ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 97 * PRAHA 10. 5. 1972 * ČÍSLO 2

O PROJEKTIVNÍCH DEFORMACÍCH KONGRUENCÍ ROVIN V n-ROZMĚRNÉM PROJEKTIVNÍM PROSTORU

JAROSLAV BAYER, Brno

(Došlo dne 27. května 1970)

V této práci je zkoumána existence projektivní deformace 2. řádu kongruencí rovin projektivního prostoru P_n (pro $n > 5$) v souvislosti s deformacemi 1. řádu jiných objektů a v jednotlivých případech je prokázána existence dvojic $(C, \tilde{L})$.

Podnětem k této práci byl seminář prof. K. SVOBODY o soustavách Pfaffových rovnic.

1. Je zde provedena částečná specializace průvodního reperu kongruence rovin v P_n tím, že vrcholy A_1, A_2, A_3 reperu jsou umístěny v ohniscích běžné roviny kongruence. Při pohybu roviny bude každé ze tří ohnisek opisovat fokální plochu dané kongruence rovin. Ve specializaci je pokračováno dalším zjednodušením až do tvaru vhodného pro naše použití.

2. Jsou zde uvedeny nutné a postačující podmínky existence projektivních deformací 1. a 2. řádu kongruencí rovin v projektivních prostorech P_n a $\tilde{P}_n$.

3. Pomocí tečné kolineace je realizována korespondence mezi fokálními plochami, která je deformací 1. řádu. Je ukázáno, že její existence je nutnou a postačující podmínkou k existenci projektivní deformace 2. řádu kongruence rovin v P_n pro $n \geqq 8$ a dokázána existenční věta pro dvojici $(C, \tilde{L})$.

4. Zavedená korespondence $C^* : [E^7 E^8] \mapsto [\tilde{E}^7 \tilde{E}^8]$ současně s korespondencemi C_i $(i = 1, 2, 3)$ jsou deformacemi 1. řádu a jejich existence je nutnou a postačující podmínkou k existenci projektivní deformace 2. řádu kongruencí rovin v P_7. Je zde dokázána existence dvojice $(C, \tilde{L})$.

5. Konečně existence korespondence $C^\times : E^7 \mapsto \tilde{E}^7$ a korespondencí C_i $(i = 1, 2, 3)$, které jsou deformacemi 1. řádu, jsou nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby existovala projektivní deformace 2. řádu kongruencí rovin v P_6 a existence dvojice $(C, \tilde{L})$ je zde dokázána.

1. SPECIALIZACE REPERU KONGRUENCE

V projektivním n-rozměrném prostoru P_n $(n > 5)$ provedeme částečnou speciali zaci průvodního reperu. O funkcích vyskytujících se v dalším budeme vždy předpoklá dat, že jsou spojitě diferencovatelné až do potřebného řádu, resp. že jsou analytické Reperem projektivního prostoru P_n $(n > 5)$ budeme rozumět kteroukoliv uspořáda nou $(n + 1)$-tici lineárně nezávislých aritmetických bodů $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$, pro ně

$$(1{,}1) \qquad [A_1 A_2 \ldots A_{n+1}] = 1 .$$

V dalším budou sčítací indexy nabývat vždy hodnot:

$$\begin{aligned} m &= 1, 2, \ldots, n + 1 , & i &= 1, 2, 3 , \\ u &= 1, 2, \ldots, n + 1 , & j &= 1, 2, 3 , \\ v &= 1, 2, \ldots, n + 1 , & I &= 4, 5, 6 , \\ M &= 4, 5, \ldots, n + 1 , & k &= 7, 8, 9, \ldots, n + 1 , \\ N &= 4, 5, \ldots, n + 1 , & l &= 7, 8, 9, \ldots, n + 1 . \end{aligned}$$

Obecný pohyblivý reper závisí na $(n + 1)^2 - 1$ parametrech a relativní komponenty ω_u^m jsou pak určeny na základě

$$(1{,}2) \qquad \mathrm{d}A_u = \sum_m \omega_u^m A_m ,$$

kde

$$(1{,}3) \qquad \mathrm{D}\omega_u^m = \sum_v \omega_u^v \wedge \omega_v^m .$$

Diferencováním (1,1) dostaneme

$$(1{,}4) \qquad \sum_u \omega_u^u = 0 .$$

Nyní zvolíme vrcholy A_1, A_2, A_3 reperu vždy v rovině kongruence L. Diferencováním dostaneme

$$(1{,}5) \qquad \mathrm{d}[A_1A_2A_3] = \omega_1^1[A_1A_2A_3] + \sum_M \omega_1^M[A_MA_2A_3] +$$
$$+ \omega_2^2[A_1A_2A_3] + \sum_M \omega_2^M[A_1A_MA_3] + \omega_3^3[A_1A_2A_3] + \sum_M \omega_3^M[A_1A_2A_M] .$$

V dalším se omezíme na studium kongruencí charakteru 5. Budeme předpokládat, že v každé běžné rovině kongruence existují tři ohniska neležící na jedné přímce.

Symbolem δ označíme variaci (diferencování pouze podle vedlejších parametrů) a položíme

$$\omega_u^m(\delta) = e_u^m .$$

Variací (1,5) obdržíme

$$\delta[A_1A_2A_3] = (e_1^1 + e_2^2 + e_3^3) \, . \, [A_1A_2A_3] ,$$

takže formy

$$\omega_i^M \tag{1,6}$$

jsou hlavní.

Protože hlavní formy závisejí pouze na dvou hlavních parametrech, jsou mezi nimi pouze dvě nezávislé, dejme tomu

$$\omega_1^4 \equiv \omega_1 \; ; \quad \omega_2^5 \equiv \omega_2 \tag{1,7}$$

a nechť

$$\omega_3^6 \equiv \omega_3 = a_3^6(\omega_1 + r\omega_2) , \quad \text{kde} \quad a_3^6 \neq 0 , \quad r \neq 0 , \quad r \neq \infty .$$

Zbývající hlavní formy (1,6) vyjádříme jako lineární kombinace forem (1,7).

Všechny koeficienty hlavních forem (1,6) závisejí obecně na hlavních a vedlejších parametrech.

Bod $F = \sum_i x^i A_i$ se nazývá ohniskem příslušným k fokálnímu směru $p_1\omega_1 + p_2\omega_2 = 0$, jestliže při pohybu roviny v tomto fokálním směru je $[A_1A_2A_3 \, \mathrm{d}F] = 0$.

Nyní provedeme specializaci reperu tak, aby vrchol A_i byl ohniskem příslušným ke směru $\omega_i = 0$, což vyjádříme rovnicí

$$[A_1A_2A_3 \, \mathrm{d}A_i]_{\omega_i = 0} = 0 . \tag{1,8}$$

Z $(1,2_{1,2,3})$ užitím (1,8) plyne

$$\omega_i \wedge \omega_i^M = 0 , \quad \text{pro} \quad i = 1, 2 \quad \text{je} \quad M \neq i + 3 . \tag{1,9}$$

Z předcházejících vztahů (1,9), aplikací Cartanova lemmatu plyne dále:

$$\omega_i^M = a_i^M \omega_i , \quad \text{rovněž pro} \quad i = 1, 2 \quad \text{je} \quad M \neq i + 3 . \tag{1,10}$$

Při další specializaci reperu se podle předcházejícího omezujeme na případ, že každé ze tří ohnisek při pohybu roviny opisuje regulární plochu (nazveme ji plochou fokální).

Po dosazení (1,10) do (1,2) je z prvních tří rovnic vidět, že tečné roviny fokálních ploch (A_i), v příslušných bodech A_i, leží v prostorech

$$[A_1A_2A_3 \sum_M a_i^M A_M] , \quad \text{kde} \quad a_1^4 = a_2^5 = 1 . \tag{1,11}$$

Zvolíme reper tak, aby uvedené tečné prostory (1,11) byly

$$[A_1A_2A_3a_i^{i+3}A_{i+3}] , \quad \text{kde} \quad a_1^4 = a_2^5 = 1 , \quad \text{tj.} \quad a_i^M = 0 \quad \text{pro} \quad M \neq i + 3 .$$

Odtud podle (1,10) plyne

$$\omega_i^M = 0 \quad \text{pro} \quad M \neq i + 3 . \tag{1,12}$$

Všimněme si nyní podrobněji hlavní formy

$$\omega_3 \equiv \omega_3^6 = a_3^6(\omega_1 + r\omega_2).$$

Vnějším diferencováním dostaneme

$$\omega_1 \wedge \{da_3^6 + a_3^6(\omega_1^1 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_4^4)\} +$$
$$+ \omega_2 \wedge \{d(a_3^6 r) + a_3^6 r(\omega_2^2 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_5^5)\} = 0.$$

V dalším se omezíme na případ $a_3^6 \neq 0$ a bez újmy na obecnosti zvolíme $a_3^6 = 1$. V tomto případě je r relativním invariantem a

$$\omega_3^6 = \omega_1 + r\omega_2 \equiv \omega_3. \tag{1,13}$$

Ze tří hlavních forem $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ jsou každé dvě navzájem nezávislé, neboť platí

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0; \quad \omega_1 \wedge \omega_3 \neq 0; \quad \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0.$$

Vypočtěme jejich vnější diferenciály

$$D\omega_1 = \omega_1 \wedge (\omega_4^4 - \omega_1^1); \quad D\omega_2 = \omega_2 \wedge (\omega_5^5 - \omega_2^2);$$
$$D(\omega_1 + r\omega_2) = (\omega_1 + r\omega_2) \wedge (\omega_6^6 - \omega_3^3).$$

