ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 97 * PRAHA 10. 5. 1972 * ČÍSLO 2

O PROJEKTIVNÍCH DEFORMACÍCH KONGRUENCÍ ROVIN V n-ROZMĚRNÉM PROJEKTIVNÍM PROSTORU

JAROSLAV BAYER, Brno

(Došlo dne 27. května 1970)

V této práci je zkoumána existence projektivní deformace 2. řádu kongruencí rovin projektivního prostoru P_n (pro $n > 5$) v souvislosti s deformacemi 1. řádu jiných objektů a v jednotlivých případech je prokázána existence dvojic $(C, \tilde{L})$.

Podnětem k této práci byl seminář prof. K. SVOBODY o soustavách Pfaffových rovnic.

1. Je zde provedena částečná specializace průvodního reperu kongruence rovin v P_n tím, že vrcholy A_1, A_2, A_3 reperu jsou umístěny v ohniscích běžné roviny kongruence. Při pohybu roviny bude každé ze tří ohnisek opisovat fokální plochu dané kongruence rovin. Ve specializaci je pokračováno dalším zjednodušením až do tvaru vhodného pro naše použití.

2. Jsou zde uvedeny nutné a postačující podmínky existence projektivních deformací 1. a 2. řádu kongruencí rovin v projektivních prostorech P_n a $\tilde{P}_n$.

3. Pomocí tečné kolineace je realizována korespondence mezi fokálními plochami, která je deformací 1. řádu. Je ukázáno, že její existence je nutnou a postačující podmínkou k existenci projektivní deformace 2. řádu kongruence rovin v P_n pro $n \geqq 8$ a dokázána existenční věta pro dvojici $(C, \tilde{L})$.

4. Zavedená korespondence $C^* : [E^7 E^8] \mapsto [\tilde{E}^7 \tilde{E}^8]$ současně s korespondencemi C_i $(i = 1, 2, 3)$ jsou deformacemi 1. řádu a jejich existence je nutnou a postačující podmínkou k existenci projektivní deformace 2. řádu kongruencí rovin v P_7. Je zde dokázána existence dvojice $(C, \tilde{L})$.

5. Konečně existence korespondence $C^\times : E^7 \mapsto \tilde{E}^7$ a korespondencí C_i $(i = 1, 2, 3)$, které jsou deformacemi 1. řádu, jsou nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby existovala projektivní deformace 2. řádu kongruencí rovin v P_6 a existence dvojice $(C, \tilde{L})$ je zde dokázána.

1. SPECIALIZACE REPERU KONGRUENCE

V projektivním n-rozměrném prostoru P_n $(n > 5)$ provedeme částečnou specializaci průvodního reperu. O funkcích vyskytujících se v dalším budeme vždy předpokládat, že jsou spojitě diferencovatelné až do potřebného řádu, resp. že jsou analytické. Reperem projektivního prostoru P_n $(n > 5)$ budeme rozumět kteroukoliv uspořádanou $(n + 1)$-tici lineárně nezávislých aritmetických bodů $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$, pro něž

$$[A_1A_2 \ldots A_{n+1}] = 1 . \tag{1,1}$$

V dalším budou sčítací indexy nabývat vždy hodnot:

$$\begin{aligned} m &= 1, 2, \ldots, n + 1 , & i &= 1, 2, 3 , \\ u &= 1, 2, \ldots, n + 1 , & j &= 1, 2, 3 , \\ v &= 1, 2, \ldots, n + 1 , & I &= 4, 5, 6 , \\ M &= 4, 5, \ldots, n + 1 , & k &= 7, 8, 9, \ldots, n + 1 , \\ N &= 4, 5, \ldots, n + 1 , & l &= 7, 8, 9, \ldots, n + 1 . \end{aligned}$$

Obecný pohyblivý reper závisí na $(n + 1)^2 - 1$ parametrech a relativní komponenty ω_u^m jsou pak určeny na základě

$$\mathrm{d}A_u = \sum_m \omega_u^m A_m , \tag{1,2}$$

kde

$$\mathrm{D}\omega_u^m = \sum_v \omega_u^v \wedge \omega_v^m . \tag{1,3}$$

Diferencováním $(1,1)$ dostaneme

$$\sum_u \omega_u^u = 0 . \tag{1,4}$$

Nyní zvolíme vrcholy A_1, A_2, A_3 reperu vždy v rovině kongruence L. Diferencováním dostaneme

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[A_1A_2A_3] &= \omega_1^1[A_1A_2A_3] + \sum_M \omega_1^M[A_MA_2A_3] + \\ &+ \omega_2^2[A_1A_2A_3] + \sum_M \omega_2^M[A_1A_MA_3] + \omega_3^3[A_1A_2A_3] + \sum_M \omega_3^M[A_1A_2A_M] . \end{aligned} \tag{1,5}$$

V dalším se omezíme na studium kongruencí charakteru 5. Budeme předpokládat, že v každé běžné rovině kongruence existují tři ohniska neležící na jedné přímce.

Symbolem δ označíme variaci (diferencování pouze podle vedlejších parametrů) a položíme

$$\omega_u^m(\delta) = e_u^m .$$

Variací $(1,5)$ obdržíme

$$\delta[A_1A_2A_3] = (e_1^1 + e_2^2 + e_3^3) . [A_1A_2A_3] ,$$

takže formy

$$(1,6) \qquad \omega_i^M$$

jsou hlavní.

Protože hlavní formy závisejí pouze na dvou hlavních parametrech, jsou mezi nimi pouze dvě nezávislé, dejme tomu

$$(1,7) \qquad \omega_1^4 \equiv \omega_1 \; ; \quad \omega_2^5 \equiv \omega_2$$

a nechť

$$\omega_3^6 \equiv \omega_3 = a_3^6(\omega_1 + r\omega_2)\,, \quad \text{kde} \quad a_3^6 \neq 0\,, \quad r \neq 0\,, \quad r \neq \infty\,.$$

Zbývající hlavní formy (1,6) vyjádříme jako lineární kombinace forem (1,7).

Všechny koeficienty hlavních forem (1,6) závisejí obecně na hlavních a vedlejších parametrech.

Bod $F = \sum_i x^i A_i$ se nazývá ohniskem příslušným k fokálnímu směru $p_1\omega_1 + p_2\omega_2 = 0$, jestliže při pohybu roviny v tomto fokálním směru je $[A_1A_2A_3\, \mathrm{d}F] = 0$.

Nyní provedeme specializaci reperu tak, aby vrchol A_i byl ohniskem příslušným ke směru $\omega_i = 0$, což vyjádříme rovnicí

$$(1,8) \qquad [A_1A_2A_3\, \mathrm{d}A_i]_{\omega_i=0} = 0\,.$$

Z $(1,2_{1,2,3})$ užitím (1,8) plyne

$$(1,9) \qquad \omega_i \wedge \omega_i^M = 0\,, \quad \text{pro} \quad i = 1, 2 \quad \text{je} \quad M \neq i + 3\,.$$

Z předcházejících vztahů (1,9), aplikací Cartanova lemmatu plyne dále:

$$(1,10) \qquad \omega_i^M = a_i^M\omega_i\,, \quad \text{rovněž pro} \quad i = 1, 2 \quad \text{je} \quad M \neq i + 3\,.$$

Při další specializaci reperu se podle předcházejícího omezujeme na případ, že každé ze tří ohnisek při pohybu roviny opisuje regulární plochu (nazveme ji plochou fokální).

