Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNGEN DER LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $[p(x)\,y']' + q(x)\,y = 0$ IM NICHTOSZILLATORISCHEN FALL

IVO RES, Brno

(Eingelangt am 1. Juni 1970)

1. BEMERKUNGEN

Die asymptotischen Entwicklungen der Lösungen gehören zu den Problemen, die bei den Differentialgleichungen zweiter Ordnung untersucht werden. Mit dieser Frage beschäftigten sich viele Verfasser.

Die asymptotischen Eigenschaften der Differentialgleichung $y'' = A(x)\,y$ im nichtoszillatorischen Fall wurden in der Arbeit [2] untersucht. In dieser Arbeit werden Bedingungen festgestellt, unter denen das Fundamentalsystem dieser Gleichung in der Gestalt

$$y_j - A^{-1/4} \exp\left\{\varepsilon_j \int_a^x A^{1/2}(t)\,\mathrm{d}t\right\} \to 0\,, \quad y_j' - \varepsilon_j A^{1/4} \exp\left\{\varepsilon_j \int_a^x A^{1/2}(t)\,\mathrm{d}t\right\} \to 0\,,$$

$$j = 1, 2\,; \quad \varepsilon_1 = 1\,, \quad \varepsilon_2 = -1\,,$$

geschrieben werden kann.

In der Arbeit [3] werden die asymptotischen Entwicklungen der Lösungen der Differentialgleichung $[p(x)\;y']' + q(x)\,y = 0$ untersucht. Die Lösungen und deren Ableitungen werden in der Form von unendlichen Reihen konstruiert, welche im Intervall $I = \langle x_0, \infty)$ gleichmässig konvergieren.

In dieser Arbeit werden asymptotische Formeln für die Lösungen der Differentialgleichung

$$(1,1) \qquad [p(x)\,y']' + q(x)\,y = 0\,,$$

im nichtoszillatorischen Fall hergeleitet.

2. BEZEICHNUNGEN, HILFSSATZ

Es seien $A_1(x)$, $A_2(x)$, $F(x) \in C_0(I)$. Wir setzen

$$\overline{\mathscr{C}}_1[F(x)] = \int_x^\infty A_1(t_1) \int_a^{t_1} A_2(t_2)\, F(t_2)\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1\,,$$

$$\overline{\mathscr{C}}_2[F(x)] = \int_a^x A_2(t_2) \int_{t_2}^\infty A_1(t_1)\, F(t_1)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2\,,$$

$$\mathscr{C}_1[F(x)] = \int_x^\infty A_1(t_1) \int_{t_1}^\infty A_2(t_2)\, F(t_2)\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1\,,$$

$$\mathscr{C}_2[F(x)] = \int_x^\infty A_2(t_2) \int_{t_2}^\infty A_1(t_1)\, F(t_1)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2\,.$$

Weiter setzen wir

$$\overline{\mathscr{C}}{}_j^0[F(x)] = F(x)\,, \quad \overline{\mathscr{C}}{}_j^i[F(x)] = \overline{\mathscr{C}}_j \overline{\mathscr{C}}{}_j^{i-1}[F(x)]\,,$$

$$\mathscr{C}_j^0[F(x)] = F(x)\,, \quad \mathscr{C}_j^i[F(x)] = \mathscr{C}_j \mathscr{C}_j^{i-1}[F(x)]\,, \quad j = 1, 2; \quad i = 1, 2, \ldots$$

und

$$\gamma_1(x) = \int_x^\infty A_1(t_1) \int_{t_1}^\infty |A_2(t_2)|\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1 = \int_x^\infty |A_2(t_2)| \int_x^{t_2} A_1(t_1)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2\,,$$

$$\gamma_2(x) = \int_x^\infty |A_2(t_2)| \int_{t_2}^\infty A_1(t_1)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 = \int_x^\infty A_1(t_1) \int_x^{t_1} |A_2(t_2)|\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1\,.$$