Vnějším diferencováním rovnic (1,12) a užitím Cartanova lemmatu určíme další hlavní formy a zapíšeme je jako lineární kombinace příslušných dvou nezávislých hlavních forem (1,13) ve tvaru

$$\begin{aligned}
&\omega_1^2 = a_1^2\omega_1 + \alpha_1^2\omega_2, && \omega_6^k = \beta_3^{k-3}(\omega_1 + r\omega_2)\\
&\omega_1^3 = a_1^3\omega_1 + \alpha_1^3(\omega_1 + r\omega_2), && \omega_4^5 = \beta_1^2\omega_1 - a_1^2\omega_2,\\
&\omega_4^k = \beta_1^{k-3}\omega_1, && \omega_4^6 = \beta_1^3\omega_1 - a_1^3(\omega_1 + r\omega_2),\\
&\omega_2^1 = \alpha_2^1\omega_1 + a_2^1\omega_2, && \omega_5^4 = -a_2^1\omega_1 + \beta_2^1\omega_2,\\
&\omega_2^3 = a_2^3\omega_2 + \alpha_2^3(\omega_1 + r\omega_2), && \omega_5^6 = \beta_2^3\omega_2 - a_2^3(\omega_1 + r\omega_2),\\
&\omega_5^k = \beta_2^{k-3}\omega_2, && \omega_6^4 = -a_3^1\omega_1 + \beta_3^1(\omega_1 + r\omega_2),\\
&\omega_3^1 = \alpha_3^1\omega_1 + a_3^1(\omega_1 + r\omega_2), && \omega_6^5 = -a_3^2\omega_2 + \beta_3^2(\omega_1 + r\omega_2).\\
&\omega_3^2 = \alpha_3^2\omega_2 + a_3^2(\omega_1 + r\omega_2).
\end{aligned} \tag{1,14}$$

Vnějším derivováním hlavních forem (1,14) obdržíme

$$\begin{gathered}
\omega_1 \wedge \{da_1^2 + a_1^2(\omega_2^2 - \omega_4^4) + \omega_4^2\} +\\
+ \omega_2 \wedge \{d\alpha_1^2 + \alpha_1^2(2\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_5^5)\} + \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = 0,\\
\omega_1 \wedge \{da_1^3 + a_1^3(\omega_3^3 - \omega_4^4) + \omega_4^3\} +\\
+ (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{d\alpha_1^3 + \alpha_1^3(2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_6^6)\} + \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 = 0,
\end{gathered} \tag{1,15}$$

$$\omega_1 \wedge \{\mathrm{d}\alpha_2^1 + \alpha_2^1(2\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_4^4)\} +$$
$$+ \omega_2 \wedge \{\mathrm{d}a_2^1 + a_2^1(\omega_1^1 - \omega_5^5) + \omega_5^1\} + \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 = 0\,,$$

$$\omega_2 \wedge \{\mathrm{d}a_2^3 + a_2^3(\omega_3^3 - \omega_5^5) + \omega_5^3\} +$$
$$+ (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{\mathrm{d}\alpha_2^3 + \alpha_2^3(2\omega_3^3 - \omega_2^2 - \omega_6^6)\} + \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge \{\mathrm{d}\alpha_3^1 + \alpha_3^1(2\omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_4^4)\} +$$
$$+ (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{\mathrm{d}a_3^1 + a_3^1(\omega_1^1 - \omega_6^6) + \omega_6^1\} + \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 = 0\,,$$

$$\omega_2 \wedge \{\mathrm{d}\alpha_3^2 + \alpha_3^2(2\omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_5^5)\} +$$
$$+ (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{\mathrm{d}a_3^2 + a_3^2(\omega_2^2 - \omega_6^6) + \omega_6^2\} + \omega_3^1 \wedge \omega_1^2 = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge \{\mathrm{d}\beta_1^2 + \beta_1^2(\omega_1^1 + \omega_5^5 - 2\omega_4^4) + \sum_k \beta_1^{k-3}\omega_k^5\} -$$
$$- \omega_2 \wedge \{\mathrm{d}a_1^2 + a_1^2(\omega_2^2 - \omega_4^4) + \omega_4^2\} + \omega_4^6 \wedge \omega_6^5 = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge \{\mathrm{d}\beta_1^3 + \beta_1^3(\omega_1^1 + \omega_6^6 - 2\omega_4^4) + \sum_k \beta_1^{k-3}\omega_k^6\} -$$
$$- (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{\mathrm{d}a_1^3 + a_1^3(\omega_3^3 - \omega_4^4) + \omega_4^3\} + \omega_4^5 \wedge \omega_5^6 = 0\,,$$

$$-\omega_1 \wedge \{\mathrm{d}a_2^1 + a_2^1(\omega_1^1 - \omega_5^5) + \omega_5^1\} +$$
$$+ \omega_2 \wedge \{\mathrm{d}\beta_2^1 + \beta_2^1(\omega_2^2 + \omega_4^4 - 2\omega_5^5) + \sum_k \beta_2^{k-3}\omega_k^4\} + \omega_5^6 \wedge \omega_6^4 = 0\,,$$

$$\omega_2 \wedge \{\mathrm{d}\beta_2^3 + \beta_2^3(\omega_2^2 + \omega_6^6 - 2\omega_5^5) + \sum_k \beta_2^{k-3}\omega_k^6\} -$$
$$- (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{\mathrm{d}a_2^3 + a_2^3(\omega_3^3 - \omega_5^5) + \omega_5^3\} + \omega_5^4 \wedge \omega_4^6 = 0\,,$$

$$- \omega_1 \wedge \{\mathrm{d}a_3^1 + a_3^1(\omega_1^1 - \omega_6^6) + \omega_6^1\} +$$
$$+ (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{\mathrm{d}\beta_3^1 + \beta_3^1(\omega_3^3 + \omega_4^4 - 2\omega_6^6) + \sum_k \beta_3^{k-3}\omega_k^4\} + \omega_6^5 \wedge \omega_5^4 = 0\,,$$

$$-\omega_2 \wedge \{\mathrm{d}a_3^2 + a_3^2(\omega_2^2 - \omega_6^6) + \omega_6^2\} +$$
$$+ (\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{\mathrm{d}\beta_3^2 + \beta_3^2(\omega_3^3 + \omega_5^5 - 2\omega_6^6) + \sum_k \beta_3^{k-3}\omega_k^5\} + \omega_6^4 \wedge \omega_4^5 = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge \{\mathrm{d}\beta_1^{k-3} + \beta_1^{k-3}(\omega_1^1 - 2\omega_4^4 + \omega_k^k) + \sum_{i=1}^{n-5} \beta_1^{3+i}\omega_{6+i}^k\} + \Theta_1 = 0\,,$$

$$\omega_2 \wedge \{\mathrm{d}\beta_2^{k-3} + \beta_2^{k-3}(\omega_2^2 - 2\omega_5^5 + \omega_k^k) + \sum_{i=1}^{n-5} \beta_2^{3+i}\omega_{6+i}^k\} + \Theta_2 = 0\,,$$

$$(\omega_1 + r\omega_2) \wedge \{\mathrm{d}\beta_3^{k-3} + \beta_3^{k-3}(\omega_3^3 - 2\omega_6^6 + \omega_k^k) + \sum_{i=1}^{n-5} \beta_3^{i+3}\omega_{i+6}^k\} + \Theta_3 = 0\,,$$

kde Θ_i označuje vnější součin příslušných hlavních forem. Z (1,15) je vidět, že α_i^j $(i \neq j)$ jsou relativní invarianty, takže je možno specializovat reper volbou $a_i^j = 0$ pro $i \neq j$.

Při této volbě reperu je podle (1,14)

$$\begin{aligned} \omega_i^j &= \alpha_i^j \omega_j \quad \text{pro} \quad i \neq j\,, \\ \omega_{i+3}^M &= \beta_i^{M-3} \omega_i \quad \text{pro} \quad M \neq i + 3\,. \end{aligned} \tag{1,16}$$

Další úvahy budou se vztahovat na právě sestrojený reper.

2. PROJEKTIVNÍ DEFORMACE

Budiž dána kongruence L rovin v P_n $(n > 5)$ s reperem specializovaným podle předchozího paragrafu a kongruence $\tilde{L}$ rovin v projektivním prostoru $\tilde{P}_n$, s obdobně specializovaným reperem. Reper, Pfaffovy formy a všechny relace patřící ke kongruenci $\tilde{L}$ budeme označovat vlnovkou. Nechť mezi kongruencemi existuje rozvinutelná korespondence $C : L \to \tilde{L}$, určená analyticky rovnicemi

$$\tilde{\omega}_u^v = \omega_u^v + \tau_u^v\,; \tag{2,1}$$

$$\text{pro} \quad \tau_1^4 = \tau_2^5 = 0 \quad \text{je} \quad \tilde{\omega}_1 = \omega_1 \quad \text{a} \quad \tilde{\omega}_2 = \omega_2\,.$$

Korespondence C mezi rovinami σ a $\tilde{\sigma}$ nazývá se projektivní deformací řádu $k = 1, 2$, když ke každé dvojici odpovídajících si rovin σ, $\tilde{\sigma}$ existuje kolineace $K : P_n \to \tilde{P}_n$, která realizuje analytický styk řádu k mezi kongruencemi $\tilde{L}$ a KL rovin, v rovině $\tilde{\sigma} = K\sigma = C\sigma$.

Tyto požadavky jsou analyticky vyjádřeny rovnicemi:

$$K[A_1A_2A_3] = [\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3]\,, \tag{2,2}$$

$$K\,\mathrm{d}[A_1A_2A_3] = \mathrm{d}[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3] + \vartheta_1[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3]\,, \tag{2,3}$$

$$K\,\mathrm{d}^2[A_1A_2A_3] = \mathrm{d}^2[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3] + 2\vartheta_1\,\mathrm{d}[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3] + \vartheta_2[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3] \tag{2,4}$$

pro $k = 2$, kde $\vartheta_{1,2}$ je jakási Pfaffova forma. Pro jednoduchost budeme předpokládat existenci regulární kolineace K, realizující projektivní deformaci 2. řádu ve tvaru

$$KA_i = c_i^i\tilde{A}_i\,, \quad KA_M = \sum_u c_M^u\tilde{A}_u\,. \tag{2,5}$$

Protože kolineace K je regulární, platí

$$c_1^1c_2^2c_3^3|c_M^N| \neq 0\,,$$

přičemž $|c_M^N|$ je determinant o prvcích c_M^N.