Po dosazení (1,10) do (1,2) je z prvních tří rovnic vidět, že tečné roviny fokálních ploch (A_i), v příslušných bodech A_i, leží v prostorech

$$(1,11) \qquad [A_1A_2A_3 \sum_M a_i^M A_M]\,, \quad \text{kde} \quad a_1^4 = a_2^5 = 1\,.$$

Zvolíme reper tak, aby uvedené tečné prostory (1,11) byly

$$[A_1A_2A_3a_i^{i+3}A_{i+3}]\,, \quad \text{kde} \quad a_1^4 = a_2^5 = 1\,, \quad \text{tj.} \quad a_i^M = 0 \quad \text{pro} \quad M \neq i + 3\,.$$

Odtud podle (1,10) plyne

$$(1,12) \qquad \omega_i^M = 0 \quad \text{pro} \quad M \neq i + 3\,.$$

Všimněme si nyní podrobněji hlavní formy

$$\omega_3 \equiv \omega_3^6 = a_3^6(\omega_1 + r\omega_2)\,.$$

Vnějším diferencováním dostaneme

$$\begin{gathered}\omega_1 \wedge \{\mathrm{d}a_3^6 + a_3^6(\omega_1^1 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_4^4)\} + \\ + \omega_2 \wedge \{\mathrm{d}(a_3^6 r) + a_3^6 r(\omega_2^2 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_5^5)\} = 0\,.\end{gathered}$$

V dalším se omezíme na případ $a_3^6 \neq 0$ a bez újmy na obecnosti zvolíme $a_3^6 = 1$. V tomto případě je r relativním invariantem a

$$\omega_3^6 = \omega_1 + r\omega_2 \equiv \omega_3\,. \tag{1,13}$$

Ze tří hlavních forem $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ jsou každé dvě navzájem nezávislé, neboť platí

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0\,; \quad \omega_1 \wedge \omega_3 \neq 0\,; \quad \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0\,.$$

Vypočtěme jejich vnější diferenciály

$$\begin{gathered}\mathrm{D}\omega_1 = \omega_1 \wedge (\omega_4^4 - \omega_1^1)\,; \quad \mathrm{D}\omega_2 = \omega_2 \wedge (\omega_5^5 - \omega_2^2)\,; \\ \mathrm{D}(\omega_1 + r\omega_2) = (\omega_1 + r\omega_2) \wedge (\omega_6^6 - \omega_3^3)\,.\end{gathered}$$

Vnějším diferencováním rovnic (1,12) a užitím Cartanova lemmatu určíme další hlavní formy a zapíšeme je jako lineární kombinace příslušných dvou nezávislých hlavních forem (1,13) ve tvaru

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 &= a_1^2\omega_1 + \alpha_1^2\omega_2\,, & \omega_6^k &= \beta_3^{k-3}(\omega_1 + r\omega_2) \\
\omega_1^3 &= a_1^3\omega_1 + \alpha_1^3(\omega_1 + r\omega_2)\,, & \omega_4^5 &= \beta_1^2\omega_1 - a_1^2\omega_2\,, \\
\omega_4^k &= \beta_1^{k-3}\omega_1\,, & \omega_4^6 &= \beta_1^3\omega_1 - a_1^3(\omega_1 + r\omega_2)\,, \\
\omega_2^1 &= \alpha_2^1\omega_1 + a_2^1\omega_2\,, & \omega_5^4 &= -a_2^1\omega_1 + \beta_2^1\omega_2\,, \\
\omega_2^3 &= a_2^3\omega_2 + \alpha_2^3(\omega_1 + r\omega_2)\,, & \omega_5^6 &= \beta_2^3\omega_2 - a_2^3(\omega_1 + r\omega_2)\,, \\
\omega_5^k &= \beta_2^{k-3}\omega_2\,, & \omega_6^4 &= -a_3^1\omega_1 + \beta_3^1(\omega_1 + r\omega_2)\,, \\
\omega_3^1 &= \alpha_3^1\omega_1 + a_3^1(\omega_1 + r\omega_2)\,, & \omega_6^5 &= -a_3^2\omega_2 + \beta_3^2(\omega_1 + r\omega_2)\,. \\
\omega_3^2 &= \alpha_3^2\omega_2 + a_3^2(\omega_1 + r\omega_2)\,.
\end{aligned} \tag{1,14}$$

Vnějším derivováním hlavních forem (1,14) obdržíme

$$\begin{gathered}
\omega_1 \wedge \{\mathrm{d}a_1^2 + a_1^2(\omega_2^2 - \omega_4^4) + \omega_4^2\} + \\
+ \omega_2 \wedge \{\mathrm{d}\alpha_1^2 + \alpha_1^2(2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_5^5)\} + \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = 0\,, \\
\omega_1 \wedge \{\mathrm{d}a_1^3 + a_1^3(\omega_3^3 - \omega_4^4) + \omega_4^3\} + \\
+ (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{\mathrm{d}\alpha_1^3 + \alpha_1^3(2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_6^6)\} + \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 = 0\,,
\end{gathered} \tag{1,15}$$

$$\begin{gathered}\omega_1 \wedge \{\mathrm{d}\alpha_2^1 + \alpha_2^1(2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_4^4)\} + \\ + \omega_2 \wedge \{\mathrm{d}a_2^1 + a_2^1(\omega_1^1 - \omega_5^5) + \omega_5^1\} + \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 = 0\,,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\omega_2 \wedge \{\mathrm{d}a_2^3 + a_2^3(\omega_3^3 - \omega_5^5) + \omega_5^3\} + \\ + (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{\mathrm{d}\alpha_2^3 + \alpha_2^3(2\omega_3^3 - \omega_2^2 - \omega_6^6)\} + \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 = 0\,,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\omega_1 \wedge \{\mathrm{d}\alpha_3^1 + \alpha_3^1(2\omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_4^4)\} + \\ + (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{\mathrm{d}a_3^1 + a_3^1(\omega_1^1 - \omega_6^6) + \omega_6^1\} + \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 = 0\,,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\omega_2 \wedge \{\mathrm{d}\alpha_3^2 + \alpha_3^2(2\omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_5^5)\} + \\ + (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{\mathrm{d}a_3^2 + a_3^2(\omega_2^2 - \omega_6^6) + \omega_6^2\} + \omega_3^1 \wedge \omega_1^2 = 0\,,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\omega_1 \wedge \{\mathrm{d}\beta_1^2 + \beta_1^2(\omega_1^1 + \omega_5^5 - 2\omega_4^4) + \sum_k \beta_1^{k-3}\omega_k^5\} - \\ - \omega_2 \wedge \{\mathrm{d}a_1^2 + a_1^2(\omega_2^2 - \omega_4^4) + \omega_4^2\} + \omega_4^6 \wedge \omega_6^5 = 0\,,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\omega_1 \wedge \{\mathrm{d}\beta_1^3 + \beta_1^3(\omega_1^1 + \omega_6^6 - 2\omega_4^4) + \sum_k \beta_1^{k-3}\omega_k^6\} - \\ - (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{\mathrm{d}a_1^3 + a_1^3(\omega_3^3 - \omega_4^4) + \omega_4^3\} + \omega_4^5 \wedge \omega_5^6 = 0\,,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}-\omega_1 \wedge \{\mathrm{d}a_2^1 + a_2^1(\omega_1^1 - \omega_5^5) + \omega_5^1\} + \\ + \omega_2 \wedge \{\mathrm{d}\beta_2^1 + \beta_2^1(\omega_2^2 + \omega_4^4 - 2\omega_5^5) + \sum_k \beta_2^{k-3}\omega_k^4\} + \omega_5^6 \wedge \omega_6^4 = 0\,,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\omega_2 \wedge \{\mathrm{d}\beta_2^3 + \beta_2^3(\omega_2^2 + \omega_6^6 - 2\omega_5^5) + \sum_k \beta_2^{k-3}\omega_k^6\} - \\ - (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{\mathrm{d}a_2^3 + a_2^3(\omega_3^3 - \omega_5^5) + \omega_5^3\} + \omega_5^4 \wedge \omega_4^6 = 0\,,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}- \omega_1 \wedge \{\mathrm{d}a_3^1 + a_3^1(\omega_1^1 - \omega_6^6) + \omega_6^1\} + \\ + (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{\mathrm{d}\beta_3^1 + \beta_3^1(\omega_3^3 + \omega_4^4 - 2\omega_6^6) + \sum_k \beta_3^{k-3}\omega_k^4\} + \omega_6^5 \wedge \omega_5^4 = 0\,,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}-\omega_2 \wedge \{\mathrm{d}a_3^2 + a_3^2(\omega_2^2 - \omega_6^6) + \omega_6^2\} + \\ + (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{\mathrm{d}\beta_3^2 + \beta_3^2(\omega_3^3 + \omega_5^5 - 2\omega_6^6) + \sum_k \beta_3^{k-3}\omega_k^5\} + \omega_6^4 \wedge \omega_4^5 = 0\,,\end{gathered}$$