Für $x \geqq a \geqq x_0$ gilt

$$\gamma_1(x) \leqq \gamma_1(a) < 1\,, \quad \gamma_2(x) \leqq \gamma_2(a) < 1\,.$$

Schliesslich bezeichnen wir

$$\|F\|_x = \sup_{t \geqq x} |F(t)|\,, \quad \|F\|_{x_0}^x = \sup_{x_0 \leqq t \leqq x} |F(t)|\,.$$

Es gilt folgender Hilfssatz:

Hilfssatz 2.1. *Es seien* $A_1^{-1}(x) \in C_1(I)$, $A_1^{-1}(x) > 0$, $A_2(x) \in C_0(I)$,

$$\int_a^\infty A_1(t_1) \int_a^{t_1} |A_2(t_2)|\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1 < \infty\,, \quad a \geqq x_0\,. \tag{2,1}$$

Dann hat die Differentialgleichung

$$[A_1^{-1}(x)\, y']' + A_2(x)\, y = 0 \tag{2,2}$$

ein Fundamentalsystem der Lösungen

$$(2,3) \qquad y_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\mathscr{C}}_1^i(1), \quad y_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_1^i \left[\int_x^{\infty} A_1(t)\, \mathrm{d}t \right],$$

$$A_1^{-1}(x)\, y_1'(x) = -\sum_{i=0}^{\infty} \overline{\mathscr{C}}_2^i \left[\int_a^x A_2(t)\, \mathrm{d}t \right], \quad A_1^{-1}(x)\, y_2'(x) = -\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_2^i(1).$$

Wenn noch

$$(2,4) \qquad \int_a^{\infty} |A_2(t_2)|\, \mathrm{d}t_2 < \infty,$$

dann ist

$$(2,5) \qquad y_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_1^i(1), \quad y_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_1^i \left[\int_x^{\infty} A_1(t)\, \mathrm{d}t \right],$$

$$A_1^{-1}(x)\, y_1'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_2^i \left(\int_x^{\infty} A_2(t)\, \mathrm{d}t \right), \quad A_1^{-1}(x)\, y_2'(x) = -\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_2^i(1)$$

und es gelten folgende Abschätzungen

$$(2,6) \qquad |\overline{\mathscr{C}}_1^i(F)| \leqq \int_x^{\infty} A_1(t_1) \int_a^{t_1} |A_2(t_2)|\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1\, \gamma_2^{i-1}(a)\, \|F\|_a,$$

$$\left| \overline{\mathscr{C}}_2^i \left(\int_a^x A_2(t)\, \mathrm{d}t \right) \right| \leqq \gamma_2^i(a) \int_a^x |A_2(t)|\, \mathrm{d}t,$$

$$|\mathscr{C}_1^i(F)| \leqq \frac{\gamma_1^i(x)}{i!} \|F\|_x,$$

$$|\mathscr{C}_2^i(F)| \leqq \frac{\gamma_2^i(x)}{i!} \|F\|_x.$$

Die im Hilfssatz 2.1 zusammengefassten Ergebnisse sind im ersten Teil der Arbeit [3] enthalten.

3. ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNGEN — HAUPTSSÄTZE

Verabredung. Ist kein Missverständnis zu befürchten, so wollen wir das Argument fortlassen. Zum Beispiel $y = \varphi\, U(\Phi)$, $\int_a^x f$ bedeutet $y(x) = \varphi(x)\, U[\Phi(x)]$, $\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$.

Satz 3.1. *Es seien $q, Q \in C_0(J)$, $p, P > 0$; $p, P \in C_1(J)$, $J = \langle a, \infty)$. Es seien φ, Φ Funktionen, welche die Bedingungen $\varphi, \Phi \in C_2(J)$, $\varphi, \Phi, \Phi' > 0$ erfüllen. Weiter sei U, V ein Fundamentalsystem der Lösungen der Differentialgleichung*

$$(3,1) \qquad (PY')' + QY = 0,$$

wo V eine Hauptlösung ist. Existiert ein positiver Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(\Phi)}{p\varphi^2\Phi'}$$

