids called point algebras and by extracting identities satisfied by them to be used in a more general setting.

We now define *point algebra*. Let S be a non-empty set, n an integer $\geqq 2$ and $j(1), j(2), \ldots, j(n)$ a sequence of (not-necessarily distinct) integers where $1 \leqq j(i) \leqq n$, $i = 1, \ldots, n$. A binary operation, $(.)$, is defined on $S^n(=S \times S \times \ldots \times S)$ as follows: $(x_1, \ldots, x_n) . (y_1, \ldots, y_n) = (1_{j(1)}, \ldots, n_{j(n)})$ for all $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)$ in S^n, where each $i_{j(i)}$ is a fixed element either equal to $x_{j(i)}$ or $y_{j(i)}$. The groupoid $(S^n, .)$ is called a *point algebra*. Except for Theorem 2.2, point algebras in this paper will be of the form $(S^3, .)$.

2. On the identity $x^2y^2 = xy$. The first theorem proved here enlarges a class of groupoids characterized as unions of disjoint constant semigroups by EVANS in [1, p. 368]. However, Evans' result provides more information regarding the relationships among the semigroups than does the theorem in this paper. Specifically, Evans proves the following theorem.

Theorem. *A groupoid satisfies the identities $xy . z = xz$, $x . yz = xy$ if and only if it is the union of disjoint constant semigroups C_α where all products xy, with $x \in C_\alpha$, $y \in C_\beta$ are equal and belong to C_α.*

First we prove that the class of groupoids satisfying the identity $x^2y^2 = xy$ properly contains the class satisfying the two identities given in the theorem above. For suppose a groupoid satisfies the identities $xy . z = xz$ and $x . yz = xy$. Then $x^2y^2 = xy^2 = xy$. Now let S be any set such that $|S| > 1$ and consider the following multiplication on S^3. If $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in S^3$ then $(x_1, x_2, x_3) . (y_1, y_2, y_3) = (x_3, x_2, y_3)$. It is easily shown that the point algebra $(S^3, .)$ satisfies the identity

$x^2y^2 = xy$ but, in fact, satisfies neither of the identities, $xy \,.\, z = xz$ or $x \,.\, yz = xy$. The following characterization is now given.

Theorem 2.1. *A groupoid G satisfies the identity $x^2y^2 = xy$ if and only if $G = \bigcup_i G_i$, where the G_i are disjoint constant semigroups such that if $x, w \in G_i$, $y, z \in G_j$ then $xy = wz$.*

Proof. The "if" part is obvious. To prove the "only if" part suppose G satisfies the identity $x^2y^2 = xy$. Define the relation ϱ on G by $x\varrho y$ if and only if $x^2 = y^2$. Thus ϱ is clearly an equivalence relation and indeed a congruence relation. For suppose $x\varrho y$ and $w\varrho z$. Then $x^2 = y^2$ and $w^2 = z^2$. Hence $x^2w^2 = y^2z^2$ and $xw = yz$. Let G_u be the equivalence class containing u and let $x, y \in G_u$. Then $x^2 = y^2$. Thus $xy = x^2y^2 = x^2x^2 = x^2$ and so $(xy)^2 = (x^2)^2 = x^2$. Therefore $xy\varrho x$. Hence G_u is a subgroupoid of G. The fact that G_u is a constant semigroup follows from an equation above, which states that $xw = yz$, if $x, y \in G_i$ and $w, z \in G_j$, if $i = j$.

The point algebra G which motivated Theorem 2.1 was the one mentioned previously, namely the one given by the operation $(x_1, x_2, x_3) \,.\, (y_1, y_2, y_3) = (x_3, x_2, y_3)$. G is nonassociative and the ϱ-equivalence classes, described in the proof above, for this example are the sets, $G_{ab} = \{(x, a, b) \mid x, a, b \in S,\ a, b, \text{ fixed}\}$.

It is false in general that if a groupoid G is a union of disjoint constant semigroups that G satisfies the identity $x^2y^2 = xy$. As an example, we note in the groupoid given by the table:

.	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	b
c	a	a	c

that $b^2c^2 \neq bc$. However the following result holds.

Theorem 2.2. *Let $G = (S^n, .)$ be a point algebra such that $G = \bigcup_i G_i$, where the G_i are disjoint constant semigroups. Then G satisfies the identity $x^2y^2 = xy$.*

Proof. As $G = (S^n, .)$ is a point algebra, the binary operation $(.)$ is defined by:

$$(1) \qquad (x_1, \ldots, x_n) \,.\, (y_1, \ldots, y_n) = (1_{j(1)}, \ldots, n_{j(n)})\,.$$

We prove that G satisfies the identities $x^2z = xz$ and $zx^2 = zx$. These together imply $x^2y^2 = xy$. Let $x, z \in G$ where $x = (a_1, \ldots, a_n) \in G_r$ and $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Let $k = (k_1, \ldots, k_n) \in G_r$ such that for all $s, t \in G_r$, $st = k$. In particular,

$$(2) \qquad x^2 = (a_1, \ldots, a_n)(a_1, \ldots, a_n) = (k_1, \ldots, k_n) = (k_1, \ldots, k_n)(k_1, \ldots, k_n)\,.$$

We now show that $x^2z = xz$, that is, that

$$(k_1, \ldots, k_n)(z_1, \ldots, z_n) = (a_1, \ldots, a_n)(z_1, \ldots, z_n). \tag{3}$$

We denote the left side of (3) by $(c_1, \ldots, c_n)$ and the right side by $(d_1, \ldots, d_n)$. Thus we show that $c_u = d_u$, $u = 1, \ldots, n$. Clearly, from (1), for each i such that $i_{j(i)} = y_{j(i)}$, $c_i = z_{j(i)} = d_i$. Now suppose for some i, $i_{j(i)} = x_{j(i)}$ in (1). Then from (3) $c_i = k_{j(i)}$ and $d_i = a_{j(i)}$. From (2), considering the product $(k_1, \ldots, k_n)(k_1, \ldots, k_n) = (k_1, \ldots, k_n)$, we have $k_i = k_{j(i)}$. However, from the product $(a_1, \ldots, a_n)(a_1, \ldots, a_n) = (k_1, \ldots, k_n)$ in (2), $k_i = a_{j(i)}$. Hence $a_{j(i)} = k_{j(i)}$, i.e., $c_i = d_i$. Thus $x^2z = xz$. Similarly, $zx^2 = zx$ and hence for $x, y \in G$, $x^2y^2 = xy$.

3. On the medial law, $xy \,.\, wz = xw \,.\, yz$. A medial (entropic) groupoid is one which satisfies the identity $xy \,.\, wz = xw \,.\, yz$. In the following theorems we prove that groupoids satisfying certain identities are unions of disjoint medial subsemigroups. We actually prove slightly stronger results which imply mediality. The following lemmas will be useful.

Lemma 3.1. *Let G be a groupoid such that $G = \bigcup_i G_i$, where the G_i are disjoint subgroupoids such that for all $t \in G$ and all i, if $x, y \in G_i$ then $tx = ty$. Then if $x \in G$, $v, w, y, z \in G_i$, then $xy \,.\, z = xw \,.\, v$. Furthermore, each G_i satisfies the medial law.*

Proof. $xy \,.\, z = xw \,.\, z = xw \,.\, v$. The fact that each G_i satisfies the medial law is immediate.

Lemma 3.2. *Let G be a groupoid such that $G = \bigcup_i G_i$, where the G_i are disjoint subgroupoids such that for all $t \in G$ and all i, if $x, y \in G_i$, then $xt = yt$. Then if $z \in G$, $x, w, u, y \in G_i$, then $x \,.\, yz = w \,.\, uz$. Furthermore, each G_i satisfies the medial law.*

Proof. $x \,.\, yz = w \,.\, yz = w \,.\, uz$. The fact that each G_i satisfies the medial law is immediate.

Theorem 3.1. *If a groupoid G satisfies the identities $x \,.\, yz = xz$ and $x^2y = xy$ then $G = \bigcup_i G_i$, where the G_i are disjoint subsemigroups of G such that if $x \in G_i$, $w, y \in G_j$ then $xw = xy \in G_j$. Furthermore, if $x \in G$ and $v, w, y, z \in G_i$ then $xy \,.\, z = xw \,.\, v$ and G_i is medial.*

Proof. Define the relation ϱ on G as follows: $x\varrho y$ if and only if $tx = ty$ for all $t \in G$. It is clear that ϱ is an equivalence relation and indeed a congruence relation. For if $x\varrho y$ and $w\varrho z$ then $t \,.\, xw = tw = tz = t \,.\, yz$. Thus $xw\varrho yz$. If $x\varrho y$ then $t \,.\, xy = ty$ and hence $xy\varrho y$. Thus each equivalence class G_i is a subgroupoid of G. If

$x, y, z \in G_i$, i.e., $x \varrho y \varrho z$, then $xy \,.\, z = x^2 z = xz = x \,.\, yz$. Hence each G_i is a subsemigroup of G. If $x \in G_i$, w, $y \in G_j$ then $xw = xy \varrho y$, i.e., $xy \in G_j$. The remainder of the theorem follows from Lemma 3.1.

A point algebra which motivated the above theorem is the following. Let $|S| > 1$ and define the following binary operation on S^3. For $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in S^3$, $(x_1, x_2, x_3) \,.\, (y_1, y_2, y_3) = (x_1, y_2, x_2)$. Then $G = (S^3, .)$ is non-associative and satisfies $x \,.\, yz = xz$ and $x^2 y = xy$. The ϱ-equivalence classes are the $G_a = \{(x, a, y) \mid a, x, y \in S, a, \text{fixed}\}$.

Theorem 3.2. *If a groupoid G satisfies the identities $xy \,.\, z = xz$ and $xy^2 = xy$ then $G = \bigcup_i G_i$, where the G_i are disjoint subsemigroups of G such that if $x, y \in G_i$, $z \in G_j$ then $xz = yz \in G_i$. Furthermore if $z \in G$ and $x, u, w, y \in G_i$ then $x \,.\, yz = w \,.\, uz$ and G_i is medial.*

Proof. By defining a relation ϱ on G by $x \varrho y$ if and only if $xt = yt$, for all $t \in G$, one can show that ϱ is a congruence relation on G and in a proof similar to that of Theorem 3.1 and by applying Lemma 3.2 the proof of this theorem will follow.

A motivating example for the above theorem is the point algebra defined as follows. Let $|S| > 1$ and define on S^3 the product $(x_1, x_2, x_3) \,.\, (y_1, y_2, y_3) = (x_1, y_1, y_3)$ Then $G = (S^3, .)$ is non-associative and satisfies $xy \,.\, z = xz$ and $xy^2 = xy$. The ϱ-equivalence classes defined in the proof above are the $G_a = \{(a, x, y) \mid a, x, y \in S, a, \text{fixed}\}$.

Theorem 3.3. *If a groupoid G satisfies the identities $x \,.\, yz = xy$ and $x^2 y = xy$ then $G = \bigcup_i G_i$, where the G_i are disjoint subsemigroups of G such that if $x \in G_i$, $y, z \in G_j$ then $xy = xz \in G_i$. Furthermore, if $x \in G$ and $v, w, y, z \in G_i$ then $xy \,.\, z = xw \,.\, v$ and G_i is medial.*

Proof. Define a relation ϱ on G by $x \varrho y$ if and only if $tx = ty$, for all $t \in G$, and proceed with a proof similar to that of Theorem 3.1.

A motivating example for Theorem 3.3 is the following. Let $|S| > 1$ and define the product $(x_1, x_2, x_3) \,.\, (y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, y_1)$ on S^3. Then $G = (S^3, .)$ is non-associative and satisfies $x \,.\, yz = xy$ and $x^2 y = xy$. The ϱ-equivalence classes from the proof of Theorem 3.3 are the $G_a = \{(a, x, y) \mid a, x, y \in S, a, \text{fixed}\}$.

Theorem 3.4. *If a groupoid G satisfies the identities $xy \,.\, z = yz$ and $xy^2 = xy$ then $G = \bigcup_i G_i$, where the G_i are disjoint subsemigroups of G such that if $x, w \in G_i$, $y \in G_j$ then $xy = wy \in G_j$. Furthermore if $z \in G$ and $x, u, w, y \in G_i$ then $x \,.\, yz = w \,.\, uz$ and G_i is medial.*

Proof. Define a relation ϱ on G by $x \varrho y$ if and only if $xt = yt$, for all $t \in G$, and proceed with a proof similar to that of Theorem 3.2.

A motivating example for Theorem 3.4 is the following point algebra. Let $|S| > 1$ and define the product $(x_1, x_2, x_3) . (y_1, y_2, y_3) = (x_2, y_2, y_3)$ on S^3. Then $G = (S^3, .)$ is non-associative and satisfies $xy . z = yz$ and $xy^2 = xy$. The ϱ-equivalence classes defined in the proof above are the $G_a = \{(x, a, y) \mid a, x, y \in S, a, \text{fixed}\}$.

References

[1] *T. Evans,* Products of points-some simple algebras and their identities, Amer. Math. Monthly, *74* (1967), 362—372.

[2] *M. Saade,* On decompositions of groupoids, preliminary report, Notices Amer. Math. Soc., *17* (1970), 91—92.

Author's address: University of Georgia, Athens, Georgia 30601, U.S.A.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

PARALLELE AXONOMETRIE UND EINSCHNEIDEVERFAHREN

LADISLAV DRS, Praha

(Eingelangt am 15. April 1970)

EINFÜHRUNG

Im Jahre 1937 hat L. ECKHART eine der elegantesten Methoden der darstellenden Geometrie, *das Einschneideverfahren*, eingeführt [1]. Die Modifikation des Einschneideprinzips an die parallele Axonometrie findet seitdem in jedem Buch über die darstellende Geometrie Platz. Eine parallele Axonometrie G' eines Gebildes G kann man entweder als eine parallele Projektion von G erhalten, oder durch ein Einschneideverfahren aus zwei affinen Bildern G_1, G_2 von G. Hier wollen wir an die Zusammenhänge zwischen einem orthonormierten Dreibein G und seinen Einschneiderissen G_1, G_2 hinweisen, welche dieselbe Axonometrie sowie durch das Projizieren von G als auch durch das Einschneiden von G_1 und G_2 bestimmen.

1

In einer Ebene π seinen zwei affine Bilder $\mathsf{G}_1(A_1, \ldots)$, $\mathsf{G}_2(A_2, \ldots)$ eines Dinggebildes $\mathsf{G}(A, \ldots)$, das die Punkte $A, \ldots$ enthält, und weiter zwei verschiedene Richtungen s_1, s_2 gegeben. Wenn wir die Punkte $A', \ldots$ aus den Paaren A_1, $A_2, \ldots$ durch das Einschneideverfahren bestimmen (als Schnittpunkte der Geraden $a_1, a_2; \ldots,$ $A_1 \in a_1 \parallel s_1$, $A_2 \in a_2 \parallel s_2; \ldots$), so ist das Bildgebilde $\mathsf{G}'(A', \ldots)$ wieder ein affines Bild von $\mathsf{G}(A, \ldots)$. Dieser Grundsatz aus [1] kann für die Konstruktion der parallelen Axonometrie aus zwei Normalrissen benutzt werden (Abb. 1): In der Bildebene π seien zwei Risse $(O_1X_1Y_1Z_1)$ und $(O_2X_2Y_2Z_2)$ des orthonormierten Dreibeins $(OXYZ)$ in der Richtung $z = OZ$ und $y = OY$ gegeben, in beliebiger Lage und in dem gleichen Massstab, so dass $\overline{O_1X_1} = \overline{O_1Y_1} = \overline{O_2Z_2} = \overline{O_2X_2} = R$, $O_1X_1 \perp O_1Y_1$, $O_2X_2 \perp O_2Z_2$ ist. Weiter seien zwei verschiedene Richtungen s_1, s_2, $O_1 \in s_1 \nparallel y_1$, $O_2 \in s_2 \nparallel z_2$, für welche zugleich nicht $s_1 = x_1 = O_1X_1$, $s_2 = x_2 = O_2X_2$ gilt, gegeben. Die durch das Einschneideverfahren bestimmten Punkte O', X', Y', Z' bilden das axonometrische Achsenkreuz mit den Achsen $x' = O'X'$, $y' = O'Y'$, $z' = O'Z'$ und mit den Einheitspunkten X', Y', Z'. Wenn zugleich ein Gebilde $\mathsf{G}(A, \ldots)$ in die Einschneiderisse $\mathsf{G}_1(A_1, \ldots)$, $\mathsf{G}_2(A_2, \ldots)$ abgebildet ist, dann bestimmt das Einschneideverfahren aus G_1, G_2 seine Axonometrie, mit anderen Worten eine parallele Projektion von einem Gebilde

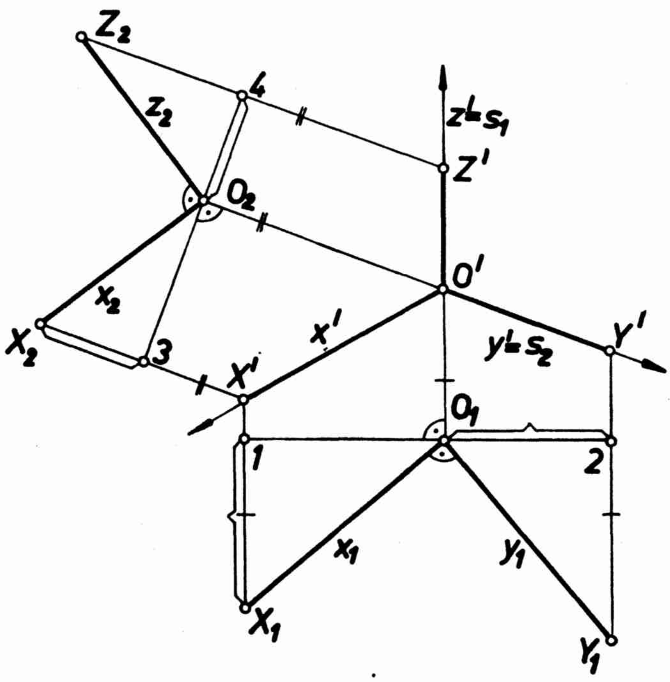

Abb. 1

$\bar{\mathsf{G}}(\bar{A}, \ldots)$, das dem Gebilde $\mathsf{G}(A, \ldots)$ ähnlich ist. Dieses spezielle Einschneideverfahren bezeichnen wir kurz als *das s-Verfahren.*

Wenn wir die Einschneiderichtungen s_1, s_2 in gleichem Sinne wie die Achsen z', y' orientieren und $I = \sphericalangle y_1 s_1 = \sphericalangle y_1 z'$, $II = \sphericalangle s_2 z_2 = \sphericalangle y' z_2$, $\alpha = \sphericalangle y' z' = \sphericalangle s_1 s_2$ bezeichnen, so gilt entweder $0° < \alpha, I, II < 180°$ oder $180° < \alpha, I, II < 360°$. Weiter kann nicht zugleich $\cos I = \cos II = 0$ sein. Durch R, α, I, II ist das s-Verfahren bestimmt und wir können die axonometrischen Einheiten $a = O'X'$, $b = O'Y'$, $c = O'Z'$ und die Winkel $\beta = \sphericalangle z'x'$, $\gamma = \sphericalangle x'y'$ als Funktionen von R, I, II, α ausdrücken:

(1) $$b = R \sin I : \sin \alpha\,, \quad c = R \sin II : \sin \alpha\,,$$

$$a = \pm Ro : \sin \alpha\,, \quad o = \sqrt{(\cos^2 I + \cos^2 II + 2 \cos I \cos II \cos \alpha)}$$

(2) $$\sin \beta = \pm \sin \alpha \cos I : o\,, \quad \sin \gamma = \pm \sin \alpha \cos II : o\,,$$

mit dem oberen (unteren) Vorzeichen für $\alpha, I, II > 180°$ $(< 180°)$. Die Grösse o ist die dritte Seite des „*charakteristischen Dreieckes*", dessen zwei andere Seiten die Länge $\cos I$, $\cos II$ haben und den Winkel $\bar{\alpha} = 180° - \alpha$ einschliessen.

Nach dem *Pohlke'schen Satz* ist die Existenz einer Richtung s und eines orthonormierten Dreibeins $(OXYZ)$ so gesichert, dass seine Projektion in der Richtung s in π mit $(O'X'Y'Z')$ übereinstimmt. Für diese „*Rekonstruktion aus der Axonometrie*" ist der konstruktive Weg üblich. *Die analytische Rekonstruktion* kommt nur ausnahmsweise vor [4]. Die erste analytische Rekonstruktion (mit einem Fehler, den E. WENDLING [5] verbessert hat) stammt von H. KINKELIN [2] ab. Durch die Gleichungen

$$r^2 = \tfrac{1}{2}(A - \sqrt{(A^2 - 4B^2)})\,, \tag{3}$$

$$\cos\varphi = r^2 \,.\, B^{-1}\,, \tag{4}$$

$$\cos\sigma_1 = bc \sin\alpha \,.\, B^{-1}\,, \tag{5}$$

$$\cos\nu_1 = \cos\varphi\,(r\cos\sigma_1 - \sqrt{(a^2 - r^2\sin^2\sigma_1)})\,.\, r^{-1}\,, \tag{6}$$

in welchen $\varphi = \sphericalangle ns$, $(n \perp \pi)$, $\sigma_1 = \sphericalangle sx$, $\nu_1 = \sphericalangle nx$ bedeutet und $A = a^2 + b^2 + c^2$, $B^2 = (ab\sin\gamma)^2 + (ac\sin\beta)^2 + (bc\sin\alpha)^2$ gesetzt ist, ist die Einheit $r = \overline{OX}$, die Richtung s und die Achse $x = OX$ des Dreibeins $(OXYZ)$ mit $O = O'$ bestimmt. Zu (5) und (6) ganz analoge Gleichungen für $\sigma_2 = \sphericalangle sy$, $\sigma_3 = \sphericalangle sz$, $\nu_2 = \sphericalangle ny$, $\nu_3 = \sphericalangle nz$ bestimmen die weiteren Achsen y, z ([5], 77, 78).

Durch das Einsetzen von (1) und (2) in diese Gleichungen ist nun auch die analytische Rekonstruktion direkt aus dem Einschneideverfahren möglich.

So erhalten wir, wenn wir noch zur Abkürzung $\cos I \cos II = \cos\psi$ setzen:

$$r^2 = R^2(1 \mp \cos\psi)\,.\,(1 \pm \cos\alpha)^{-1}\,, \tag{7}$$

$$\cos\varphi = (1 \mp \cos\psi)\,(1 \mp \cos\alpha)\,.\,((1 \pm \cos\psi)\,(1 \pm \cos\alpha))^{-1/2}\,, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\cos\sigma_1 &= \sin I \sin II : \sin\psi\,,\\ \cos\sigma_2 &= -\cos I \sin II : \sin\psi\,,\\ \cos\sigma_3 &= \mp\sin I \cos II : \sin\psi\,,\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\cos\nu_1 &= [\sin I \sin II \,.\, \sqrt{(1 \mp \cos\alpha)} - (\cos I \pm \cos II)\,.\\ &\quad .\, \sqrt{(\pm(\cos\alpha + \cos\psi))}] : (1 \pm \cos\psi)\,.\,\sqrt{(1 \pm \cos\alpha)}\,,\\ \cos\nu_2 &= [-\cos I \sin II \,.\, \sqrt{(1 \mp \cos\alpha)} - \sin I\,.\\ &\quad .\, \sqrt{(\pm(\cos\alpha + \cos\psi))}] : (1 \pm \cos\psi)\,.\,\sqrt{(1 \pm \cos\alpha)}\,,\\ \cos\nu_3 &= [\mp \sin I \cos II \,.\, \sqrt{(1 \mp \cos\alpha)} - \sin II\,.\\ &\quad .\, \sqrt{(\pm(\cos\alpha + \cos\psi))}] : (1 \pm \cos\psi)\,.\,\sqrt{(1 \pm \cos\alpha)}\,.\end{aligned} \tag{10}$$

In diesen und auch in den weiteren Gleichungen gilt das obere (untere) Vorzeichen für $\cos\alpha + \cos\psi \geqq 0$ (< 0).

Aus (7) und (8) folgt: $r < R$, wenn $\cos\alpha + \cos\psi \neq 0$ ist, und $r = R$, wenn $\cos\alpha + \cos\psi = 0$ ist. In dem zweiten Fall ist $\varphi = 0°$. Also:

Die Einheit des s-Verfahrens ist niemals kleiner als die Einheit des rekonstruierten Dreibeins.