$$\omega_1 \wedge \{\mathrm{d}\beta_1^{k-3} + \beta_1^{k-3}(\omega_1^1 - 2\omega_4^4 + \omega_k^k) + \sum_{i=1}^{n-5} \beta_1^{3+i}\omega_{6+i}^k\} + \Theta_1 = 0\,,$$

$$\omega_2 \wedge \{\mathrm{d}\beta_2^{k-3} + \beta_2^{k-3}(\omega_2^2 - 2\omega_5^5 + \omega_k^k) + \sum_{i=1}^{n-5} \beta_2^{3+i}\omega_{6+i}^k\} + \Theta_2 = 0\,,$$

$$(\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{\mathrm{d}\beta_3^{k-3} + \beta_3^{k-3}(\omega_3^3 - 2\omega_6^6 + \omega_k^k) + \sum_{i=1}^{n-5} \beta_3^{i+3}\omega_{i+6}^k\} + \Theta_3 = 0\,,$$

kde Θ_i označuje vnější součin příslušných hlavních forem. Z (1,15) je vidět, že α_i^j $(i \neq j)$ jsou relativní invarianty, takže je možno specializovat reper volbou $a_i^j = 0$ pro $i \neq j$.

Při této volbě reperu je podle (1,14)

$$\omega_i^j = \alpha_i^j \omega_j \quad \text{pro} \quad i \neq j\,, \qquad \omega_{i+3}^M = \beta_i^{M-3}\omega_i \quad \text{pro} \quad M \neq i + 3\,. \tag{1,16}$$

Další úvahy budou se vztahovat na právě sestrojený reper.

2. PROJEKTIVNÍ DEFORMACE

Budiž dána kongruence L rovin v P_n $(n > 5)$ s reperem specializovaným podle předchozího paragrafu a kongruence $\tilde{L}$ rovin v projektivním prostoru $\tilde{P}_n$, s obdobně specializovaným reperem. Reper, Pfaffovy formy a všechny relace patřící ke kongruenci $\tilde{L}$ budeme označovat vlnovkou. Nechť mezi kongruencemi existuje rozvinutelná korespondence $C : L \to \tilde{L}$, určená analyticky rovnicemi

$$\tilde{\omega}_u^v = \omega_u^v + \tau_u^v\,; \tag{2,1}$$

$$\text{pro} \quad \tau_1^4 = \tau_2^5 = 0 \quad \text{je} \quad \tilde{\omega}_1 = \omega_1 \quad \text{a} \quad \tilde{\omega}_2 = \omega_2\,.$$

Korespondence C mezi rovinami σ a $\tilde{\sigma}$ nazývá se projektivní deformací řádu $k = 1, 2$, když ke každé dvojici odpovídajících si rovin $\sigma, \tilde{\sigma}$ existuje kolineace $K : P_n \to \tilde{P}_n$, která realizuje analytický styk řádu k mezi kongruencemi $\tilde{L}$ a KL rovin, v rovině $\tilde{\sigma} = K\sigma = C\sigma$.

Tyto požadavky jsou analyticky vyjádřeny rovnicemi:

$$K[A_1A_2A_3] = [\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3]\,, \tag{2,2}$$

$$K\,\mathrm{d}[A_1A_2A_3] = \mathrm{d}[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3] + \vartheta_1[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3]\,, \tag{2,3}$$

$$K\,\mathrm{d}^2[A_1A_2A_3] = \mathrm{d}^2[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3] + 2\vartheta_1\,\mathrm{d}[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3] + \vartheta_2[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3] \tag{2,4}$$

pro $k = 2$, kde $\vartheta_{1,2}$ je jakási Pfaffova forma. Pro jednoduchost budeme předpokládat existenci regulární kolineace K, realizující projektivní deformaci 2. řádu ve tvaru

$$KA_i = c_i^i\tilde{A}_i\,, \quad KA_M = \sum_u c_M^u \tilde{A}_u\,. \tag{2,5}$$

Protože kolineace K je regulární, platí

$$c_1^1c_2^2c_3^3|c_M^N| \neq 0\,,$$

přičemž $|c_M^N|$ je determinant o prvcích c_M^N.

Vyšetřujme nyní projektivní deformaci 1. řádu. Podle (2,2) z (2,5) vyplývá

$$c_1^1c_2^2c_3^3 = 1\,. \tag{2,6}$$

Pomocí zkonstruovaného reperu stanovíme diferenciál roviny $[A_1 A_2 A_3]$ ve tvaru

$$
\begin{aligned}
(2,7) \qquad \mathrm{d}[A_1 A_2 A_3] = {} & [A_1 A_2 A_3]\,(\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3) - [A_1 A_3 A_5]\,\omega_2 + \\
& + [A_2 A_3 A_4]\,\omega_1 + [A_1 A_2 A_6]\,(\omega_1 + r\omega_2)\,.
\end{aligned}
$$

Dosazením (2,7) do rovnice (2,3) s využitím (2,5) a s přihlédnutím k (2,6) dostaneme

$$
\begin{aligned}
(2,8) \qquad & [\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_3]\,.\,\{(\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3) + \omega_2 c_1^1 c_3^3 c_5^2 + (\omega_1 + r\omega_2)\, c_1^1 c_2^2 c_6^3 + \\
& + \omega_1 c_2^2 c_3^3 c_4^1\} + \sum_M [\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_M]\,(\omega_1 + r\omega_2)\, c_1^1 c_2^2 c_6^M + \sum_M [\tilde{A}_1 \tilde{A}_3 \tilde{A}_M]\,(-\omega_2)\, c_1^1 c_3^3 c_5^M + \\
& + \sum_M [\tilde{A}_2 \tilde{A}_3 \tilde{A}_M]\,\omega_1 c_2^2 c_3^3 c_4^M = [\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_3]\,(\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \tau_1^1 + \tau_2^2 + \tau_3^3 + \vartheta_1) + \\
& + [\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 \tilde{A}_6]\,(\omega_1 + r\omega_2) + [\tilde{A}_1 \tilde{A}_3 \tilde{A}_5]\,(-\omega_2) + [\tilde{A}_2 \tilde{A}_3 \tilde{A}_4]\,\omega_1\,.
\end{aligned}
$$

Ze srovnání koeficientů v rovnici (2,8) plyne

$$
\begin{aligned}
(2,9) \qquad & c_J^M = 0 \quad \text{pro} \quad I \neq M\,; \\
& c_i^i = c_{i+3}^{i+3}\,; \quad \tilde{r} = r\,; \\
& \vartheta_1 = (c_2^2 c_3^3 c_4^1 + c_1^1 c_2^2 c_6^3)\,\omega_1 + (c_1^1 c_3^3 c_5^2 + c_1^1 c_2^2 c_6^3 r)\,\omega_2 - (\tau_1^1 + \tau_2^2 + \tau_3^3)\,.
\end{aligned}
$$