und ist

$$(3{,}2) \qquad \int_a^\infty \left| \left(\frac{p\varphi^2\Phi'}{P(\Phi)}\right)' P(\Phi)\, \dot U(\Phi)\, V(\Phi) \right| < \infty\,,$$

$$(3{,}3) \qquad \int_a^\infty \left| (p\varphi')'\,\varphi + q\varphi^2 - \frac{Q(\Phi)}{P(\Phi)}\, p\varphi^2\Phi'^2 \right| |U(\Phi)\, V(\Phi)| < \infty\,,$$

dann hat die Differentialgleichung (1,1) *ein Fundamentalsystem der Lösungen*

$$(3{,}4) \qquad y_1 = \varphi\, U(\Phi) \sum_{i=0}^\infty \overline{\mathscr{C}}_1^i(1)\,, \quad y_2 = \varphi\, U(\Phi) \sum_{i=0}^\infty (-1)^i\, \mathscr{C}_1^i \left(\int_x^\infty A_1\right),$$

$$y_1' = [\varphi\, U(\Phi)]' \sum_{i=0}^\infty \overline{\mathscr{C}}_1^i(1) - \varphi\, U(\Phi)\, A_1 \sum_{i=0}^\infty \overline{\mathscr{C}}_2^i \left(\int_a^x A_2\right),$$

$$y_2' = [\varphi\, U(\Phi)]' \sum_{i=0}^\infty (-1)^i\, \mathscr{C}_1^i \left(\int_x^\infty A_1\right) - \varphi\, U(\Phi)\, A_1 \sum_{i=0}^\infty (-1)^i\, \mathscr{C}_2^i(1)\,,$$

mit

$$(3{,}5) \qquad A_1^{-1} = p\varphi^2\, U^2(\Phi)\,,$$

$$A_2 = \left(\frac{p\varphi^2\Phi'}{P(\Phi)}\right)' P(\Phi)\, U(\Phi)\, \mathring{U}(\Phi) + \left[(p\varphi')'\,\varphi + q\varphi^2 - \frac{Q(\Phi)}{P(\Phi)}\, p\varphi^2\Phi'^2\right] U^2(\Phi)\,.$$

Beweis. Es sei U eine Lösung der Gleichung (3,1), die keine Hauptlösung ist, V eine von U unabhängige Lösung von (3,1). Dann ist

$$V = U \int_x^\infty \frac{\mathrm{d}t}{P(t)\, U^2(t)}$$

und die Funktionen

$$(3{,}6) \qquad z_1 = U[\Phi(x)]\,, \quad z_2 = V[\Phi(x)]$$

bilden ein Fundamentalsystem der Lösungen der Gleichung

$$z'' + \left[\log \frac{P(\Phi)}{\Phi'}\right]' z' + \frac{Q(\Phi)}{P(\Phi)}\, \Phi'^2 z = 0\,.$$

Für $x \geqq b \geqq a$ haben wir

$$\int_b^\infty \frac{\Phi'}{P(\Phi)\, z_2^2} = \int_b^\infty \frac{\Phi'}{P(\Phi)\, V^2(\Phi)} = \int_{\Phi(b)}^\infty P^{-1}V^{-2} = \infty\,,$$

so dass z_2 eine Hauptlösung ist. Setzen wir

$$y = \varphi Z . \tag{3,7}$$

Die Funktion Z genügt der Gleichung

$$Z'' + (\log p\varphi^2)' Z' + \left[\frac{(p\varphi')'}{p\varphi} + \frac{q}{p}\right] Z = 0$$