Vyšetřujme nyní projektivní deformaci 1. řádu. Podle (2,2) z (2,5) vyplývá

$$c_1^1c_2^2c_3^3 = 1\,. \tag{2,6}$$

Pomocí zkonstruovaného reperu stanovíme diferenciál roviny $[A_1A_2A_3]$ ve tvaru

$$(2,7)\qquad d[A_1A_2A_3] = [A_1A_2A_3](\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3) - [A_1A_3A_5]\,\omega_2 + \\ + [A_2A_3A_4]\,\omega_1 + [A_1A_2A_6](\omega_1 + r\omega_2)\,.$$

Dosazením (2,7) do rovnice (2,3) s využitím (2,5) a s přihlédnutím k (2,6) dostaneme

$$(2,8)\qquad [\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3]\,.\,\{(\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3) + \omega_2 c_1^1 c_3^3 c_5^2 + (\omega_1 + r\omega_2)\,c_1^1 c_2^2 c_6^3 + \\ + \omega_1 c_2^2 c_3^3 c_4^1\} + \sum_M [\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_M](\omega_1 + r\omega_2)\,c_1^1 c_2^2 c_6^M + \sum_M [\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_M](-\omega_2)\,c_1^1 c_3^3 c_5^M + \\ + \sum_M [\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_M]\,\omega_1 c_2^2 c_3^3 c_4^M = [\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3](\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \tau_1^1 + \tau_2^2 + \tau_3^3 + \vartheta_1) + \\ + [\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_6](\omega_1 + r\omega_2) + [\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_5](-\omega_2) + [\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_4]\,\omega_1\,.$$

Ze srovnání koeficientů v rovnici (2,8) plyne

$$(2,9)\qquad c_J^M = 0 \quad \text{pro} \quad I \neq M\,; \\ c_i^i = c_{i+3}^{i+3}\,; \quad \tilde{r} = r\,; \\ \vartheta_1 = (c_2^2 c_3^3 c_4^1 + c_1^1 c_2^2 c_6^3)\,\omega_1 + (c_1^1 c_3^3 c_5^2 + c_1^1 c_2^2 c_6^3 r)\,\omega_2 - (\tau_1^1 + \tau_2^2 + \tau_3^3)\,.$$

Zavedením jednoduššího označení $c_i^i = q_i$ se původní rovnice (2,5) kolineace K redukují na tvar

$$(2,10)\qquad KA_i = q_i\tilde{A}_i\,, \quad KA_{i+3} = \sum_i c_{i+3}^i \tilde{A}_i + q_i\tilde{A}_{i+3}\,, \quad KA_k = \sum_m c_k^m \tilde{A}_m\,.$$

Při vyšetřování projektivní deformace 2. řádu budeme potřebovat řadu pomocných vypočtů, které nyní přehledně uvedeme. Z diferenciálních rovnic zkonstruovaného reperu dostaneme:

$$(2,11)\qquad d^2[A_1A_2A_3] = (.)\,[A_1A_2A_3] + \{\beta_3^1(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \alpha_3^1(\omega_1)^2\}\,[A_1A_2A_4] + \\ + \{\beta_3^2(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \alpha_3^2(\omega_2)^2\}\,[A_1A_2A_5] + \\ + \{(2\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_6^6)(\omega_1 + r\omega_2) + d\omega_1 + d\omega_2\,.\,r + \omega_2\,dr\}\,[A_1A_2A_6] + \\ + \sum_k(\omega_1 + r\omega_2)^2\,\beta_3^{k-3}[A_1A_2A_k] + \{\alpha_2^1(\omega_1)^2 - \beta_2^1(\omega_2)^2\}\,[A_1A_3A_4] + \\ + \{(2\omega_1^1 + \omega_2^2 + 2\omega_3^3 + \omega_5^5)(-\omega_2) - d\omega_2\}\,[A_1A_3A_5] + \\ + \{\alpha_2^3(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \beta_2^3(\omega_2)^2\}\,[A_1A_3A_6] + \\ - \sum_k \beta_2^{k-3}(\omega_2)^2\,[A_1A_3A_k] + 2\omega_2(\omega_1 + r\omega_2)\,[A_1A_5A_6] + \\ + \{\omega_1(\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + 2\omega_3^3 + \omega_4^4) + d\omega_1\}\,[A_2A_3A_4] + \\ + \{\beta_1^2(\omega_1)^2 - \alpha_1^2(\omega_2)^2\}\,[A_2A_3A_5] + \\ + \{\beta_1^3(\omega_1)^2 - \alpha_1^3(\omega_1 + r\omega_2)^2\}\,[A_2A_3A_6] + \\ + \sum_k \beta_1^{k-3}(\omega_1)^2\}\,[A_2A_3A_k] + \\ - 2\omega_1(\omega_1 + r\omega_2)\,[A_2A_4A_6] + 2\omega_1\omega_2[A_3A_4A_5]\,.$$

Porovnáním vnějších diferenciálů hlavních forem a užitím Cartanova lemmatu vyjádříme nové hlavní formy

$$\tau_i^i - \tau_{i+3}^{i+3} = f_i \omega_i \,. \tag{2,12}$$

Nyní máme již vše potřebné k vyšetření projektivní deformace 2. řádu. Z relace (2,4) stanovíme

$$\begin{aligned}
(2{,}13)\quad K\,\mathrm{d}^2[A_1A_2A_3] = {} & \{q_1q_3^{-1}[\beta_3^1(\omega_1 + r\omega_2) - \alpha_3^1(\omega_1)^2] - 2q_3^{-1}c_6^1\omega_1(\omega_1 + r\omega_2) + \\
& + \sum_k q_3^{-1}c_k^4\beta_3^{k-3}(\omega_1 + r\omega_2)\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_4] + \\
& + \{q_2q_3^{-1}[\![\beta_3^2(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \alpha_3^2(\omega_2)^2]\!] - 2q_3^{-1}c_6^2\omega_2(\omega_1 + r\omega_2) + \\
& + \sum_k q_3^{-1}c_k^5\beta_3^{k-3}(\omega_1 + r\omega_2)\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_5] + \\
& + \{\mathrm{d}(\omega_1 + r\omega_2) + (\omega_1 + r\omega_2)(2\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_6^6) + 2q_2^{-1}c_5^2\omega_2(\omega_1 + r\omega_2) + \\
& + 2q_1^{-1}c_4^1\omega_1(\omega_1 + r\omega_2) + \sum_k q_3^{-1}c_k^6\beta_3^{k-3}(\omega_1 + r\omega_2)^2\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_6] + \\
& + \sum_j\sum_k q_3^{-1}c_k^j\beta_3^{k-3}(\omega_1 + r\omega_2)^2\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_j] + \\
& + \{q_1q_2^{-1}[\alpha_2^1(\omega_1)^2 - \beta_2^1(\omega_2)^2] + 2q_2^{-1}c_5^1\omega_1\omega_2 + \\
& + \sum_k q_2^{-1}c_k^4(-\beta_2^{k-3})(\omega_2)^2\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_4] + \\
& - \{\mathrm{d}\omega_2 + \omega_2(2\omega_1^1 + \omega_2^2 + 2\omega_3^3 + \omega_5^5) + (\omega_1 + r\omega_2)\,2q_3^{-1}c_6^3\omega_2 + 2q_1^{-1}c_4^1\omega_1\omega_2 + \\
& + \sum_k q_2^{-1}c_k^5\beta_2^{k-3}(\omega_2)^2\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_5] + \\
& + q_3q_2^{-1}[\alpha_2^3(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \beta_2^3(\omega_2)^2] + 2q_2^{-1}c_5^3\omega_2(\omega_1 + r\omega_2) - \\
& - \sum_k q_2^{-1}c_k^6\beta_2^{k-3}(\omega_2)^2\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_6] + \\
& + \sum_j\sum_k q_2^{-1}c_k^j(-\beta_2^{k-3})(\omega_2)^2\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_j] + \\
& + 2\omega_2(\omega_1 + r\omega_2)\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_5\tilde{A}_6] + \\
& + \{\mathrm{d}\omega_1 + \omega_1(\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + 2\omega_3^3 + \omega_4^4) + 2q_3^{-1}c_6^3\omega_1(\omega_1 + r\omega_2) + \\
& + 2q_2^{-1}c_5^2\omega_1\omega_2 + \sum_k q_1^{-1}c_k^4\beta_1^{k-3}(\omega_1)^2\}\,[\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_4] + \\
& + \{q_1^{-1}q_2[\![\beta_1^2(\omega_1)^2 - \alpha_1^2(\omega_2)^2]\!] - 2q_1^{-1}c_4^2\omega_1\omega_2 + \sum_k q_1^{-1}c_k^5\beta_1^{k-3}(\omega_1)^2\}\,[\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_5] + \\
& + \{q_1^{-1}q_3[\![\beta_1^3(\omega_1)^2 - \alpha_1^3(\omega_1 + r\omega_2)^2]\!] - 2q_1^{-1}c_4^3\omega_1(\omega_1 + r\omega_2) + \\
& + \sum_k q_1^{-1}c_k^6\beta_1^{k-3}(\omega_1)^2\}\,[\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_6] + \sum_j\sum_k q_1^{-1}c_k^j\beta_1^{k-3}(\omega_1)^2\,[\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_j] + \\
& - 2\omega_1(\omega_1 + r\omega_2)\,[\tilde{A}_2\tilde{A}_4\tilde{A}_6] + 2\omega_1\omega_2[\tilde{A}_3\tilde{A}_4\tilde{A}_5]\,; \quad \mathrm{mod}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3]\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2{,}14)\qquad & \mathrm{d}^2[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3] + 2\vartheta\,\mathrm{d}[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3] + (.)\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3] = \\
& = \{\tilde{\beta}_3^1(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \tilde{\alpha}_3^1(\omega_1)^2\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_4] +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \{\tilde{\beta}_3^2(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \tilde{\alpha}_3^2(\omega_2)^2\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_5] + \\
&+ \{\mathrm{d}(\omega_1 + r\omega_2) + (\omega_1 + r\omega_2)(2\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_6^6 - \tau_7^7 + \tau_6^6) + \\
&+ 2q_1^{-1}c_4^1\omega_1(\omega_1 + r\omega_2) + 2q_2^{-1}c_5^2\omega_2(\omega_1 + r\omega_2) + 2q_3^{-1}c_6^3(\omega_1 + r\omega_2)^2\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_6] + \\
&+ \sum_j \beta_3^{j-3}(\omega_1 + r\omega_2)^2\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_j] + \{\tilde{\alpha}_2^1(\omega_1)^2 - \tilde{\beta}_2^1(\omega_2)^2\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_4] - \\
&- \{\mathrm{d}\omega_2 + \omega_2(2\omega_1^1 + \omega_2^2 + 2\omega_3^3 + \omega_5^5 - \tau_2^2 + \tau_5^5) + 2q_1^{-1}c_4^1\omega_1\omega_2 + \\
&+ 2q_2^{-1}c_5^2(\omega_2)^2 - 2q_3^{-1}c_6^3\omega_2(\omega_1 + r\omega_2)\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_5] + \\
&+ \{\tilde{\alpha}_2^3(\omega_1 + r\omega_2)^2 - \tilde{\beta}_2^3(\omega_2)^2\}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_6] - \\
&- \sum_j \beta_2^{j-3}(\omega_2)^2\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_3\tilde{A}_j] + 2\omega_2(\omega_1 + r\omega_2)\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_5\tilde{A}_6] + \\
&+ \{\mathrm{d}\omega_1 + \omega_1(\omega_1^1 + 2\omega_2^2 + 2\omega_3^3 + \omega_4^4 - \tau_1^1 + \tau_4^4) + 2q_1^{-1}c_4^1(\omega_1)^2 + \\
&+ 2q_2^{-1}c_5^2\omega_1\omega_2 + 2q_3^{-1}c_6^3\omega_1(\omega_1 + r\omega_2)\}\,[\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_4] + \\
&+ \{\tilde{\beta}_1^2(\omega_1)^2 - \tilde{\alpha}_1^2(\omega_2)^2\}\,[\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_5] + \\
&+ \{\beta_1^3(\omega_1)^2 - \tilde{\alpha}_1^3(\omega_1 + r\omega_2)\}\,[\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_6] + \\
&+ \sum_j \beta_1^{j-3}(\omega_1)^2\,[\tilde{A}_2\tilde{A}_3\tilde{A}_j] + \\
&- 2\omega_1(\omega_1 + r\omega_2)\,[\tilde{A}_2\tilde{A}_4\tilde{A}_6] + 2\omega_1\omega_2[\tilde{A}_3\tilde{A}_4\tilde{A}_5]\,; \quad \mathrm{mod}\,[\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3]\,.
\end{aligned}
$$