Zavedením jednoduššího označení $c_i^i = q_i$ se původní rovnice (2,5) kolineace K redukují na tvar

$$
(2,10) \qquad KA_i = q_i \tilde{A}_i\,, \quad KA_{i+3} = \sum_i c_{i+3}^i \tilde{A}_i + q_i \tilde{A}_{i+3}\,, \quad KA_k = \sum_m c_k^m \tilde{A}_m\,.
$$

Při vyšetřování projektivní deformace 2. řádu budeme potřebovat řadu pomocných vypočtů, které nyní přehledně uvedeme. Z diferenciálních rovnic zkonstruovaného reperu dostaneme:

$$
\begin{aligned}
(2,11) \qquad \mathrm{d}^2[A_1 A_2 A_3] = {} & (.)\,[A_1 A_2 A_3] + \{\beta_3^1(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \alpha_3^1(\omega_1)^2\}\,[A_1 A_2 A_4] + \\
& + \{\beta_3^2(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \alpha_3^2(\omega_2)^2\}\,[A_1 A_2 A_5] + \\
& + \{(2\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_6^6)\,(\omega_1 + r\omega_2) + \mathrm{d}\omega_1 + \mathrm{d}\omega_2\,.\,r + \omega_2\,\mathrm{d}r\}\,[A_1 A_2 A_6] + \\
& + \sum_k (\omega_1 + r\omega_2)^2\,\beta_3^{k-3}[A_1 A_2 A_k] + \{\alpha_2^1(\omega_1)^2 - \beta_2^1(\omega_2)^2\}\,[A_1 A_3 A_4] + \\
& + \{(2\omega_1^1 + \omega_2^2 + 2\omega_3^3 + \omega_5^5)\,(-\omega_2) - \mathrm{d}\omega_2\}\,[A_1 A_3 A_5] + \\
& + \{\alpha_2^3(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \beta_2^3(\omega_2)^2\}\,[A_1 A_3 A_6] + \\
& - \sum_k \beta_2^{k-3}(\omega_2)^2\,[A_1 A_3 A_k] + 2\omega_2(\omega_1 + r\omega_2)\,[A_1 A_5 A_6] + \\
& + \{\omega_1(\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + 2\omega_3^3 + \omega_4^4) + \mathrm{d}\omega_1\}\,[A_2 A_3 A_4] + \\
& + \{\beta_1^2(\omega_1)^2 - \alpha_1^2(\omega_2)^2\}\,[A_2 A_3 A_5] + \\
& + \{\beta_1^3(\omega_1)^2 - \alpha_1^3(\omega_1 + r\omega_2)^2\}\,[A_2 A_3 A_6] + \\
& + \sum_k \beta_1^{k-3}(\omega_1)^2\}\,[A_2 A_3 A_k] + \\
& - 2\omega_1(\omega_1 + r\omega_2)\,[A_2 A_4 A_6] + 2\omega_1\omega_2[A_3 A_4 A_5]\,.
\end{aligned}
$$

Porovnáním vnějších diferenciálů hlavních forem a užitím Cartanova lemmatu vyjádříme nové hlavní formy

$$\tau_i^i - \tau_{i+3}^{i+3} = f_i\omega_i\,. \tag{2,12}$$

Nyní máme již vše potřebné k vyšetření projektivní deformace 2. řádu. Z relace (2,4) stanovíme

$$
\begin{aligned}
(2,13)\quad K\,\mathrm{d}^2[A_1A_2A_3] = {} & \{q_1q_3^{-1}[\beta_3^1(\omega_1 + r\omega_2) - \alpha_3^1(\omega_1)^2] - 2q_3^{-1}c_6^1\omega_1(\omega_1 + r\omega_2) + \\
& + \sum_k q_3^{-1}c_k^4\beta_3^{k-3}(\omega_1 + r\omega_2)\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_4] + \\
& + \{q_2q_3^{-1}[\![\beta_3^2(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \alpha_3^2(\omega_2)^2]\!] - 2q_3^{-1}c_6^2\omega_2(\omega_1 + r\omega_2) + \\
& + \sum_k q_3^{-1}c_k^5\beta_3^{k-3}(\omega_1 + r\omega_2)\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_5] + \\
& + \{\mathrm{d}(\omega_1 + r\omega_2) + (\omega_1 + r\omega_2)(2\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_6^6) + 2q_2^{-1}c_5^2\omega_2(\omega_1 + r\omega_2) + \\
& + 2q_1^{-1}c_4^1\omega_1(\omega_1 + r\omega_2) + \sum_k q_3^{-1}c_k^6\beta_3^{k-3}(\omega_1 + r\omega_2)^2\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_6] + \\
& + \sum_j\sum_k q_3^{-1}c_k^j\beta_3^{k-3}(\omega_1 + r\omega_2)^2\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_j] + \\
& + \{q_1q_2^{-1}[\alpha_2^1(\omega_1)^2 - \beta_2^1(\omega_2)^2] + 2q_2^{-1}c_5^1\omega_1\omega_2 + \\
& + \sum_k q_2^{-1}c_k^4(-\beta_2^{k-3})(\omega_2)^2\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_4] + \\
& - \{\mathrm{d}\omega_2 + \omega_2(2\omega_1^1 + \omega_2^2 + 2\omega_3^3 + \omega_5^5) + (\omega_1 + r\omega_2)\,2q_3^{-1}c_6^3\omega_2 + 2q_1^{-1}c_4^1\omega_1\omega_2 + \\
& + \sum_k q_2^{-1}c_k^5\beta_2^{k-3}(\omega_2)^2\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_5] + \\
& + q_3q_2^{-1}[\alpha_2^3(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \beta_2^3(\omega_2)^2] + 2q_2^{-1}c_5^3\omega_2(\omega_1 + r\omega_2) - \\
& - \sum_k q_2^{-1}c_k^6\beta_2^{k-3}(\omega_2)^2\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_6] + \\
& + \sum_j\sum_k q_2^{-1}c_k^j(-\beta_2^{k-3})(\omega_2)^2\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_j] + \\
& + 2\omega_2(\omega_1 + r\omega_2)\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_5\tilde{A}_6] + \\
& + \{\mathrm{d}\omega_1 + \omega_1(\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + 2\omega_3^3 + \omega_4^4) + 2q_3^{-1}c_6^3\omega_1(\omega_1 + r\omega_2) + \\
& + 2q_2^{-1}c_5^2\omega_1\omega_2 + \sum_k q_1^{-1}c_k^4\beta_1^{k-3}(\omega_1)^2\}\,[\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_4] + \\
& + \{q_1^{-1}q_2[\![\beta_1^2(\omega_1)^2 - \alpha_1^2(\omega_2)^2]\!] - 2q_1^{-1}c_4^2\omega_1\omega_2 + \sum_k q_1^{-1}c_k^5\beta_1^{k-3}(\omega_1)^2\}\,[\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_5] + \\
& + \{q_1^{-1}q_3[\![\beta_1^3(\omega_1)^2 - \alpha_1^3(\omega_1 + r\omega_2)^2]\!] - 2q_1^{-1}c_4^3\omega_1(\omega_1 + r\omega_2) + \\
& + \sum_k q_1^{-1}c_k^6\beta_1^{k-3}(\omega_1)^2\}\,[\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_6] + \sum_j\sum_k q_1^{-1}c_k^j\beta_1^{k-3}(\omega_1)^2\,[\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_j] + \\
& - 2\omega_1(\omega_1 + r\omega_2)\,[\tilde{A}_2\tilde{A}_4\tilde{A}_6] + 2\omega_1\omega_2[\tilde{A}_3\tilde{A}_4\tilde{A}_5]\,; \quad \mathrm{mod}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3]\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2,14)\qquad & \mathrm{d}^2[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3] + 2\vartheta\,\mathrm{d}[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3] + (.)\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3] = \\
& = \{\tilde{\beta}_3^1(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \tilde{\alpha}_3^1(\omega_1)^2\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_4] +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \{\tilde{\beta}_3^2(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \tilde{\alpha}_3^2(\omega_2)^2\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_5] + \\
&+ \{\mathrm{d}(\omega_1 + r\omega_2) + (\omega_1 + r\omega_2)(2\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_6^6 - \tau_7^7 + \tau_6^6) + \\
&+ 2q_1^{-1}c_4^1\omega_1(\omega_1 + r\omega_2) + 2q_2^{-1}c_5^2\omega_2(\omega_1 + r\omega_2) + 2q_3^{-1}c_6^3(\omega_1 + r\omega_2)^2\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_6] + \\
&+ \sum_j \beta_3^{j-3}(\omega_1 + r\omega_2)^2\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_j] + \{\tilde{\alpha}_2^1(\omega_1)^2 - \tilde{\beta}_2^1(\omega_2)^2\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_4] - \\
&- \{\mathrm{d}\omega_2 + \omega_2(2\omega_1^1 + \omega_2^2 + 2\omega_3^3 + \omega_5^5 - \tau_2^2 + \tau_5^5) + 2q_1^{-1}c_4^1\omega_1\omega_2 + \\
&+ 2q_2^{-1}c_5^2(\omega_2)^2 - 2q_3^{-1}c_6^3\omega_2(\omega_1 + r\omega_2)\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_5] + \\
&+ \{\tilde{\alpha}_2^3(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \tilde{\beta}_2^3(\omega_2)^2\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_6] - \\
&- \sum_j \beta_2^{j-3}(\omega_2)^2\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_j] + 2\omega_2(\omega_1 + r\omega_2)\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_5\tilde{A}_6] + \\
&+ \{\mathrm{d}\omega_1 + \omega_1(\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + 2\omega_3^3 + \omega_4^4 - \tau_1^1 + \tau_4^4) + 2q_1^{-1}c_4^1(\omega_1)^2 + \\
&+ 2q_2^{-1}c_5^2\omega_1\omega_2 + 2q_3^{-1}c_6^3\omega_1(\omega_1 + r\omega_2)\}\,[\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_4] + \\
&+ \{\tilde{\beta}_1^2(\omega_1)^2 - \tilde{\alpha}_1^2(\omega_2)^2\}\,[\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_5] + \\
&+ \{\beta_1^3(\omega_1)^2 - \tilde{\alpha}_1^3(\omega_1 + r\omega_2)\}\,[\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_6] + \\
&+ \sum_j \beta_1^{j-3}(\omega_1)^2\,[\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_j] + \\
&- 2\omega_1(\omega_1 + r\omega_2)\,[\tilde{A}_2\tilde{A}_4\tilde{A}_6] + 2\omega_1\omega_2[\tilde{A}_3\tilde{A}_4\tilde{A}_5]\,; \quad \mathrm{mod}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3]\,.
\end{aligned}
$$