Wenn die Winkel α, I, II des s-Verfahrens die Bedingung $\cos\alpha + \cos\psi = 0$ erfüllen, so ist durch dieses Verfahren die orthogonale Axonometrie bestimmt.

Wenn das s-Verfahren eine orthogonale Axonometrie bestimmt, so ist die Einheit des Verfahrens gleich der Einheit der Rekonstruktion.

Weiter bestimmen wir den axonometrischen Umriss $\mathbf{U}$ der Einheitskugel $\varkappa = (O, r)$. Die Exzentrizität e dieser Ellipse ist wegen $e = r \operatorname{tg} \varphi$ durch

$$(11) \qquad e = R \,.\, \sqrt{(\pm 2(\cos\alpha + \cos\psi))} : \sin\alpha$$

bestimmt.

Der Winkel $\omega_1 = \sphericalangle n'x'$ der Hauptachse n' von $\mathbf{U}$ mit der Achse x' ergibt sich aus der Gleichung

$$(12) \qquad \cos\omega_1 = (a^2 + r^2 \,.\, \cos^2 v_1 \,.\, \operatorname{tg}^2\varphi - r^2 \,.\, \sin^2 v_1) : (2a \,.\, r \,.\, \cos v_1 \,.\, \operatorname{tg}\varphi)\,,$$

die wir durch eine einfache trigonometrische Überlegung ableiten können. Analoge Gleichungen gelten für $\omega_2 = \sphericalangle n'y'$ und $\omega_3 = \sphericalangle n'z'$. Wenn wir in (12) aus (1) und (7)–(9) einsetzen und vereinfachen, so erhalten wir

$$(13) \qquad \begin{aligned} \cos\omega_1 &= (\cos I \pm \cos II) \,.\, (1 \pm \cos\alpha)^{1/2} : o\sqrt{2} \\ \cos\omega_2 &= \cos\omega_3 = \sqrt{((1 \pm \cos\alpha) : 2)}\,. \end{aligned}$$

Das heisst: *in der Axonometrie, die aus dem s-Verfahren entsteht, ist die Projektion n' der Normale n zur Projektionsebene π (die Hauptachse von $\mathbf{U}$) die Symmetrale der Achsen y', z'.*

2

Die Theorie aus dem Abs. 1 benutzen wir jetzt zum Konstruieren spezieller Axonometrien.

s-VERFAHREN FÜR NORMALE AXONOMETRIEN

Es sei ein s-Verfahren durch R, α, I, II gegeben (Abb. 2). Wenn wir durch das Einschneiden die Axonometrie A' von $A \in xy$, $O_1A_1 \perp s_1$, $\overline{A_1O_1} = R$, $x^A > 0$ konstruieren, so ist $\overline{A'y'} = |R \cos\psi|$. Für einen Punkt $\bar{A}(\bar{A} \in A_1A'$, $\bar{A}O' \perp s_1)$ ist weiter $\overline{\bar{A}y'} = |R \cos\alpha|$. Wenn $\cos\alpha$, $\cos\psi$ gleiche (ungleiche) Vorzeichen haben, so liegen die Punkte A', $\bar{A}$ an den verschiedenen (gleichen) Seiten von y'. Nur wenn

$\bar{A} = A'$ ist, so ist $\cos\alpha + \cos\psi = 0$ und von so einem Verfahren entsteht dann eine orthogonale Axonometrie. Daraus leiten wir folgende Konstruktionen der s-Verfahren, die eine normale Axonometrie bestimmen, ab:

Wir wählen R, α, I (Abb. 3, $90^\circ < I$, $\alpha < 180^\circ$) und bestimmen den Winkel II.

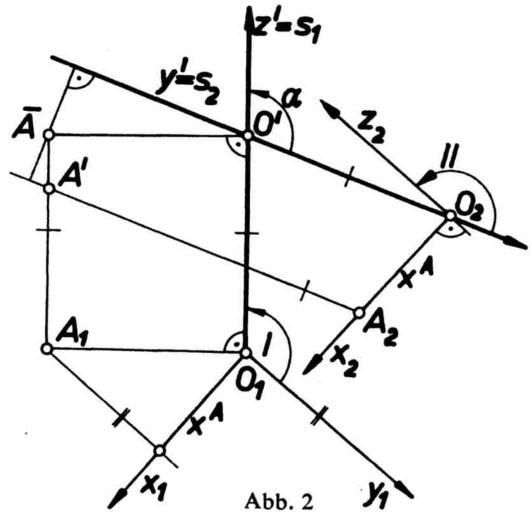

Abb. 2

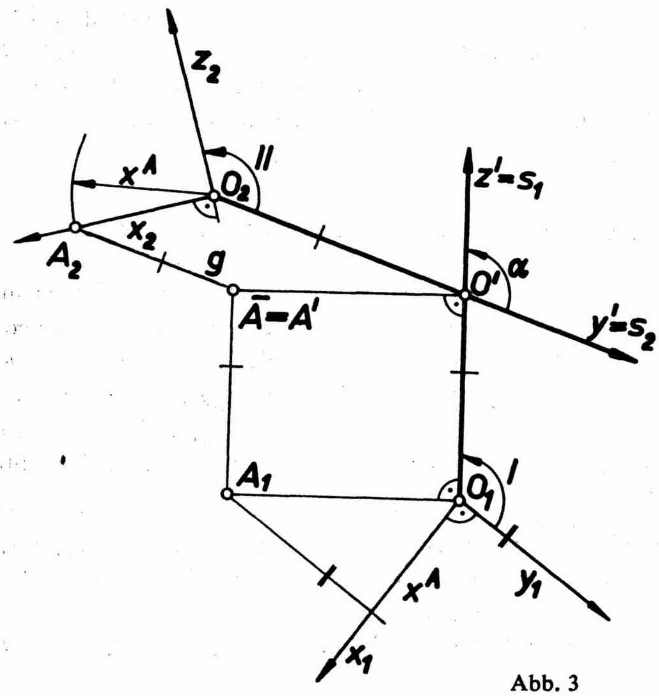

Abb. 3

Es muss also $A' = \bar{A}$ sein und der Punkt A_2 ist darum einer der Schnittpunkte des Kreises (O_2, x^A) mit der Geraden $g(A' \in g \parallel s_2)$. Mann muss hier einen solchen Punkt wählen, wofür $90^\circ < II < 180^\circ$ ist.

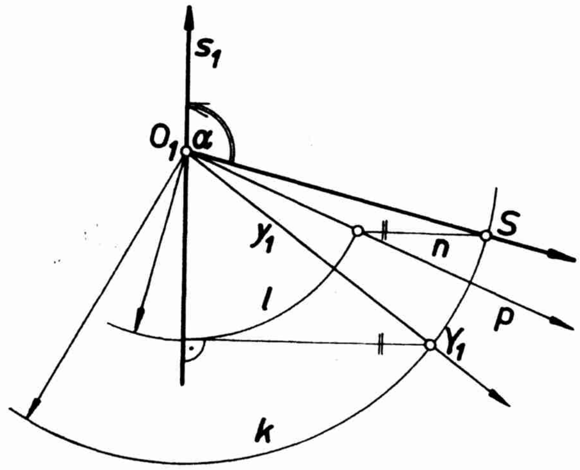

Abb. 4

Wir wählen R, I, II und bestimmen den Winkel α. In der Abb. 4 ist $\sphericalangle y_1 s_1 = I$, $Y_1 \in y_1$, $\overline{O_1 Y_1} = R$, $\sphericalangle p s_1 = II$, $90^\circ < I, II < 180^\circ$. Der Kreis $l(O_1, |R \cos I|)$ schneidet die Gerade p im Punkte einer Normalen n zu s_1. Der Schnittpunkt S von n mit dem Kreis $k(O_1, R)$ bestimmt den Winkel $\sphericalangle O_1 S, s_1 = \alpha$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Durch eine ganz ähnliche Konstruktion erhalten wir den Winkel I resp. II wenn R, II, α resp. R, I, α gegeben sind.

s-VERFAHREN FÜR DIMETRIE UND ISOMETRIE

Ganz trivial ergibt sich eine Dimetrie mit $b = c$ durch das s-Verfahren mit $I = II = \alpha$. Wir wollen eine Dimetrie mit $a = b$ resp. $a = c$ erhalten. Zufolge (1) ist $o = \sin I$ resp. $o = \sin II$. Das charakteristische Dreieck mit den Seiten $R \cos I$, $R \cos II$ die den Winkel $\bar{\alpha} = 180^\circ - \alpha$ einschliessen, hat gegenüber $\bar{\alpha}$ die Seite $Ro = |R \sin I|$ resp. $|R \sin II|$ und dadurch sind die Winkel α, I, II auch konstruktiv verbunden. Wählen wir z. B. R, I, II und suchen den Winkel α. In der Abb. 5 ist $I = \sphericalangle y_1 s_1$, $II = \sphericalangle p s_1$, $R = \overline{O_1 Y_1} = \overline{O_1 P}$, $P \in p$, $Y_1 \in y_1$. Die Normalen $Y_1 1$, $P2$ zu der Geraden s_1 bestimmen die Punkte 1, 2 und die Kreise $(1, \overline{1Y_1})$, $(O_1, \overline{O_1 2})$ schneiden sich im Punkte 3, für welchen $\sphericalangle O_1 3$, $s_1 = \alpha$; $I, II, \alpha < 180^\circ$ ist. Dieses Verfahren bestimmt die Dimetrie mit $a = b$.

Ähnlich können wir den Winkel II resp. I erhalten, wenn wir R, I, α resp. R, II, α wählen.

Für die Isometrie gilt $I = II$, $\cos \alpha = \left(1 - 3 \cos^2 I\right) : 2 \cos^2 I$. Wenn wir z. B. für das s-Verfahren $R, I = II$ wählen und wenn wir die vorangehende Konstruktion spezialisieren, so erhalten wir nach der Abb. 6 den Punkt 3 als den Schnittpunkt des Kreises $\left(1, \overline{1Y_1}\right)$ mit dem Kreis $\left(O_1, \overline{O_1 1}\right)$, $\alpha = \sphericalangle O_1 3, s_1$.

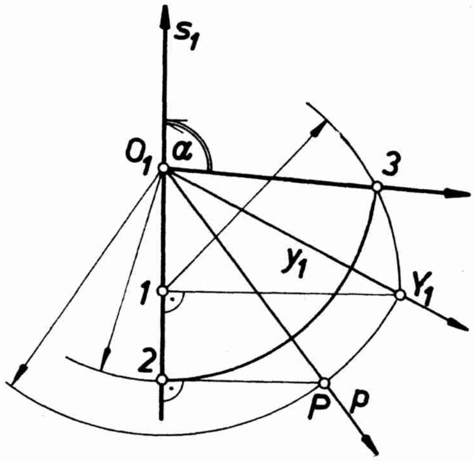

Abb. 5

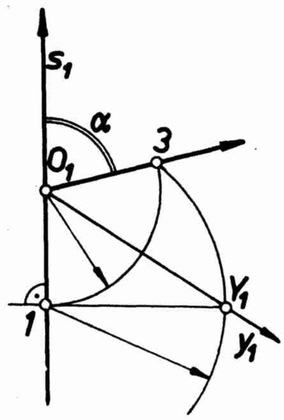

Abb. 6

s-VERFAHREN FÜR NORMALE DIMETRIE UND NORMALE ISOMETRIE

Die Bedingungen $a = b$, $\cos \alpha + \cos \psi = 0$ führen zu der Gleichung

$$\cos^2 I + \cos^2 II - 2 \cos^2 I \cos^2 II = \sin^2 I,$$

welche entweder für $\cos^2 II = 1$ oder für $1 - 2 \cos^2 I = 0$ erfüllt ist. Daraus folgt: *das s-Verfahren realisiert keine normale Dimetrie mit $a = b \neq c$. Das s-Verfahren bestimmt eine normale Isometrie, wenn $I = II = 135°$, $\alpha = 120°$ ist.*

Die Bedingungen $a = c$, $\cos \alpha + \cos \psi = 0$ führen zu der Gleichung

$$\cos^2 I + \cos^2 II - 2 \cos^2 I \cos^2 II = \sin^2 II,$$

welche nur für $\cos II = -\sqrt{(2)} : 2$, $\cos \alpha = \sqrt{(2)} \, . \cos I : 2$ erfüllt ist. Daraus folgt: *das s-Verfahren realisiert eine normale Dimetrie mit $a = c$ nur dann, wenn der Winkel II dieses Verfahrens 135° ist.*

Die Konstruktion des Winkels α nach der Abb. 7. Gegeben ist $I = \sphericalangle y_1 s_1$ und $R = \overline{O_1 Y_1}$, $Y_1 \in y_1$. Wir ziehen die Gerade g, $O_1 \in \sphericalangle g$, $y_1 g = 45°$, und machen $G1 \perp y_1$ $\left(G \in g, \overline{O_1 G} = R, 1 \in y_1\right)$, $12 \perp s_1\left(\overline{O_1 2} = R\right)$; so erhalten wir den Winkel $\alpha = \sphericalangle O_1 2, s_1$ und die Achse $y' = O_1 2$. Dadurch ist das s-Verfahren bestimmt: $O_1 = O_2 = O'$, $\sphericalangle y' z_2 = 135°$, $\overline{O_2 Z_2} = R$, $O_2 X_2 \perp O_2 Z_2$, $\overline{O_2 X_2} = \overline{O_1 X_1} = R$. Es liefert die Dimetrie mit $\overline{O'X'} = \overline{O'Z'}$, $a = c$. Als einen Spezialfall für $a = b = c$ erhalten wir *das s-Verfahren für die Isometrie*, welches wieder *durch* $I = II = 135°$, $\alpha = 120°$ *charakterisiert ist.*

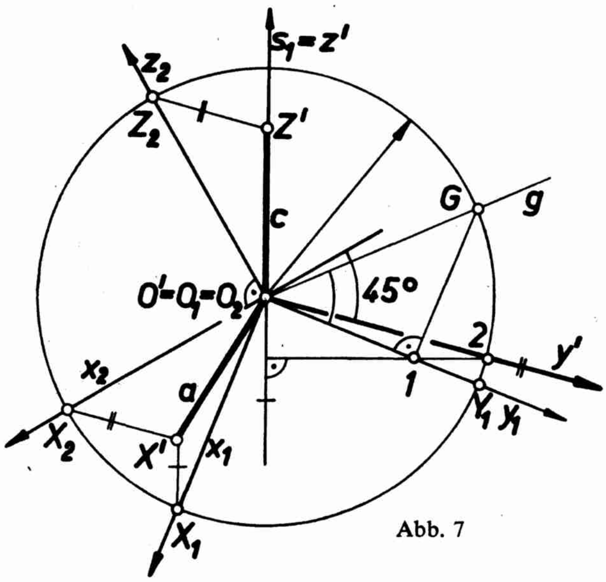

Abb. 7

GÜNSTIGES s-VERFAHREN

Das s-Verfahren ist günstig, wenn die dadurch entstandene Axonometrie eine günstige Bildwirkung hat. Das gelingt dann, wenn diese zwei Bedingungen erfüllt sind ([3], 275):

1. $R : 2 \leqq a, b, c \leqq R$

(das Bild des Würfels soll nicht wie eine Platte aussehen),

2. $0° \leqq \varphi \leqq 30°$

(der Kugelumriss soll nicht merklich von einem Kreis abweichen).

Tab. 1. $R = 100$

I	$\alpha = II$	a	b	φ
120°	105°	52	90	29°
135°	105°	71	73	23°
150°	105°	87	52	15°
150°	120°	87	58	23°
150°	135°	88	71	31°

Tab. 2. $\alpha = 105°$, $R = 100$

I	II	a	b	c	φ
105°	120°	52	100	90	29°
105°	135°	71	100	73	23°
105°	150°	87	100	52	15°
120°	120°	63	90	90	28°
120°	135°	78	90	73	26°
135°	120°	78	73	90	26°

In den Tab. 1, 2 sind die Grössen a, b, c, φ einiger günstigen Axonometrien berechnet. Alle erfüllen die Bedingungen 1, 2 und lassen sich leicht auf der Zeichenmaschine durchführen. In der Tab. 1 sind diese Verfahren durch $\alpha = II$, also durch $R = c$ charakterisiert. Es sind die sog. „*Schnellrisse*" ([6], 108). Die s-Verfahren nach der Tab. 2 sind durch eine sehr geläufige Wahl von $\alpha = 105°$ ausgezeichnet.

3

Die Annahme verschiedener Massstäbe der Einschneiderisse G_1 und G_2 führt zu einer allgemeineren Methode, die wir kurz als *a-Verfahren* bezeichnen. Wenn die Einheit von G_1 wie bisher R ist, so nehmen wir $\overline{O_2X_2} = \overline{O_2Z_2} = kR$ an. Das a-Ver-

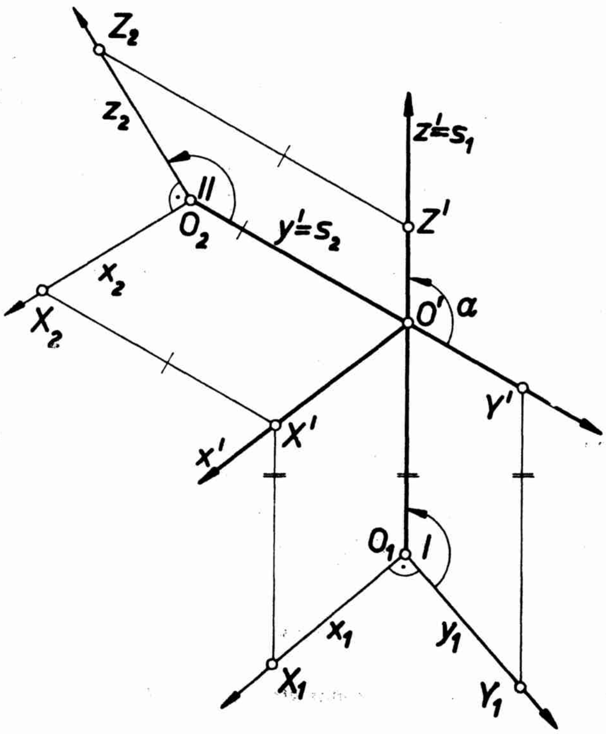

Abb. 8

fahren bestimmt allgemeinere Axonometrien (weiter werden wir sehen, dass alle Axonometrien durch ein a-Verfahren entstehen können) als das s-Verfahren. Sie sind auf Grund des gegebenen a-Verfahrens durch diese Formeln charakterisiert:

$$b = R \sin I : \sin \alpha\,, \quad c = k\,.\,R \sin II : \sin \alpha\,, \tag{14}$$

$$a = \pm Rd : \sin \alpha\,, \quad \text{wo} \quad d = (\cos^2 I + \cos^2 II + 2k \cos I \cos II \cos \alpha)^{1/2}\,,$$

$$\text{(15)} \qquad \sin\beta = \mp\cos I \sin\alpha : d$$
$$\sin\gamma = \mp k \,.\, \cos II \sin\alpha : d \,.$$

In diesen Formeln gilt das obere (untere) Vorzeichen für α, I, II $<180°$ ($>180°$).

Ähnlich wie im Abs. 1 könnten wir die analytische Rekonstruktion direkt aus dem a-Verfahren durchführen und zwar durch das Einsetzen (14) und (15) in (3)–(6).

Jetzt wollen wir zeigen, dass wir zu einer gegebenen Axonometrie $(O'X'Y'Z')$ immer ein a-Verfahren finden können, das eben diese Axonometrie liefert. Dann wird es unnötig sein, ein noch allgemeineres Einschneideverfahren, als a-Verfahren ist, zur Konstruktion einer Axonometrie verwenden.

Die Einschneiderichtungen s_1, s_2 sind mit den Achsen z', y' identisch, die Punkte O_1, O_2 auf z', y' beliebig wählbar und die Punkte X_1, Y_1 resp. X_2, Z_2 liegen and den Einschneidestrahlen durch X', Y' resp. X', Z' (Abb. 8). Weiter muss $\overline{O_1X_1} = \overline{O_1Y_1}$ resp. $\overline{O_2X_2} = \overline{O_2Z_2}$ und $O_1X_1 \perp O_1Y_1$ resp. $O_2X_2 \perp O_2Z_2$ sein. Darum ziehen wir durch O_1 resp. O_2 zu z' resp. y' normale Hilfsgeraden, welche die Einschneidestrahlen in den Punkten 1, 2 resp. 3, 4 schneiden. Die Punkte X_1, Y_1 resp. X_2, Z_2 erfüllen dann die Bedingungen $\overline{X_11} = \overline{O_12}$, $\overline{Y_12} = \overline{O_11}$ resp. $\overline{X_23} = \overline{O_24}$, $\overline{Z_24} = \overline{O_23}$. Die Grösse k dieses a-Verfahrens genügt der Beziehung

$$\text{(16)} \qquad k^2 = (a^2 \sin^2\gamma + c^2 \sin^2\alpha) : (a^2 \sin^2\beta + b^2 \sin^2\alpha) \,,$$

Aus (16) folgt: *einer Axonometrie gehört ein s-Verfahren zu, wenn ihre Parameter* a, b, c, α, β, γ *die Bedingung*

$$\text{(17)} \qquad a^2 \sin^2\gamma + c^2 \sin^2\alpha = a^2 \sin^2\beta + b^2 \sin^2\alpha$$

erfüllen.

In der normalen Axonometrie gilt bekanntlich $a^2 = -\cos\alpha : \sin\beta \,.\, \sin\gamma$, $b^2 = -\cos\beta : \sin\alpha \,.\, \sin\gamma$, $c^2 = -\cos\gamma : \sin\alpha \,.\, \sin\beta$, ([6], 99). Die Ausdrücke beider Seiten von (17) sind darum 1 gleich. Das bedeutet: *zu jeder orthogonalen Axonometrie gehört immer ein s-Verfahren an.*

Literatur

[1] *L. Eckhart:* Affine Abbildung und Axonometrie, S.-Ber. Akad. Wiss. Wien *146* (1937), 51—56.

[2] *H. Kinkelin:* Die schiefe axonometrische Projektion, Vierteljahrschrift d. nat. Ges. Zürich, 1861.

[3] *Müller-Kruppa:* Lehrbuch der darst. Geom. 1936.

[4] *А. Островский:* Основные формулы параллельной аксонометрии. Труды московского семинара. Москва 1958. 108—111.

[5] *E. Wendling:* Der Fundamentalsatz der Axonometrie, 1912.

[6] *W. Wunderlich:* Darstellende Geometrie II, 1967.

Anschrift des Verfassers: Praha 2, Horská 4 (České vysoké učení technické).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

FREDHOLM ALTERNATIVE FOR NONLINEAR OPERATORS AND APPLICATIONS TO PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND INTEGRAL EQUATIONS

JINDŘICH NEČAS, Praha*)

(Received April 15, 1970)

1. Introduction. The problem of solving a nonlinear boundary value problem or an integral equation can be reduced often to the following abstract one: find a solution u of $Tu = f$, where T is a mapping from a real, reflexive Banach space B to its dual B^*.

Example 1. Let Ω be a bounded domain with Lipschitz boundary $\partial\Omega$ and let $a_i(x, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, be continuous functions in $\bar{\Omega} \times R_{n+1}$, satisfying growth conditions

$$(1.1) \qquad |a_i(x, \xi)| \leqq c(1 + |\xi|)^{m-1},$$

where $1 < m < \infty$. Let $f_i \in L_{m'}(\Omega)$, $1/m' + 1/m = 1$, $i = 0, \ldots, n$. By $W_m^{(1)}(\Omega)$ we denote the well-known Sobolev space of real L_m functions whose first derivatives are also L_m functions. $W_m^{(1)}(\Omega)$ is a Banach space with the norm $\|u\|_{W_m^{(1)}} = (\int_\Omega (|u|^m + \sum_{i=1}^{n} |\partial u/\partial x_i|^m) \, dx)^{1/m}$ and is separable. $W_m^{(1)}(\Omega)$ is also reflexive as the closed subspace of $[L_m]^{n+1}$. Let $\mathring{W}_m^{(1)}(\Omega)$ be the closure of $D(\Omega)$, the space of infinitely differentiable functions with compact support, in the space $W_m^{(1)}(\Omega)$. We have to find $u \in \mathring{W}_m^{(1)}(\Omega)$ such that for any $v \in \mathring{W}_m^{(1)}(\Omega)$

$$(1.2) \quad \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) + v a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\right) dx = \\ = \int_\Omega v f_0 \, dx - \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i \, dx .$$

*) Lecture held on the Chicago area applied mathematics seminar.