Wenn wir noch die Substitution

$$Z = \lambda(x)\, z_1 \tag{3,8}$$

einführen, erhalten wir

$$(A_1^{-1}\lambda')' + A_2\lambda = 0 , \tag{3,9}$$

wo A_1^{-1}, A_2 durch (3,5) definiert sind. Nun haben wir

$$\int_b^\infty A_1(x) \int_b^x |A_2(t)|\, dt\, dx = \int_b^\infty |A_2(t)| \int_t^\infty A_1(x)\, dx\, dt =$$

$$= \int_b^\infty |A_2(t)| \int_t^\infty \frac{dx}{p(x)\,\varphi^2(x)\, U^2(\Phi)}\, dt \leqq \text{konst.} \int_b^\infty |A_2(t)| \int_t^\infty \frac{\Phi'(x)}{U^2(\Phi)\, P(\Phi)}\, dx\, dt =$$

$$= \text{konst.} \int_b^\infty \left| \left[\frac{p(t)\,\varphi^2(t)\,\Phi'(t)}{P[\Phi(t)]}\right]' \right| P[\Phi(t)]\, U[\Phi(t)]\, \dot U[\Phi(t)] \int_t^\infty \frac{\Phi'(x)}{U^2[\Phi(x)]\, P[\Phi(x)]}\, dx\, dt +$$

$$+ \text{konst.} \int_b^\infty \left| [p(t)\,\varphi'(t)]'\,\varphi(t) + q(t)\,\varphi^2(t) - \frac{Q[\Phi(t)]}{P[\Phi(t)]}\, p(t)\,\varphi^2(t)\,\Phi'^2(t) \right| .$$

$$. \, U^2[\Phi(t)] \int_t^\infty \frac{\Phi'(x)}{U^2[\Phi(x)]\, P[\Phi(x)]}\, dx\, dt = \text{konst.} \int_b^\infty \left| \left(\frac{p\varphi^2\Phi'}{P(\Phi)}\right)' P(\Phi)\, \dot U(\Phi)\, V(\Phi) \right| dt +$$

$$+ \text{konst.} \int_b^\infty \left| (p\varphi')'\,\varphi + q\varphi^2 - \frac{Q(\Phi)}{P(\Phi)}\, p\varphi^2\Phi'^2 \right| |U(\Phi)\, V(\Phi)|\, dt < \infty .$$

Nach dem Hilfssatz 2.1 gibt es ein Fundamentalsystem der Lösungen der Differentialgleichung (3,9), die wir in der Gestalt

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\mathscr{C}}_1^i(1) , \quad \lambda_2 = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i\, \mathscr{C}_1^i\left(\int_x^\infty A_1\right) , \tag{3,10}$$

$$A_1^{-1}\lambda_1' = -\sum_{i=0}^{\infty} \overline{\mathscr{C}}_2^i\left(\int_a^x A_2\right) , \quad A_1^{-1}\lambda_2' = -\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i\, \mathscr{C}_2^i(1)$$

schreiben können. Die Behauptung des Satzes folgt unmittelbar aus (3,6), (3,7), (3,8), (3,10).

Satz 3.2. *Es seien die Vorausetzungen des Satzes* 3.1 *erfüllt und es gelten statt* (3,2), (3,3) *die Bedingungen*

$$\int_a^\infty \left| \left(\frac{p\varphi^2 \Phi'}{P(\Phi)} \right)' P(\Phi)\, U(\Phi)\, \dot{U}(\Phi) \right| < \infty\,, \tag{3,11}$$

$$\int_a^\infty \left| (p\varphi')' \varphi + q\varphi^2 - \frac{Q(\Phi)}{P(\Phi)} p\varphi^2 \Phi'^2 \right| U^2(\Phi) < \infty\,. \tag{3,12}$$

Dann hat die Differentialgleichung (1,1) *ein Fundamentalsystem der Lösungen*

$$y_1 = \varphi\, U(\Phi) \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_1^i(1)\,, \quad y_2 = \varphi\, U(\Phi) \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_1^i \left(\int_x^\infty A_1 \right), \tag{3,13}$$

$$y_1' = [\varphi\, U(\Phi)]' \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_1^i(1) + \varphi\, U(\Phi)\, A_1 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_2^i \left(\int_x^\infty A_2 \right),$$

$$y_2' = [\varphi\, U(\Phi)]' \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_1^i \left(\int_x^\infty A_1 \right) - \varphi\, U(\Phi)\, A_1 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_2^i(1)\,.$$

Beweis. Die Bedingungen (3,11), (3,12) sichern, dass (2,4) gilt. Die Differentialgleichung (3,9) hat also ein Fundamentalsystem der Lösungen

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_1^i(1)\,, \qquad \lambda_2 = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_1^i \left(\int_x^\infty A_1 \right) \tag{3,14}$$

$$\lambda_1' = A_1 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_2^i \left(\int_x^\infty A_2 \right), \quad \lambda_2' = -A_1 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_2^i(1)\,.$$

Aus (3,6), (3,7), (3,8), (3,14) folgt unmittelbar die Behauptung des Satzes.

4. ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNGEN DER LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG (1,1) FÜR EINE SONDERWAHL DER FUNKTIONEN

Satz 4.1. *Es seien* $q \in C_0(J)$, $p > 0$, $p \in C_1(J)$, $\varphi, \Phi, \Phi' > 0$, $\varphi, \Phi \in C_2(J)$. *Wenn ein positiver Grenzwert*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{p\varphi^2 \Phi'}$$

existiert und wenn

$$\int_a^\infty |(p\varphi^2 \Phi')'| < \infty\,, \tag{4,1}$$

$$\int_a^\infty |(p\varphi')' \varphi + q\varphi^2 + p\varphi^2 \Phi'^2| < \infty \tag{4,2}$$

gilt, dann hat die Differentialgleichung (1,1) *ein Fundamentalsystem der Lösungen*

$$y_1 = \varphi e^{\Phi}\left[1 + \int_x^\infty A_1(t_1)\int_a^{t_1} A_2(t_2)\,dt_2\,dt_1 + \alpha(x)\right], \tag{4,3}$$

$$y_2 = \varphi e^{\Phi}\left[\int_x^\infty A_1\,dt - \int_x^\infty A_1(t_1)\int_{t_1}^\infty\int_{t_2}^\infty A_1(t_3)\,A_2(t_2)\,dt_3\,dt_2\,dt_1 + \beta(x)\right],$$

$$y_1' = (\varphi e^{\Phi})'\left[1 + \int_x^\infty A_1(t_1)\int_a^{t_1} A_2(t_2)\,dt_2\,dt_1 + \alpha(x)\right] - \varphi e^{\Phi} A_1\,.$$

$$\cdot\left[\int_a^x A_2\,dt + \int_a^x A_2(t_2)\int_{t_2}^\infty\int_a^{t_1} A_2(t_3)\,A_1(t_1)\,dt_3\,dt_1\,dt_2 + \delta(x)\right],$$

$$y_2' = (\varphi e^{\Phi})'\left[\int_x^\infty A_1\,dt - \int_x^\infty A_1(t_1)\int_{t_1}^\infty\int_{t_2}^\infty A_1(t_3)\,A_2(t_2)\,dt_3\,dt_2\,dt_1 + \beta(x)\right] -$$

$$- \varphi e^{\Phi} A_1\left[1 - \int_x^\infty A_2(t_2)\int_{t_2}^\infty A_1(t_1)\,dt_1\,dt_2 + \varepsilon(x)\right]$$

und es gilt

$$|\alpha(x)| \leqq \int_x^\infty A_1(t_1)\int_a^{t_1}|A_2(t_2)|\,dt_2\,dt_1 \sum_{i=2}^\infty \gamma_2^{i-1}(a) = \tag{4,4}$$

$$= \int_x^\infty A_1(t_1)\int_a^{t_1}|A_2(t_2)|\,dt_2\,dt_1\,\gamma_2(a)\,\frac{1}{1-\gamma_2(a)},$$

$$|\beta(x)| \leqq \int_x^\infty A_1(t)\,dt \sum_{i=2}^\infty \frac{\gamma_2^i(x)}{i!} \leqq \int_x^\infty A_1(t)\,dt\,\frac{\gamma_2^2(x)}{2!}\exp\{\gamma_2(x)\},$$

$$|\delta(x)| \leqq \int_a^x |A_2(t)|\,dt \sum_{i=2}^\infty \gamma_2^i(a) = \int_a^x |A_2(t)|\,dt\,\gamma_2(a)\,\frac{1}{1-\gamma_2(a)},$$

$$|\varepsilon(x)| \leqq \sum_{i=2}^\infty \frac{\gamma_2^i(x)}{i!} \leqq \frac{\gamma_2^2(x)}{2!}\exp\{\gamma_2(x)\}\,.$$

Der Beweis folgt aus dem Satz 3.1 durch die Wahl $P = 1$, $Q = -1$ und aus (2,6).