Srovnáním koeficientů pravých stran rovnic (2,13) a (2,14) vzhledem k (2,12) a vhodným uspořádáním dostaneme pro neznámé

$$q_i\,; \quad c_{i+3}^i\,; \quad c_k^M$$

rovnice:

$$q_i f_i = 2c_{i+3}^i - \sum_k c_k^{i+3}\beta_i^{k-3}\,, \tag{2,15}$$

$$q_i\tilde{\alpha}_i^j = q_j\alpha_i^j \qquad (i \neq j)\,, \tag{2,16}$$

$$q_i\tilde{\beta}_i^j = q_j\beta_i^j + \sum_k c_k^{j+3}\beta_i^{k-3} \quad (i \neq j)\,, \tag{2,17}$$

$$\sum_l q_i\tilde{\beta}_i^{l-3} = \sum_l\sum_k c_k^l\beta_i^{k-3}\,, \tag{2,18}$$

$$c_{i+3}^j = 0 \qquad (i \neq j)\,. \tag{2,19}$$

Rovnice (2,15 – 19) udávají nutné podmínky pro existenci projektivní deformace 2. řádu kongruencí rovin. Snadno nahlédneme, že podmínky jsou i postačující.

V dalším provedeme zvlášť vyšetření pro $n \geqq 8$, $n = 7$ a $n = 6$.

3. DEFORMACE KONGRUENCÍ ROVIN V P_n, $n \geqq 8$

Vyšetřujme případ projektivní deformace 2. řádu kongruencí rovin, vnořených do n-rozměrného projektivního prostoru pro $n \geqq 8$. Budeme předpokládat, že matice

$$(\beta_i^{k-3})$$

má hodnost tři a pro určitost se omezíme na případ, že determinant utvořený z prvních tří sloupců je různý od nuly. V kapitole 1 zkonstruovaný reper přiřazený ke kongruenci L lze bez omezení obecnosti zvoliti tak, že platí

$$\beta_i^{j+3} = \beta_i^k = 0 \quad (i \neq j)\,. \tag{3,1}$$

Přitom se rovnice (2,15–2,19) zjednoduší na tvar

$$q_i f_i = 2c_{i+3}^i - c_{i+6}^{i+3}\beta_i^{i+3}\,; \tag{3,2}$$

$$q_i\tilde{\alpha}_i^j = q_j\alpha_i^j \qquad (i \neq j)\,; \tag{3,3}$$

$$q_i\tilde{\beta}_i^j = q_j\beta_i^j + c_{i+6}^{i+3}\beta_i^{i+3} \qquad (i \neq j)\,; \tag{3,4}$$

$$q_i\tilde{\beta}_i^{i+3} = c_{i+6}^{i+6}\beta_i^{i+3}\,; \tag{3,5}$$

$$c_k^l = 0 \qquad (k \neq l)\,. \tag{3,6}$$

Tedy platí:

Věta 3.1. *Korespondence $C : L \to \tilde{L}$ je projektivní deformací 2. řádu právě tehdy, má-li soustava (3,3) řešení $q_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$.*

Zkoumejme nyní, zda existuje tečná kolineace K, ke korespondenci C_i, která současně realizuje deformaci 1. řádu mezi fokálními plochami (A_i) a $(\tilde{A}_i)$.

Aby korespondence $C_i : (A_i) \to (\tilde{A}_i)$ byla deformací 1. řádu, musí platit

$$KA_i = q_i\tilde{A}_i \tag{3,7}$$

$$K(\mathrm{d}A_i) = \mathrm{d}(q_i\tilde{A}_i) + (.)\,\tilde{A}_i\,. \tag{3,8}$$

Kolineace K nechť je pro jednoduchost určena rovnicemi (2,10). Z prvních tří rovnic zkonstruovaného reperu na základě relace (3,8) vzhledem k (2,14) plyne

$$\sum_j \tilde{A}_j(\alpha_i^j\omega_j q_j + 2\omega_i c_{i+3}^j) = \sum_j \tilde{A}_j\tilde{\alpha}_i^j q_j\omega_j + \tilde{A}_{i+3}\omega_i q_i \quad \text{pro} \quad j \neq i\,, \quad \text{mod } \tilde{A}_i\,. \tag{3,9}$$

Porovnáním koeficientů v rovnicích (3,9) dostaneme

$$q_i\tilde{\alpha}_i^j = q_j\alpha_i^j \quad \text{pro} \quad i \neq j\,; \tag{3,10}$$

$$c_I^m = 0 \quad \text{pro} \quad I \neq m\,, \quad I \neq m + 3\,. \tag{3,11}$$

Uvedené rovnice (3,10,11) vyjadřují nutné a je zřejmé, že i postačující podmínky k existenci deformace 1. řádu mezi fokálními plochami. Obdrželi jsme výsledek:

Věta 3.2. *Korespondence $C : L \to \tilde{L}$ je projektivní deformací 2. řádu právě tehdy, když korespondence $C_i : (A_i) \to (\tilde{A}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ jsou současně deformacemi 1. řádu.*

Zkoumejme nyní existenci kongruence L v P_n. Kongruence L je určena systémem rovnic

$$\omega_i^M = 0 \quad \text{pro} \quad i + 3 \neq M\,, \quad \omega_3^6 = a_3^6(\omega_1 + r\omega_2)\,.$$

Vnějším diferencováním tohoto systému dostaneme

$$\omega_1^2 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_4^5 = 0\,, \quad \omega_2^1 \wedge \omega_1 + \omega_2 \wedge \omega_5^4 = 0\,, \quad \omega_3^1 \wedge \omega_1 + \omega_3 \wedge \omega_6^4 = 0\,,$$

$$\omega_1^3 \wedge \omega_3 + \omega_1 \wedge \omega_4^6 = 0\,, \quad \omega_2^3 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_5^6 = 0\,, \quad \omega_3^2 \wedge \omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_6^5 = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge \omega_4^k = 0\,, \qquad \omega_2 \wedge \omega_5^k = 0\,, \qquad \omega_3 \wedge \omega_6^k = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge \{\mathrm{d}a_3^6 + a_3^6(\omega_1^1 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_4^4)\} +$$
$$+ \omega_2 \wedge \{\mathrm{d}(a_3^6 r) + a_3^6 r(\omega_2^2 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_5^5)\} = 0\,.$$

Užitím Cartanova lemmatu vyjádříme nové hlavní formy pomocí $N = 3n + 6$ nezávislých koeficientů. Protože počet nezávislých forem $q = 3n - 1$, počet nezávislých kvadratických rovnic $s_1 = 3n - 8$ je $s_2 = 7$ a Cartanovo číslo $Q = 3n + 6$, je systém v involuci a platí

Věta 3.3. *Kongruence L existuje a závisí na sedmi funkcích dvou proměnných.*

Vyšetřeme dále, zda ke kongruenci L existuje dvojice $(C, \tilde{L})$ za předpokladů

$$\beta_i^{i+3} = 1 = r\,; \tag{3,12}$$
$$\beta_i^m = 0 \quad (m \neq i;\ m \neq i + 3)\,;$$
$$\tilde{\alpha}_i^j = \alpha_i^j \quad (i \neq j)\,.$$

Tato volba není na úkor obecnosti a rovnice (3,3) jsou splněny pro

$$q_i = 1\,.$$

K dané kongruenci L je dvojice $(C, \tilde{L})$ určena systémem

$$\tau_i^m = 0 \quad (i \neq m)\,, \qquad \tau_I^M = 0 \quad (I \neq M)\,. \tag{3,13}$$