The function u is called weak solution of the differential equation

$$(1.3)\quad -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\right) + a\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = f + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

in Ω, satisfying on the boundary the condition $u = 0$.

Denoting by (w^*, u) the pairing between B^* and B, we can define an operator T: $: B \to B^*$, putting

$$(Tu, v) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)v\right)\mathrm{d}x\,.$$

Because $\int_\Omega f_0 v \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} f_i(\partial v/\partial x_i)\,\mathrm{d}x = (f, v)$, the equation (1.2) is reduced to the problem of solving the equation $Tu = f$.

Example 2. Let us consider the Hammerstein's integral equation

$$(1.4)\qquad u(x) - \lambda \int_M K(x, y) f(y, u(y))\,\mathrm{d}y = w(x)\,,$$

where the solution is supposed in $L_2(M)$, M being a compact subset of R_n, $w \in L_2(M)$, $f(y, u)$ is a continuous function on $M \times R_1$, satisfying the growth condition $|f(y, u)| \leqq c(1 + |u|)$. We suppose $\int_M \int_M K^2(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty$. If $(Tu)(x) \overset{\mathrm{df}}{=} u(x) - \lambda \int_M K(x, y) f(y, u(y))\,\mathrm{d}y$, then $T: L_2(M) \to L_2(M)$ and the problem is reduced to the solution of $Tu = w$.

2. Borsuk type theorem. A mapping T is said to be bounded if the image of bounded set is bounded and it is said to be demicontinuous, if from $u_n \to u$ (strong convergence) follows $Tu_n \rightharpoonup Tu$ (weak convergence).

Theorem 1. *Let $T: B \to B^*$, where B is a reflexive space, be a bounded, demicontinuous mapping. Let $T_t(u) = T(u) - t\,T(-u)$ for $0 \leqq t \leqq 1$. Let for $0 \leqq t \leqq 1$, the condition (S) be satisfied:*

$$(2.1)\qquad \text{if}\quad u_n \rightharpoonup u \quad \text{and} \quad (T_t(u_n) - T_t(u), u_n - u) \to 0\,,$$

then $u_n \to u$, and for $f \in B^*$ the condition

$$(2.2)\qquad T_t u - (1 - t) f \neq 0 \quad \text{for} \quad \|u\| = R > 0\,, \quad 0 \leqq t \leqq 1\,.$$

Then there exists a solution of $Tu = f$.

Let us remark first that the above solution is unique if, for example, the operator T is strictly monotone: $u \neq v \Rightarrow (Tu - Tv, u - v) > 0$.

Theorems as above are based on the concept of monotone operators, and there is a large amount of literature on this subject, compare, for example, M. I. VIŠIK [11],

F. E. Browder [1], J. Leray, J. L. Lions [6], G. J. Minty [7]. The concept using Borsuk's theorem was recently used in the paper of D. G. de Figueiredo, Ch. P. Gupta [3] and elsewhere.

The main ideas of the proof of Theorem 1: First, if $B = R_n$, then the degree $(T_1(u), B(0, R), 0)$ is an odd integer by Borsuk's theorem, hence by homotopy, this is true for $T(u) - f$, hence, there exists $\|u\| < R$ such that $Tu = f$. If $F \subset B$ is a finite dimensional subspace of B and ψ_F is the injection of $T \to B$, ψ_F^* being its dual mapping, then for $T_F \stackrel{\mathrm{df}}{=} \psi_F^* T \psi_F$, it can be proved by contradiction existence of a F such that if $F' \supset F$, then $T_{F'}(u) - tT_{F'}(-u) - (1 - t)\, \psi_{F'}^* f \neq 0$ for $\|u\| = R$, $u \in F'$, $0 \leqq t \leqq 1$. Hence for every $F' \supset F$, there exists $u_{F'} \in F'$ such that $T_{F'} u_{F'} = \psi_{F'}^* f$. Let us put $M_{F'} = \{u_{F''} \mid F'' \supset F'\}$. The set of $M_{F'}$ has finite intersection property. If $\overline{M}_{F'}$ is the closure in the weak topology, then $\bigcap_{F'} \overline{M}_{F'} \ni u$. If $w, u \in F'$ for F' such chosen, then there exists $u_n \in M_{F'}$, $u_n \rightharpoonup u$ and because of $\lim_{n\to\infty} (Tu_n - Tu, u_n - u) = \lim_{n\to\infty} (Tu_n, u_n - u) = \lim_{n\to\infty} (f, u_n - u) = 0$, $((Tu_n, u_n - u) = (f, u_n - u)$ follows from the definition of $T_{F'}$.) the condition (2.1) implies $u_n \to u$, what, in virtue of the demicontinuity of T, gives the result. We have clearly:

Consequence 1. *If the operator T is coercive:*

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{(Tu, u)}{\|u\|} = \infty\,, \quad \textit{then} \quad T(B) = B^*\,.$$

This is because $(T_t u, u) \geqq c(\|u\|)\, \|u\|$, with $c(s) \to \infty$ for $s \to \infty$.

Consequence 2. *If the conditions of theorem 1 are satisfied and T is odd: $T(-u) = -T(u)$ and if T is weakly coercive: $\lim_{\|u\| \to \infty} \|Tu\| = \infty$, then $T(B) = B^*$.*

Let us consider the following class of operators: first if for $\varkappa > 0$ and every $t > 0$: $A(tu) = t^\varkappa A(u)$, then A is called $\varkappa$-homogeneous.

An operator S is asymptotically zero if for $\varkappa > 0$ $\lim_{\|u\| \to \infty} \|Su\| / \|u\|^\varkappa = 0$.

We have the following Fredholm alternative:

Theorem 2. *Let $T = A + S$, where A is demicontinuous, $\varkappa$-homogeneous, satisfies the condition (S) (i.e. if $u_n \rightharpoonup$ and $(A(u_n) - A(u), u_n - u) \to 0$, then $u_n \to u$), S is demicontinuous, asymptotically zero (with the same $\varkappa$ as for A) and T is bounded odd and satisfies the condition (S). Then the range of T is all of B^* if $Au = 0 \Rightarrow u = 0$. In this case, for every solution,*

$$\|u\| \leqq c(1 + \|f\|^{1/\varkappa})\,. \tag{2.3}$$

If (2.3) is true for every solution, then $Au = 0 \Rightarrow u = 0$.

Theorems of this type are recent. It seems the first paper is due to S. I. POCHOŽAJEV [10] and to the author [8]. For further results, compare F. E. BROWDER [2] and the forthcoming paper of J. NEČAS [9]; compare also M. KUČERA [5].

Proof of Theorem 2:

(i) If (2.3) is true and there exists $u_0 \neq 0$ such that $Au_0 = 0$, then for $u = tu_0$:

$$\|u_0\| \leqq c\left(\frac{1}{t} + \frac{\|S(u_0 t)\|^{1/\varkappa}}{t\|u_0\|}\right)\|u_0\| \to 0$$

which is a contradiction.

(ii) Let $Au = 0 \Rightarrow u = 0$. Then (2.3) is true: if not, there exists a sequence $\|u_n\| \to \to \infty$ such that

$$\|u_n\|^\varkappa > n(1 + \|Tu_n\|) \text{ and putting } v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}, \tag{2.4}$$

we can suppose $v_n \rightharpoonup v$ and we obtain from (2.4) $Av_n \to 0$ and using (S) condition: $v_n \to v$, hence $\|v\| = 1$ and $Av = 0$ which is a contradiction.

(iii) (2.3) implies (2.2), and (2.1) is satisfied because $T_t(u) = (1 + t)\, T(u)$.

3. Back to the applications. Let us remark first that it is only a question of introducing enough of indices to treat general systems instead of one partial differential equation as we will do; there is no essential difference.

I) We consider first the problem:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \lambda a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \tag{3.1}$$

with $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqq c|\xi|^2$. Let us suppose

$$\left|\frac{1}{t}\, a_0(x, t\xi) - \sum_{i=0}^{n} b_i(x)\, \xi_i\right| \leqq c(t)\,[(\sum_{i=0}^{n} \xi_i^2)^{1/2} + 1] \tag{3.2}$$

with $c(t) \to 0$ for $t \to \infty$, $b_i \in L_\infty(\Omega)$. The condition (3.2) implies immediately that $Ru \overset{\mathrm{df}}{=} a_0(x, u, \partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_n) - \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, \partial u/\partial x_i - b_0(x)\, u$ satisfies the condition $\lim_{\|u\| \to \infty} \|Ru\|_{L_2}/\|u\|_{W_2^{(1)}} = 0$. Supposing $a_0(x, -\xi) = -a_0(x, \xi)$ and defining

$$(Au, v) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x\,, \quad (Su, v) \overset{\mathrm{df}}{=} -\lambda\int_\Omega a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) v\,\mathrm{d}x\,,$$

we obtain in virtue of the fact the imbedding $W_2^{(1)}(\Omega) \to L_2(\Omega)$ is completely continuous, that Su is a completely continuous operator from $\mathring{W}_2^{(1)} \to (\mathring{W}_2^{(1)})^*$. Because A

and S above defined satisfy with $\varkappa = 1$ the conditions of the theorem 2, this altogether gives by theorem 2 this result:

For every $f_i \in L_2(\Omega)$, $i = 0, \dots, n$, there exists a solution of (3.1) with $u = 0$ on $\partial\Omega$ and for every solution, we have $\|u\|_{W_2^{(1)}} \leqq c(1 + \|f_0\|_{L_2} + \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L_2})$ if and only if λ is not an eigenvalue for the linear problem

$$- \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \lambda \sum_{i=1}^{n}\left(b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b_0(x)\, u\right) = 0\,, \quad u \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)\,.$$

II) If we consider a nonlinear problem with $m \neq 2$, then we suppose:

$$\left|\frac{a_i(x, t\xi)}{t^{m-1}} - A_i(x, \xi)\right| \leqq c_i(t)\,(1 + |\xi|^{m-1})\,, \quad i = 0, \dots, n\,, \tag{3.3}$$

where $A_i(x, \xi)$ satisfy the conditions (1.1) and $c_i(t) \to 0$ for $t \to \infty$. Let $A_i(x, \xi)$ and $a_i(x, \xi)$ be odd in ξ and $A_i(x, t\xi) = t^{m-1}A_i(x, \xi)$, $t > 0$. We shall suppose for $a_i(x, \xi)$ and $A_i(x, \xi)$ the conditions (we write them only for A_i): if $[\xi_1, \dots, \xi_n] \neq$ $\neq [\xi'_1, \dots, \xi'_n]$ then

$$\sum_{i=1}^{n} (A_i(x, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) - A_i(x, \xi_0, \xi'_1, \dots, \xi'_n))\,(\xi_i - \xi'_i) > 0 \tag{3.4}$$

and

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)\, \xi_i \geqq c_1 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^m - c_2|\xi_0|^m\,. \tag{3.5}$$

For to apply theorem 2, we can easily verify (for details compare J. Leray, J. L. Lions [6]) the hypothesis eventually with the exception of the condition (S): for to see this, let $u_k \rightharpoonup u$ in $\mathring{W}_m^{(1)}(\Omega)$. We have first by the complete continuity of the imbedding $W_m^{(1)}(\Omega) \to L_m(\Omega)$: $u_k \to u$ in $L_m(\Omega)$. Choosing a subsequence, if necessary, still noted u_k, we have $u_k(x) \to u(x)$ almost everywhere. By hypothesis,

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left(a_i\left(x, u_k, \frac{\partial u_k}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_k}{\partial x_n}\right) - a_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\right)$$
$$\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \mathrm{d}x + \int_\Omega \left(a_0\left(x, u_k, \frac{\partial u_k}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_k}{\partial x_n}\right) - a_0\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\right)$$
$$(u_k - u)\, \mathrm{d}x = 0\,.$$

The second member tends to zero, hence also the first, but in virtue of (3.4) putting

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i\left(x, u_k, \frac{\partial u_k}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_k}{\partial x_n}\right) - a_i\left(x, u_k, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right),$$

we have $f_k(x) \geqq 0$ and $\int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}x \to 0$. If necessary, for a subsequence, still noted f_k, $f_k(x) \to 0$ almost everywhere. This implies $(\partial u_k/\partial x_i)(x) \to (\partial u/\partial x_i)(x)$ almost everywhere. But (3.5) gives uniform continuity of the integrals $\int_M \sum_{i=1}^{n} |\partial u_k/\partial x_i|^m \,\mathrm{d}x$ with respect to k. This implies $\partial u_k/\partial x_i \to \partial u/\partial x_i$ in $L_m(\Omega)$ for the original sequence.

Hence we obtain: the conditions (1.1), (3.3)–(3.5) being satisfied, there exists a solution $u \in W_m(\Omega)$ of (1.2), and every solution is such that

$$\|u\|_{W_m(1)} \leqq c(1 + \sum_{i=0}^{n} \|f_i\|_{L_{m'}}^{1/(m-1)}) \tag{3.6}$$

if and only if $u = 0$

is the only solution of (1.2) for $f_i = 0$ and the coefficients A_i.

III) As far as the integral equation (1.4), although there is a lot of possible generalizations, we shall consider the condition:

$$\left|\frac{1}{t} f(y, tu) - a(y)\,u\right| \leqq c(t)\,(1 + |u|) \quad \text{with} \quad c(t) \to 0 \tag{3.7}$$

for $t \to \infty$ and $a \in L_\infty(M)$. The operators from $L_2(M) \to L_2(M)$ defined by

$$\int_M K(x, y)\, f(y, u(y))\,\mathrm{d}y\,, \quad \int_M K(x, y)\, a(y)\, u(y)\,\mathrm{d}y \tag{3.8}$$

are completely continuous. If we have

$$f(y, -u) = -f(y, u)\,, \tag{3.9}$$

we can immediately apply Theorem 2. But it is easy to see that we can immediately apply Theorem 1 in virtue of the complete continuity of (3.8) without (3.9). We obtain:

The equation (1.4) provided (3.7) has a solution for every $w \in L_2(M)$ and for every solution holds $\|u\|_{L_2} \leqq c(1 + \|w\|_{L_2})$ if and only if λ is not an eigenvalue for the linear equation

$$u(x) - \lambda \int_M K(x, y)\, a(y)\, u(y)\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

This result is very close to the corresponding result of M. A. KRASNOSELSKIJ [4].

Bibliography

[1] *F. E. Browder:* "Existence and uniqueness theorems for solutions of non-linear boundary value problems", Proc. Symposia on Appl. Math. Amer. Math. Soc. *17* (1965), 24—49.

[2] *F. E. Browder:* "Existence theorems for non-linear partial differential equations", Proc. Amer. Math. Soc. 1968 Summer Institute in global Analysis (to appear).

[3] *D. G. de Figueiredo, Ch. P. Gupta:* "Borsuk type theorems for non-linear non-compact mappings in Banach space", to appear.
[4] *M. A. Krasnoselskij:* "Topological methods in the theory of non-linear integral equations", Pergamon Press, N. Y., 1964.
[5] *M. Kučera:* "Fredholm alternative for non-linear operators", thesis 1969, Charles University, Prague.
[6] *J. Leray, J. L. Lions:* "Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder", Bull. Soc. Math. France *93* (1965), 97—107.
[7] *G. J. Minty:* "Monotone (non-linear) operators in Hilbert space", Duke Math. J. *29* (1962), 341—346.
[8] *J. Nečas:* "Sur l'alternative de Fredholm pour les opérateurs non linéaires avec applications aux problèmes aux limites", Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, *XXIII* (1969), 331—345.
[9] *J. Nečas:* "Remark on the Fredholm alternative for non-linear operators with application to non-linear integral equation of generalized Hammerstein type", to appear.
[10] *S. I. Pochožajev:* "On the solvability of non-linear equations involving odd operators", Functional Analysis and Appl. (Russian), *1* (1967), 66—73.
[11] *M. I. Višik:* "Quasilinear strongly elliptic system of differential equations having divergence form", (Russian), Trudy Mosk. Mat. Obšč. *12* (1963), 125—184.

Author's address: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

ZUM PETRSCHEN SATZ[1])

BRUNO BUDINSKÝ, Praha

(Eingegangen am 29. Mai 1970)

K. PETR [3][2]) hat diesen Satz[3]) hergeleitet:

Es sei $A_1A_2 \ldots A_n$ *ein ebenes n-Eck und*

(1) $$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$$

eine beliebige Permutation der Zahlen

$$2\pi/n,\ 2 \,.\, 2\pi/n,\ 3 \,.\, 2\pi/n, \ldots, (n-1) \,.\, 2\pi/n \,.$$

Auf jeder Seite A_iA_{i+1} $(i = 1, \ldots, n;\ A_{n+1} = A_1)$ *als Grundlinie konstruiere man das gleichschenkelige Dreieck* $A_iA_{i+1}A'_i$ *mit dem im positiven Sinn gemessenen Winkel* $A_i^1 = \alpha_1$. *Auf den Seiten des neuen n-Ecks* $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ *konstruiere man*

---

[1]) Unter diesem Stichwort ist das Theorem in [2], Band II, S. 331 angeführt.

[2]) Siehe auch [4]; mitgeteilt aus [3].

[3]) Für ein Dreieck hat den Satz schon J. Langer [1] gefunden: *Schließt man an jede Seite eines beliebigen Dreiecks ABC die gleichschenkeligen Dreiecke ABC', BCA', CAB' mit den Winkeln* $A' = B' = C' = 2\pi/3$ *an (und zwar alle drei außen von ABC oder umgekehrt), so ist das Dreieck A'B'C' gleichseitig.* Der ursprüngliche Beweis von J. LANGER läßt sich beträchtlich verkürzen. Offensichtlich $2A' = [B + C + k\{C - B\}^*]$ mit $3k = \pm\sqrt{3}$; das Symbol $\{\ldots\}^*$ bedeutet die Drehung (z. B. im positiven Sinn) des in den Klammern stehenden Vektors um den Winkel $\pi/2$. Durch zyklische Vertauschung erhält man die Ausdrücke für B' und C'. Dann kann man schreiben $2(A' - B') = -A + B + k\{-A - B + 2C\}^*$ und $2(A' + B' - 2C') = -A - B + 2C + 3k\{A - B\}^*$. Daraus ergibt sich $(A' - B').\,[(A' - C') + (B' - C')] = 0$ und durch zyklische Vertauschung folgen noch zwei ähnliche Gleichungen. Sie bedeuten, daß im Dreieck $A'B'C'$ jede Höhe mit der Schwerlinie zusammenfällt. Folglich ist $A'B'C'$ gleichseitig.

Auf ähliche Weise kann man dieses Analogon zum Satz von J. Langer beweisen: *Auf den Höhen des Dreiecks ABC, welche fortschreitend durch A, B, C gehen, wählen wir die Punkte A', B', C' derart, daß* $AA' : BC = BB' : CA = CC' : AB = 1 : \sqrt{3}$ *und daß alle Halbgeraden AA', BB', CC' zugleich die zugehörigen (bzw. verlängerten) Seiten des Dreiecks ABC entweder schneiden oder nicht schneiden. Dann ist das Dreieck A'B'C' gleichseitig.*

Meines Wissens gibt es kein einfaches Seitenstück zum Satz von J. Langer, welches ein Vierflach oder in räumliches Viereck betrifft. Deshalb ist das obengeführte Theorem von K. Petr, das eine elegante Verallgemeinerung des Satzes von J. Langer darstellt, wirklich überraschend.

wieder genau so wie vorher gleichschenkelige Dreiecke, indem man statt α_1 den Winkel α_2 benutzt; so erhält man ein weiteres n-Eck $A_1^2A_2^2 \ldots A_n^2$. Auf diese Weise entstehen aus dem ursprünglichen n-Eck $A_1A_2 \ldots A_n$ unter Verwendung der Folge (1) *insgesamt $n - 1$ neue n-Ecke.*

Dann ist das vorletzte n-Eck $A_1^{n-2}A_2^{n-2} \ldots A_n^{n-2}$ regelmäßig[4]) *und das letzte n-Eck $A_1^{n-1}A_2^{n-1} \ldots A_n^{n-1}$ reduziert sich auf einen Punkt.*

Fußend auf den komplexen Zahlen, was nur scheinbar wesentlich ist, hat K. Petr den Beweis rein algebraisch geführt. Wir beweisen seinen Satz, indem wir ein mehr geometrisches Verfahren anwenden. Zum Schluß fügen wir eine Bemerkung betreffs der Isoperimetrie bei.

Es bezeichne $\boldsymbol{x}$ einen beliebigen Vektor in der Ebene ϱ des betrachteten n-Ecks. Weiter sei F_i die Abbildung, welche jeden Vektor $\boldsymbol{x}$ im positiven Sinn in ϱ um den Winkel α_i aus (1) „umdreht"; endlich sei F_0 die identische Abbildung. Die Summe $F_i + F_j$ und das Produkt F_iF_j definieren wir auf übliche Weise: $(F_i + F_j)\,\boldsymbol{x} = F_i\boldsymbol{x} + F_j\boldsymbol{x}$, $(F_iF_j)\,\boldsymbol{x} = F_i(F_j\boldsymbol{x})$.

Wegen $F_1\overrightarrow{A_1^1A_1} = \overrightarrow{A_1^1A_2}$ ergibt sich leicht $(F_1 - F_0)\,\overrightarrow{A_1^1A_1} = \overrightarrow{A_1A_2}$. Also auch $(F_1 - F_0)\,\overrightarrow{A_2^1A_2} = \overrightarrow{A_2A_3}$. Da freilich $\overrightarrow{A_1^1A_2^1} = \overrightarrow{A_1^1A_2} - \overrightarrow{A_2^1A_2}$, ist $(F_1 - F_0)\,\overrightarrow{A_1^1A_2^1} = F_1\overrightarrow{A_1A_2} - \overrightarrow{A_2A_3}$. Die Induktion liefert für $i = 1, \ldots, n - 1$:

$$(2)\qquad (F_i - F_0)(F_{i-1} - F_0)\ldots(F_1 - F_0)\,\overrightarrow{A_1^iA_2^i} = G_{i1}\overrightarrow{A_1A_2} + G_{i2}\overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + G_{i2}\overrightarrow{A_iA_{i+1}} + (-1)^i\,\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}\,,$$

wo G_{ik} die mit $(-1)^{k-1}$ multiplizierte $(i - k + 1)$-te elementarsymmetrische Funktion von $F_1, \ldots, F_i$ ist; $k = 1, \ldots, i$.

Die Endpunkte der in einem Punkt T gefundenen Vektoren $F_0\boldsymbol{x}, F_1\boldsymbol{x}, \ldots, F_{n-1}\boldsymbol{x}$ bilden — infolge der Wahl der Zahlen (1) — ein regelmäßiges n-Eck mit dem Schwerpunkt T. Dementsprechend ist $O = F_0 + F_1 + \ldots + F_{n-1}$ die Abbildung, in der $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}$. Ähnlich ergibt sich, daß $F_0^j + F_1^j + \ldots + F_{n-1}^j = O$ für $j = 1, \ldots, n - 1$. Infolgedessen

$$G_{n-1,n-1} = (-1)^n\,[(F_0 + F_1 + \ldots + F_{n-1})] - F_0 = (-1)^{n+1}\,F_0\,;$$

$$\begin{aligned} G_{n-1,n-2} = (-1)^{n-1}\,[&\tfrac{1}{2}F_1(F_0 + F_1 + \ldots + F_{n-1}) + \\ &+ \tfrac{1}{2}F_{n-1}(F_0 + F_1 + \ldots + F_{n-1}) - \tfrac{1}{2}(F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_{n-1}^2) - \\ &- \tfrac{1}{2}F_0(F_0 + F_1 + \ldots + F_{n-1}) + F_0^2] = (-1)^{n+1}\,F_0\,; \end{aligned}$$

im ganzen, wie auf Grund der Induktion leicht zu beweisen ist, $G_{n-1,n-1} = G_{n-1,n-2} = \ldots = G_{n-1,1} = (-1)^{n+1}\,G_0$.

Folglich ergibt sich aus (2) für $i = n - 1$, daß $(F_{n-1} - F_0)\,(F_{n-2} - F_0)\ldots$

---

[4]) Aber nicht notwendig konvex. Es kann sich auch auf einen Punkt reduzieren. Das kann übrigens für beliebiges der n — 3 voraustehenden n-Ecke der Fall sein.