Srovnáním koeficientů pravých stran rovnic (2,13) a (2,14) vzhledem k (2,12) a vhodným uspořádáním dostaneme pro neznámé

$$q_i\,; \quad c_{i+3}^i\,; \quad c_k^M$$

rovnice:

$$q_i f_i = 2c_{i+3}^i - \sum_k c_k^{i+3}\beta_i^{k-3}\,, \tag{2,15}$$

$$q_i\tilde{\alpha}_i^j = q_j\alpha_i^j \qquad (i \neq j)\,, \tag{2,16}$$

$$q_i\tilde{\beta}_i^j = q_j\beta_i^j + \sum_k c_k^{j+3}\beta_i^{k-3} \quad (i \neq j)\,, \tag{2,17}$$

$$\sum_l q_i\tilde{\beta}_i^{l-3} = \sum_l\sum_k c_k^l\beta_i^{k-3}\,, \tag{2,18}$$

$$c_{i+3}^j = 0 \qquad (i \neq j)\,. \tag{2,19}$$

Rovnice (2,15 – 19) udávají nutné podmínky pro existenci projektivní deformace 2. řádu kongruencí rovin. Snadno nahlédneme, že podmínky jsou i postačující.

V dalším provedeme zvlášť vyšetření pro $n \geqq 8$, $n = 7$ a $n = 6$.

3. DEFORMACE KONGRUENCÍ ROVIN V P_n, $n \geqq 8$

Vyšetřujme případ projektivní deformace 2. řádu kongruencí rovin, vnořených do n-rozměrného projektivního prostoru pro $n \geqq 8$. Budeme předpokládat, že matice

$$(\beta_i^{k-3})$$

má hodnost tři a pro určitost se omezíme na případ, že determinant utvořený z prvních tří sloupců je různý od nuly. V kapitole 1 zkonstruovaný reper přiřazený ke kongruenci L lze bez omezení obecnosti zvoliti tak, že platí

$$(3,1) \qquad \beta_i^{j+3} = \beta_i^k = 0 \quad (i \neq j).$$

Přitom se rovnice (2,15–2,19) zjednoduší na tvar

$$(3,2) \qquad q_i f_i = 2c_{i+3}^i - c_{i+6}^{i+3}\beta_i^{i+3};$$

$$(3,3) \qquad q_i\tilde{\alpha}_i^j = q_j\alpha_i^j \qquad (i \neq j);$$

$$(3,4) \qquad q_i\tilde{\beta}_i^j = q_j\beta_i^j + c_{i+6}^{i+3}\beta_i^{i+3} \quad (i \neq j);$$

$$(3,5) \qquad q_i\tilde{\beta}_i^{i+3} = c_{i+6}^{i+6}\beta_i^{i+3};$$

$$(3,6) \qquad c_k^l = 0 \qquad (k \neq l).$$

Tedy platí:

Věta 3.1. *Korespondence $C : L \to \tilde{L}$ je projektivní deformací 2. řádu právě tehdy, má-li soustava* (3,3) *řešení $q_i \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$).*

Zkoumejme nyní, zda existuje tečná kolineace K, ke korespondenci C_i, která současně realizuje deformaci 1. řádu mezi fokálními plochami (A_i) a $(\tilde{A}_i)$.