Folgerung 4.2. *Es seien* $q \in C_0(J)$, $p \in C_1(J)$, $p > 0$, $\varphi \in C_2(J)$, $\varphi > 0$. *Es gelte*

$$\int_a^\infty \left|(p\varphi')'\,\varphi + q\varphi^2 + \frac{1}{p\varphi^2}\right| e^{2\Phi} < \infty\,. \tag{4,5}$$

Dann hat die Differentialgleichung (1,1) *ein Fundamentalsystem der Lösungen*

$$y_1 = \varphi e^{\Phi}\left[1 + \frac{1}{2}\int_x^\infty (e^{-2\Phi(t)} - e^{-2\Phi(x)})\,A_2(t)\,dt + \alpha(x)\right], \tag{4,6}$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\varphi e^{-\Phi}\left[1 + \frac{1}{2}\int_x^\infty (e^{2\Phi(x)} - e^{2\Phi(t)})\, e^{-4\Phi(t)} A_2(t)\, dt + \beta(x)\right],$$

$$y_1' = (\varphi' + \varphi\Phi')e^{\Phi}\left[1 + \frac{1}{2}\int_x^\infty \left(e^{-2\Phi(t)} - \frac{\varphi'(x) - \varphi(x)\Phi'(x)}{\varphi'(x) + \varphi(x)\Phi'(x)}\, e^{-2\Phi(x)}\right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot A_2(t)\, dt + \delta(x)\right],$$

$$y_2' = \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi\Phi')e^{-\Phi}\left[1 + \frac{\varphi\Phi'}{\varphi' - \varphi\Phi'}\int_x^\infty A_2(t)\, e^{-2\Phi(t)}\, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{\varphi' + \varphi\Phi'}{2(\varphi' - \varphi\Phi')}\int_x^\infty (e^{2\Phi(x)} - e^{2\Phi(t)})\, e^{-4\Phi(t)} A_2(t)\, dt + \varepsilon(x)\right]$$

und es gilt

(4,7) $$|\alpha(x)| < \frac{1}{8} e^{-4\Phi}\left(\int_x^\infty |A_2|\right)^2,$$

$$|\beta(x)| < \frac{1}{8} e^{-4\Phi}\left(\int_x^\infty |A_2|\right)^2,$$

$$|\delta(x)| < e^{-4\Phi}\left(\int_x^\infty |A_2(t)|\, dt\right)^2 \left[\frac{1}{8} + \frac{\varphi\Phi'}{2(\varphi' + \varphi\Phi')} + \frac{1}{8} e^{-2\Phi}\int_x^\infty |A_2|\right],$$

$$|\varepsilon(x)| < \frac{1}{8} e^{-4\Phi}\left(\int_x^\infty |A_2(t)\, dt\right)^2 \left[\left|\frac{\varphi' + \varphi\Phi'}{\varphi' - \varphi\Phi'}\right| + 2\left|\frac{\varphi\Phi'}{\varphi' - \varphi\Phi'}\right|\right].$$