$\dots (F_1 - F_0)\, \overrightarrow{A_1^{n-1}A_2^{n-1}} = \mathbf{0}$. Also $\overrightarrow{A_1^{n-1}A_2^{n-1}} = \mathbf{0}$. Deshalb reduziert sich das letzte n-Eck $A_2^{n-1}A_2^{n-1} \dots A_n^{n-1}$ auf einen Punkt – und zwar offensichtlich auf den Schwerpunkt T des ursprünglichen n-Ecks $A_1 A_2 \dots A_n$. Da die Dreiecke $A_1^{n-2}TA_2^{n-2}$, $A_2^{n-2}TA_3^{n-2}, \dots, A_n^{n-2}TA_1^{n-2}$ gleichschenkelig sind und da noch ihre Winkel bei T gleich sind, so ist das n-Eck $A_1^{n-2}A_2^{n-2} \dots A_n^{n-2}$ regelmäßig.

Es sei L der Umfang und F der Flächeninhalt eines ebenen konvexen Bereiches. Die nichtnegative Zahl $L^2/4\pi - F$ ist das wohlbekannte *isoperimetrische Defizit*. Um die unwesentlichen Ähnlichkeitstransformationen auszuschalten, führen wir die Zahl $D = L^2/F$ ein. Angenommen, das ursprüngliche, das erste, zweite, ..., $(n-2)$-te n-Eck aus dem Satz von K. Petr seien konvex. Es sollen $D_0, D_1, D_2, \dots, D_{n-2}$ die Zahlen D für diese n-Ecke bezeichnen. Z. Nádeník hat die Vermutung ausgesprochen, daß $D_0 \geqq D_1 \geqq D_2 \geqq \dots \geqq D_{n-2}$. Ist das der Fall, so ergibt sich daraus die isoperimetrische Ungleichung für konvexe Polygone.

Literatur

[1] *J. Langer:* O jisté úloze v trojúhelníku. Čas. pro pěst. mat. a fys., roč. *XXXIV*, 1905, 65–72.

[2] *J. Naas - H. L. Schmid:* Mathematisches Wörterbuch, Berlin–Leipzig 1967.

[3] *K. Petr:* O jedné větě pro mnohoúhelníky. Čas. pro pěst. mat. a fys., roč. *XXXIV*, 1905, 166–172.

[4] *K. Petr:* Ein Satz über Vielecke. Arch. Math. Phys. III. Ser. 13 (1908), 29–31.

Anschrift des Verfassers: Praha 2, Trojanova 13 (České vysoké učení technické).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

MEHRDIMENSIONALES ANALOGON ZU DEN SÄTZEN VON MENELAOS UND CEVA[1])

BRUNO BUDINSKÝ und ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingegangen am 29. Mai 1970)

Wir bezeichnen mit E_{n+1} den $(n + 1)$-dimensionalen euklidischen Raum, mit V_{n+1} seinen Vektorraum und mit $\{V_{n+1}\}$ die Menge aller Richtungen in V_{n+1}; $n \geqq 2$. Wir benutzen im ähnlichen Sinn die Bezeichnungen E_n, V_n, $\{V_n\}$ und nehmen an, daß $E_n \subset E_{n+1}$, $V_n \subset V_{n+1}$, $\{V_n\} \subset \{V_{n+1}\}$. Die Ergebnisse formulieren wir in der projektiven Erweiterung $\bar{E}_n = E_n \cup \{V_n\}$ von E_n.

Wir wählen einen Punkt $A_0 \in (E_{n+1} - E_n)$ und auf übliche Weise definieren wir die eineindeutige Abbildung $f : \bar{E}_n \to \{V_{n+1}\}$, nämlich $B \to \{B - A_0\}$ [2]) für $\forall B \in E_n$ und $B \to B$ für $\forall B \in \{V_n\}$. Mit B^* bezeichnen wir einen Repräsentanten der Richtung $f(B)$.

Im folgenden setzen wir stets voraus, daß $A_1, \ldots, A_{n+1}$ linear unabhängige Punkte in E_n sind. Dann gibt es immer solche Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_{n+1}$, daß

$$(1)\qquad B^* = b_0A_0 + b_1A_1 + \ldots + b_{n+1}A_{n+1}\,; \quad b_0 + b_1 + \ldots + b_{n+1} = 0\,.$$

Für $b_0 = 0$ ist $B^* \in V_n$ und B ist ein uneigentlicher Punkt in $\bar{E}_n$. Für $b_0 \neq 0$ ist $B = -b_1b_0^{-1}A_1 - \ldots - b_{n+1}b_0^{-1}A_{n+1}$ und demzufolge $B \in E_n$.

Die in $\bar{E}_n$ durch $B_i^* = \sum_{j=0}^{n+1} b_{ij}A_j$ $(i = 1, \ldots, n + 1)$ bestimmten Punkte $B_1, \ldots, B_{n+1}$ liegen dann und nur dann in einer Ebene, wenn $\det(b_{ij}) = 0$ $(i, j = 1, \ldots, n + 1)$.

In der Tat, infolge (1) haben die Matrizen $\mathscr{B} = (b_{ij})$ mit $i, j = 1, \ldots, n + 1$ und $\mathscr{B}' = (b_{ij})$ für $i = 1, \ldots, n + 1$; $j = 0, 1, \ldots, n + 1$ denselben Rang. Also $\det \mathscr{B} = 0$ dann und nur dann, wenn B_i^* linear abhängig sind, d. h. wenn sich die Punkte B_i in einer Ebene befinden.

---

[1]) Mit den n-dimensionalen Seitenstücken zu diesen Sätzen haben sich fortschreitend K. K. MOKRIŠČEV [2], [3], Z. NÁDENÍK [5], [6], N. M. BESKIN [1], H. SASAYAMA [7] und F. MOLNÁR [4] beschäftigt. Es ist der Zweck der vorliegenden Note, die auf langwierige synthetische Weise hergeleitete Hauptergebnisse aus [5] und [6] kurz zu begründen. Das Verfahren kann auf sphärische Räume ausgedehnt werden.

[2]) $\{B - A_0\}$ bedeutet freilich die durch den Vektor $B - A_0$ bestimmte Richtung.

Wir wählen zwei Punkte $P, P' \in E_n$ und eine reelle Zahl k. Wir sagen, der durch $R^* = (k - 1) A_0 + P - kP'$ definierte Punkt R teile die Strecke PP' im Verhältnis k; wir schreiben $(PP'R) = k$. Das ist in Übereinstimmung mit der üblichen Definition. Denn für $k \neq 1$ ergibt sich – als Spezialfall der obigen Bemerkungen, daß $R = (1 - k)^{-1} P - k(1 - k)^{-1} P'$. Für $k = 1$ ist freilich R der uneigentliche Punkt der Geraden PP'.

Weiter betrachten wir das $(n + 1)$-Eck $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$. Wir wählen von Null verschiedene Zahlen $k_1, \dots, k_{n+1}$ und auf jeder Seite $A_i A_{i+1}$ $(i = 1, \dots, n + 1;$ $A_{n+2} \equiv A_1)$ den Punkt $B_1 \in \bar{E}_n$ derart, daß $(A_i A_{i+1} B_i) = k_i$.

Der Satz von Menelaos. *Die Punkte $B_1, \dots, B_{n+1}$ liegen in einer Ebene dann und nur dann, wenn $k_1 \dots k_{n+1} = 1$.*

Da die Repräsentanten der Punkte B_i durch

(2) $$B_1^* = (k_i - 1) A_0 + A_i - k_i A_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n + 1)$$

ausgedrückt werden können, so ergibt sich der Satz unmittelbar aus der obigen Behauptung als ihr spezieller Fall.

Mit β_i bezeichnen wir die Ebene, welche durch den Punkt B_i der Verbindungslinie $A_i A_{i+1}$ und durch alle Ecken des betrachteten Polygons mit Ausnahme von A_i, A_{i+1} geht.

Der Satz von Ceva. *Die Ebenen $\beta_1, \dots, \beta_{n+1}$ haben dann und nur dann einen gemeinsamen Punkt, wenn $k_1 \dots k_{n+1} = (-1)^{n+1}$.*

Angenommen, alle Ebenen β_i gehen durch den Punkt $Q \in \bar{E}_n$. Es sei

(3) $$Q^* = q_0 A_0 + q_1 A_1 + \dots + q_{n+1} A_{n+1}; \quad q_0 + q_1 + \dots + q_{n+1} = 0;$$

dabei ist $q_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, n + 1$, wie leicht zu zeigen ist.[3] Für den Punkt B_1 haben wir zugleich $B_1^* = (k_1 - 1) A_0 + A_1 - k_1 A_2$ und $B_1^* = bQ^* + b'_0 A_0 + b'_3 A_3 + \dots + b'_{n+1} A_{n+1}$; die Koeffizienten $b'_0, b'_3, \dots, b'_{n+1}$ interessieren uns nicht. Setzt man für Q^* aus (3) ein und vergleicht man dann beide Darstellungen, so erhält man $1 = bq_1$, $-k_1 = bq_2$.

Auf Grund der zyklischen Vertauschung ergibt sich daraus

(4) $$k_1 = -q_2/q_1, \; k_2 = -q_3/q_2, \; \dots, \; k_{n+1} = -q_1/q_{n+1},$$

was freilich unmittelbar zu $k_1 \dots k_{n+1} = (-1)^{n+1}$ führt. Daß bei $k_1 \dots k_{n+1} = (-1)^{n+1}$ die Ebenen β_i einen gemeinsamen Punkt besitzen, beweist man auf bekannte elementare indirekte Weise.

Der gemeinsame Punkt der Ebenen $\beta_1, \dots, \beta_{n+1}$ ist dann und nur dann uneigentlich, wenn

(5) $$K \equiv 1 - k_1 + k_1 k_2 - \dots + (-1)^n k_1 \dots k_n = 0.$$

[3]) Vgl. [5], S. 5.

In der Tat, wenn wir aus (4) fortschreitend $q_2, \ldots, q_{n+1}$ berechnen und in (3) einsetzen, so erhalten wir

$$(6) \qquad Q^* = -q_1KA_0 + q_1A_1 - q_1k_1A_2 + \ldots + (-1)^n q_1k_1 \ldots k_nA_{n+1} .$$

Weil das Verschwinden des Koeffizienten von A_0 einen uneigentlichen Punkt kennzeichnet, ergibt sich daraus sofort (5).

Es sei n eine ungerade Zahl. Die Punkte $B_1, \ldots, B_{n+1}$ liegen dann und nur dann in einer Ebene β, wenn die Ebenen $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$ einen gemeinsamen Punkt haben. Der Punkt Q und die Ebene β sind inzident. Q ist der Durchschnitt der durch die Punkte $B_1, B_3, \ldots, B_n$ und $B_2, B_4, \ldots, B_{n+1}$ bestimmten Unterräume.

Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus den Sätzen von Menelaos und Ceva. Für ungerades n kann man Q^* aus (6) unter Zuhilfenahme von (2) in dieser Form schreiben:

$$Q^* = (.)\, A_0 + B_1^* + k_1k_2B_3^* + \ldots + k_1k_2 \ldots k_{n-1}B_n^* .$$

Folglich befindet sich der Punkt Q in dem durch die Punkte $B_1, B_3, \ldots, B_n$ bestimmten Unterraum.

Literatur

[1] *Н. М. Бескин:* Теоремы Чевы и Менелая в n-мерном пространстве. Математическое просвещение *1* (1957), 119—137.

[2] *К. К. Мокрищев:* Об одном обобщении теоремы Менелая. Ростов ун-т, Учëн. зап. НИИ матем. и физ, *2* (1938), 38—39.

[3] *К. К Мокрищев:* Об одном пространственном аналогоне теоремы Чевы и ей обратной. Ebenda *2* (1938), 51—59.

[4] *F. Molnár:* Eine Verallgemeinerung des Satzes von Ceva. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötrös Sect. Math. *3—4* (1960/61), 197—199.

[5] *Z. Nádeník:* Rozšíření věty Menelaovy a Cevovy na n-dimensionální útvary. Čas. pro pěst. mat. *81* (1956), 1—25.

[6] *Z. Nádeník:* Několik vlastností vrcholových nadrovin normálního mnohoúhelníka. Čas. pro pěst. mat. *81* (1956), 287—291.

[7] *Hiroyoshi Sasayama:* General coordinate geometries VI., Journal of spatial mathematics of the Sasayama research room. Japan, *3* (1960), 125—134.

Anschrift der Verfasser: Praha 2, Trojanova 13 (České vysoké učení technické).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

SÄTZE VON MENELAOS UND CEVA FÜR VIELECKE IM SPHÄRISCHEN n-DIMENSIONALEN RAUM

BRUNO BUDINSKÝ, Praha

(Eingegangen am 29. Mai 1970)

1. Im $(n + 1)$-dimensionalen euklidischen Raum denken wir uns die n-dimensionale Einheitskugelfläche S_n um den Nullpunkt O. Für $A \in S_n$ setzen wir $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ und mit $\boldsymbol{a}^* \neq \boldsymbol{0}$ bezeichnen wir einen mit $\boldsymbol{a}$ kollinearen Vektor; dabei $A^* = O + \boldsymbol{a}^*$.

In S_n wählen wir ein beliebiges sphärisches $(n + 1)$-Eck $A_1A_2 \dots A_{n+1}$, für das die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{n+1}$ linear unabhängig sind. Man bezeichne $a_i \in (0, \pi)$ den nichtorientierten Winkel von $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}$ und $\widehat{A_iA_{i+1}}$ den A_i mit A_{i+1} verbindenden und so orientierten Bogen der Kreislinie, daß a_i zugleich die Größe des orientierten Winkels des geordneten Paares $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}$ ist; $i = 1, \dots, n + 1$; Die Indizes nimmt man *mod*$(n + 1)$.

Es sei $b_i \in (0, \pi)$. Auf der Seite $\widehat{A_iA_{i+1}}$ wählen wir den Punkt B_i derart, daß b_i der orientierte Winkel des geordneten Paares $\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}$ ist. Die durch

$$(A_iA_{i+1}B_i) = \sin(b_i - a_i) : \sin b_i \tag{1}$$

definierte Zahl heißt *Teilungsverhältnis* des Punktes B_i in bezug auf das geordnete Punktepaar A_i, A_{i+1}.

Wir konstruieren so den Punkt B_i^*, daß sich der Vektor $\boldsymbol{b}_i^*$ in der Form

$$\boldsymbol{b}_i^* = \boldsymbol{a}_i - k_i\boldsymbol{a}_{i+1} \tag{2}$$

schreiben läßt. Um die Unbekannte k_i zu berechnen, multiplizieren wir (2) skalar mit $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}$. Es ergibt sich

$$|\boldsymbol{b}_i^*| \cos(b_i - a_i) = 1 - k_i \cos a_i\,, \quad |\boldsymbol{b}_i^*| \cos b_i = \cos a_i - k_i$$

und folglich

$$k_i = \sin(b_i - a_i) : \sin b_i\,. \tag{3}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich das für weitere Betrachtungen fundamentale Ergebnis

$$k_i = (A_iA_{i+1}B_i)\,. \tag{4}$$

Nach (2) und (1) darf k_i eine beliebige Zahl sein. Es sei noch bemerkt, daß die Punkte A_i, A_{i+1}, B_i auf einer Halbkreislinie mit dem Endpunkt A_{i+1} liegen.

2. Der Satz von Menelaos. Wir wählen $n + 1$ von Null verschiedene Zahlen $k_1, \ldots, k_{n+1}$ und nach (4) konstruieren wir $n + 1$ Punkte B_i.

Die Punkte B_i liegen dann und nur dann auf einem Großkreis[1]), *wenn*

(5) $$k_1 k_2 \ldots k_{n+1} = 1 .$$

In der Tat, die Punkte B_i haben jene Eigenschaft dann und nur dann, wenn die durch (2) bestimmten Vektoren $\mathbf{b}_i$ linear abhängig sind, was unmittelbar zur obigen Bedingung führt.

3. Der Satz von Ceva. Durch jeden Punkt B_i legen wir den sogenannten *Scheitelkreis* β_i; es ist das der durch die Punkte $A_1, \ldots, A_{i-1}, B_i, A_{i+2}, \ldots, A_{n+1}$ eindeutig bestimmte $(n - 1)$-dimensionale Großkreis.

Alle Scheitelkreise β_i haben dann und nur dann einen gemeinsamen Punkt, wenn

(6) $$k_1 k_2 \ldots k_{n+1} = (-1)^{n+1} .$$

Es sei $Q \in \beta_i$. Den Punkt Q kann man durch

(7) $$\mathbf{q} = \omega_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \omega_{n+1} \mathbf{a}_{n+1}$$

bestimmen; dabei alle $\omega_i \neq 0$. Da der Punkt B_1 auf dem durch die Punkte $Q, A_3, \ldots \ldots, A_{n+1}$ bestimmten Großkreis liegt, können wir auch $\mathbf{b}_1^* = \varrho \mathbf{q} + \varrho_3 \mathbf{a}_3 + \ldots \ldots + \varrho_{n+1} \mathbf{a}_{n+1}$ schreiben. Wenn wir für $\mathbf{q}$ aus (7) einsetzen und wenn wir die so erhaltene Gleichung mit (2) für $i = 1$ vergleichen, bekommen wir $\varrho\omega_1 = 1$, $\varrho\omega_2 = -k_1$. Die zyklische Vertauschung liefert

(8) $$\omega_2 : \omega_1 = -k_1, \omega_3 : \omega_2 = -k_2, \ldots, \omega_1 : \omega_{n+1} = -k_{n+1} .$$

Daraus folgt sofort die Bedingung (6). — Die Umkehrung beweist man auf einfache indirekte Weise.

Wir konstruieren jetzt auf jeder Seite $A_i A_{i+1}$ unseres sphärischen $(n + 1)$-Ecks den Punkt C_i derart, daß $(A_i A_{i+1} C_i) = 1$, d. h.

(9) $$\mathbf{c}_i^* = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i+1} .$$

Nach dem Satz von Menelaos liegen alle Punkte C_i in einem Großkreis $\mathcal{N}$, den wir — und ebenso seine Punkte — mit dem Adjektiv „uneigentlich“ kennzeichnen.

[1]) Darunter wird der Schnittpunkt der n-dimensionalen Kugelfläche S_n und einer durch ihren Mittelpunkt gehenden n-dimensionalen Ebene, also ein $(n - 1)$-dimensionaler sphärischer Unterraum, verstanden.

Der Punkt Q aus dem Satz von Ceva ist dann und nur dann uneigentlich, wenn

$$1 - k_1 + k_1 k_2 - \ldots + (-1)^n k_1 k_2 \ldots k_n = 0 . \tag{10}$$

In dem durch $\boldsymbol{c}_i^*, \ldots, \boldsymbol{c}_{n+1}^*$ bestimmten Vektorraum bilden die Vektoren $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_{n+1}, \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_{n+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}_{n+1}$ eine Basis. Unter Zuhilfenahme von (8) läßt sich (7) in dieser Form schreiben

$$\boldsymbol{q} = \omega_1(\boldsymbol{a}_1 - k_1\boldsymbol{a}_2 + k_1k_2\boldsymbol{a}_3 - \ldots + (-1)^n k_1k_2 \ldots k_n\boldsymbol{a}_{n+1}) . \tag{11}$$

Angenommen, es gelte (10). Statt (11) kann man dann $\boldsymbol{q} = \omega_1[(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_{n+1}) - k_1(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_{n+1}) + \ldots + (-1)^{n-1} k_1k_2 \ldots k_{n-1}(\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}_{n+1})]$ schreiben. Daraus und aus (9) folgt $Q \in \mathcal{N}$. – Fußend auf (11) ist schon leicht zu zeigen, daß sich aus $Q \in \mathcal{N}$ umgekehrt (10) ergibt.

Ist n eine ungerade Zahl, so läßt sich $\boldsymbol{q}$ nach (11) folgendermaßen darstellen: $\boldsymbol{q} = \omega_1[(\boldsymbol{a}_1 - k_1\boldsymbol{a}_2) + k_1k_2(\boldsymbol{a}_3 - k_3\boldsymbol{a}_4) + \ldots + k_1k_2 \ldots k_{n-1}(\boldsymbol{a}_n - k_n\boldsymbol{a}_{n+1})$. Gemäß (2) ist also $\boldsymbol{q}$ eine Linearkombination von $\boldsymbol{b}_1^*, \boldsymbol{b}_3^*, \ldots, \boldsymbol{b}_n^*$. Wir haben so bewiesen:

Wenn die Dimension von S_n ungerade ist und wenn noch die Bedingung (5) – und folglich auch (6) – besteht, so befindet sich der Schnittpunkt Q aller β_i auf dem durch alle B_i gehenden Großkreis. Auf diesem Großkreis ist Q der Durchschnitt der durch $B_1, B_3, \ldots, B_n$ und $B_2, B_4, \ldots, B_{n+1}$ bestimmten sphärischen Unterräume.

4. Polares $(n + 1)$-Eck. Im sphärischen Raum S_{n+1} ist wiederum ein normales sphärisches $(n + 1)$-Eck $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$ gegeben. Man bezeichne W_i den durch die Vektoren

$$\boldsymbol{a}_{i+1}, \boldsymbol{a}_{i+2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{n+1}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1} \tag{12}$$

gebildeten Vektorenraum. Mit dem Symbol $[\ldots]$ resp. $\{\ldots\}$ bezeichne man den Vektorenprodukt resp. Gemischtenprodukt der Vektoren. Die Zahl $\mu_i \in (0, \pi)$ durch die Gleichung

$$\cos \mu_i = \frac{[\boldsymbol{a}_{i+2}\boldsymbol{a}_{i+3} \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\boldsymbol{a}_i] \cdot [\boldsymbol{a}_{i+2}\boldsymbol{a}_{i+3} \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\boldsymbol{a}_{i+1}]}{|[\boldsymbol{a}_{i+2}\boldsymbol{a}_{i+3} \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\boldsymbol{a}_i]| \, |[\boldsymbol{a}_{i+2}\boldsymbol{a}_{i+3} \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\boldsymbol{a}_{i+1}]|} \tag{13}$$

definiert, bezeichnen wir als Winkelgröße der orientierten Vektorenräume W_i und W_{i+1}.

Wir werden auch von μ_i als von Größe des Winkels sprechen, der im sphärischen Viereck gegenüber der Seite $\widehat{A_iA_{i+1}}$ liegt. Mit Hilfe der Gleichung

$$\mathrm{m}_i = (-1)^{in} [\boldsymbol{a}_{i+1}\boldsymbol{a}_{i+2} \ldots \boldsymbol{a}_{n+1}\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}] \tag{14}$$

definieren wir $n + 1$ Vektoren m_i, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Den Einheitsvektor der übereinstimmend parallel mit dem Vektor m_i ist, bezeichnen wir $\boldsymbol{a}_i'$. Weiter konstruieren wir mit Hilfe der Gleichung

$$A_i' = S + \boldsymbol{a}_i' \tag{15}$$

$n+1$ Punkte A'_i. Das Vieleck $A'_1 A'_2 \ldots A'_{n+1}$ ist ein Normalvieleck im S_n. Wir nennen es *Polarvieleck* des Vielecks $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$.

Man bezeichne mit a'_i die Größe der nichtorientierten Winkel der Vektoren $\boldsymbol{a}'_i, \boldsymbol{a}'_{i+1}$ und μ'_i die Größe des gegenüber der Seite $\widehat{A'_i A'_{i+1}}$ liegenden Winkels. Man setze voraus, daß der Raum E_{n+1} so orientiert ist, daß

(16) $$V \equiv \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n+1}\} > 0 .$$

gilt.

Rechnen wir das Skalarprodukt $\boldsymbol{a}'_i \,.\, \boldsymbol{a}_i$. Es gilt

(17) $$\boldsymbol{a}'_i \,.\, \boldsymbol{a}_i = \frac{\boldsymbol{m}_i \,.\, \boldsymbol{a}_i}{|\boldsymbol{m}_i|} .$$

Benutzen wir die bekannten Eigenschaften des Vektorenprodukts, ergibt sich mit Hilfe von (17), (14) und (16)

$$\boldsymbol{a}_i \,.\, \boldsymbol{a}'_i = \frac{(-1)^{in} (-1)^{in} V}{|\boldsymbol{m}_i|} = \frac{V}{|\boldsymbol{m}_i|} > 0 .$$

Da weiter $\boldsymbol{a}_i \,.\, \boldsymbol{a}'_j = 0$, für jedes Paar $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n+1$, gilt (siehe auch [2] S. 161–164):

(18) $$\begin{array}{llll} \boldsymbol{a}_1 \,.\, \boldsymbol{a}'_1 > 0, & \boldsymbol{a}_2 \,.\, \boldsymbol{a}'_1 = 0, & \ldots, & \boldsymbol{a}_{n+1} \,.\, \boldsymbol{a}'_1 = 0 , \\ \boldsymbol{a}_1 \,.\, \boldsymbol{a}'_2 = 0, & \boldsymbol{a}_2 \,.\, \boldsymbol{a}'_2 > 0, & \ldots, & \boldsymbol{a}_{n+1} \,.\, \boldsymbol{a}'_2 = 0 , \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{a}_1 \,.\, \boldsymbol{a}'_{n+1} = 0, & \boldsymbol{a}_1 \,.\, \boldsymbol{a}'_{n+1} = 0, & \ldots, & \boldsymbol{a}_{n+1} \,.\, \boldsymbol{a}'_{n+1} > 0 . \end{array}$$

Kennen wir die Einheitsvektoren $\boldsymbol{a}_i$, werden durch das System (18) die Einheitsvektoren $\boldsymbol{a}'_i$ eindeutig festgesetzt. Mit Hilfe (18) können wir also zum gegebenen Normalvieleck eindeutig sein Polarvieleck feststellen.