Aby korespondence $C_i : (A_i) \to (\tilde{A}_i)$ byla deformací 1. řádu, musí platit

$$(3,7) \qquad KA_i = q_i\tilde{A}_i$$

$$(3,8) \qquad K(\mathrm{d}A_i) = \mathrm{d}(q_i\tilde{A}_i) + (.)\,\tilde{A}_i.$$

Kolineace K nechť je pro jednoduchost určena rovnicemi (2,10). Z prvních tří rovnic zkonstruovaného reperu na základě relace (3,8) vzhledem k (2,14) plyne

$$(3,9) \quad \sum_j \tilde{A}_j(\alpha_i^j\omega_j q_j + 2\omega_i c_{i+3}^j) = \sum_j \tilde{A}_j\tilde{\alpha}_i^j q_j\omega_j + \tilde{A}_{i+3}\omega_i q_i \quad \text{pro} \quad j \neq i\,, \quad \text{mod}\ \tilde{A}_i\,.$$

Porovnáním koeficientů v rovnicích (3,9) dostaneme

$$(3,10) \qquad q_i\tilde{\alpha}_i^j = q_j\alpha_i^j \quad \text{pro} \quad i \neq j\,;$$

$$(3,11) \qquad c_I^m = 0 \quad \text{pro} \quad I \neq m\,, \quad I \neq m + 3\,.$$

Uvedené rovnice (3,10,11) vyjadřují nutné a je zřejmé, že i postačující podmínky k existenci deformace 1. řádu mezi fokálními plochami. Obdrželi jsme výsledek:

Věta 3.2. *Korespondence $C : L \to \tilde{L}$ je projektivní deformací 2. řádu právě tehdy, když korespondence $C_i : (A_i) \to (\tilde{A}_i)$ ($i = 1, 2, 3$) jsou současně deformacemi 1. řádu.*

Zkoumejme nyní existenci kongruence L v P_n. Kongruence L je určena systémem rovnic

$$\omega_i^M = 0 \quad \text{pro} \quad i + 3 \neq M\,, \quad \omega_3^6 = a_3^6(\omega_1 + r\omega_2)\,.$$

Vnějším diferencováním tohoto systému dostaneme

$$\omega_1^2 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_4^5 = 0\,, \quad \omega_2^1 \wedge \omega_1 + \omega_2 \wedge \omega_5^4 = 0\,, \quad \omega_3^1 \wedge \omega_1 + \omega_3 \wedge \omega_6^4 = 0\,,$$

$$\omega_1^3 \wedge \omega_3 + \omega_1 \wedge \omega_4^6 = 0\,, \quad \omega_2^3 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_5^6 = 0\,, \quad \omega_3^2 \wedge \omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_6^5 = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge \omega_4^k = 0\,, \qquad \omega_2 \wedge \omega_5^k = 0\,, \qquad \omega_3 \wedge \omega_6^k = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge \{da_3^6 + a_3^6(\omega_1^1 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_4^4)\} +$$
$$+ \omega_2 \wedge \{d(a_3^6 r) + a_3^6 r(\omega_2^2 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_5^5)\} = 0\,.$$

Užitím Cartanova lemmatu vyjádříme nové hlavní formy pomocí $N = 3n + 6$ nezávislých koeficientů. Protože počet nezávislých forem $q = 3n - 1$, počet nezávislých kvadratických rovnic $s_1 = 3n - 8$ je $s_2 = 7$ a Cartanovo číslo $Q = 3n + 6$, je systém v involuci a platí

Věta 3.3. *Kongruence L existuje a závisí na sedmi funkcích dvou proměnných.*

Vyšetřeme dále, zda ke kongruenci L existuje dvojice $(C, \tilde{L})$ za předpokladů

$$(3{,}12) \qquad \begin{aligned} \beta_i^{i+3} &= 1 = r\,; \\ \beta_i^m &= 0 \quad (m \neq i;\ m \neq i + 3)\,; \\ \tilde{\alpha}_i^j &= \alpha_i^j \quad (i \neq j)\,. \end{aligned}$$

Tato volba není na úkor obecnosti a rovnice (3,3) jsou splněny pro

$$q_i = 1\,.$$

K dané kongruenci L je dvojice $(C, \tilde{L})$ určena systémem

$$(3{,}13) \qquad \tau_i^m = 0 \quad (i \neq m)\,, \qquad \tau_I^M = 0 \quad (I \neq M)\,.$$

Uzávěr tohoto systému je

$$(3{,}14) \qquad \begin{aligned} \omega_i \wedge (\tau_{i+3}^{i+3} - \tau_i^i) &= 0\,, \\ \omega_1 \wedge \tau_4^2 + \omega_2 \wedge (\tau_2^2 - \tau_1^1) &= 0\,, \\ \omega_1 \wedge (\tau_3^3 - \tau_1^1 + \tau_4^3) + \omega_2 \wedge (\tau_3^3 - \tau_1^1) &= 0\,, \\ \omega_1 \wedge (\tau_1^1 - \tau_2^2) + \omega_2 \wedge \tau_5^1 &= 0\,, \\ \omega_1 \wedge (\tau_3^3 - \tau_2^2) + \omega_2 \wedge (\tau_3^3 - \tau_2^2 + \tau_5^3) &= 0\,, \\ \omega_1 \wedge (\tau_1^1 - \tau_3^3 + \tau_6^1) + \omega_2 \wedge \tau_6^1 &= 0\,, \\ \omega_1 \wedge \tau_6^2 + \omega_2 \wedge (\tau_2^2 - \tau_3^3 + \tau_6^2) &= 0\,. \end{aligned}$$

$$(3{,}15) \qquad \begin{aligned} \omega_i \wedge \tau_{i+6}^k &= 0 \quad (k \neq i + 6)\,, \\ \omega_i \wedge (\tau_{i+6}^{i+6} - \tau_{i+3}^{i+3}) &= 0\,, \\ \omega_1 \wedge \tau_7^5 + \omega_2 \wedge (-\tau_4^2) &= 0\,, \end{aligned}$$

$$\omega_1 \wedge (\tau_7^6 - \tau_4^3) + \omega_2 \wedge (-\tau_4^3) = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge (-\tau_5^1) + \omega_2 \wedge \tau_8^4 = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge (-\tau_5^3) + \omega_2 \wedge (\tau_8^6 - \tau_5^3) = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge (-\tau_6^1 + \tau_9^4) + \omega_2 \wedge \tau_9^4 = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge \tau_9^5 + \omega_2 \wedge (\tau_9^5 - \tau_6^2) = 0\,.$$

Užitím Cartanova lemmatu vyjádříme nové hlavní formy pomocí $(22 + 3n)$ koeficientů, z nichž je právě $(4 + 3n)$ nezávislých, tj. $N = 4 + 3n$. Protože počet nezávislých forem $q = 2 + 3n$, počet nezávislých kvadratických rovnic (3, 14, 15) je $s_1 = 3n$, je $s_2 = 2$ a Cartanovo číslo $Q = 4 + 3n$, takže systém je v involuci a platí:

Věta 3.4. *Je-li dána kongruence L, pak dvojice $(C, \tilde{L})$ existuje a závisí na dvou funkcích dvou proměnných.*

4. DEFORMACE KONGRUENCÍ ROVIN V P_7

V případě projektivní deformace 2. řádu kongruencí rovin vnořených do projektivního prostoru P_7 budeme předpokládat, že matice

$$(\beta_i^{4,5})$$

má všechny determinanty 2. řádu různé od nuly. Zkonstruovaný reper přiřazený k L lze zvolit tak, že platí

(4,1) $$\beta_1^5 = \beta_2^4 = 0\,,$$

což není na úkor obecnosti; $\beta_1^4, \beta_2^5, \beta_3^4, \beta_3^5$ jsou pak nenulové relativní invarianty. Rovnice (2,15–19) nabudou tvaru

(4,2) $$q_i f_i = 2c_{i+3}^i - c_{i+6}^{i+3}\beta_i^{i+3} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2$$

a pro $i = 3$

$$q_i f_i = 2c_{i+3}^i - \sum_k c_k^{i+3}\beta_i^{k-3}\,.$$

(4,3) $$q_i\tilde{\alpha}_i^j = q_j\alpha_i^j \quad (i \neq j)\,,$$

(4,4) $$q_i\tilde{\beta}_i^j = q_j\beta_i^j + c_{i+6}^{j+3}\beta_i^{i+3} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2 \quad (i \neq j)\,,$$

a pro $i = 3$

$$q_i\tilde{\beta}_i^j = q_j\beta_i^j + \sum_k c_k^{j+3}\beta_i^{k-3} \quad (i \neq j)\,,$$