Beweis. Wir setzen im vorigen Satz $P = 1$, $Q = -1$, $\Phi' = 1/p\varphi^2$, $U = e^{\Phi}$, $V = e^{-\Phi}$. Dann ist

$$A_1^{-1} = \frac{e^{2\Phi}}{\Phi'}, \quad A_2 = \left[(p\varphi')'\varphi + q\varphi^2 + \frac{1}{p\varphi^2}\right]e^{2\Phi},$$

$$\gamma_1(x) = \int_x^\infty |A_2(t_2)| \int_x^{t_2} A_1(t_1)\, dt_1\, dt_2 \leqq \int_x^\infty |A_2(t_2)| \int_x^\infty \Phi'(t_1)\, e^{-2\Phi(t_1)}\, dt_1\, dt_2 =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2\Phi(x)}\int_x^\infty |A_2|,$$

$$\gamma_2(x) = \int_x^\infty |A_2(t_2)| \int_{t_2}^\infty A_1(t_1)\, dt_1\, dt_2 = \frac{1}{2}\int_x^\infty |A_2(t_2)|\, e^{-2\Phi(t_2)}\, dt_2 \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2} e^{-2\Phi(x)}\int_x^\infty |A_2|.$$

Nach dem Satz 3.2 gilt

$$y_1 = \varphi e^{\Phi}[1 - \mathscr{C}_1(1) + \sum_{i=2}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_1^i(1)],$$

$$y_2 = \varphi e^{\Phi}\left[\int_x^\infty A_1(t)\,dt - \mathscr{C}_1\left(\int_x^\infty A_1\right) + \sum_{i=2}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_1^i\left(\int_x^\infty A_1\right)\right],$$

$$y_1' = (\varphi e^{\Phi})'\,[1 - \mathscr{C}_1(1) + \sum_{i=2}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_1^i(1)] +$$

$$+ \varphi e^{\Phi} A_1 \left[\int_x^\infty A_2(t)\,dt - \mathscr{C}_2\left(\int_x^\infty A_2\right) + \sum_{i=2}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_2^i\left(\int_x^\infty A_2\right)\right],$$

$$y_2' = (\varphi e^{\Phi})'\left[\int_x^\infty A_1(t)\,dt - \mathscr{C}_1\left(\int_x^\infty A_1\right) + \sum_{i=2}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_1^i\left(\int_x^\infty A_1\right)\right] -$$

$$- \varphi e^{\Phi} A_1 [1 - \mathscr{C}_2(1) + \sum_{i=2}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_2^i(1)]\,.$$

Nun haben wir

$$y_1 = \varphi e^{\Phi}\left[1 - \int_x^\infty \Phi'(t_1)\, e^{-2\Phi(t_1)} \int_{t_1}^\infty A_2(t_2)\,dt_2\,dt_1 + \alpha(x)\right],$$

wo

$$\alpha(x) = \sum_{i=2}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_1^i(1)$$

ist. Nach leichter Berechnung bekommen wir

$$y_1 = \varphi e^{\Phi}\left[1 - \int_x^\infty A_2(t_2) \int_x^{t_2} \Phi'(t_1)\, e^{-2\Phi(t_1)}\,dt_1\,dt_2 + \alpha(x)\right] =$$

$$= \varphi e^{\Phi}\left\{1 + \frac{1}{2}\int_x^\infty [e^{-2\Phi(t)} - e^{-2\Phi(x)}]\, A_2(t)\,dt + \alpha(x)\right\},$$

und es gilt

$$|\alpha(x)| \leqq \sum_{i=2}^\infty \frac{\gamma_1^i(x)}{i!} \leqq \frac{\gamma_1^2(x)}{2!}\, e^{\gamma_1(x)} < \frac{\gamma_1^2(x)}{2!} \leqq \frac{1}{8}\, e^{-4\Phi}\left(\int_x^\infty |A_2|\right)^2.$$

Ferner ist

$$y_2 = \varphi e^{\Phi}\left[\frac{1}{2}\, e^{-2\Phi(x)} + \frac{1}{2}\int_x^\infty e^{-2\Phi(t_1)}\, \Phi'(t_1) \int_{t_1}^\infty A_2(t_2)\,(-e^{-2\Phi(t_2)})\,dt_2\,dt_1 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=2}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_1^i\left(\int_x^\infty A_1\right)\right] = \varphi e^{\Phi}\left[\frac{1}{2}\, e^{-2\Phi(x)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int_x^\infty A_2(t_2)\, e^{-2\Phi(t_2)} \int_x^{t_2} e^{-2\Phi(t_1)}\, \Phi'(t_1)\,dt_1\,dt_2 + \sum_{i=2}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_1^i\left(\int_x^\infty A_1\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,\varphi e^{-\Phi}\left[1 + \frac{1}{2}\int_x^\infty (e^{2\Phi(x)} - e^{2\Phi(t)})\, e^{-4\Phi(t)}\, A_2(t)\,dt + \beta(x)\right],$$