Aus der Symetrie des Systems (18) ergibt sich aber augenblicklich, daß zu dem gegebenen Polarvieleck eben das ursprüngliche Vieleck polar ist. Wir leiten die Beziehung zwischen a'_i und μ_i ab.

Aus den angeführten Definitionen und aus (14) ergibt sich, daß

$$\cos a'_i = \boldsymbol{a}'_i \,.\, \boldsymbol{a}'_{i+1} = \frac{\boldsymbol{m}_i \,.\, \boldsymbol{m}_{i+1}}{|\boldsymbol{m}_i|\,|\boldsymbol{m}_{i+1}|} =$$

$$= \frac{(-1)^{in} [\boldsymbol{a}_{i+1}\boldsymbol{a}_{i+2} \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}] \,.\, (-1)^{(i+1)n} [\boldsymbol{a}_{i+2}\boldsymbol{a}_{i+3} \ldots \boldsymbol{a}_i]}{|\boldsymbol{m}_i|\,|\boldsymbol{m}_{i+1}|} =$$

$$= \frac{[\boldsymbol{a}_{i+2}\boldsymbol{a}_{i+3} \ldots \boldsymbol{a}_i] \,.\, [\boldsymbol{a}_{i+2}\boldsymbol{a}_{i+3} \ldots \boldsymbol{a}_{i-1}\boldsymbol{a}_{i+1}] (-1)^{in+(i+1)n} (-1)^{n-1}}{|\boldsymbol{m}_i|\,|\boldsymbol{m}_{i+1}|} .$$

Weil $(-1)^{in+(i+1)n}(-1)^{n-1} = (-1)^{2n(i+1)-1} = -1$ ist, können wir im Hinblick auf (13) das vorgehende Resultat kurz als

$$\cos a_i' = -\cos \mu_i \tag{19}$$

schreiben.

Daraus ergibt sich

$$\mu_i + a_i' = \pi . \tag{20}$$

Da beide untersuchte Vielecke miteinander polar sind, muß auch $\cos a_i = -\cos \mu_i'$ also

$$a_i + \mu_i' = \pi \tag{21}$$

gelten.

Die Gleichungen (20) und (21) sind eine Verallgemeinerung der aus der sphärischen Trigonometrie bekannten Gleichungen.

5. Dualsätze. Es sei $A_1A_2 \dots A_{n+1}$ ein normales sphärisches Vieleck im S_n und $A_1'A_2' \dots A_{n+1}'$ ein ihm polares Vieleck. Wählen wir eine natürliche Zahl $i \in \{1, 2, \dots \dots, n+1\}$ und eine reale Zahl $k_i \neq 0$. Konstruieren wir den Punkt B_i so, daß $(A_iA_{i+1}B_i) = k_i$. Erwägen wir ein sphärisches Vieleck $A_1A_2 \dots A_{i-1}B_iA_{i+1} \dots A_{n+1}$. Es ist leicht zu beweisen, daß es im S_n normal ist.

Als Polarvieleck zu ihm ist das Vieleck $A_1'A_2' \dots A_i'B_i'A_{i+2}' \dots A_{n+1}'$, wo der Punkt B_i' durch die Gleichung

$$\boldsymbol{b}_i' = \frac{(-1)^{(i+1)n}\left[\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a}_{i+2} \dots \boldsymbol{a}_{n+1}\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_{i-1}\right]}{\left|\left[\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{a}_{i+2} \dots \boldsymbol{a}_{n+1}\boldsymbol{a}_1 \dots \boldsymbol{a}_{i-1}\right]\right|} \tag{22}$$

bestimmt ist.

Bezeichnen wir b_i als Größe der nichtorientierten Winkel der Vektoren $\boldsymbol{b}_i$, $\boldsymbol{a}_{i+1}$ und v_i die Größe des gegenüber der Seite $\overset{\frown}{B_iA_{i+1}}$ liegenden Winkels. Ähnlich bezeichne man b_i' die Größe des nichtorientierten Winkels der Vektoren $\boldsymbol{a}_i'$, $\boldsymbol{b}_i'$ und v_i' die Größe des gegenüber der Seite $\overset{\frown}{A_i'B_i'}$ liegenden Winkels. Im vorhergehenden Absatz haben wir die Gleichungen (20) und (28) abgeleitet, die hier die Form

$$v_i + b_i' = \pi , \tag{23}$$

$$b_i + v_i' = \pi \tag{24}$$

haben.

Da die Punkte A_i, A_{i+1}, B_i auf einer Kreislinie liegen (sogar in einer Halbkreislinie mit dem Endpunkt A_{i+1}), liegen die Punkte A_{i+1}', A_i', B_i' auch auf einer Kreislinie (sogar auf einer Halbkreislinie mit dem Endpunkt A_i').

Es hat also Sinn folgende Bezeichnung einzuführen:

(25) $$k'_i = (A'_{i+1}A'_iB'_i)\,.$$

Aus (25), (23) und (20) ergibt sich

$$k'_i = \frac{\sin(b'_i - a'_i)}{\sin b'_i} = \frac{\sin(\pi - \nu_i - \pi + \mu_i)}{\sin(\pi - \nu_i)}\,.$$

Wir können also

(26) $$k'_i = -\frac{\sin(\nu_i - \mu_i)}{\sin \nu_i}$$

schreiben.

Nun können wir verhältnismäßig leicht die nachfolgenden zwei Sätze beweisen:

Dualer Satz des Menelaos. *Im sphärischen Raum S_n sei ein normales $(n+1)$-Eck $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ gegeben. Mit Hilfe von (4) konstruieren wir auf jeder seiner Seite A_iA_{i+1} den Punkt B_i. Dann liegen alle Punkte B_i auf einem Großkreis eben dann, wenn*

(27) $$\frac{\sin(\nu_1 - \mu_1)}{\sin \nu_1}\,\frac{\sin(\nu_2 - \mu_2)}{\sin \nu_2}\ldots\frac{\sin(\nu_{n+1} - \mu_{n+1})}{\sin \nu_{n+1}} = 1$$

gilt.

Beweis. Konstruieren wir ein Polarvieleck $A'_1A'_2\ldots A'_{n+1}$ und mit Hilfe von (22) auf jeder seiner Seite $\widehat{A'_{i+1}A'_i}$ den Punkt B'_i. Durch den Punkt B'_i geht der Scheitelgroßkreis β'_i. Eine ausfürhlichere Erwägung würde beweisen, daß die Hyperebene des Großkreises β'_i senkrecht zur Linie SB_i ist.

Setzen wir zuerst voraus, daß alle Punkte B_i in einem Großkreis liegen, dessen Pol wir als Q bezeichnen. Jeder von diesen Scheitelgroßkreisen geht durch den Punkt Q. Es sind also die Bedingungen des Satzes von Ceva erfüllt und nach (25) und (7) können wir

(28) $$k'_1k'_2\ldots k'_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

schreiben. Aus (28) und (26) ergibt sich die Gleichung (27).

Setzen wir nun umgekehrt voraus, daß (27) und zugleich (28) gilt. Dem Satze von Ceva nach gehen alle Großkreise β_i durch den gemeinsamen Punkt Q'. Ein einfacher indirekter Beweis zeigt, daß sich daraus ergibt, daß alle Punkte B_i auf einem Großkreis liegen. Dadurch ist dieser Satz bewiesen.

Dualer Satz von Ceva. *Im sphärischen Raum S_n sei ein normales $(n+1)$-Eck $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ gegeben. Mit Hilfe von (4) konstruieren wir auf seiner jeder Seite*

A_iA_{i+1} den Punkt B_i und durch ihn führen wir den Scheitelgroßkreis β_i. Dann gehen alle Scheitelgroßkreise durch einen gemeinsamen Punkt eben dann, wenn

$$\frac{\sin(\nu_1 - \mu_1)}{\sin \nu_1} \frac{\sin(\nu_2 - \mu_2)}{\sin \nu_2} \cdots \frac{\sin(\nu_{n+1} - \mu_{n+1})}{\sin \nu_{n+1}} = (-1)^{n+1} \tag{29}$$

gilt.

Beweis. Setzen wir voraus, daß alle Großkreise β_i durch den gemeinsamen Punkt Q gehen. Daraus ergibt sich, daß $\boldsymbol{b}_i \perp SO$ für $i \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$. Alle Punkte B'_i liegen also auf einem Großkreis. Benützen wir den Satz des Menelaos, (25) und (5), können wir

$$k'_1 k'_2 \ldots k'_{n+1} = 1$$

schreiben. Daraus und aus (26) ergibt sich (29). Es ist leicht zu beweisen, daß auch umgekehrt aus der Voraussetzung (29) sich ergibt, daß alle Großkreise β_i durch einen gemeinsamen Punkt gehen, und so den Beweis des Satzes beenden.

6. Die Grenzwertsätze. Alle vorhergehenden Erwägungen sind leicht auch auf die n-dimensionale Kugelfläche eines beliebigen Radius $R > 0$ zu übertragen. In diesem Falle hat (3) die Form

$$k_i = \frac{\sin \dfrac{b_i - a_i}{R}}{\sin \dfrac{b_i}{R}} \tag{30}$$

und in (5), (7) und selbstverständlich auch in (27), (29) kommt zu keiner Veränderung.

Setzen wir voraus, daß $R \to \infty$, z. B. so, daß die Punkte A_i und Zahlen k_i fest sind, $a_i \to \bar{a}_i$, $b_i \to \bar{b}_i$, $\mu \to \bar{\mu}$, $\nu \to \bar{\nu}$, $B_i \to \bar{B}_i$. Der Grenzübergang ermöglicht uns den Satz des Menelaos und den von Ceva für ein normales $(n + 1)$-Eck im euklidischen Raum abzuleiten.

Da

$$k_i = \lim_{R \to \infty} \frac{\sin \dfrac{b_i - a_i}{R}}{\sin \dfrac{b_i}{R}} = \frac{\bar{b}_i - \bar{a}_i}{\bar{b}_i}$$

ist, haben die Gleichungen (5) und (7) nach dem Grenzübergang die Form

$$\prod_{i=1}^{n+1} \frac{\bar{b}_i - \bar{a}_i}{\bar{b}_i} = 1 \quad \text{und} \quad \prod_{i=1}^{n+1} \frac{\bar{b}_i - \bar{a}_i}{\bar{b}_i} = (-1)^{n+1}. \tag{31}$$

Die ausführliche Formulierung der Sätze von Menelaos und Ceva für die Vielecke in E_n ist in [3] und [1].

Sagen wir nur noch, daß $\bar{a}_i$ eine orientierte Entfernung der Punkte A_i, A_{i+1} und $\bar{b}_i$ die Entfernung der Punkte B_i, A_{i+1} ist.

Gehen wir in den Gleichungen (27) und (29) zum Grenzwert für $R \to +\infty$ über, erhalten wir die Gleichungen

$$(32) \qquad \prod_{i=1}^{n+1} \frac{\sin(\bar{v}_i - \bar{\mu}_i)}{\sin \bar{v}_i} = 1 \quad \text{und} \quad \prod_{i=1}^{n+1} \frac{\sin(\bar{v}_i - \bar{\mu}_i)}{\sin \bar{v}_i} = (-1)^{n+1},$$

die ekvivalent mit den Gleichungen (31) sind. Die Gleichung drückt den sgn. Dualensatz des Menelaos und den sgn. Dualensatz von Ceva für das im euklidischen Raum E_n sich befindende normale $(n + 1)$-Eck aus.

Wobei μ_i die Größe des orientierten Winkels der Hyperebenen $A_{i+2} \dots A_n A_1 \dots \dots A_{i-1} A_i$, $A_{i+2} \dots A_n A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1}$ und $\bar{v}_i$ die Größe des orientierten Winkels der Großebenen $A_{i+2} \dots A_n A_1 \dots A_{i-1} B_i$, $A_{i+2} \dots A_n A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1}$ ist.

Literatur

[1] *B. Budinský - Z. Nádeník:* Mehrdimensionales Analogon zu den Sätzen von Menelaos und Ceva, Čas. pro pěst. mat., *97* (1972), str. 75—77.

[2] *E. Čech:* Analytická geometrie II, Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1951.

[3] *Z. Nádeník:* Rozšíření vět Menelaovy a Cevovy na n-dimensionální útvary, Čas. pro pěst. mat., *81* (1956), str. 1—25.

[4] *Z. Nádeník:* Několik vlastností vrcholových nadrovin normálního mnohoúhelníka, Čas. pro pěst. mat., *81* (1956), str. 287—291.

[5] *Б. А. Розенфельд:* Многомерные пространства, Москва 1966.

[6] *H. Sasayama:* General coordinate geometries VI., Journal of spatial mathematics, Japan, *3*, 1960, p. 125—134.

Anschrift des Verfassers: Praha 2, Trojanova 13 (České vysoké učení technické).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

STEJNOMĚRNÁ STABILITA A STEJNOMĚRNÁ ASYMPTOTICKÁ STABILITA MNOŽIN VZHLEDEM K SPOJITÉMU TOKU

FRANTIŠEK TUMAJER, Liberec

(Received August 19, 1970)

1. DEFINICE ABSTRAKTNÍHO SPOJITÉHO TOKU

1.1. Označení. V práci se studují některé vlastnosti parciálního zobrazení $t : R^1 \times P \times R^1 \to P$, kde P je metrický prostor s metrikou ϱ a R^1 množina všech reálných čísel s eukleidovskou metrikou. O parciálním zobrazení t předpokládáme, že splňuje následující podmínku

$$(\beta, x, \alpha) \in \text{domain } t \Rightarrow \beta \geqq \alpha \quad \text{v} \quad R^1 . \tag{1}$$

Symbolem ${}_\beta t_\alpha$ označíme parciální zobrazení z P do P definované předpisem

$${}_\beta t_\alpha x = t(\beta, x, \alpha) .$$

Symbolem E budeme rozumět $\{(x, \alpha) \in P \times R^1 : (\alpha, x, \alpha) \in \text{domain } t\}$. Pomocí právě zavedených pojmů a označení vyslovíme následující definici.

1.2. Definice. Říkáme, že t je *tok* na P nad R^1, právě když t je parciální zobrazení $R^1 \times P \times R^1 \to P$ s podmínkou (1) a mající následující vlastnosti:

(i) $(x, \alpha) \in E \Rightarrow {}_\alpha t_\alpha x = x$,

(ii) ${}_\gamma t_\beta \circ {}_\beta t_\alpha x = {}_\gamma t_\alpha x$ pro všechna $\gamma \geqq \beta \geqq \alpha$, kdykoliv je jedna z obou stran této rovnosti definována.

1.3. Poznámka. Je-li dán tok t a $(x, \alpha) \in E$, je přirozené ptát se po vlastnosti množiny $\{\vartheta \in R^1 : (\vartheta, x, \alpha) \in \text{domain } t\}$. Je zřejmé přímo z definice toku, že tato množina tvoří interval v R^1 mající α jako počáteční bod. Označme

$$\varepsilon : E \to (-\infty, +\infty\rangle : \varepsilon(x, \alpha) = \sup \{\vartheta \in R^1 : (\vartheta, x, \alpha) \in \text{domain } t\} .$$

1.4. Definice. Říkáme, že tok t na P nad R^1 je *lokální*, resp. *globání*, právě když platí $\varepsilon(x, \alpha) > \alpha$, resp. $\varepsilon(x, \alpha) = +\infty$ pro všechna $(x, \alpha) \in E$.

1.5. Definice. Nechť t je tok na P nad R^1. Říkáme, že s je *řešením* toku t, právě když

(i) s je parciální zobrazení z R^1 do P,

(ii) domain s je interval v R^1,

(iii) $s(\beta) = {}_\beta t_\alpha\, s(\alpha)$ platí pro všechna $\alpha \leqq \beta$ v domain s.

1.6. Definice. Říkáme, že lokální tok t na P nad R^1 je *spojitý*, právě když jsou všechna jeho řešení spojitá zobrazení.

Jako základní interpretaci definice 1.6 uvedeme příklad.

1.7. Příklad. Nechť je dána diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\vartheta} = f(x, \vartheta) \tag{2}$$

v n-rozměrném eukleidovském prostoru R^n, kde $f : E \to R^n$ je spojité zobrazení otevřené podmnožiny E prostoru R^{n+1} splňující Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnné x. Řešení rovnice (2) jsou parciální zobrazení $s : R^1 \to R^n$ taková, že domain s je interval v R^1 takový, že platí

$$\frac{\mathrm{d}s(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} = f(s(\vartheta), \vartheta) \quad \text{pro všechna} \quad \vartheta \in \text{domain } s\,.$$

K diferenciální rovnici (2) můžeme přiřadit spojitý tok t na R^n nad R^1 tímto způsobem:

$$\text{definujme} \quad y = t(\beta, x, \alpha) \quad \text{právě když} \quad x, y \in R^n\,, \quad \alpha \leqq \beta \ \text{v} \ R^1$$

a existuje řešení rovnice (2) nabývající hodnotu x v bodě α a y v β.

1.8. Poznámka. Zřejmě každý tok t na P nad R^1 definuje na odpovídajícím E částečné uspořádání předpisem

$$(y, \beta) \succ (x, \alpha) \Leftrightarrow y = t(\beta, x, \alpha)\,.$$

Je tedy přirozené vyslovit následující definici.

1.9. Definice. Nechť t je tok na P nad R^1. Parciální zobrazení

$$V : E \to R^1$$

nazýváme *ljapunovskou funkcí* toku t, právě když je V nezáporné a nerostoucí podél t, tj. právě když ze vztahů

$$(y, \beta) \in \text{domain } V,\ (x, \alpha) \in \text{domain } V, \quad y = t(\beta, x, \alpha) \Rightarrow 0 \leqq V(y, \beta) \leqq V(x, \alpha)\,.$$

2. STEJNOMĚRNÁ STABILITA A STEJNOMĚRNÁ ASYMPTOTICKÁ STABILITA

2.1. Označení. Kromě symboliky zavedené v předcházející části budeme v následujícím textu používat tato další označení. R^0, R^+, I znamenají po řadě množiny $\langle 0, +\infty)$, $(0, +\infty)$, $(0, 1\rangle$. Dále předpokládáme, že je dána neprázdná uzavřená množina

$$m \subset P \times R^1 \tag{1}$$

taková, že zobrazení

$$g : P \times R^1 \to R^0 \tag{2}$$

definované předpisem

$$g(x, \alpha) = \inf \{\varrho(x, y) : (y, \alpha) \in m\}$$

je spojité.

2.2. Poznámka. Z definice zobrazení g je zřejmé, že platí

$$(x, \alpha) \in m \Leftrightarrow g(x, \alpha) = 0 . \tag{3}$$

2.3. Definice. Říkáme, že m je *invariantní* vzhledem k toku t, právě když platí

$$(\vartheta, x, \alpha) \in \text{domain } t , \quad (x, \alpha) \in m \Rightarrow ({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \in m .$$

2.4. Poznámka. Ze vztahu (3) plyne, že m je invariantní vzhledem k t, právě když platí

$$(\vartheta, x, \alpha) \in \text{domain } t , \quad g(x, \alpha) = 0 \Rightarrow g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta,) = 0 .$$

2.5. Definice. Říkáme, že m je *stejnoměrně stabilní* vzhledem k toku t, právě když existuje zobrazení

$$\psi : I \to I \tag{4}$$

takové, že platí

$$(\vartheta, x, \alpha) \in \text{domain } t , \quad g(x, \alpha) \leqq \psi(\xi) \Rightarrow g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \leqq \xi . \tag{5}$$

2.6. Věta. *Nechť m je stejnoměrně stabilní vzhledem k toku t. Potom je m invariantní vzhledem k t.*

Důkaz. Nechť existuje $(\beta, x, \alpha) \in \text{domain } t$ takové, že $g(x, \alpha) = 0$, $g({}_\beta t_\alpha x, \beta) = k > 0$. Zřejmě pro každou volbu zobrazení ψ v (4) a pro každé $k_1 \in (0, k) \cap I$ platí $g(x, \alpha) \leqq \psi(k_1)$ a $g({}_\beta t_\alpha x, \beta) > k_1$, což je spor s (5).

2.7. Věta. *m je stejnoměrně stabilní vzhledem k spojitému toku t, právě když existuje ljapunovská funkce V s následujícími vlastnostmi:*

(i) *existuje* $\delta \in I$ *takové, že* domain $V = \{(x, \alpha) \in E : g(x, \alpha) \leqq \delta\}$,

(ii) *existují rostoucí spojitá zobrazení* $a : (0, \delta\rangle \to R^+$, $b : (0, \delta\rangle \to R^+$, $b(\xi) \to 0$ *pro* $\xi \to 0_+$ *taková, že platí*

$$(x, \alpha) \in \text{domain } V,\ 0 < g(x, \alpha) \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, \alpha) \leqq b(g(x, \alpha)).$$

Důkaz. Nechť m je stejnoměrně stabilní. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že zobrazení ψ z definice 2.5 je rostoucí a spojité s $\lim_{\xi \to 0_+} \psi(\xi) = 0$. Zvolme $\sigma > 1$, položme $\delta = \psi(1)$ a definujme parciální zobrazení $V : E \to R^0$ předpisem

$$V(x, \alpha) = \sup \left\{ g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} : \vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, \alpha)) \right\} \tag{6}$$

pro $(x, \alpha) \in E$ s $g(x, \alpha) \leqq \delta$. (Činitel $(1 + (\vartheta - \alpha)\sigma)/(1 + \vartheta - \alpha)$ je zde uveden jen pro aplikaci v důkazu následující věty). Z (5) vyplývá, že zobrazení V je pro uvedená (x, α) předpisem (6) skutečně definováno. Má tedy V vlastnost (i). Nechť jsou dány $(x, \alpha) \in$ domain V, $(y, \beta) \in$ domain V, $y = {}_\beta t_\alpha x$. Pak pro každé $z = {}_\vartheta t_\beta y$ platí také

$$z = {}_\vartheta t_\alpha x \quad \text{a} \quad \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} \geqq \frac{1 + (\vartheta - \beta)\sigma}{1 + \vartheta - \beta},$$

takže

$$V(y, \beta) = \sup \left\{ g({}_\vartheta t_\beta y, \vartheta) \frac{1 + (\vartheta - \beta)\sigma}{1 + \vartheta - \beta} : \vartheta \in \langle \beta, \varepsilon(y, \beta)) \right\} \leqq$$

$$\leqq \sup \left\{ g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} : \vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, \alpha)) \right\} = V(x, \alpha).$$

Odtud plyne, že zobrazení V je ljapunovskou funkcí. Je-li nyní $(x, \alpha) \in$ domain V, $g(x, \alpha) > 0$, existuje $\xi \in I$ tak, že $g(x, \alpha) = \psi(\xi)$, odkud dostáváme pomocí (5)

$$g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \leqq \xi = \psi^{-1}(g(x, \alpha))$$

pro každé $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, \alpha))$. Jelikož je $(1 + (\vartheta - \alpha)\sigma)/(1 + \vartheta - \alpha) < \sigma$, plyne odtud vztah

$$V(x, \alpha) \leqq \sigma \psi^{-1}(g(x, \alpha)). \tag{7}$$

Zřejmě platí

$$g(x, \alpha) \in \left\{ g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} : \vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, \alpha)) \right\},$$

takže

$$g(x, \alpha) \leqq V(x, \alpha). \tag{8}$$

Definujeme-li nyní zobrazení a, b z (ii) předpisem

$$a(\xi) = \xi\,, \quad b(\xi) = \sigma\, \psi^{-1}(\xi) \quad \text{pro} \quad \xi \in (0, \delta\rangle\,,$$

vyplývá z (7) a (8), že V má také vlastnost (ii).