Uzávěr tohoto systému je

$$\omega_i \wedge (\tau_{i+3}^{i+3} - \tau_i^i) = 0\,, \tag{3,14}$$
$$\omega_1 \wedge \tau_4^2 + \omega_2 \wedge (\tau_2^2 - \tau_1^1) = 0\,,$$
$$\omega_1 \wedge (\tau_3^3 - \tau_1^1 + \tau_4^3) + \omega_2 \wedge (\tau_3^3 - \tau_1^1) = 0\,,$$
$$\omega_1 \wedge (\tau_1^1 - \tau_2^2) + \omega_2 \wedge \tau_5^1 = 0\,,$$
$$\omega_1 \wedge (\tau_3^3 - \tau_2^2) + \omega_2 \wedge (\tau_3^3 - \tau_2^2 + \tau_5^3) = 0\,,$$
$$\omega_1 \wedge (\tau_1^1 - \tau_3^3 + \tau_6^1) + \omega_2 \wedge \tau_6^1 = 0\,,$$
$$\omega_1 \wedge \tau_6^2 + \omega_2 \wedge (\tau_2^2 - \tau_3^3 + \tau_6^2) = 0\,.$$

$$\omega_i \wedge \tau_{i+6}^k = 0 \quad (k \neq i + 6)\,, \tag{3,15}$$
$$\omega_i \wedge (\tau_{i+6}^{i+6} - \tau_{i+3}^{i+3}) = 0\,,$$
$$\omega_1 \wedge \tau_7^5 + \omega_2 \wedge (-\tau_4^2) = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge (\tau_7^6 - \tau_4^3) + \omega_2 \wedge (-\tau_4^3) = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge (-\tau_5^1) + \omega_2 \wedge \tau_8^4 = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge (-\tau_5^3) + \omega_2 \wedge (\tau_8^6 - \tau_5^3) = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge (-\tau_6^1 + \tau_9^4) + \omega_2 \wedge \tau_9^4 = 0\,,$$

$$\omega_1 \wedge \tau_9^5 + \omega_2 \wedge (\tau_9^5 - \tau_6^2) = 0\,.$$

Užitím Cartanova lemmatu vyjádříme nové hlavní formy pomocí $(22 + 3n)$ koeficientů, z nichž je právě $(4 + 3n)$ nezávislých, tj. $N = 4 + 3n$. Protože počet nezávislých forem $q = 2 + 3n$, počet nezávislých kvadratických rovnic (3, 14, 15) je $s_1 = 3n$, je $s_2 = 2$ a Cartanovo číslo $Q = 4 + 3n$, takže systém je v involuci a platí:

Věta 3.4. *Je-li dána kongruence L, pak dvojice $(C, \tilde{L})$ existuje a závisí na dvou funkcích dvou proměnných.*

4. DEFORMACE KONGRUENCÍ ROVIN V P_7

V případě projektivní deformace 2. řádu kongruencí rovin vnořených do projektivního prostoru P_7 budeme předpokládat, že matice

$$(\beta_i^{4,5})$$

má všechny determinanty 2. řádu různé od nuly. Zkonstruovaný reper přiřazený k L lze zvolit tak, že platí

(4,1) $$\beta_1^5 = \beta_2^4 = 0\,,$$

což není na úkor obecnosti; $\beta_1^4, \beta_2^5, \beta_3^4, \beta_3^5$ jsou pak nenulové relativní invarianty. Rovnice (2,15–19) nabudou tvaru

(4,2) $$q_i f_i = 2c_{i+3}^i - c_{i+6}^{i+3}\beta_i^{i+3} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2$$

a pro $i = 3$

$$q_i f_i = 2c_{i+3}^i - \sum_k c_k^{i+3}\beta_i^{k-3}\,.$$

(4,3) $$q_i\tilde{\alpha}_i^j = q_j\alpha_i^j \quad (i \neq j)\,,$$

(4,4) $$q_i\tilde{\beta}_i^j = q_j\beta_i^j + c_{i+6}^{j+3}\beta_i^{i+3} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2 \quad (i \neq j)\,,$$

a pro $i = 3$

$$q_i\tilde{\beta}_i^j = q_j\beta_i^j + \sum_k c_k^{j+3}\beta_i^{k-3} \quad (i \neq j)\,,$$

$$(4,5) \qquad q_i\tilde{\beta}_i^{i+3} = c_{i+6}^{i+6}\beta_i^{i+3} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2\,,$$

$$q_3\tilde{\beta}_3^4 = c_7^7\beta_3^4\,; \quad q_3\tilde{\beta}_3^5 = c_8^8\beta_3^5\,;$$

$$(4,6) \qquad c_8^7 = c_7^8 = 0\,.$$

Z relací (4,5) je k určení c_7^7 a c_8^8 nutné a stačí, aby platilo

$$(4,7) \qquad q_1\frac{\tilde{\beta}_1^4}{\tilde{\beta}_3^4} = q_3\frac{\beta_1^4}{\beta_3^4}\,; \quad q_2\frac{\tilde{\beta}_2^5}{\tilde{\beta}_3^5} = q_3\frac{\beta_2^5}{\beta_3^5}\,.$$

Tedy platí:

Věta 4.1. *Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby existovala projektivní deformace 2. řádu mezi kongruencemi rovin L, $\tilde{L}$, je existence takových $q_i \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$), která splňují rovnice (4,3) a (4,7).*

Hledejme nyní podmínky pro to, aby korespondence C_i a C^* byly deformacemi 1. řádu, realizovanými touž tečnou kolineací, vzhledem k C.

Za tímto účelem zavedeme k reperu $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ reper duální, tvořený ve vhodném pořadí $(n + 1)$ analytickými nadrovinami, neprocházejícími jedním bodem. Pro nadrovinu $E^m = (-1)^m\,[A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_{n+1} \ldots A_8]$ platí:

jestliže

$$\mathrm{d}A_m = \sum_u \omega_m^u A_n\,,$$

potom

$$(4,8) \qquad \mathrm{d}E^m = -\sum_u \omega_u^m E^u\,.$$

Průnik nadrovin E^7, E^8 označíme $[E^7E^8]$. Korespondence C^* nechť je dána předpisem

$$(4,9) \qquad C^* : [E^7E^8] \mapsto [\tilde{E}^7\tilde{E}^8]\,.$$

Podmínky pro deformace C_i jsou určeny v rovnicích (3,10). Rovnice příslušné kolineace jsou

$$(4,10) \qquad KA_i = q_i\tilde{A}_i\,, \quad KA_{i+3} = c_{i+3}^i\tilde{A}_i + q_i\tilde{A}_{i+3}\,, \quad KA_k = \sum_m c_k^m\tilde{A}_m\,.$$

Aby korespondence C^* byla deformací 1. řádu realizovanou kolineací (4,10), musí platit

$$(4,11) \qquad K[E^7E^8] = (.)\,[\tilde{E}^7\tilde{E}^8]\,,$$

$$K\,\mathrm{d}[E^7E^8] = (.)\,\mathrm{d}[\tilde{E}^7\tilde{E}^8] + \vartheta_e[\tilde{E}^7\tilde{E}^8]\,.$$

Uvedeme některé další výpočty, které budeme v dalším používat:

$$(4,12) \qquad dE^7 = -\omega_8^7E^8 - \omega_7^7E^7 - \beta_3^4(\omega_1 + r\omega_2)\,E^6 - \beta_2^4\omega_2E^5 - \beta_1^4\omega_1E^4\,,$$

$$\mathrm{d}E^8 = -\omega_8^8E^8 - \omega_7^8E^7 - \beta_3^5(\omega_1 + r\omega_2)\,E^6 - \beta_2^5\omega_2E^5 - \beta_1^5\omega_1E^4\,,$$

$$(4,13)\quad \begin{aligned} KE^8 &= (q_1q_2q_3)^2\, c_7^7\tilde{E}^8\,,\\ KE^7 &= (q_1q_2q_3)^2\, c_8^8\tilde{E}^7 + (q_1q_2q_3)^2\, c_8^7\tilde{E}^8\,,\\ KE^6 &= (q_1q_2)^2\, q_3c_7^7c_8^8\tilde{E}^6 + (q_1q_2)^2\, q_3c_8^8c_7^6\tilde{E}^7 - (q_1q_2)^2\, q_3c_7^7c_8^6\tilde{E}^8 +\\ &\quad + (q_1q_2)^2\, q_3c_7^6c_8^7\tilde{E}^8\,,\\ KE^5 &= (q_1q_3)^2\, q_2c_7^7c_8^8\tilde{E}^5 + (q_1q_3)^2\, q_2c_7^5c_8^8\tilde{E}^7 - (q_1q_3)^2\, q_2c_7^7c_8^5\tilde{E}^8 -\\ &\quad - (q_1q_3)^2\, q_2c_7^5c_8^7\tilde{E}^8\,,\\ KE^4 &= (q_2q_3)^2\, q_1c_7^7c_8^8\tilde{E}^4 - (q_2q_3)^2\, q_1c_7^4c_8^8\tilde{E}^7\,,\\ K[E^7E^8] &= (q_1q_2q_3)^4\, c_7^7c_8^8[\tilde{E}^7\tilde{E}^8]\,. \end{aligned}$$

$$(4,14)\quad \begin{aligned} K\,\mathrm{d}[E^7E^8] &= -\beta_3^4(\omega_1 + r\omega_2)\,(q_1q_2)^4\,(q_3)^3\,(c_7^7)^2\,c_8^8[\tilde{E}^6\tilde{E}^8] -\\ &\quad - \beta_1^4\omega_1(q_1)^3\,(q_2q_3)^4\,(c_7^7)^2\,c_8^8[\tilde{E}^4\tilde{E}^8] + \beta_3^5(\omega_1 + r\omega_2)\,.\\ &\quad .\,(q_1q_2)^4\,(q_3)^3\,c_7^7(c_8^8)^2\,[\tilde{E}^6\tilde{E}^7] + \beta_2^5\omega_2(q_1q_3)^4\,(q_2)^3\,c_7^7c_8^8\,[\tilde{E}^5\tilde{E}^7]\,,\quad \mathrm{mod}\,[\tilde{E}^7\tilde{E}^8]\,; \end{aligned}$$

$$(4,15)\quad \begin{aligned} \mathrm{d}[\tilde{E}^7\tilde{E}^8] + \vartheta_e[\tilde{E}^7\tilde{E}^8] &= (q_1q_2q_3)^4\,c_7^7c_8^8\{-\tilde{\beta}_3^4(\omega_1 + r\omega_2)\}\,[\tilde{E}^6\tilde{E}^8] +\\ &\quad - \tilde{\beta}_1^4\omega_1[\tilde{E}^4\tilde{E}^8] + \beta_3^5(\omega_1 + r\omega_2)\,[\tilde{E}^6\tilde{E}^7] + \beta_2^5\omega_2[\tilde{E}^5\tilde{E}^7]\,,\quad \mathrm{mod}\,[\tilde{E}^7\tilde{E}^8]\,. \end{aligned}$$

Na základě (4,11), porovnáním koeficientů u pravých stran rovnic (4,14) a (4,15) dostáváme

$$(4,16)\quad q_1\tilde{\beta}_1^4 = c_7^7\beta_1^4\,;\quad q_2\tilde{\beta}_2^5 = c_8^8\beta_2^5\,;\quad q_3\tilde{\beta}_3^4 = c_7^7\beta_3^4\,;\quad q_3\tilde{\beta}_3^5 = c_8^8\beta_3^5\,.$$

Máme výsledek:

Věta 4.2. *Korespondence $C : L \to \tilde{L}$ je projektivní deformací 2. řádu právě tehdy, když korespondence C_i a C^* jsou současně deformacemi 1. řádu.*

Zkoumejme, zda ke kongruenci L existuje dvojice $(C, \tilde{L})$ za předpokladů:

$$(4,17)\quad \begin{gathered} \tilde{\alpha}_i^j = \alpha_i^j \quad (i \neq j)\,,\\ \tilde{\beta}_1^4 = \beta_1^4 = \tilde{\beta}_2^5 = \beta_2^5 = \tilde{\beta}_3^4 = \beta_3^4 = \tilde{\beta}_3^5 = \beta_3^5\,,\\ \beta_1^2 = \beta_1^3 = \beta_1^5 = \beta_2^1 = \beta_2^3 = \beta_2^4 = \beta_3^1 = \beta_3^2 = 0\,,\\ r = 1\,. \end{gathered}$$

Tato volba není na úkor obecnosti a rovnice (4,3) a (4,7) jsou splněny pro $q_i = 1$.