(4,5) $$q_i\tilde{\beta}_i^{i+3} = c_{i+6}^{i+6}\beta_i^{i+3} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2,$$

$$q_3\tilde{\beta}_3^4 = c_7^7\beta_3^4; \quad q_3\tilde{\beta}_3^5 = c_8^8\beta_3^5;$$

(4,6) $$c_8^7 = c_7^8 = 0.$$

Z relací (4,5) je k určení c_7^7 a c_8^8 nutné a stačí, aby platilo

(4,7) $$q_1\frac{\tilde{\beta}_1^4}{\tilde{\beta}_3^4} = q_3\frac{\beta_1^4}{\beta_3^4}; \quad q_2\frac{\tilde{\beta}_2^5}{\tilde{\beta}_3^5} = q_3\frac{\beta_2^5}{\beta_3^5}.$$

Tedy platí:

Věta 4.1. *Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby existovala projektivní deformace 2. řádu mezi kongruencemi rovin L, $\tilde{L}$, je existence takových $q_i \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$), která splňují rovnice (4,3) a (4,7).*

Hledejme nyní podmínky pro to, aby korespondence C_i a C^* byly deformacemi 1. řádu, realizovanými touž tečnou kolineací, vzhledem k C.

Za tímto účelem zavedeme k reperu $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ reper duální, tvořený ve vhodném pořadí $(n + 1)$ analytickými nadrovinami, neprocházejícími jedním bodem. Pro nadrovinu $E^m = (-1)^m [A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_{n+1} \ldots A_8]$ platí:

jestliže

$$dA_m = \sum_u \omega_m^u A_n,$$

potom

(4,8) $$dE^m = -\sum_u \omega_u^m E^u.$$

Průnik nadrovin E^7, E^8 označíme $[E^7E^8]$. Korespondence C^* nechť je dána předpisem

(4,9) $$C^* : [E^7E^8] \mapsto [\tilde{E}^7\tilde{E}^8].$$

Podmínky pro deformace C_i jsou určeny v rovnicích (3,10). Rovnice příslušné kolineace jsou

(4,10) $$KA_i = q_i\tilde{A}_i, \quad KA_{i+3} = c_{i+3}^i\tilde{A}_i + q_i\tilde{A}_{i+3}, \quad KA_k = \sum_m c_k^m\tilde{A}_m.$$

Aby korespondence C^* byla deformací 1. řádu realizovanou kolineací (4,10), musí platit

(4,11) $$K[E^7E^8] = (.)\,[\tilde{E}^7\tilde{E}^8],$$

$$K\,d[E^7E^8] = (.)\,d[\tilde{E}^7\tilde{E}^8] + \vartheta_e[\tilde{E}^7\tilde{E}^8].$$

Uvedeme některé další výpočty, které budeme v dalším používat:

(4,12) $$dE^7 = -\omega_8^7E^8 - \omega_7^7E^7 - \beta_3^4(\omega_1 + r\omega_2)E^6 - \beta_2^4\omega_2E^5 - \beta_1^4\omega_1E^4,$$

$$dE^8 = -\omega_8^8E^8 - \omega_7^8E^7 - \beta_3^5(\omega_1 + r\omega_2)E^6 - \beta_2^5\omega_2E^5 - \beta_1^5\omega_1E^4,$$

$$(4,13)\quad KE^8 = (q_1q_2q_3)^2\, c_7^7\tilde{E}^8\,,$$

$$KE^7 = (q_1q_2q_3)^2\, c_8^8\tilde{E}^7 + (q_1q_2q_3)^2\, c_8^7\tilde{E}^8\,,$$

$$KE^6 = (q_1q_2)^2\, q_3c_7^7c_8^8\tilde{E}^6 + (q_1q_2)^2\, q_3c_8^8c_7^6\tilde{E}^7 - (q_1q_2)^2\, q_3c_7^7c_8^6\tilde{E}^8 + $$
$$+ (q_1q_2)^2\, q_3c_7^6c_8^7\tilde{E}^8\,,$$

$$KE^5 = (q_1q_3)^2\, q_2c_7^7c_8^8\tilde{E}^5 + (q_1q_3)^2\, q_2c_7^5c_8^8\tilde{E}^7 - (q_1q_3)^2\, q_2c_7^7c_8^5\tilde{E}^8 -$$
$$- (q_1q_3)^2\, q_2c_7^5c_8^7\tilde{E}^8\,,$$

$$KE^4 = (q_2q_3)^2\, q_1c_7^7c_8^8\tilde{E}^4 - (q_2q_3)^2\, q_1c_7^4c_8^8\tilde{E}^7\,,$$

$$K[E^7E^8] = (q_1q_2q_3)^4\, c_7^7c_8^8[\tilde{E}^7\tilde{E}^8]\,.$$

$$(4,14)\quad K\,\mathrm{d}[E^7E^8] = -\beta_3^4(\omega_1 + r\omega_2)\,(q_1q_2)^4\,(q_3)^3\,(c_7^7)^2\, c_8^8[\tilde{E}^6\tilde{E}^8] -$$
$$- \beta_1^4\omega_1(q_1)^3\,(q_2q_3)^4\,(c_7^7)^2\, c_8^8[\tilde{E}^4\tilde{E}^8] + \beta_3^5(\omega_1 + r\omega_2)\,.$$
$$\cdot\,(q_1q_2)^4\,(q_3)^3\, c_7^7(c_8^8)^2\,[\tilde{E}^6\tilde{E}^7] + \beta_2^5\omega_2(q_1q_3)^4\,(q_2)^3\, c_7^7c_8^8\,[\tilde{E}^5\tilde{E}^7]\,, \quad \mathrm{mod}\,[\tilde{E}^7\tilde{E}^8]\,;$$

$$(4,15)\quad (.)\,\mathrm{d}[\tilde{E}^7\tilde{E}^8] + \vartheta_e[\tilde{E}^7\tilde{E}^8] = (q_1q_2q_3)^4\, c_7^7c_8^8\{-\tilde{\beta}_3^4(\omega_1 + r\omega_2)\}\,[\tilde{E}^6\tilde{E}^8] +$$
$$- \tilde{\beta}_1^4\omega_1[\tilde{E}^4\tilde{E}^8] + \beta_3^5(\omega_1 + r\omega_2)\,[\tilde{E}^6\tilde{E}^7] + \beta_2^5\omega_2[\tilde{E}^5\tilde{E}^7]\,, \quad \mathrm{mod}\,[\tilde{E}^7\tilde{E}^8]\,.$$

Na základě (4,11), porovnáním koeficientů u pravých stran rovnic (4,14) a (4,15) dostáváme

$$(4,16)\quad q_1\tilde{\beta}_1^4 = c_7^7\beta_1^4\,; \quad q_2\tilde{\beta}_2^5 = c_8^8\beta_2^5\,; \quad q_3\tilde{\beta}_3^4 = c_7^7\beta_3^4\,; \quad q_3\tilde{\beta}_3^5 = c_8^8\beta_3^5\,.$$

Máme výsledek:

Věta 4.2. *Korespondence $C : L \to \tilde{L}$ je projektivní deformací 2. řádu právě tehdy, když korespondence C_i a C^* jsou současně deformacemi 1. řádu.*