Nechť nyní existuje ljapunovská funkce V s vlastnostmi (i) a (ii). Zvolme $0 < \delta_0 < \delta$ a definujme zobrazení ψ z (4) tak, aby platil vztah

$$0 < b(\psi(\xi)) \leqq a(\xi) \quad \text{pro} \quad 0 < \xi \leqq \delta_0 \quad \text{a} \quad \psi(\xi) = \psi(\delta_0) \quad \text{pro} \quad \delta_0 < \xi \leqq 1$$

a ukažme, že platí (5).

Nechť je dáno $0 < \xi \leqq \delta_0$ a předpokládejme, že existuje $(x, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi(\xi)$ tak, že pro nějaké $\gamma \in \langle\alpha, \varepsilon(x, \alpha))$ platí $\xi < g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma)$. Označme $\beta_0 = \inf\{\beta \in R^1 : g({}_\beta t_\alpha x, \beta) = \xi\}$. Protože t a g jsou spojité, můžeme o $\gamma > \beta_0$ předpokládat, že je $g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \leqq \delta$ pro všechna $\vartheta \in \langle\beta_0, \gamma\rangle$. Pak je $a(g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma)) \leqq V({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) \leqq V(x, \alpha) \leqq$ $\leqq b(g(x, \alpha)) \leqq b(\psi(\xi)) \leqq a(\xi)$, odkud plyne $g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) \leqq \xi$, což je spor s naším předpokladem.

2.8. Definice. Říkáme, že m je *stejnoměrně asymptoticky stabilní* vzhledem k toku t, právě když m je stejnoměrně stabilní vzhledem k t a existují konstanta

$$\Omega \in I \tag{9}$$

a zobrazení

$$T : I \to R^+ \tag{10}$$

takové, že platí

$$(\vartheta, x, \alpha) \in \text{domain}\ t\,, \quad g(x, \alpha) \leqq \Omega\,, \quad \vartheta \geqq \alpha + T(\xi) \Rightarrow g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \leqq \xi\,.$$

2.9. Věta. *m je stejnoměrně asymptoticky stabilní vzhledem ke spojitému globálnímu toku t, právě když existuje ljapunovská funkce V s vlastnostmi* 2.7(i), 2.7(ii) *a*

(iii) *existuje rostoucí spojité zobrazení $c : (0, \delta\rangle \to R^+$ s $\lim_{\xi \to 0+} c(\xi) = 0$ takové, že platí*

$$(x, \alpha) \in \text{domain}\ V \Rightarrow V({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) - V(x, \alpha) \leqq - \int_\alpha^\vartheta c(g({}_v t_\alpha x, v))\, \mathrm{d}v\,,$$

kdykoliv je $c(g({}_v t_\alpha x, v))$ definováno pro všechna $v \in \langle\alpha, \vartheta\rangle$.

Důkaz. Nechť m je stejnoměrně asymptoticky stabilní vzhledem k t. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že zobrazení T z definice 2.8 je klesající a spojité s $\lim_{\xi \to 0+} T(\xi) = +\infty$. Položme $\delta = \min\{\Omega, \psi(1)\}$, zvolme $\sigma > 1$ a definujme parciální zobrazení $V : E \to R^0$ předpisem (6). Odtud a z důkazu věty 2.7 plyne, že V je ljapunovskou funkcí s vlastnostmi 2.7(i) a 2.7(ii). Nechť je dáno $(x, \alpha) \in \text{domain}\ V$, $g(x, \alpha) >$

> 0. Pak z definice 2.8 pro všechna $\vartheta \geqq \alpha + T[g(x, \alpha)/\sigma^2]$ plyne $g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \leqq$ $\leqq g(x, \alpha)/\sigma^2$, odkud dostáváme

$$g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} \leqq \frac{g(x, \alpha)}{\sigma^2} \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} < \frac{g(x, \alpha)}{\sigma} < g(x, \alpha) \leqq V(x, \alpha),$$

takže

$$\sup \left\{ g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} : \vartheta \geqq \alpha + T\left(\frac{g(x, \alpha)}{\sigma^2}\right) \right\} < g(x, \alpha) \leqq V(x, \alpha).$$

Nyní ze spojitosti t a g vyplývá existence $\vartheta_0 \in \langle \alpha, \alpha + T[g(x, \alpha)/\sigma^2] \rangle$ takového, že platí

$$V(x, \alpha) = g({}_{\vartheta_0} t_\alpha x, \vartheta_0) \frac{1 + (\vartheta_0 - \alpha)\sigma}{1 + \vartheta_0 - \alpha}.$$

Označíme-li $y = {}_\beta t_\alpha x$ a $z = {}_\vartheta t_\beta y$, pak zřejmě pro $(y, \beta) \in$ domain V, $(z, \vartheta) \in$ domain V platí

$$V(z, \vartheta) = g({}_{\gamma_0} t_\vartheta z, \gamma_0) \frac{1 + (\gamma_0 - \vartheta)\sigma}{1 + \gamma_0 - \vartheta} = g({}_{\gamma_0} t_\vartheta \circ {}_\vartheta t_\beta y, \gamma_0) \frac{1 + (\gamma_0 - \vartheta)\sigma}{1 + \gamma_0 - \vartheta} =$$

$$= g({}_{\gamma_0} t_\beta y, \gamma_0) \frac{1 + (\gamma_0 - \beta)\sigma}{1 + \gamma_0 - \beta} \left[1 - \frac{(\sigma - 1)(\vartheta - \beta)}{(1 + \gamma_0 - \vartheta)[1 + (\gamma_0 - \beta)\sigma]} \right] \leqq$$

$$\leqq V(y, \beta) \left[1 - \frac{(\sigma - 1)(\vartheta - \beta)}{(1 + \gamma_0 - \vartheta)[1 + (\gamma_0 - \beta)\sigma]} \right],$$

takže

$$\frac{V(z, \vartheta) - V(y, \beta)}{\vartheta - \beta} \leqq -(\sigma - 1) \frac{V(y, \beta)}{(1 + \gamma_0 - \vartheta)[1 + (\gamma_0 - \beta)\sigma]}.$$

Odtud a ze vztahů

$$0 \leqq \gamma_0 - \vartheta \leqq T\left(\frac{g(z, \vartheta)}{\sigma^2}\right), \quad 0 < \gamma_0 - \beta \leqq T\left(\frac{g(z, \vartheta)}{\sigma^2}\right) + \vartheta - \beta$$

dostáváme nerovnost

(11)

$$\frac{V(z, \vartheta) - V(y, \beta)}{\vartheta - \beta} \leqq -(\sigma - 1) \frac{V(y, \beta)}{\left[1 + T\left(\frac{g(z, \vartheta)}{\sigma^2}\right)\right]\left[1 + \sigma T\left(\frac{g(z, \vartheta)}{\sigma^2}\right) + \sigma(\vartheta - \beta)\right]} \leqq$$

$$\leqq -(\sigma - 1) \frac{g(y, \beta)}{\left[1 + T\left(\frac{g(z, \vartheta)}{\sigma^2}\right)\right]\left[1 + \sigma T\left(\frac{g(z, \vartheta)}{\sigma^2}\right) + \sigma(\vartheta - \beta)\right]}.$$

Jelikož je $\lim_{\vartheta \to \beta+} g(z, \vartheta) = \lim_{\vartheta \to \beta+} g({}_\vartheta t_\beta y, \vartheta) = g(y, \beta)$ a funkce T je podle předpokladu spojitá, vyplývá z (11), že platí

$$\limsup_{\vartheta \to \beta+} \frac{V({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) - V({}_\beta t_\alpha x, \beta)}{\vartheta - \beta} \leqq$$

$$\leqq \frac{-(\sigma - 1)\, g({}_\beta t_\alpha x, \beta)}{\left[1 + T\left(\frac{g({}_\beta t_\alpha x, \beta)}{\sigma^2}\right)\right]\left[1 + \sigma T\left(\frac{g({}_\beta t_\alpha x, \beta)}{\sigma^2}\right)\right]}.$$

Definujeme-li zobrazení c z (iii) předpisem

$$c(\xi) = (\sigma - 1) \frac{\xi}{\left[1 + T\left(\frac{\xi}{\sigma^2}\right)\right]\left[1 + \sigma T\left(\frac{\xi}{\sigma^2}\right)\right]}$$

a uvědomíme-li si, že zobrazení T je spojité a klesající, vidíme, že ljapunovská funkce V má také vlastnost (iii).

Nechť nyní existuje ljapunovská funkce V mající vlastnosti 2.7(i), 2.7(ii) a (iii). Z vlastností 2.7(i) a 2.7(ii) vyplývá podle věty 2.7, že m je stejnoměrně stabilní. Zvolme $0 < \delta_0 < \delta$ a položme $\Omega = b^{-1}(a(\delta_0))$. Předpokládejme, že existují $(x, \alpha) \in \in \operatorname{domain} V$, $g(x, \alpha) \leqq \Omega$, $\gamma \geqq \alpha$ takové, že platí

$$g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) > \delta_0 .$$

Podobně jako v důkazu věty 2.7 se snadno ukáže, že lze předpokládat $g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) \leqq \delta$. Pak je

$$a(g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) \leqq V({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) \leqq V(x, \alpha) \leqq b(g(x, \alpha)) \leqq b(\Omega) = a(\delta_0),$$

odkud plyne $g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) \leqq \delta_0$, což je spor s naším předpokladem. Je-li tedy $(x, \alpha) \in \in \operatorname{domain} V$ a $g(x, \alpha) \leqq \Omega$, potom je také $({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \in \operatorname{domain} V$ pro všechna $\vartheta \geqq \alpha$. Definujme zobrazení T z 2.8(10) předpisem

$$T(\xi) = \frac{b(\Omega)}{c(\psi(\xi))},$$

kde ψ je zobrazení z definice 2.5 a ukažme, že Ω a T vyhovují definici 2.8. Nechť jsou dány $(x, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \Omega$ a $\xi \in I$. Předpokládejme, že pro nějaké $\beta \geqq \alpha + T(\xi)$ platí vztah $g({}_\beta t_\alpha x, \beta) > \xi$. Je-li $\psi(\xi) < g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \leqq \delta$ pro všechna $\vartheta \in \langle \alpha, \beta \rangle$, pak z (iii) plyne nerovnost

$$V({}_\beta t_\alpha x, \beta) \leqq V(x, \alpha) - \int_\alpha^\beta c(g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta))\, d\vartheta < b(\Omega) - c(\psi(\xi))\, T(\xi) = 0,$$

což je spor s definicí ljapunovské funkce. Existuje-li $\gamma \in \langle\alpha, \beta\rangle$ takové, že $g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) \leqq \leqq \psi(\xi)$, plyne ze vztahu ${}_\beta t_\alpha x = {}_\beta t_\gamma \circ {}_\gamma t_\alpha x$ nerovnost $g({}_\beta t_\alpha x, \beta) \leqq \xi$, což je spor s naším předpokladem. Odtud dostáváme, že pro každé $(\vartheta, x, \alpha) \in$ domain t, $g(x, \alpha) \leqq \Omega$, $\vartheta \geqq \alpha + T(\xi)$ platí $g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \leqq \xi$. Je tedy m stejnoměrně asymptoticky stabilní vzhledem k t.

Literatura

[1] *Nagy, J.*: Lyapunov's direct method in abstract local semi-flows, CMUC *8*, 2 (1967).

[2] *Tumajer, F.*: Ljapunovova metoda v teorii abstraktních procesů, kandidátská disertační práce, MÚ ČSAV v Praze.

Adresa autora: Liberec, Hálkova 6 (Vysoká škola strojní a textilní).

Summary

UNIFORM STABILITY AND UNIFORM ASYMPTOTIC STABILITY OF SETS WITH RESPECT TO A CONTINUOUS FLOW

FRANTIŠEK TUMAJER, Liberec

The notion of the continuous flow in a metric space is introduced and both uniform and uniform asymptotic stability of sets with respect to the flow are studied. In terms of Liapunov's functions theorems giving necessary and sufficient conditions for either type of stability are stated.

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

JIŘÍ SOUČEK, Praha: *Spaces of functions on domain Ω, whose k-th derivatives are measures defined on $\bar{\Omega}$.* (Prostory funkcí na Ω, jejichž k-té derivace jsou míry na $\bar{\Omega}$.)

V práci jsou definovány nové prostory funkcí, jejichž k-té derivace jsou míry. Tyto prostory se liší od prostorů BV nebo $\overline{BV}$ a tvoří základ pro zkoumání variačních problémů v nereflexivních prostorech, např. pro neparametrický problém minimální plochy.

ZDENA RIEČANOVÁ, Bratislava: *A note on weakly Borel measures.* (Poznámka o slabo borelovských mierach.)

Článok obsahuje tvrdenia o regulárnosti mier definovaných na najmenšom σ-okruhu nad systémom všetkých uzavretých podmnožín ľubovoľného (resp. lokálne kompaktného) Hausdorffovho topologického priestoru.

MARSHALL SAADE, Athens: *On decompositions of groupoids.* (O rozkladech grupoidů.)

V článku jsou dokázány věty o rozkladech pro grupoidy splňující jisté identity. Tyto věty byly motivovány studiem příkladů grupoidů, tzv. bodových algeber. Podmínky splněné v tomto případě byly použity pro obecnější případ.

LADISLAV DRS, Praha: *Parallele Axonometrie und Einschneideverfahren.* (Rovnoběžná axonometrie a Eckhartova metoda.)

V první části jsou uvedeny vzorce, určující rekonstrukci souřadnicové soustavy z její axonometrie dané speciální zářezovou (Eckhartovou) metodou (a-metoda). Konstrukcemi ve druhé části se získávají s-metody splňující dodatečné požadavky na jimi určené axonometrie (dimetrie, isometrie, kolmá axonometrie, názorná axonometrie). Poslední část je věnována obecnější a-metodě, pomocí níž lze již určit jakoukoli rovnoběžnou axonometrii.

JINDŘICH NEČAS, Praha: *Fredholm alternative for nonlinear operators and applications to partial differential equations and integral equations.* (Fredholmova alternativa pro nelineární operátory a aplikace na parciální diferenciální rovnice a integrální rovnice.)

Autor dokazuje za použití věty Borsukova typu Fredholmovu alternativu pro nelineární operátory a aplikuje ji na okrajové úlohy.

BRUNO BUDINSKÝ, Praha: *Zum Petrschen Satz.* (K Petrově větě.)

V roce 1905 publikoval K. Petr zajímavou a elegantní větu z teorie rovinných mnohoúhelníků. V předložené práci je podán čistě geometrický důkaz této věty, kterou K. Petr dokázal algebraicky.

Bruno Budinský a Zbyněk Nádeník, Praha: *Mehrdimensionales Analogon zu den Sätzen von Menelaos und Ceva.* (Vícerozměrné analogie k Menelaově a Cevově větě.)

Pomocí homogenních barycentrických souřadnic jsou odvozeny pro $(n + 1)$-úhelníky ležící v n-dimensionálním prostoru Menelaova a Cevova věta.

Bruno Budinský, Praha: *Sätze von Menelaos und Ceva für Vielecke im sphärischen n-dimensionalen Raum.* (Menelaova a Cevova věta pro mnohoúhelník ve sférickém n-dimensionálním prostoru.)

Pro normální mnohoúhelník ve sférickém prostoru S_n je dokázána Menelaova a Cevova věta. K danému mnohoúhelníku je definován polární mnohoúhelník, pomocí něhož jsou věty „dualisovány". Pomocí limitního přechodu, kdy poloměr kruhové plochy $R \to +\infty$, jsou dokázány Menelaova a Cevova věta a příslušné duální věty v euklidovském prostoru E_n.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

RŮZNÉ

O JEDNOM ZOVŠEOBECNENÍ ČÍSELNOTEORETICKÉHO VZŤAHU $[a_1, a_2] = \frac{a_1 a_2}{(a_1, a_2)}$ A JEHO POUŽITÍ

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 30. septembra 1970)

V tomto článku odvodíme jedno zovšeobecnenie vzťahu

$$[a_1, a_2] = \frac{a_1 a_2}{(a_1, a_2)} \tag{1}$$

a tento použijeme na riešenie diofantickej rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n] \tag{2}$$

v prirodzených číslach.

Lema. *Vzťah* (1) *možno písať v tvare*

$$[a_1, a_2] = (a_1, a_2)\left[\frac{[a_1, a_2]}{a_1}, \frac{[a_1, a_2]}{a_2}\right]. \tag{3}$$

Dôkaz. Platí

$$[a_1, a_2] = \frac{a_1 a_2}{(a_1, a_2)} = (a_1, a_2)\frac{a_1}{(a_1, a_2)} \cdot \frac{a_2}{(a_1, a_2)} = (a_1, a_2)\left[\frac{a_1}{(a_1, a_2)}, \frac{a_2}{(a_1, a_2)}\right] =$$

$$= (a_1, a_2)\left[\frac{[a_1, a_2]}{a_1}, \frac{[a_1, a_2]}{a_2}\right]$$

lebo

$$\left(\frac{a_1}{(a_1, a_2)}, \frac{a_2}{(a_1, a_2)}\right) = 1.$$

Tým je lema dokázaná.

Vzťah (3) možno zovšeobecniť pre ľubovoľný počet prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots$
$\ldots, a_n$, $n \geqq 2$.

Veta 1. *Nech* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \geqq 2$ *sú ľubovoľné prirodzené čísla. Potom platí*

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\left[\frac{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}{a_1}, \frac{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}{a_2}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \frac{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}{a_n}\right].$$

D ô k a z. Nech

$$a_i = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha_{i,j}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

pričom p_i sú prvočísla, $\alpha_{i,j}$ je pre každé i a každé j nezáporné celé číslo a aspoň pre jedno i číslo prirodzené. Potom

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\max\limits_i \alpha_{i,j}}$$

a teda

$$\left[\frac{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}{a_1}, \ldots, \frac{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}{a_n}\right] =$$

$$= \left[\prod_{j=1}^{k} p_j^{\max\limits_i \alpha_{i,j} - \alpha_{1,j}}, \ldots, \prod_{j=1}^{k} p_j^{\max\limits_i \alpha_{i,j} - \alpha_{n,j}}\right] = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\max\limits_i \alpha_{i,j} - \min\limits_i \alpha_{i,j}} = \frac{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$$

odkiaľ vyplýva tvrdenie vety.

Odvodenú vetu možno použiť pri riešení rovnice (2) v prirodzených číslach. O tejto rovnici pojednáva článok [1]. V ňom odvodenú vetu 1 môžeme pomocou tu odvodenej vety 1 doplniť.

Veta 2. *Všetky riešenia rovnice* (2) *v prirodzených číslach* $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ *dostaneme nasledovne:*

Nech $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *je ľubovoľné riešenie rovnice*

$$(5) \qquad \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \ldots + \frac{1}{\xi_n} = 1$$

v prirodzených číslach. Potom

$$(6) \qquad x_i = \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_i} t, \quad y = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

je riešenie rovnice (2) *v prirodzených číslach, keď* t *je ľubovoľné prirodzené číslo.*

Důkaz. Podľa vety (1) v článku [1] treba len dokázať, že $y = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Keďže podľa (2) a (6) je

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_i} t}{\left[\frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_1} t, \ldots, \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_n} t\right]} = \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]\, t}{t\left[\frac{[\xi_1, \ldots, \xi_n]}{\xi_1}, \ldots, \frac{[\xi_1, \ldots, \xi_n]}{\xi_n}\right]} =$$

$$= \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\left[\frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_1}, \ldots, \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_n}\right]} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

podľa vety 1, keďže $\sum_{i=1}^{n} 1/\xi_i = 1$ a $[ta_1, ta_2, \ldots, ta_n) = t[a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Poznámka. Ak $\xi_1 \leqq \xi_2 \leqq \ldots \leqq \xi_n$, platí $\xi_1 \leqq n$ a $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \leqq \xi_1$, takže $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \leqq n$, čo hovorí veta (2) v článku [1].

Literatúra

[1] *Bartoš, P.*: O riešení rovnice $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a rovnice $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = yx_1x_2 \ldots x_n$ v prirodzených číslach. Čas. pěst. mat. *94* (1971), 367—370.

Adresa autora: Bratislava, Sibírska 9.

RECENSE

P. Lorenzen „EINFÜHRUNG IN DIE OPERATIVE LOGIK UND MATHEMATIK", 2. vydání, Springer-Verlag Berlin—Heidelberg—New York, 1969, VIII + 298 str., 54,— DM.

Práce P. Lorenzena patří k dílům, jejichž cílem je ukázat možnost vybudování matematiky na základech, které vzbuzují méně pochybností než intuitivní teorie množin.

Autor vychází z toho, že finitní metody metamatematiky jsou přijímány jak zastánci klasické matematiky tak i formalisty a intuicionisty. Předmětem metamatematiky jsou určité kalkuly — formalisace matematických teorií. Proto P. Lorenzen bere za základ operativní logiky a matematiky studium libovolných kalkulů. Tím jsou z dalšího zkoumání vyloučena některá odvětví matematiky (např. geometrie). Naproti tomu zůstává vše, co patří k matematice v užším slova smyslu (aritmetika, analysa, topologie). Kromě stanovení předmětu studia je ještě nutno vymezit okruh „dovolených" metod. Autor, aby příliš nezúžil možnosti operativní matematiky, stanoví jedinou podmínku: zkoumané pojmy musí být „definitní". Pokusíme se vysvětlit, v čem toto omezení spočívá.

Kalkul K je určen zadáním abecedy A, seznamu slov v abecedě A (tzv. počátečních slov kalkulu) a seznamu odvozovacích pravidel v abecedě A, nazývaných pravidly kalkulu.

Řekneme, že konečná posloupnost slov v abecedě A — $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — je odvozením (slova P_n) v K, jestliže každé slovo této posloupnosti je buď počátečním slovem kalkulu K nebo se dá vytvořit ze slov, která mu v posloupnosti předcházejí, pomocí jednoho z odvozovacích pravidel kalkulu K. Zavedený pojem nazveme definitním, protože je možno efektivně (finitními metodami, manipulací se slovy) rozhodnout, zda je daná konečná posloupnost slov odvozením v daném kalkulu nebo není.

Řekneme, že slovo P je odvoditelné v kalkulu K (a označíme $\vdash_K P$), jestliže existuje odvození tohoto slova v K. Jak víme, existují kalkuly, pro něž problém odvoditelnosti slov není efektivně řešitelný. Zavedený pojem však nazveme definitním, protože k tomu, abychom potvrdili, že slovo je odvoditelné v kalkulu K, stačí předložit odvození tohoto slova v K a pojem „býti odvozením" je definitní.

Pojem „slovo ... není odvoditelné v kalkulu ..." nazveme též definitním, protože je možno předložením odvození slova P v K příslušný výrok vyvrátit.

Řekneme, že odvozovací pravidlo $\mathscr{A}$ je přípustné (resp. relativně přípustné) pro kalkul K, jestliže pro každé slovo P (resp. každé slovo P v abecedě kalkulu K) platí: $\vdash_K P$ právě když $\vdash_{K'} P$, kde K' označuje kalkul, který vznikne z K připojením odvozovacího pravidla $\mathscr{A}$. Zavedené pojmy jsou definitní, protože je možno příslušný výrok vyvrátit předložením slova P v odpovídající abecedě, které je odvoditelné v K' a není odvoditelné v K (příslušné pojmy jsou, jak již víme, definitní).

Stručně řečeno: pojem $\mathscr{P}$ je definitní, jestliže 1) problem pravdivosti odpovídajícího predikátu je efektivně řešitelný nebo 2) je zadán takový způsob, jak pravdivost příslušných výroků potvrdit (resp. vyvrátit), v němž všechny použité pojmy jsou již definitní.

Autor uvádí, že omezením se na definitní pojmy automaticky vyloučíme všechny nepredikativní pojmy. Poznamenejme, že množinami jsou v operativní matematice obory pravdivosti predikátů, vyjádřitelných formulemi.

Kniha má tři části. První (kapitoly 1—3) je věnována logice, druhá (kapitoly 4—6) — konkrétní matematice a třetí — abstraktní matematice.

V první kapitole P. Lorenzen zavádí pojem kalkulu a zkoumá metody, pomocí nichž je možno se přesvědčit, že dané odvozovací pravidlo je přípustné pro daný kalkul. Na základě získaných zkušeností nachází pět základních metod, které formuluje jako protologické principy (princip eliminace, indukce, inverse, neodvoditelnosti a grafické rovnosti). Uvádí, že tyto metody sice nevyčerpávají všechny možnosti, stačí však k vybudování logiky a matematiky v potřebném rozsahu.