K dané kongruenci L je dvojice $(C, \tilde{L})$ určena systémem (3,13) pro $n = 7$. Uzávěrem tohoto systému jsou kvadratické rovnice (3,14) a systém

$$(4,18)\quad \begin{gathered} \omega_1 \wedge \tau_7^5 + \omega_2 \wedge (-\tau_4^2) = 0\,,\\ \omega_1 \wedge (\tau_7^6 - \tau_4^3) + \omega_2 \wedge (-\tau_4^3) = 0\,, \end{gathered}$$

$$\omega_1 \wedge (\tau_7^7 - \tau_4^4) = 0,$$

$$\omega_1 \wedge \tau_7^8 = 0,$$

$$\omega_1 \wedge (-\tau_5^1) + \omega_2 \wedge \tau_8^4 = 0,$$

$$\omega_1 \wedge (-\tau_5^3) + \omega_2 \wedge (\tau_8^6 - \tau_5^3) = 0,$$

$$\omega_2 \wedge \tau_8^7 = 0,$$

$$\omega_2 \wedge (\tau_8^8 - \tau_5^5) = 0,$$

$$\omega_1 \wedge (\tau_7^4 + \tau_8^4 - \tau_6^1) + \omega_2 \wedge (\tau_7^4 + \tau_8^4) = 0,$$

$$\omega_1 \wedge (\tau_7^5 + \tau_8^5) + \omega_2 \wedge (\tau_7^5 + \tau_8^5 - \tau_6^2) = 0,$$

$$\omega_1 \wedge (\tau_7^7 - \tau_6^6 + \tau_8^7) + \omega_2 \wedge (\tau_7^7 - \tau_6^6 + \tau_8^7) = 0,$$

$$\omega_1 \wedge (\tau_8^8 - \tau_6^6 + \tau_7^8) + \omega_2 \wedge (\tau_8^8 - \tau_6^6 + \tau_7^8) = 0.$$

Užitím Cartanova lemmatu vyjádříme hlavní formy systému (3,14) a (4,18) pomocí 37 koeficientů, z nichž právě 21 je nezávislých, tj. $N = 21$. Počet nezávislých forem $q = 21$, počet nezávislých kvadratických rovnic je $s_1 = 21$ a $Q = 21$, systém je v involuci a dostáváme větu:

Věta 4.3. *Je-li dána kongruence L, pak dvojice $(C, \tilde{L})$ existuje a závisí na 21 funkcích jedné proměnné.*

5. DEFORMACE KONGRUENCÍ ROVIN V P_6

Jako poslední případ vyšetříme projektivní deformaci 2. řádu kongruencí rovin, vnořených do projektivního prostoru P_6. Budeme uvažovat obecný případ, kdy

(5,1) $$\beta_i^4 \neq 0.$$

Rovnice (2,15–19) za předpokladu (5,1) pro $n = 6$ jsou

(5,2) $$q_i f_i = 2c_{i+3}^i - c_7^{i+3}\beta_i^4,$$

(5,3) $$q_i \tilde{\alpha}_i^j = q_j \alpha_i^j \quad (i \neq j),$$

(5,4) $$q_i \tilde{\beta}_i^j = q_j \beta_i^j + c_7^{j+3}\beta_i^4 \quad (i \neq j),$$

(5,5) $$q_i \tilde{\beta}_i^4 = c_7^7 \beta_i^4.$$

Z (5,5) vychází:

(5,6) $$c_7^7 = q_1 \frac{\tilde{\beta}_1^4}{\beta_1^4} = q_2 \frac{\tilde{\beta}_2^4}{\beta_2^4} = q_3 \frac{\tilde{\beta}_3^4}{\beta_3^4}.$$

Tedy platí:

Věta 5.1. *Korespondence* $C : L \to \tilde{L}$, *realizovaná kolineací* K, *je projektivní deformací* 2. *řádu právě tehdy, když existují* $q_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$, *která jsou řešením* (5,3) *a* (5,6).

Nyní zjistíme podmínky pro to, aby korespondence C_i a C^* byly deformacemi 1. řádu, realizovanými touž tečnou kolineací vzhledem k C.

Jednotlivé korespondence jsou nyní:

$$C : L \to \tilde{L}; \quad C_i : (A_i) \mapsto (\tilde{A}_i)\,; \quad C^\times : E^7 \mapsto \tilde{E}^7\,.$$

Podmínky pro deformaci C_i jsou určeny v rovnicích (3,10). Rovnice příslušné kolineace jsou (4,10).

Aby korespondence $C^\times$ byla deformací 1. řádu, realizovanou rovněž kolineací (4,10), musí platit

$$KE^7 = (.)\,\tilde{E}^7\,, \quad K\,\mathrm{d}E^7 = (.)\,\mathrm{d}\tilde{E}^7 + \vartheta_E\tilde{E}^7\,. \tag{5,7}$$

Uvedeme některé pomocné výpočty:

$$\begin{aligned} KE^7 &= (q_1q_2q_3)^2\,\tilde{E}^7\,,\\ KE^6 &= (q_1q_2)^2\,q_3c_7^7\tilde{E}^7 - (q_1q_2)^2\,q_3c_7^6\tilde{E}^7\,,\\ KE^5 &= (q_1q_3)^2\,q_2c_7^7\tilde{E}^5 - (q_1q_3)^2\,q_2c_7^5\tilde{E}^7\,,\\ KE^4 &= (q_2q_3)^2\,q_1c_7^7\tilde{E}^4 - (q_2q_3)^2\,q_1c_7^4\tilde{E}^7\,. \end{aligned} \tag{5,8}$$

$$\begin{aligned} K\,\mathrm{d}E^7 = {}& -\beta_3^4(\omega_1 + r\omega_2)\,(q_1q_2)^2\,q_3c_7^7\tilde{E}^6 - \beta_2^4\omega_2(q_1q_3)^2\,q_2c_7^7\tilde{E}^5 - \\ & - \beta_1^4\omega_1(q_2q_3)^2\,q_1c_7^7\tilde{E}^4\,, \quad \mathrm{mod}\ \tilde{E}^7\,; \end{aligned} \tag{5,9}$$

$$\begin{aligned} (.)\,\mathrm{d}\tilde{E}^7 + \vartheta_E\tilde{E}^7 = {}& (q_1q_2q_3)^2\,\{-\omega_7^7\tilde{E}^7 - \tilde{\beta}_3^4(\omega_1 + r\omega_2)\,\tilde{E}^6 - \\ & - \tilde{\beta}_2^4\omega_2\tilde{E}^5 - \tilde{\beta}_1^4\omega_1\tilde{E}^4\} + \vartheta_E\tilde{E}^7\,. \end{aligned} \tag{5,10}$$

Na základě (5,7), porovnáním koeficientů u pravých stran rovnic (5,9) a (5,10) dostáváme

$$q_i\tilde{\beta}_i^4 = c_7^7\beta_i^4\,. \tag{5,11}$$

Tedy platí:

Věta 5.2. *Korespondence* $C : L \to \tilde{L}$ *je projektivní deformací* 2. *řádu právě tehdy, když korespondence* C_i *a* $C^\times$ *jsou současně deformacemi* 1. *řádu.*

Zjistíme, zda ke kongruenci L existuje dvojice $(C, \tilde{L})$ za předpokladů

$$\tilde{\alpha}_i^j = \alpha_i^j \quad (i \neq j)\,. \tag{5,12}$$

$$\tilde{\beta}_i^4 = \beta_i^4 ,$$
$$\beta_1^2 = \beta_2^3 = \beta_3^1 = 1 = r = c_7^7 ,$$
$$\beta_1^3 = \beta_2^1 = \beta_3^2 = 0 .$$

Tato volba není na úkor obecnosti a rovnice (5,3) a (5,6) jsou splněny pro $q_i = 1$. K dané kongruenci L je dvojice $(C, \tilde{L})$ určena systémem (3,13) pro $n = 6$. Uzávěrem tohoto systému budou kvadratické rovnice (3,14) a systém

$$
\begin{aligned}
&\omega_1 \wedge (\tau_7^6 - \tau_4^3) + \omega_2 \wedge (-\tau_4^3) = 0 , \\
&\omega_1 \wedge (\tau_7^7 - \tau_4^4) = 0 , \\
&\omega_1 \wedge (-\tau_5^1) + \omega_2 \wedge \tau_7^4 = 0 , \\
&\omega_2 \wedge (\tau_7^7 - \tau_5^5) = 0 , \\
&\omega_1 \wedge \tau_7^5 + \omega_2 \wedge (\tau_7^5 - \tau_6^2) = 0 , \\
&\omega_1 \wedge (\tau_7^7 - \tau_6^6) + \omega_2 \wedge (\tau_7^7 - \tau_6^6) = 0 .
\end{aligned}
\tag{5,13}
$$

Užitím Cartanova lemmatu vyjádříme hlavní formy systému (3,14) a (5,13) pomocí 28 koeficientů, z nichž je právě 15 nezávislých, tj. $N = 15$. Protože počet nezávislých forem $q = 15$, počet nezávislých kvadratických rovnic (3,14) a (5,13) je $s_1 = 15$ a $Q = 15$, je systém v involuci a platí věta:

Věta 5.3. *Je-li dána kongruence L, pak dvojice $(C, \tilde{L})$ existuje a závisí na 15 funkcích jedné proměnné.*

Literatura

[1] *Švec A.*: Projective Differential Geometry of Line Congruences, Prague 1965.