Zkoumejme, zda ke kongruenci L existuje dvojice $(C, \tilde{L})$ za předpokladů:

$$(4,17)\quad \tilde{\alpha}_i^j = \alpha_i^j \quad (i \neq j)\,,$$

$$\tilde{\beta}_1^4 = \beta_1^4 = \tilde{\beta}_2^5 = \beta_2^5 = \tilde{\beta}_3^4 = \beta_3^4 = \tilde{\beta}_3^5 = \beta_3^5\,,$$

$$\beta_1^2 = \beta_1^3 = \beta_1^5 = \beta_2^1 = \beta_2^3 = \beta_2^4 = \beta_3^1 = \beta_3^2 = 0\,,$$

$$r = 1\,.$$

Tato volba není na úkor obecnosti a rovnice (4,3) a (4,7) jsou splněny pro $q_i = 1$. K dané kongruenci L je dvojice $(C, \tilde{L})$ určena systémem (3,13) pro $n = 7$. Uzávěrem tohoto systému jsou kvadratické rovnice (3,14) a systém

$$(4,18)\quad \omega_1 \wedge \tilde{\tau}_7^5 + \omega_2 \wedge (-\tau_4^2) = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge (\tau_7^6 - \tau_4^3) + \omega_2 \wedge (-\tau_4^3) = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge (\tau_7^7 - \tau_4^4) = 0 ,$$

$$\omega_1 \wedge \tau_7^8 = 0 ,$$

$$\omega_1 \wedge (-\tau_5^1) + \omega_2 \wedge \tau_8^4 = 0 ,$$

$$\omega_1 \wedge (-\tau_5^3) + \omega_2 \wedge (\tau_8^6 - \tau_5^3) = 0 ,$$

$$\omega_2 \wedge \tau_8^7 = 0 ,$$

$$\omega_2 \wedge (\tau_8^8 - \tau_5^5) = 0 ,$$

$$\omega_1 \wedge (\tau_7^4 + \tau_8^4 - \tau_6^1) + \omega_2 \wedge (\tau_7^4 + \tau_8^4) = 0 ,$$

$$\omega_1 \wedge (\tau_7^5 + \tau_8^5) + \omega_2 \wedge (\tau_7^5 + \tau_8^5 - \tau_6^2) = 0 ,$$

$$\omega_1 \wedge (\tau_7^7 - \tau_6^6 + \tau_8^7) + \omega_2 \wedge (\tau_7^7 - \tau_6^6 + \tau_8^7) = 0 ,$$

$$\omega_1 \wedge (\tau_8^8 - \tau_6^6 + \tau_7^8) + \omega_2 \wedge (\tau_8^8 - \tau_6^6 + \tau_7^8) = 0 .$$

Užitím Cartanova lemmatu vyjádříme hlavní formy systému (3,14) a (4,18) pomocí 37 koeficientů, z nichž právě 21 je nezávislých, tj. $N = 21$. Počet nezávislých forem $q = 21$, počet nezávislých kvadratických rovnic je $s_1 = 21$ a $Q = 21$, systém je v involuci a dostáváme větu:

Věta 4.3. *Je-li dána kongruence L, pak dvojice $(C, \tilde{L})$ existuje a závisí na 21 funkcích jedné proměnné.*

5. DEFORMACE KONGRUENCÍ ROVIN V P_6

Jako poslední případ vyšetříme projektivní deformaci 2. řádu kongruencí rovin, vnořených do projektivního prostoru P_6. Budeme uvažovat obecný případ, kdy

(5,1) $$\beta_i^4 \neq 0 .$$

Rovnice (2,15–19) za předpokladu (5,1) pro $n = 6$ jsou

(5,2) $$q_i f_i = 2c_{i+3}^i - c_7^{i+3} \beta_i^4 ,$$

(5,3) $$q_i \tilde{\alpha}_i^j = q_j \alpha_i^j \quad (i \neq j) ,$$

(5,4) $$q_i \tilde{\beta}_i^j = q_j \beta_i^j + c_7^{j+3} \beta_i^4 \quad (i \neq j) ,$$

(5,5) $$q_i \tilde{\beta}_i^4 = c_7^7 \beta_i^4 .$$

Z (5,5) vychází:

(5,6) $$c_7^7 = q_1 \frac{\tilde{\beta}_1^4}{\beta_1^4} = q_2 \frac{\tilde{\beta}_2^4}{\beta_2^4} = q_3 \frac{\tilde{\beta}_3^4}{\beta_3^4} .$$

Tedy platí:

Věta 5.1. *Korespondence $C : L \to \tilde{L}$, realizovaná kolineací K, je projektivní deformací 2. řádu právě tehdy, když existují $q_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$, která jsou řešením* (5,3) *a* (5,6).

Nyní zjistíme podmínky pro to, aby korespondence C_i a C^* byly deformacemi 1. řádu, realizovanými touž tečnou kolineací vzhledem k C.

Jednotlivé korespondence jsou nyní:

$$C : L \to \tilde{L}; \quad C_i : (A_i) \mapsto (\tilde{A}_i); \quad C^\times : E^7 \mapsto \tilde{E}^7 .$$

Podmínky pro deformaci C_i jsou určeny v rovnicích (3,10). Rovnice příslušné kolineace jsou (4,10).

Aby korespondence $C^\times$ byla deformací 1. řádu, realizovanou rovněž kolineací (4,10), musí platit

$$KE^7 = (.)\,\tilde{E}^7 , \quad K\,\mathrm{d}E^7 = (.)\,\mathrm{d}\tilde{E}^7 + \vartheta_E \tilde{E}^7 . \tag{5,7}$$

Uvedeme některé pomocné výpočty:

$$\begin{aligned} KE^7 &= (q_1q_2q_3)^2\,\tilde{E}^7 , \\ KE^6 &= (q_1q_2)^2\,q_3c_7^7\tilde{E}^7 - (q_1q_2)^2\,q_3c_7^6\tilde{E}^7 , \\ KE^5 &= (q_1q_3)^2\,q_2c_7^7\tilde{E}^5 - (q_1q_3)^2\,q_2c_7^5\tilde{E}^7 , \\ KE^4 &= (q_2q_3)^2\,q_1c_7^7\tilde{E}^4 - (q_2q_3)^2\,q_1c_7^4\tilde{E}^7 . \end{aligned} \tag{5,8}$$

$$\begin{aligned} K\,\mathrm{d}E^7 = &-\beta_3^4(\omega_1 + r\omega_2)\,(q_1q_2)^2\,q_3c_7^7\tilde{E}^6 - \beta_2^4\omega_2(q_1q_3)^2\,q_2c_7^7\tilde{E}^5 - \\ &- \beta_1^4\omega_1(q_2q_3)^2\,q_1c_7^7\tilde{E}^4 , \quad \mathrm{mod}\ \tilde{E}^7 ; \end{aligned} \tag{5,9}$$

$$\begin{aligned} (.)\,\mathrm{d}\tilde{E}^7 + \vartheta_E\tilde{E}^7 = (q_1q_2q_3)^2\,\{&-\omega_7^7\tilde{E}^7 - \tilde{\beta}_3^4(\omega_1 + r\omega_2)\,\tilde{E}^6 - \\ &- \tilde{\beta}_2^4\omega_2\tilde{E}^5 - \tilde{\beta}_1^4\omega_1\tilde{E}^4\} + \vartheta_E\tilde{E}^7 . \end{aligned} \tag{5,10}$$

Na základě (5,7), porovnáním koeficientů u pravých stran rovnic (5,9) a (5,10) dostáváme

$$q_i\tilde{\beta}_i^4 = c_7^7\beta_i^4 . \tag{5,11}$$

Tedy platí:

Věta 5.2. *Korespondence $C : L \to \tilde{L}$ je projektivní deformací 2. řádu právě tehdy, když korespondence C_i a $C^\times$ jsou současně deformacemi 1. řádu.*

Zjistíme, zda ke kongruenci L existuje dvojice $(C, \tilde{L})$ za předpokladů

$$\tilde{\alpha}_i^j = \alpha_i^j \quad (i \neq j) . \tag{5,12}$$