V druhé kapitole na základě studia odvozovacích pravidel, která jsou přípustná pro libovolný kalkul, a relativně přípustných pravidel autor zavádí logické spojky a kvantory a odvozuje příslušné logické zákony. Ukazuje se, že tímto způsobem dostaneme intuicionistickou logiku, kdežto platnost klasické logiky nelze prokázat (proto ji autor nazývá fiktivní logikou). Je ovšem známo (van Dantzig), že je možno přiřadit pomocí systému pravidel každé klasické formuli F formuli F' tak, že a) F a F' jsou klasicky ekvivalentní a b) formule F' je dokazatelná klasicky, právě když je dokazatelná intuicionisticky. Na základě toho autor dochází k závěru, že použití klasické logiky je možno v mnohých případech ospravedlnit. Ve své knize užívá P. Lorenzen klasické logiky, např. při budování analysy.

Třetí kapitola je věnována diskusi o možnostech rozšíření logiky o grafickou rovnost slov, individuální termy, funktory a relace. Kapitola je zakončena paragrafem o modalitě a pravděpodobnosti.

Čtvrtá kapitola obsahuje elementární teorii konečných množin. Na tomto základě je budována aritmetika a je ukázáno, že je v rámci daného systému možno definovat funkce primitivní rekursí. Závěr kapitoly je věnován teorii reálných algebraických čísel, které je v dalším metodicky využito při definování reálných čísel.

Další dvě kapitoly obsahují základy analysy. Ukazuje se, že je třeba vybudovat hierarchii jazyků (do určitého limitního spočetného ordinálního čísla většího než ω^2). To s sebou přináší výsledky, které se značně odchylují od klasických představ. Dostáváme tak např. celou hierarchii druhů množin přirozených čísel. Pojmy spočetnosti a nespočetnosti množin se stávají relativními: množina všech množin přirozených čísel, vyjádřitelných v jazyce S_σ je nespočetná vzhledem k S_σ a spočetná vzhledem k $S_{\sigma+1}$.

Reálnými čísly jsou nazývány ty řezy množiny všech racionálních čísel, které lze vyjádřit v jazyce S_{ω^2} (tj. v některém jazyce menšího typu). Množinu (resp. posloupnost) nazveme primární, je-li ji možno vyjádřit v jazyce S_{ω^2}.

Uvedeme alespoň několik základních výsledků. Pro primární množiny reálných čísel platí věta o supremu a Borelova věta o pokrytí, každá omezená posloupnost reálných čísel má hromadný bod. Pro tzv. quasiprimární funkce jsou dokázány základní věty o spojitých funkcích známé z klasické matematiky.

V závěru šesté kapitoly autor ukazuje, jak je možno v operativní matematice definovat měřitelné funkce a vybudovat teorii Riemannova a Lebesgueova integrálu.

Zbývající dvě kapitoly jsou věnovány úvahám o významu axiomatických systémů a základům algebry a topologie.

Osvald Demuth, Praha

Underwood Dudley: ELEMENTARY NUMBER THEORY, edice "A Series of Books in Mathematics", W. H. Freeman & Co., San Francisco, 1969, vázané, 262 stran.

Kniha je učebnicí elementární teorie čísel. Od čtenáře nepředpokládá žádnou speciální matematickou erudici kromě znalosti základních vlastností reálných čísel a elementární algebry. Uvádí čtenáře do většiny partií elementární teorie čísel a to velmi poutavým způsobem. Protože autor počítal se širokou čtenářskou obcí, především z řad mladších studentů matematiky, jsou důkazy psány elementární formou a podrobně a pro snadnější pochopení a zvládnutí teorie je zařazeno značné množství numerických příkladů. Na druhé straně, na své si přijde i velmi talentovaný studující, neboť kniha nabízí velké množství problémů k samostatnému řešení.

Probereme obsah knihy podle jednotlivých kapitol: V kapitolách 1 až 5 jsou vyloženy základní vlastnosti celých čísel a kongruencí. V 6. kapitole jsou podány důkazy malé Fermatovy a Wilsonovy věty. Číselně-teoretické funkce d, σ a Φ jsou zavedeny a studovány v kapitolách sedmé až deváté. Kapitoly 10 až 12 vrcholí větou o kvadratické reciprocitě. V následujících kapitolách třinácté až patnácté je vyložen materiál týkající se reprezentace celých čísel v různých číselných soustavách. Šestnáctá až dvacátá kapitola pojednávají o různých diofantických rovnicích a kapitoly 21 a 22 o elementárních vlastnostech prvočísel. Poslední, dvacátá třetí kapitola sestává ze 105 rozmanitých problémů a spolu s ostatními příklady a cvičeními má realizovat autorovu ideu o tom, že jediný způsob, jak se lze naučit matematiku je „dělat" ji.

Pro podrobnější představu o struktuře knihy uvádíme názvy jednotlivých kapitol: 1. Integers. 2. Unique Factorization. 3. Linear Diophantine Equations. 4. Congruences. 5. Linear Congruences. 6. Fermat's and Wilson's Theorems. 7. The Divisors of an Integer. 8. Perfect Numbers. 9. Euler's Theorem and Function. 10. Primitive Roots and Indices. 11. Quadratic Congruences. 12. Quadratic Reciprocity. 13. Numbers in Other Bases. 14. Duodecimals. 15. Decimals. 16. Pythagorean Triangles. 17. Infinite Descent and Fermat's Conjecture. 18. Sums of Two Squares. 19. Sums of Four Squares. 20. $x^2 - Ny^2 = 1$. 21. Formulas for Primes. 22. Bounds for $\pi(x)$. 23. Miscellaneous Problems.

Kniha bude nepochybně velmi užitečná pro první, avšak důkladné seznámění s elementární teorií čísel a lze ji jako výbornou učebnici doporučit studujícím i přednášejícím.

Jaroslav Morávek, Praha

C. Berge: PRINCIPES DE COMBINATOIRE, Dunod, Paris 1968, brožované, 149 stran.

V dnešní době se velmi často mluví o kombinatorice nebo o kombinatorické analýze a řada matematiků, kteří se sice touto specializací bezprostředně nezabývají, střetává se ve svých oborech často s problémy, u kterých „instinktivně" cítí jejich kombinatorickou povahu. Přitom, jak je výstižně připomenuto v úvodu knihy, kombinatorika se vyvíjela často ve stínu velkých matematických událostí, její základní poznatky bývaly často několikrát zapomínány a znovu objevovány. Za všechno mluví fakt, že N. Bourbaki neuvádí ani v jednom z množství doposud vyšlých svazků, žádnou kombinatorickou větu obecnějšího charakteru, třebaže se v celém díle používá, a to nikoliv ojediněle, různých vzorců z kombinatoriky vždy, kdykoliv to text vyžaduje. Claude Berge si zřejmě kladl za cíl přispět k odstranění tohoto nedorozumění.

V úvodu ke knize vymezuje pojem kombinatoriky jako disciplíny, která se zabývá studiem konfigurací. O „konfiguraci" mluvíme tehdy, máme-li rozmístit nějaké objekty takovým způsobem, aby byla respektována nějaká předem daná omezení. Matematičtěji lze pojem konfigurace vyjádřit jako zobrazení nějaké množiny objektů do konečné abstraktní množiny, na níž je dána nějaká známá struktura. Z tohoto obecného hlediska lze kombinatoriku rozdělit podle několika aspektů: 1) Studium známé konfigurace, 2) Hledání neznámé konfigurace, 3) Určení přesného počtu konfigurací (enumerační problémy), 4) Určení přibližného počtu konfigurací (např. různé asymptotické odhady), 5) explicitní nalezení všech konfigurací, 6) extremální kombinatorické problémy (určení konfigurace, pro kterou nabývá daná reálná funkce na množině konfigurací svého extrému).

Kniha se zabývá pouze enumeračními problémy (převážně aspekt 3)), které jsou dnes velmi aktuální a přitom z historického hlediska náležejí k nejstarším tématům kombinatoriky. Vznikla na základě autorovy přednášky uspořádané ve školním roce 1967—68 na „Faculté des Sciences de Paris". Kniha je psána moderním matematickým jazykem ve světle díla Nicolas Bourbaki, takže se energicky vypořádala s klasickou terminologií typu „variace", „kombinace s opakováním", aj., která svou těžkopádnou zastaralostí působila odpudivě na zájemce. K aktuálnosti díla přispívá ta okolnost, že na úkor dosti speciálních aplikací kombinatoriky na speciální funkce a elementární teorii čísel autor dává přednost aplikacím obecnějšího významu a aplikacím v moderních oblastech, jako např. teorie informací. Autor se též zásadně vyhýbá použití různých symbolických kalkulů pro odvozování kombinatorických identit, protože zpravidla nemají vybudovánu dostatečně pevnou teoretickou základnu a při formulaci výsledků dává přednost explicitním vyjádřením typu „počet konfigurací dané množiny = ...“ před méně názornými formulacemi pomocí vytvořujících funkcí.

Zmíníme se o obsahu knihy. Po úvodu, o kterém jsem podrobně referoval, následuje 5 kapitol. V první kapitole, nazvané „*Les fonctions élémentaires de dénombrement*“ jsou různé elementární funkce kombinatoriky, známé většinou z gymnasiálních kursů, zavedeny a interpretovány jako mohutnosti jistých tříd zobrazení konečných množin. Kapitola je ukončena výkladem Stirlingových a Bellových čísel.

Druhá kapitola je pojmenována „*Problèmes de partages*“. V ní je určen jednak počet všech rozkladů přirozeného čísla n na m sčítanců a počet rozkladů, jejichž nejmenší sčítanec je h, jednak počet standardních tabulek, přiřazených danému rozkladu a kapitola končí použitím Youngova svazu na problémy rozkladu.

Třetí kapitola „*Formules d'inversion et applications*“ je věnována kombinatorickému principu inkluse a exkluse, jeho různým zobecněním a aplikacím. Je zaveden jistý operátor obecného derivování, přiřazený tzv. normální posloupnosti polynomů, s pomocí něhož se formuluje jistá obecná věta o inversi a uvádí se několik jejích aplikací (např. inversní formule Stirlingovy a Lahovy). V dalším paragrafu 3. kapitoly je vyloženo jedno zobecnění věty o inversi na lokálně konečné, částečně uspořádané množiny, pocházející od G. C. Rota. Tato zobecněná věta o inversi se potom aplikuje na aditivní funkci (např. míru) konečných množin, odkud vyplývá mimo jiné známá Sylvestrova formule pro určení míry množiny všech prvků patřících do dané konečné množiny X a současně nepatřících ani do jedné z daných množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Zbytek třetí kapitoly je věnován různým aplikacím principu inkluse a exkluse, z nichž k nejvýznamnějším patří enumerace různých tříd stromů.

Ve čtvrté kapitole „*Groupes de permutations*“ se vykládají různé vlastnosti grup permutací. Hlavní důraz se přitom klade na kombinatorické vlastnosti. Pro zajímavost uveďme, že je vyložena jedna Denésova věta o minimálním počtu transposic k vyjádření dané permutace ve tvaru jejich součinu a v kapitole je podniknuta i exkurse do Galoisovy teorie. Kromě samostatného významu slouží 4. kapitola jako příprava pro studium páté, závěrečné kapitoly, přinášející velmi kompaktní a elegantní výklad Polyova enumeračního principu a pojmenované „*La méthode de Polya*“. Polyova metoda je ilustrována na několika důležitých aplikacích, zejména z teorie grafů. V posledním paragrafu kapitoly a knihy je určen cyklický indikátor pro několik často se vyskytujících grup permutací.

Bohatostí a aktuálností vyloženého materiálu, jakož i originalitou, stručností i jasností výkladu, je kniha vynikající učebnicí enumeračních metod a kromě studentů a přednášejících v ní naleznou mnoho zajímavého jistě i odborníci.

Jaroslav Morávek, Praha

L. Chambadal, J. L. Ovaert: ALGÈBRE LINÉAIRE ET ALGÈBRE TENSORIELLE, 544 stran, vázané, Dunod, Paris, 1968.

Při psaní této knihy měli autoři, jak je patrné z předmluvy, před očima typ čtenáře, který odpovídá francouzskému studentovi matematiky asi druhého roku vysoké školy. V knize je moderním způsobem vyložena lineární a multilineární (tensorová) algebra libovolné dimenze (konečné i nekonečné) nad libovolným komutativním tělesem. Knihy lze přímo použít jako solidní přípravy pro aplikace lineární algebry v důležitých partiích analýzy, jako je teorie diferenciálních rovnic (obyčejných i parciálních), lineární topologické prostory, spektrální teorie operátorů, Lieovy algebry aj. a podobně v řadě partií moderní algebry, např. teorie komutativních těles, teorie komutativních algeber a teorie invariantů. Při výkladu není sice explicitně používáno jazyku kategorií a funktorů, avšak poukazuje se na důležitost universálních vlastností.

Kniha je rozdělena do 24 kapitol, jejichž názvy uvádíme: 1. Vektorové prostory. 2. Lineární zobrazení. 3. Direktní součty, projektory. 4. Vytvořující systémy, lineárně nezávislé systémy, base. 5. Existence basí vektorového prostoru. 6. Vektorové prostory konečné dimenze. 7. Dualita. 8. Tensorové součiny. 9. Příklady použití tensorových součinů. 10. Algebry. 11. Matice. 12. Význačné čtvercové matice. 13. Tensorová algebra vektorového prostoru. 14. Smíšená tensorová algebra vektorového prostoru. 15. Symetrická algebra vektorového prostoru. 16. Vnější algebra vektorového prostoru. 17. Lineární rovnice. 18. Redukce endomorfismů. 19. Redukce endomorfismů v případě konečné dimenze. 20. Bilineární a sesquilineární formy. 21. Redukce bilineárních a sesquilineárních forem. 22. Adjungovaná zobrazení. 23. Hermitovy a Eukleidovy vektorové prostory. 24. Redukce normálních endomorfismů.

Celkově lze říci, že kniha je velmi pečlivě vypracovanou učebnicí lineární algebry, vhodnou pro třetí semestr vysokoškolského studia matematiky. Autorům se podařilo spojit modernost výkladu s klasickými interpretacemi pomocí maticového počtu a stejně koncentrovanost a kompaktnost výkladu „monografického" typu s velmi dobrou čitelností. Ke kvalitě knihy přispívá v neposlední řadě i bohatá zásoba cvičení uvedených na jejím konci a rozdělených podle jednotlivých kapitol.

Jaroslav Morávek, Praha

MATHEMATISCHE HILFSMITTEL DES INGENIEURS. Vydávají Robert Sauer a István Szabó. *Část čtvrtá:* Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1970. XVIII + 596 stran, 130 obrázků. Cena DM 124,—.

Posuzovaná kniha uzavírá čtyřdílnou příručku, která vyšla v nakladatelství Springer v letech 1967—1970 jako díly 139—142 známé žluté řady „Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen" a která chce inženýry seznámit s těmi oddíly moderní matematiky, které se v technické praxi výrazně uplatňují už dnes nebo se uplatní — podle názoru autorů a vydavatelů — v nejbližší budoucnosti.

První tři díly už byly v tomto časopise recenzovány, a to v roč. *94* (1969), str. 480—482 (část první a třetí), a v roč. *96* (1971), str. 109—110 (část druhá). Závěrečná část je tvořena třemi oddíly L, M a N:

L. WOLFGANG HAHN: *Stabilita pohybu soustav s konečně mnoha stupni volnosti* (113 stran).

M. DIETRICH MORGENSTERN a VOLKER MAMMITZSCH: *Počet pravděpodobnosti a matematická statistika* (134 strany).

N. *Věty a vzorce mechaniky a elektrotechniky:*

N I. WOLFGANG ZANDER: *Mechanika* (171 stran).

N II. KLAUS PÖSCHL: *Elektrotechnika* (107 stran).

Na rozdíl od předcházejících tří dílů, v nichž byly shrnuty výsledky řady matematických disciplín, převažují v posledním díle disciplíny, v nichž se matematické prostředky aplikují. V oddílu L jsou to především výsledky z teorie obyčejných diferenciálních rovnic, jak je patrno i z názvů jednotlivých kapitol: I. Lineární systémy nezávislé na čase. II. Lineární parametry závislé na čase. III. Nelineární soustavy ve fázové rovině. IV. Přímá Ljapunovova metoda. V. Vynucené kmity. VI. Samobuzené kmity autonomních soustav. VII. Harmonická linearizace a příbuzné přibližné metody.

Oddíl M je věnován matematické statistice a teorii pravděpodobnosti a jeho obsah je rozdělen do 12 paragrafů. Po úvodu následuje část věnovaná kombinatorice a základním definicím, další paragrafy jsou věnovány zákonům rozložení náhodných veličin a mírám závislosti, v obsáhlém paragrafu je pojednáno o speciálních rozloženích. Následující část je věnována teoriím náhodného výběru, odhadů, testů, lineárních modelů, korelace a regrese a metodě náhodného výběru. Závěr tvoří dva paragrafy věnované stochastickým procesům a teorii informace.

Oddíl N je rozdělen na dvě části. Pododdíl N I je věnován mechanice a začíná rozsáhlým výkladem obecné teorie kontinua; v druhé části jsou pak obecné zákonitosti specifikovány pro speciální případy: je zde pojednáno o mechanice tuhého tělesa, o mechanice proudění (ideální kapaliny a plyny, vazká kapalina) a o teorii pružného tělesa. Dva dodatky obsahují diferenciální výrazy ve speciálních souřadných soustavách (obecné ortogonální křivočaré souřadnice, kulové souřadnice a válcové souřadnice) a některé formule z tenzorového počtu na plochách.

Pododdíl N II podává přehled teoretických metod elektrotechniky. Nejprve je široce pojednáno o teorii pole, především o elektrickém a magnetickém poli; tuto část uzavírá paragraf věnovaný pohybu nabitých částic v elektromagnetickém poli (včetně magnetohydrodynamiky a vln v polovodičích). Závěr tvoří paragrafy věnované šumům, sítím a přenosovým soustavám a teorii signálů.

Knihu uzavírá jednak rejstřík k této čtvrté části, jednak pak rozsáhlý (58 stran) celkový rejstřík, zahrnující všechny čtyři díly.

Jak už bylo řečeno v recenzích předcházejících dílů, tvoří jednotlivé oddíly příručky samostatné celky a obsah každého z nich by měl čtenář pochopit i bez podrobné znalosti oddílů ostatních. Jednotlivé oddíly jsou spojeny odkazy a společným rejstříkem.

Záměr vydavatelů lze jen uvítat, stejně jako skutečnost, že čtyřsvazkové dílo o celkovém počtu 2385 stran skutečně také během čtyř let vyšlo. Koordinovat práci dvaceti autorů — to je jistě úctyhodný výkon. Teprve čas však prověří, do jaké míry se vydavatelům podařilo plánované záměry také uskutečnit. Je zcela pochopitelné, že celé dílo nemůže tvořit jednolitý celek — různé oddíly jsou psány na různých úrovních, některé jsou zaměřeny spíše teoreticky, jiné zase inklinují k praktickým metodám. Jak volba oddílů, které jsou do příručky zařazeny, tak i výběr látky v každém oddíle je do značné míry subjektivní, a teprve čtenáři, kteří tuto příručku budou užívat, uvidí, co jim ještě v příručce chybí a co případně nebudou potřebovat. Je však velmi užitečné, že podobná publikace vůbec vyšla, neboť tvoří základ pro eventuální změny a doplňky, a to základ zcela reálný: dokud tu taková příručka není, jsou všechny úvahy nad jejím případným obsahem a rozsahem zcela platonické.

Je tedy třeba na závěr jen zopakovat, že se jedná o dílo velmi užitečné, že v něm podle mého názoru není nic zbytečného, že výběr autorů je reprezentativní a že široký okruh zainteresovaných čtenářů dostává do rukou pomůcku, kterou si jistě dávno přál.

Alois Kufner, Praha

J. L. Lions: QUELQUES MÉTHODES DE RÉSOLUTION DES PROBLÈMES AUX LIMITES NON LINÉAIRES. Dunod a Gauthier-Villars, Paříž 1969. XX + 554 stran. Cena 128 F.

Monografie, vycházející v edici „Études mathématiques", je jednou z šesti publikací, které autor vydal sám nebo společně s jinými autory v průběhu posledních 4 let. Je to jistě úctihodný výkon, svědčící o autorově plodnosti; pozoruhodné také je, že kvantum práce, spojené s vydáním těchto knih, nemělo žádný negativní vliv na hodnotu knihy, která má podobně jako ostatní autorovy publikace vysokou odbornou i pedagogickou úroveň.

Ve velmi přehledné a instruktivní předmluvě (která by už sama o sobě stála za ocitování) autor zdůrazňuje, že kniha pojednává doslova o *některých* metodách řešení okrajových úloh pro nelineární parciální diferenciální rovnice (a nerovnosti), a plasticky demonstruje specifické problémy, které při řešení *nelineárních* úloh vznikají. Řešení nelineární okrajové úlohy, které má dvě základní etapy, totiž (a) konstrukci tzv. apriorních odhadů a (b) užití těchto odhadů, dělí autor na tyto tři kroky: (1) volba třídy funkcí, v níž budeme řešení hledat (to je krok zásadní důležitosti; přitom není třeba omezovat se už předem na lineární množiny funkcí a na příkladech je ukázáno, že to není někdy ani účelné); (2) volba aproximativní metody (celou úlohu nějakým způsobem převedeme na sled problémů, které jsou relativně jednodušší, které „umíme řešit"); (3) limitní přechod v této posloupnosti aproximativních řešení.

Oba poslední kroky tvoří právě zmíněnou etapu užití apriorních odhadů a lze je uskutečnit různými postupy; posuzovaná kniha pojednává o několika z takových možných postupů. Jsou to tyto metody: I. metoda kompaktnosti; II. metoda monotónních operátorů; III. metoda regularizace; IV. metoda penalizace; V. aproximativní iterační metody; a pochopitelně různé kombinace těchto metod. Metodě I je věnována první kapitola, metodě II a její kombinaci s metodou I pak kapitola druhá. Při obou těchto metodách se aproximativní řešení z kroku (2) konstruuje redukcí úlohy na konečně dimenzionální případ (např. Galerkinovou metodou), tj. řešení se hledá v množině funkcí, která má konečnou dimenzi, a jeho existence se dokáže např. užitím vět o pevném bodě zobrazení nebo vět o existenci řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic; krok (3) pak spočívá v tom, že přejdeme k limitě pro dimenzi rostoucí do nekonečna. K důkazu existence „limitního řešení" (což je velmi netriviální problém) se pak užije buď kompaktnosti vnoření jistých prostorů funkcí (u metody I) nebo monotónnosti příslušného operátoru (metoda II). Metoda II má proti metodě I tu výhodu, že — pokud ji lze užít — je po technické stránce jednodušší.

Kapitola třetí je věnována metodám III a IV, poslední čtvrtá kapitola pak metodě V. Na rozdíl od metod I a II, u nichž byla aproximativní metoda z kroku (2) stále táž a měnil se jen počet dimenzí, mění se u metod III až V aproximativní metoda a kompaktnosti nebo monotónnosti se pak užije při limitním přechodu. U metody III „regularizujeme" rovnici tím, že ji aproximujeme jistými „lepšími", už vyřešenými rovnicemi; metody IV se užívá především při řešení variačních nerovností: aproximujeme je nelineárními rovnicemi jednodušší povahy, které už umíme vyřešit; a konečně u metody V se při konstrukci aproximativního řešení užívá některé z klasických přibližných metod — metody postupných aproximací, metody sítí apod.

Autor přitom poukazuje na výhody i úskalí jednotlivých metod (např. na nebezpečí nestability některých metod a problémů vůči změnám, které by bylo možno považovat za malé) a vše ilustruje hojně na příkladech. Příklady vůbec hrají v knize důležitou roli; lze říci, že v Lionsově práci jde méně o rozvíjení *obecné* teorie existence řešení okrajových úloh a více o řešení řady úloh *konkrétnějšího* charakteru (Navier-Stokesovy rovnice, nelineární rovnice kmitů desek, rovnice z kvantové mechaniky, úlohy z optimální regulace aj.). Je též třeba zdůraznit, že metody, rozebrané v knize, jsou vhodné především pro důkaz *existence* řešení; případná jednoznačnost řešení vyžaduje většinou řadu dalších speciálních úvah.