wo

$$\beta(x) = 2e^{2\Phi(x)} \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_1^i \left(\int_x^{\infty} A_1 \right),$$

so dass

$$|\beta(x)| \leqq 2e^{2\Phi} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\gamma_1^i(x)}{i!} \cdot \frac{1}{2} e^{-2\Phi} \leqq \frac{\gamma_1^2(x)}{2!} e^{\gamma_1(x)} < \frac{1}{8} e^{-4\Phi} \left(\int_x^{\infty} |A_2| \right)^2 .$$

Für die Ableitung y_1' erhalten wir

$$y_1' = (\varphi' + \varphi\Phi') e^{\Phi} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \int_x^{\infty} [e^{-2\Phi(t)} - e^{-2\Phi(x)}] A_2(t) \, dt + \alpha(x) \right\} +$$

$$+ \varphi\Phi' e^{-\Phi} \left\{ \int_x^{\infty} A_2(t) \, dt - \frac{1}{2} \int_x^{\infty} A_2(t_2) \int_x^{\infty} e^{-2\Phi(t_1)} A_2(t_1) \, dt_1 \, dt_2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_2^i \left(\int_x^{\infty} A_2 \right) \right\} =$$

$$= (\varphi' + \varphi\Phi') e^{\Phi} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \int_x^{\infty} \left[e^{-2\Phi(t)} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\varphi'(x) - \varphi(x)\,\Phi'(x)}{\varphi'(x) + \varphi(x)\,\Phi'(x)} e^{-2\Phi(x)} \right] A_2(t) \, dt + \delta(x) \right\},$$

wo

$$\delta(x) = \alpha(x) + \frac{\varphi\Phi'}{\varphi' + \varphi\Phi'} e^{-2\Phi} \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_2^i \left(\int_x^{\infty} A_2 \right) -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\varphi\Phi'}{\varphi' + \varphi\Phi'} e^{-2\Phi} \int_x^{\infty} A_2(t_2) \int_{t_2}^{\infty} e^{-2\Phi(t_1)} A_2(t_1) \, dt_1 \, dt_2 ,$$

so dass

$$|\delta(x)| \leqq |\alpha(x)| + \left| \frac{\varphi\Phi'}{\varphi' + \varphi\Phi'} \right| \left[\frac{1}{2} e^{-4\Phi} \left(\int_x^{\infty} |A_2(t)| \, dt \right)^2 + e^{-2\Phi} \frac{\gamma_2^2(x)}{2!} e^{\gamma_2(x)} \int_x^{\infty} |A_2| \right] <$$

$$< e^{-4\Phi} \left(\int_x^{\infty} |A_2(t)| \, dt \right)^2 \left[\frac{1}{8} + \frac{\varphi\Phi'}{2(\varphi' + \varphi\Phi')} + \frac{1}{8} e^{-2\Phi} \int_x^{\infty} |A_2| \right].$$

Schliesslich haben wir

$$y_2' = (\varphi' + \varphi\Phi') e^{\Phi} \left\{ \frac{1}{2} e^{-2\Phi} + \frac{1}{4} \int_x^{\infty} A_2(t) \, e^{-2\Phi(t)} [e^{-2\Phi(t)} - e^{-2\Phi(x)}] \, dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_2^i \left(\int_x^{\infty} A_1 \right) \right\} - \varphi\Phi' e^{-\Phi} \left[1 - \frac{1}{2} \int_x^{\infty} A_2(t) \, e^{-2\Phi(t)} \, dt + \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_2^i(1) \right] =$$