Jak je snad patrno z předchozího, je kniha členěna ne podle typů rovnic, jak je to běžné, nýbrž podle použitých metod. Na začátku knihy však autor uvádí tabulku rovnic, které jsou v knize vyšetřovány, sestavenou podle typů, takže čtenář se může dobře orientovat. Z této tabulky je také patrno, že převažují rovnice parabolické a hyperbolické.

Za zmínku stojí též podrobné biliografické komentáře, kterými jsou jednotlivé kapitoly zakončeny. Považuji je za velmi cennou součást knihy, neboť umožňují čtenáři, aby celou problematiku poznal ze širšího hlediska, ukazují mu další možnosti, které dává přístupná literatura, a upozorňují na otevřené problémy.

Na závěr by bylo třeba uvést, komu je kniha určena. Zde jsem trochu na rozpacích. Kniha sice vznikla na základě přednášek autora na pařížské universitě ve školním roce 1968/69 a podle textu na záložce „bude zajímat všechny — matematiky čisté i užité, fyziky, elektroniky — kteří se s nelineárními parciálními diferenciálními rovnicemi setkávají v analýze, v diferenciální geometrii, v numerických metodách, v teorii optimální regulace, v mechanice atd.", je však třeba říci, že jde o knihu velmi náročnou, vyžadující čtenáře dobře připraveného. Není to tedy učebnice pro začátečníky, nýbrž kniha určena těm, kteří se v problematice okrajových úloh již trochu vyznají. Takovým čtenářům však může dát hodně.

Alois Kufner, Praha

Carlo Miranda: PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ELLIPTIC TYPE. Druhé přepracované vydání. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1970. XII + 370 stran. Cena DM 58,—.

První vydání této knihy, které vyšlo v italském jazyce v roce 1955, znají naši čtenáři nejspíše z ruského překladu, který byl vydán v roce 1957. Autor si tehdy kladl za úkol shrnout do jedné knihy základní výsledky, jichž bylo v průběhu let v teorii parciálních diferenciálních rovnic eliptického typu dosaženo. Systematicky vyložil v knize základní pojmy, myšlenky i metody této teorie, zpřístupnil širšímu okruhu čtenářů řadu důležitých výsledků, umožnil čtenářům, aby se snáze orientovali v literatuře, věnované eliptickým rovnicím, a otevřel tím cestu k novému bádání v této oblasti. Bibliografie prvního vydání obsáhla literaturu let 1924—1953 (starší byla shrnuta v Lichtensteinově příspěvku v *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*) a bylo v ní citováno více než 600 prací.

Druhé vydání pochopitelně nemohlo ignorovat velký rozvoj, který zmíněná teorie po roce 1953 prodělala, a autor také shledal, že k tématice prvního vydání bylo za 12 let publikováno více než 1600 nových prací, které by bylo třeba do nového vydání zahrnout. Musel proto přikročit k řadě úprav. Vynechal látku, související s obsahem posledních dvou paragrafů prvního vydání, tj. problémy souvislosti s teorií funkcí komplexní proměnné a úlohy závislé na parametru (tj. spektrální záležitosti), čímž excerpovanou literaturu značně zredukoval, vynechal i některé práce, které mezitím ztratily na významu, a tak nové vydání obsahuje na 69 stránkách seznam více než 1400 prací, zachycujících především (a skoro úplně) literaturu do roku 1965.

Takové kvantum výsledků ovšem nelze na necelých 300 stránkách detailně vyložit; znamenalo by to znásobit rozsah knihy. Autor se proto držel zásady, jíž se řídil už v prvním vydání: podrobněji pojednává především o výsledcích, týkajících se rovnic druhého řádu (a ani zde zdaleka ne o všech výsledcích), zatím co u rovnic vyššího řádu a u systémů rovnic se omezuje na obecné upozornění na metody, obsažené v citovaných pracích.

Struktura knihy je zhruba stejná jako u prvního vydání a rozsah se zvětšil přijatelným způsobem. Kapitola první, sloužící jako úvod a obsahující především klasické definice obecného charakteru, se až na několik doplňků nezměnila. Kapitola druhá, věnovaná vyšetřování zobecněných potenciálů, byla doplněna o nové výsledky Sobolevovy a Calderona se Zygmundem. Kapitola třetí je věnována jedné ze základních metod řešení eliptických rovnic — metodě převedení okrajové úlohy na integrální rovnici, a zde byly vedle doplňků podstatněji přepracovány paragrafy věnované otázce existence fundamentálního řešení a problému s kosou derivací. Kapitola čtvrtá, nazvaná *Zobecněná řešení okrajových úloh* a věnovaná funkcionálně-analytickým metodám řešení eliptických rovnic, byla doplněna a obsahuje dva nové paragrafy, věnované lokálním vlastnostem řešení eliptických rovnic a studiu slabých řešení okrajových úloh. Také v páté kapitole, věnované metodě apriorních odhadů, byla pozornost rozšířena z Dirichletovy úlohy na všechny typy okrajových úloh a paragrafy, věnované existenci a regularitě zobecněných řešení, byly podstatně přepracovány.

Zatím co u prvních pěti kapitol se jedná převážně o větší či menší dodatky, neměnící podstatně obecnou formu knihy, byly obě poslední kapitoly přepracovány zcela podstatně, neboť zde byl rozvoj v posledních letech nejbouřlivější: je to kapitola šestá o nelineárních rovnicích (druhého řádu) a kapitola sedmá pojednávající o dalších výsledcích pro rovnice druhého řádu, o rovnicích vyššího řádu a o soustavách rovnic.

Úkol, který si kladlo první vydání této knihy a o němž byla řeč na začátku recenze, splňuje tedy — na příslušně vyšší úrovni — i vydání druhé. Znovu je ovšem třeba zdůraznit, že nejde o učebnici, nýbrž o přehled výsledků z jisté disciplíny, obsažených v literatuře. I když mezitím vyšly už další publikace podobného charakteru (např. L. Bers, F. John, M. Schechter: *Partial Differential Equations*. Interscience Publishers 1964; ruský překlad 1966), je druhé vydání této knihy dobrým počinem, neboť Mirandovy encyklopedické znalosti velmi pomohou mladým matematikům a dalším specialistům při orientaci v rozsáhlé literatuře o eliptických rovnicích.

Alois Kufner, Praha

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

ZPRÁVY

PROF. ALEKSANDR GENNADIJEVIČ KUROŠ ZEMŘEL

VLADIMÍR KOŘÍNEK, Praha

Dne 18. května 1971 zemřel vynikající algebraik, profesor moskevské univerzity, ALEKSANDR GENNADIJEVIČ KUROŠ, jeden z předních sovětských matematiků. Patří k té staré gardě, která mezi dvěma světovými válkami vybudovala v Sovětském svazu velkou světovou matematiku. Zemřel po delší těžké srdeční chorobě.

Aleksandr Gennadijevič Kuroš se narodil 19. ledna 1908 (gregoriánského kalendáře) v malém městečku Jarcevo smolenské oblasti, kde jeho otec byl malým úředníkem. Studium na univerzitě ve Smolensku ukončil v roce 1928. Na jeho univerzitní studium i na jeho další vědeckou dráhu měla rozhodující vliv ta okolnost, že v této době působil na smolenské univerzitě PAVEL SERGEJEVIČ ALEKSANDROV který se stal později zakladatelem a vůdčí osobností moskevské topologické školy. Aleksandrov byl žákem NIKOLAJE NIKOLAJEVIČE LUZINA. Luzin i Aleksandrov měli ještě možnost studovat v západní Evropě a seznámit se tam s nejnovějšími směry matematického bádání, založenými, rozumí se, na Kantorově teorii množin. Aleksandrov učinil předmětem své vědecké práce topologii, která právě po skončení 1. světové války se začala budovat jako nová významná vědecká disciplína. V první polovině dvacátých let studoval Aleksandrov v největším matematickém středisku tehdejší doby, v Göttingen. Tam poznal též moderní algebru v algebraické škole vytvořené Emmy Noetherovou. Tato algebra byla zásadně budována axiomatickou metodou na teorii množin. Bystrozraku Aleksandrovovu neušlo, že se tato nová algebra stále více a pronikavěji uplatňuje v různých disciplínách moderní matematiky a správně rozpoznal, že v budoucnosti bude její vliv a důležitost stále vzrůstat.

A. G. Kuroš pravděpodobně upozornil na sebe P. S. Aleksandrova již za svých univerzitních studií, neboť po ukončení studií v roce 1928 přijal jej Aleksandrov za svého aspiranta. Když Aleksandrov přešel ze Smolenska na univerzitu v Moskvě, následoval tam Kuroš roku 1929 svého školitele. Aleksandrov byl první, který obrátil pozornost mladého Kuroše na moderní algebru, kterou učinil Kuroš záhy oborem své vědecké práce. Další okolností, která vedla Kuroše k této volbě, bylo to, že roku 1930 OTTO JULJEVIČ ŠMIDT (1891–1956) založil moskevský algebraický seminář, který se především věnoval teorii grup. (Viz [13] str. 262.)

A. G. Kurošovi nebylo již dopřáno, aby se pobytem v zahraničí seznámil s novými matematickými proudy a s metodami vědecké matematické práce mimo Sovětský svaz. Již kolem roku 1930 se začala postupná izolace sovětské vědy od ostatního světa, kterážto tendencě vyvrcholila po 2. světové válce neblahým bojem proti tak zvanému kosmopolitizmu, jenž způsobil sovětské vědě tak velké škody. Kuroš měl proto jen možnost seznámit se s moderní algebrou v podání Aleksandrovově a u O. Ju. Šmidta, který rovněž pracoval v nových směrech a moderními metodami. Svědčí o velkém matematickém nadání A. G. Kuroše, že toto zprostředkované poznání stačilo k tomu, aby se stal předním badatelem v teorii grup ve světovém měřítku. Kurošův vědecký význam však přesáhl daleko teorii grup, jeho nejvlastnější pracovní pole.

Po skončení aspirantury se začala Kurošova pedagogická činnost na moskevské univerzitě, kde působil jako učitel na mechanicko-matematické fakultě až do své smrti. V roce 1936 obhájil disertaci pro doktorát fyzikálně-matematických věd a roku 1937 byl jmenován profesorem. Od října 1950 vedl až do své smrti katedru algebry na MGU. Někdy po válce převzal Kuroš od O. Ju. Šmidta, který byl již nemocen a jehož zájem se soustřeďoval v té době na kosmogonii, vedení semináře, který se stal mezitím velkým algebraickým badatelským střediskem všesvazového významu. V posledních několika letech svého života byl již velmi nemocen. Byl postižen několika infarkty a, ačkoliv byl léčen v nemocnici i doléčován v sanatoriích, jeho srdce to nevydrželo.

Vylíčit celou Kurošovu obsáhlou vědeckou činnost v tomto článku nelze. Proberu zde jen nejdůležitější tematické okruhy jeho vědecké práce. Po první své vědecké práci, která byla topologická, věnoval se úplně algebře. Nejdříve studoval rozklady grupy v direktní součin konečného počtu ireducibilních podgrup. Pro konečné grupy dokázal již Remak, že dva takové rozklady jsou vždy centrálně izomorfní. Obecně však tomu tak není. Proto je zajímavé hledat ty třídy grup, kde tato věta platí. O. Ju. Šmidt dokázal tuto věc pro operátorové grupy s hlavní řadou, tj. grupy, v nichž množina normálních podgrup splňuje minimální i maximální podmínku. Kuroš dokázal to nejdříve pro třídu grup bez operátorů, jichž subnormální podgrupy splňují minimální podmínku. Zajímal jsem se tehdy též o tento problém a proto jsem při svém zájezdu do Sovětského svazu roku 1935 vyhledal v Moskvě A. G. Kuroše a od té doby se datují naše osobní i vědecké styky přerušené jen 2. světovou válkou. Abych nemusil předpokládat, že grupa má direktní rozklad v direktně ireducibilní faktory, začal jsem vyšetřovat, za jakých podmínek mají dva konečné direktní rozklady izomorfní zjemnění. Ukázal jsem, že je to tehdy, když centrum grupy splňuje minimální podmínku pro podgrupy. Na tuto práci navázal opět Kuroš vedle jiných matematiků. Kuroš se však nespokojil jen direktními rozklady grup, nýbrž přenesl tuto problematiku i na jiné algebraické útvary. Tak vyšetřoval v úplně modulárních svazech ([6] a [7] § 44, 45, 46) rozklad prvku v direktní spojení jiných prvků. Jeho výsledky mají ovšem zpětný vliv na direktní rozklady grup. Studium izomorfních zjemnění možno též prováděti v rámci teorie kategorií. I to učinil Kuroš v dvou pracích z roku 1959 a 1960. Všechny tyto výsledky vedly k jisté obecné teorii direktních rozkladů v práci

Kurošova žáka A. CH. LIVŠICE o ortogonálních soustavách idempotentů v pologrupách. (O všech těchto výsledcích viz [7] str. 452.)

Jedním z největších věedeckých výkonů Kurošových je věta o podgrupách volného součinu grup z let 1933 a 1934, dnes po celém světě známá jako věta Kurošova ([6] str. 212, [7] str. 211). Kurošovi se podařilo charakterizovat strukturu podgrup volného součinu grup. Již přijít na to, jakou tyto podgrupy mají strukturu, byl matematický výkon prvního řádu, který musil předcházet vlastnímu důkazu. Provedení důkazu bylo velmi obtížné. Jak za těchto okolností bývá, ukázalo se, že Kurošův důkaz je příliš složitý. Věci leží totiž velmi hluboko. Do dneška byla uveřejněna řada důkazů této věty, které, ač jsou jednodušší, nejsou nikterak jednoduché. (Viz [7] str. 458.) Kuroš přitom zároveň ukázal, že dva rozklady dané grupy ve volný součin mají vždy izomorfní zjemnění. I v této problematice vystoupil Kuroš později z rámce teorie grup. Studoval v letech 1947—1955 volné součiny neasociatívních algeber a v roku 1960 vyšla práce o volných součtech multioperátorových grup.

Roku 1935 vyšla první Kurošova práce o normálních soustavách podgrup ([6] § 56, str. 356, [7] § 56, str. 354). Příkladem takové soustavy je např. množina podgrup z jedné kompoziční řady grupy, která má kompoziční řady. Tento pojem a jeho specializace vedly nejdříve k definici zobecněných nilpotentních a zobecněných řešitelných grup a k vyšetřování vlastnosti těchto tříd grup. Tím se otevřelo velké nové pole bádání v teorii grup. Sovětští matematici vybudovali pak celou novou velkou teorii (Viz [11], [14], [16]). Další Kurošova práce základního významu je abstraktní definice radikálu v okruzích a grupách, která v sobě zahrnuje všechny dosavadní druhy radikálu jako speciální případy (viz [12] a [15]).

Přibližně kolem roku 1960 začal se A. G. Kuroš zabývat teorií univerzálních algeber a teorií kategorií. Správně rozpoznal, že obě teorie budou mít pro algebru základní význam a podnítil tak v Moskvě i v Sovětském svazu studium těchto disciplín a jejich aplikací na algebru. Sám napsal knihu: *Лекции по общей алгебре* (viz [8]), kde vykládá základní věci z algebry v moderním pojetí z hlediska těchto nových teorií. Kniha byla přeložena i do češtiny (viz [9]). Nedávno vyšla další kniha tohoto směru, patrně poslední, kterou napsal: *Общая алгебра* [10]. Jsou to přednášky, které konal na mechanicko-matematické fakultě v Moskvě v roce 1969/70. V knize probírá důležité algebraické struktury, jako např. grupy, pologrupy, kvazigrupy a lupy, okruhy, svazy atd. z hlediska teorie univerzálních algeber. Celkem možno říci o vědecké práci prof. Kuroše toto: Vyšel z teorie grup. Vybíral si pro svou práci základní otázky této teorie. Zpravidla však vyšel nakonec z rámce teorie grup tím, že přenášel a zobecňoval tyto výsledky i na jiné algebraické struktury. Tím působil velmi podnětně na celou sovětskou algebru.

Jeho vliv na vývoj algebry v Sovětském svazu byl podporován mimo jiné i tím, že sám byl výborným učitelem. Mnozí českoslovenští algebraikové mají jistě v paměti jeho krásné přednášky, které u nás konal. Jeho výklad byl vždy úplně jasný, srozumitelný a přitom přesný, i když se jednalo o velmi složité a hluboké otázky. Zde je třeba se zmínit o jeho největším knižním díle: *Teorie grup*. První vydání [5] této proslulé knihy bylo hotovo ještě před vypuknutím války v Sovětském svaze roku 1940. V důsledku válečných událostí vyšlo však až roku 1944. Kniha znamenala v době svého vyjití velký pokrok v knižní literatuře o teorii grup, která byla v této době ještě velmi chudá. Kdo se chce o tom přesvědčit, nechť srovná tuto knihu s jednou z nejmodernějších knih této doby, s knihou Zassenhausovou [17]. Kniha Kurošova obsahuje k výkladům vždy řadu ilustrujících příkladů a je tam zkoumán vždy význam předpokladů jednotlivých vět konstrukcí vhodných protipříkladů. To bylo novum v knihách o teorii grup. Přirozeně při sepisování takové knihy je třeba omezit nějak látku. Kuroš klade důraz na nekonečné grupy, proto vynechal celou speciální teorii konečných grup. Vykládá jen ty vlastnosti konečných grup, které mají význam pro obecnou teorii, nebo se aspoň částečně dají přenést na nekonečné grupy. Dále neprobírá teorii různých tříd „konkrétních" grup, jako jsou na příklad grupy permutací, grupy matic, grupy lineárních transformací, a vynechává vůbec ty partie, které jednají sice o grupách, ale silně svými metodami vybočují z vlastní teorie grup, jako reprezentace grup, topologické grupy, uspořádané grupy atd.

V roce 1953 vyšlo druhé vydání knihy [6]. Od roku 1939 až do roku 1952 prošla teorie grup velikým bouřlivým vývojem. Proto Kuroš vypracoval pro toto druhé vydání úplně novou osnovu na základě těchto nových výsledků a napsal vlastně knihu novou. Přepracováním knihy získaly výklady ještě více na jasnosti a systematičnosti. Tak např. byly úplně přepracovány kapitoly o Abelových grupách, o direktních a volných součinech, o Schreierovu rozšíření grup a o nilpotentních a řešitelných grupách. Kniha se tak stala standardní příručkou o teorii grup. Svědčí o tom mimo jiné překlady tohoto druhého vydání do mnoha cizích jazyků.

Kolem roku 1965 bylo druhé vydání *Teorie grup* dávno rozebráno a kniha se stala velkou vzácností i na antikvárním knižním trhu. Autor se proto rozhodl připravit vydání třetí. Avšak v letech 1952–1965 doznala teorie grup další velký vývoj. Autor odhaduje na 1300 počet prací tohoto období z teorie grup, které patří do oblastí, jež pojal do své knihy. Znamenalo by to nejen napsat knihu úplně novou, nýbrž zvětšit neúnosně objem knihy. Prof. Kuroš odhaduje to na tři svazky, každý z nich v rozsahu 2. vydání. Proto volil postup jiný. Přetiskl jen s nepatrnými úpravami text druhého vydání a doplnil jej některými paragrafy z 1. vydání, které nebyly pojaty do 2. vydání. Zato připojil ke knize obšírný dodatek – 148 stran z 580 – nazvaný: „*Развитие теории бесконечных групп за* 1952–1965 *гг.*" V tomto dodatku vykládá další vývoj teorie grup tímto způsobem: Uvádí přesně všechny definice nových pojmů a zároveň výsledky prací. Důkazy neprovádí, nýbrž odkazuje na originální pojednání. Tímto způsobem zpracoval autor 1100 prací. Tím se dostal čtenáři do rukou velmi instruktívní přehled výsledků teorie grup až do roku 1965. Toto třetí vydání je tedy výbornou pomůckou pro každého pracovníka v teorii grup.

Když po smrti Stalinově přestala izolace sovětské vědy od ostatního světa, mezi prvními cestami, které prof. Kuroš podnikl, byla cesta do Československa. Tím byly obnoveny osobní předválečné styky mezi prof. Kurošem a mnou a od té doby se datují i rozsáhlé velmi srdečné a přátelské styky mezi prof. Kurošem a československými matematiky. Prof. Kuroš měl nejen k československým matematikům, nýbrž i k Československu vřelý vztah. Sám mně říkal, jak se mu Praha jako město líbí. Byl znamenitým znatelem staré české hudby, která ho, velkého milovníka vážné hudby, velmi zaujala. Vyznal se také dobře v českém malířství i v našich dějinách. Nejen československá matematika, nýbrž i celé Československo ztrácí v něm velkého a upřímného přítele, čehož je třeba si velmi vážit, zvláště v dnešní době. Českoslovenští matematikové zachovají tomuto velkému algebraikovi vděčnou paměť.

Literatura

Data o životě A. G. Kuroše a seznamy jeho prací najde čtenář v těchto statích:

[1] Математика в СССР за сорок лет 1917—1957. Гос. изд. физ.-мат. лит. Москва 1959. Том 2, str. 378—379.

[2] Математика в СССР за пятьдесять лет, 1917—1967.

[3] Александр Геннадиевич Курош (к пятидесятилетию со дня рождения). (Авторы: *П. С. Александров* и *В. М. Глушков.*) Усп. мат. наук *13*, вып. 1, (1958); 217—224.

[4] Александр Геннадиевич Курош (к шестидесятилетию со дня рождения). (Автори: *П. С. Александров, Б. И. Плоткин, Л. А. Скорняков.*) Усп. мат. наук *23*, вып. 2 (1968), 219—228.

Knihy A. G. Kuroše citované v článku:

[5] *А. Г. Курош:* Теория групп. Огиз. Москва 1944, str. 371.

[6] *А. Г. Курош:* Теория групп. Издание второе переработанное. Гос. изд. тех.-теор. лит., Москва 1953, str. 467.

[7] *А. Г. Курош:* Теория групп. Издание третье, дополненное. Изд. Наука, Москва 1967, str. 648.

[8] *А. Г. Курош:* Лекции по общей алгебре. Гос. изд. физ.-мат. лит., Москва 1962, str. 396.

[9] *A. G. Kuroš:* Kapitoly z obecné algebry. Přeložili *Jaroslav Blažek* a *Ladislav Koubek*. Academia, Praha 1968, str. 310.

[10] *А. Г. Курош:* Общая алгебра (лекции 1969—70 учебного года). МГУ, мех.-мат. факультет, Москва 1970, str. 125.

Ostatní citovaná literatura:

[11] *А. Г. Курош* и *С. Н. Черников:* Разрешимые и нильпотентные группы. Усп. мат. наук *2*, высп. 3 (1947), 18—59.

[12] *А. Г. Курош:* Радикалы колец и алгебр. Мат. сбор. *33*, (1953), 13—26.

[13] *А. Г. Курош* и *Л. А. Скорняков:* Научно-исследовательский семинар кафедры алгебры московского университета. Усп. мат. наук *12*, вып. 5 (1957), 261—269.

[14] *С. Н. Черников:* Условия конечности в общей теории групп. Усп. мат. наук *14*, вып. 5 (1959), 45—96.

[15] *А. Г. Курош:* Радникалы в теории групп. Сиб. мат. ж. *3* (1962), 912—931; 6 (1965), 715.

[16] Группы с ограничениями для подгрупп, Сборник под редакцией С. Н. Черникова, АН УССР, Киев, 1971. str. 228,

[17] *Hans Zassenhaus:* Lehrbuch der Gruppentheorie. Erster Band. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1937, str. 151.

ZPRÁVA O PŘIPRAVOVANÉM ADRESÁŘI ČESKÝCH MATEMATIKŮ

Přípravný výbor matematické vědecké sekce JČMF hodlá vydat podle vzoru fyzikální vědecké sekce JČMF — JSMF adresář matematiků, kteří působí na pracovištích Čsl. akademie věd a vysokých škol v ČSR. Ve jmenném seznamu by adresář obsahoval tyto údaje: Příjmení, jméno, tituly, rok narození, pracoviště s adresou, zaměření (vědecko-výzkumné, pedagogické, aplikovaný výzkum), obor zájmu (číslem podle seznamu v Mathematical Reviews). Adresář by byl doplněn seznamem matematických oborů podle Mathematical Reviews, seznamem pracovišť s adresami a rozdělením pracovníků podle oborů. Přípravný výbor MVS JČMF (Spálená 26, Praha 1) přivítá jakoukoliv podporu v této akci a obrací se na matematiky uvedených pracovišť s žádostí o včasné vyplnění kartotéčních lístků.

Zbyněk Nádeník, Praha