[2] *Švec A.*: Déformation projective des congruences de droites dans *S*. Czech. Math. J., *5 (80)*, 1955, 546—558.

[3] *Svoboda K.*: Über die Punktdeformation einer vollständig fokalen Pseudokongruenz. Mathematische Nachrichten Band *38* (1968) Heft 3/4, str. 197—206.

[4] *Шепеленкова Л.*: Проективное изгибание двупараметрического семейства n — 1 плоскостей в $(2n - 1)$-мерном проективном пространстве, Труды Томск. госуд. унив. Том *161* (1962), 29—38.

[5] *Фиников С. П.*: Теория пар конгруэнций, Москва 1956.

Adresa autora: Koněvova 131, Brno (Vysoké učení technické).

Zusammenfassung

ÜBER PROJEKTIVE DEFORMATIONEN VON EBENENKONGRUENZEN IM n-DIMENSIONALEN PROJEKTIVEN RAUM

JAROSLAV BAYER, Brno

In dieser Arbeit ist im n-dimensionalen projektiven Raum P_n $(n > 5)$ ein zweiparametersystem von Ebenen (die Ebenenkongruenzen) mit Hilfe der Methode von E. Cartan untersucht.

Es wird da eine teilweise Spezialisierung des begleitenden Dreibeines der Ebenenkongruenz in P_n so durchgeführt, dass die Scheitelpunkte A_1, A_2, A_3, des Dreibeines in den Brennpunkten der freien Ebene der Kongruenz sind. Bei der Bewegung der Ebene beschreibt jeder der drei Brennpunkte die Fokalfläche der gegebenen Kongruenz der Ebenen. In der Spezialisierung wird nach einer weiteren Vereinfachung fortgeschritten bis zu der für unseren Gebrauch geeigneten Form. In dieser Arbeit sind notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz projektiver Deformationen 1. und 2. Ordnung für die Kongruenz der Ebenen L und $\tilde{L}$ in den einander entsprechenden Räumen P_n und $\tilde{P}_n$ gegeben.

Mit Hilfe der tangierenden Kollineation K wird die Korrespondenz C zwischen Fokalflächen dargestellt, welche eine Deformation 1. Ordnung ist. Es wird gezeigt, dass deren Existenz eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer projektiven Deformation 2. Ordnung der Kongruenzen von Ebenen in P_n für $n \geqq 8$ ist, und es wird bewiesen, dass das Paar $(C, \tilde{L})$ existiert und zwei Funktionen von zwei Variablen abhängt. Die eingeführte Korrespondenz $C^* : [E^7, E^8] \mapsto \mapsto [\tilde{E}^7, \tilde{E}^8]$ zusammen mit den Korrespondenzen C_i sind Deformationen 1. Ordnung und deren Existenz ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer projektiven Deformation 2. Ordnung der Ebenenkongruenzen in P_7 und das Paar $(C, \tilde{L})$ existiert und hängt von 21 Funktionen einer Variablen ab.

Schlieslich ist die Existenz der Korrespondenz $C^{\times}: E^7 \mapsto \tilde{E}^7$ und der Korrespondenzen C_i, welche Deformationen 1. Ordnung sind, eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Projektivdeformation 2. Ordnung von Ebenenkongruenzen in P_6 existiert. Soeben ist bewiesen, dass das Paar $(C, \tilde{L})$ existiert und von 15 Funktionen einer Variablen abhängt.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNGEN DER LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $[p(x)\, y']' + q(x)\, y = 0$ IM NICHTOSZILLATORISCHEN FALL

IVO RES, Brno

(Eingelangt am 1. Juni 1970)

1. BEMERKUNGEN

Die asymptotischen Entwicklungen der Lösungen gehören zu den Problemen, die bei den Differentialgleichungen zweiter Ordnung untersucht werden. Mit dieser Frage beschäftigten sich viele Verfasser.

Die asymptotischen Eigenschaften der Differentialgleichung $y'' = A(x)\, y$ im nichtoszillatorischen Fall wurden in der Arbeit [2] untersucht. In dieser Arbeit werden Bedingungen festgestellt, unter denen das Fundamentalsystem dieser Gleichung in der Gestalt

$$y_j - A^{-1/4} \exp\left\{\varepsilon_j \int_a^x A^{1/2}(t)\, dt\right\} \to 0\,, \quad y'_j - \varepsilon_j A^{1/4} \exp\left\{\varepsilon_j \int_a^x A^{1/2}(t)\, dt\right\} \to 0\,,$$

$$j = 1, 2\,; \quad \varepsilon_1 = 1\,, \quad \varepsilon_2 = -1\,,$$

geschrieben werden kann.

In der Arbeit [3] werden die asymptotischen Entwicklungen der Lösungen der Differentialgleichung $[p(x)\, y']' + q(x)\, y = 0$ untersucht. Die Lösungen und deren Ableitungen werden in der Form von unendlichen Reihen konstruiert, welche im Intervall $I = \langle x_0, \infty)$ gleichmässig konvergieren.

In dieser Arbeit werden asymptotische Formeln für die Lösungen der Differentialgleichung

$$(1{,}1) \qquad [p(x)\, y']' + q(x)\, y = 0\,,$$

im nichtoszillatorischen Fall hergeleitet.

2. BEZEICHNUNGEN, HILFSSATZ

Es seien $A_1(x), A_2(x), F(x) \in C_0(I)$. Wir setzen

$$\overline{\mathscr{C}}_1[F(x)] = \int_x^\infty A_1(t_1) \int_a^{t_1} A_2(t_2)\, F(t_2)\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1\,,$$

$$\overline{\mathscr{C}}_2[F(x)] = \int_a^x A_2(t_2) \int_{t_2}^\infty A_1(t_1)\, F(t_1)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2\,,$$

$$\mathscr{C}_1[F(x)] = \int_x^\infty A_1(t_1) \int_{t_1}^\infty A_2(t_2)\, F(t_2)\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1\,,$$

$$\mathscr{C}_2[F(x)] = \int_x^\infty A_2(t_2) \int_{t_2}^\infty A_1(t_1)\, F(t_1)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2\,.$$

Weiter setzen wir

$$\overline{\mathscr{C}}_j^0[F(x)] = F(x)\,, \quad \overline{\mathscr{C}}_j^i[F(x)] = \overline{\mathscr{C}}_j \overline{\mathscr{C}}_j^{i-1}[F(x)]\,,$$
$$\mathscr{C}_j^0[F(x)] = F(x)\,, \quad \mathscr{C}_j^i[F(x)] = \mathscr{C}_j \mathscr{C}_j^{i-1}[F(x)]\,, \quad j = 1, 2; \quad i = 1, 2, \ldots$$

und

$$\gamma_1(x) = \int_x^\infty A_1(t_1) \int_{t_1}^\infty |A_2(t_2)|\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1 = \int_x^\infty |A_2(t_2)| \int_x^{t_2} A_1(t_1)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2\,,$$

$$\gamma_2(x) = \int_x^\infty |A_2(t_2)| \int_{t_2}^\infty A_1(t_1)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 = \int_x^\infty A_1(t_1) \int_x^{t_1} |A_2(t_2)|\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1\,.$$

Für $x \geqq a \geqq x_0$ gilt

$$\gamma_1(x) \leqq \gamma_1(a) < 1\,, \quad \gamma_2(x) \leqq \gamma_2(a) < 1\,.$$

Schliesslich bezeichnen wir

$$\|F\|_x = \sup_{t \geqq x} |F(t)|\,, \quad \|F\|_{x_0}^x = \sup_{x_0 \leqq t \leqq x} |F(t)|\,.$$

Es gilt folgender Hilfssatz:

Hilfssatz 2.1. *Es seien* $A_1^{-1}(x) \in C_1(I)$, $A_1^{-1}(x) > 0$, $A_2(x) \in C_0(I)$,

$$\int_a^\infty A_1(t_1) \int_a^{t_1} |A_2(t_2)|\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1 < \infty\,, \quad a \geqq x_0\,. \tag{2,1}$$

Dann hat die Differentialgleichung

$$[A_1^{-1}(x)\, y']' + A_2(x)\, y = 0 \tag{2,2}$$

ein Fundamentalsystem der Lösungen

$$(2,3)\qquad y_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\mathscr{C}}_1^i(1)\,, \quad y_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i\, \mathscr{C}_1^i \left[\int_x^{\infty} A_1(t)\, \mathrm{d}t\right],$$

$$A_1^{-1}(x)\, y_1'(x) = -\sum_{i=0}^{\infty} \overline{\mathscr{C}}_2^i \left[\int_a^x A_2(t)\, \mathrm{d}t\right], \quad A_1^{-1}(x)\, y_2'(x) = -\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i\, \mathscr{C}_2^i(1)\,.$$

Wenn noch

$$(2,4)\qquad \int_a^{\infty} |A_2(t_2)|\, \mathrm{d}t_2 < \infty\,,$$

dann ist

$$(2,5)\qquad y_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i\, \mathscr{C}_1^i(1)\,, \quad y_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i\, \mathscr{C}_1^i \left[\int_x^{\infty} A_1(t)\, \mathrm{d}t\right],$$

$$A_1^{-1}(x)\, y_1'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i\, \mathscr{C}_2^i \left(\int_x^{\infty} A_2(t)\, \mathrm{d}t\right), \quad A_1^{-1}(x)\, y_2'(x) = -\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i\, \mathscr{C}_2^i(1)$$

und es gelten folgende Abschätzungen

$$(2,6)\qquad |\overline{\mathscr{C}}_1^i(F)| \leqq \int_x^{\infty} A_1(t_1) \int_a^{t_1} |A_2(t_2)|\, \mathrm{d}t_2\, \mathrm{d}t_1\, \gamma_2^{i-1}(a)\, \|F\|_a\,,$$

$$\left|\overline{\mathscr{C}}_2^i \left(\int_a^x A_2(t)\, \mathrm{d}t\right)\right| \leqq \gamma_2^i(a) \int_a^x |A_2(t)|\, \mathrm{d}t\,,$$

$$|\mathscr{C}_1^i(F)| \leqq \frac{\gamma_1^i(x)}{i!}\, \|F\|_x\,,$$

$$|\mathscr{C}_2^i(F)| \leqq \frac{\gamma_2^i(x)}{i!}\, \|F\|_x\,.$$

Die im Hilfssatz 2.1 zusammengefassten Ergebnisse sind im ersten Teil der Arbeit [3] enthalten.

3. ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNGEN — HAUPTSSÄTZE

Verabredung. Ist kein Missverständnis zu befürchten, so wollen wir das Argument fortlassen. Zum Beispiel $y = \varphi\, U(\Phi)$, $\int_a^x f$ bedeutet $y(x) = \varphi(x)\, U[\Phi(x)]$, $\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$.

Satz 3.1. *Es seien $q, Q \in C_0(J)$, $p, P > 0$; $p, P \in C_1(J)$, $J = \langle a, \infty)$. Es seien φ, Φ Funktionen, welche die Bedingungen $\varphi, \Phi \in C_2(J)$, $\varphi, \Phi, \Phi' > 0$ erfüllen. Weiter sei U, V ein Fundamentalsystem der Lösungen der Differentialgleichung*

$$(3,1)\qquad (PY')' + QY = 0\,,$$

wo V eine Hauptlösung ist. Existiert ein positiver Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(\Phi)}{p\varphi^2\Phi'}$$

und ist

$$\int_a^\infty \left| \left(\frac{p\varphi^2\Phi'}{P(\Phi)}\right)' P(\Phi)\, \dot{U}(\Phi)\, V(\Phi) \right| < \infty\,, \tag{3,2}$$

$$\int_a^\infty \left| (p\varphi')'\,\varphi + q\varphi^2 - \frac{Q(\Phi)}{P(\Phi)}\, p\varphi^2\Phi'^2 \right| |U(\Phi)\, V(\Phi)| < \infty\,, \tag{3,3}$$

dann hat die Differentialgleichung (1,1) *ein Fundamentalsystem der Lösungen*

$$y_1 = \varphi\, U(\Phi) \sum_{i=0}^\infty \overline{\mathscr{C}}_1^i(1)\,, \quad y_2 = \varphi\, U(\Phi) \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_1^i \left(\int_x^\infty A_1\right), \tag{3,4}$$

$$y_1' = [\varphi\, U(\Phi)]' \sum_{i=0}^\infty \overline{\mathscr{C}}_1^i(1) - \varphi\, U(\Phi)\, A_1 \sum_{i=0}^\infty \overline{\mathscr{C}}_2^i \left(\int_a^x A_2\right),$$

$$y_2' = [\varphi\, U(\Phi)]' \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_1^i \left(\int_x^\infty A_1\right) - \varphi\, U(\Phi)\, A_1 \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_2^i(1)\,,$$

mit

$$A_1^{-1} = p\varphi^2\, U^2(\Phi)\,, \tag{3,5}$$

$$A_2 = \left(\frac{p\varphi^2\Phi'}{P(\Phi)}\right)' P(\Phi)\, U(\Phi)\, \mathring{U}(\Phi) + \left[(p\varphi')'\,\varphi + q\varphi^2 - \frac{Q(\Phi)}{P(\Phi)}\, p\varphi^2\Phi'^2\right] U^2(\Phi)\,.$$

Beweis. Es sei U eine Lösung der Gleichung (3,1), die keine Hauptlösung ist, V eine von U unabhängige Lösung von (3,1). Dann ist

$$V = U \int_x^\infty \frac{\mathrm{d}t}{P(t)\, U^2(t)}$$

und die Funktionen

$$z_1 = U[\Phi(x)]\,, \quad z_2 = V[\Phi(x)] \tag{3,6}$$

bilden ein Fundamentalsystem der Lösungen der Gleichung

$$z'' + \left[\log \frac{P(\Phi)}{\Phi'}\right]' z' + \frac{Q(\Phi)}{P(\Phi)}\, \Phi'^2 z = 0\,.$$

Für $x \geqq b \geqq a$ haben wir

$$\int_b^\infty \frac{\Phi'}{P(\Phi)\, z_2^2} = \int_b^\infty \frac{\Phi'}{P(\Phi)\, V^2(\Phi)} = \int_{\Phi(b)}^\infty P^{-1} V^{-2} = \infty\,,$$

so dass z_2 eine Hauptlösung ist. Setzen wir

$$y = \varphi Z\,. \tag{3,7}$$

Die Funktion Z genügt der Gleichung

$$Z'' + (\log p\varphi^2)'\, Z' + \left[\frac{(p\varphi')'}{p\varphi} + \frac{q}{p}\right] Z = 0$$

Wenn wir noch die Substitution

$$Z = \lambda(x)\, z_1 \tag{3,8}$$

einführen, erhalten wir

$$(A_1^{-1}\lambda')' + A_2\lambda = 0\,, \tag{3,9}$$

wo A_1^{-1}, A_2 durch (3,5) definiert sind. Nun haben wir

$$\int_b^\infty A_1(x) \int_b^x |A_2(t)|\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x = \int_b^\infty |A_2(t)| \int_t^\infty A_1(x)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_b^\infty |A_2(t)| \int_t^\infty \frac{\mathrm{d}x}{p(x)\,\varphi^2(x)\, U^2(\Phi)}\, \mathrm{d}t \leqq \text{konst.} \int_b^\infty |A_2(t)| \int_t^\infty \frac{\Phi'(x)}{U^2(\Phi)\, P(\Phi)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t =$$

$$= \text{konst.} \int_b^\infty \left| \left[\frac{p(t)\,\varphi^2(t)\,\Phi'(t)}{P[\Phi(t)]}\right]' \right| P[\Phi(t)]\, U[\Phi(t)]\, \dot{U}[\Phi(t)] \int_t^\infty \frac{\Phi'(x)}{U^2[\Phi(x)]\, P[\Phi(x)]}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t +$$

$$+ \text{konst.} \int_b^\infty \left| [p(t)\,\varphi'(t)]'\,\varphi(t) + q(t)\,\varphi^2(t) - \frac{Q[\Phi(t)]}{P[\Phi(t)]}\, p(t)\,\varphi^2(t)\,\Phi'^2(t) \right| .$$

$$. \,U^2[\Phi(t)] \int_t^\infty \frac{\Phi'(x)}{U^2[\Phi(x)]\, P[\Phi(x)]}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \text{konst.} \int_b^\infty \left| \left(\frac{p\varphi^2\Phi'}{P(\Phi)}\right)' P(\Phi)\, \dot{U}(\Phi)\, V(\Phi) \right| \mathrm{d}t +$$

$$+ \text{konst.} \int_b^\infty \left| (p\varphi')'\,\varphi + q\varphi^2 - \frac{Q(\Phi)}{P(\Phi)}\, p\varphi^2\Phi'^2 \right| |U(\Phi)\, V(\Phi)|\, \mathrm{d}t < \infty\,.$$

Nach dem Hilfssatz 2.1 gibt es ein Fundamentalsystem der Lösungen der Differentialgleichung (3,9), die wir in der Gestalt

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\mathscr{C}}_1^i(1)\,, \quad \lambda_2 = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i\, \mathscr{C}_1^i \left(\int_x^\infty A_1\right), \tag{3,10}$$

$$A_1^{-1}\lambda_1' = -\sum_{i=0}^{\infty} \overline{\mathscr{C}}_2^i \left(\int_a^x A_2\right), \quad A_1^{-1}\lambda_2' = -\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i\, \mathscr{C}_2^i(1)$$

schreiben können. Die Behauptung des Satzes folgt unmittelbar aus (3,6), (3,7), (3,8), (3,10).

Satz 3.2. *Es seien die Voraussetzungen des Satzes* 3.1 *erfüllt und es gelten statt* (3,2), (3,3) *die Bedingungen*

$$\int_a^\infty \left| \left(\frac{p\varphi^2 \Phi'}{P(\Phi)} \right)' P(\Phi)\, U(\Phi)\, \dot{U}(\Phi) \right| < \infty\,, \tag{3,11}$$

$$\int_a^\infty \left| (p\varphi')'\,\varphi + q\varphi^2 - \frac{Q(\Phi)}{P(\Phi)}\, p\varphi^2\Phi'^2 \right| U^2(\Phi) < \infty\,. \tag{3,12}$$

Dann hat die Differentialgleichung (1,1) *ein Fundamentalsystem der Lösungen*

$$y_1 = \varphi\, U(\Phi) \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_1^i(1)\,, \quad y_2 = \varphi\, U(\Phi) \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_1^i \left(\int_x^\infty A_1 \right), \tag{3,13}$$

$$y_1' = [\varphi\, U(\Phi)]' \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_1^i(1) + \varphi\, U(\Phi)\, A_1 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_2^i \left(\int_x^\infty A_2 \right),$$

$$y_2' = [\varphi\, U(\Phi)]' \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_1^i \left(\int_x^\infty A_1 \right) - \varphi\, U(\Phi)\, A_1 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_2^i(1) \cdot$$

Beweis. Die Bedingungen (3,11), (3,12) sichern, dass (2,4) gilt. Die Differentialgleichung (3,9) hat also ein Fundamentalsystem der Lösungen

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_1^i(1)\,, \qquad \lambda_2 = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_1^i \left(\int_x^\infty A_1 \right) \tag{3,14}$$

$$\lambda_1' = A_1 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_2^i \left(\int_x^\infty A_2 \right), \quad \lambda_2' = -A_1 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_2^i(1)\,.$$

Aus (3,6), (3,7), (3,8), (3,14) folgt unmittelbar die Behauptung des Satzes.

4. ASYMPTOTISCHE ENTWICKLUNGEN DER LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG (1,1) FÜR EINE SONDERWAHL DER FUNKTIONEN

Satz 4.1. *Es seien* $q \in C_0(J)$, $p > 0$, $p \in C_1(J)$, $\varphi, \Phi, \Phi' > 0$, $\varphi, \Phi \in C_2(J)$. *Wenn ein positiver Grenzwert*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{p\varphi^2\Phi'}$$

existiert und wenn

$$\int_a^\infty |(p\varphi^2\Phi')'| < \infty\,, \tag{4,1}$$

$$\int_a^\infty |(p\varphi')'\,\varphi + q\varphi^2 + p\varphi^2\Phi'^2| < \infty \tag{4,2}$$

gilt, dann hat die Differentialgleichung (1,1) *ein Fundamentalsystem der Lösungen*

$$(4,3)\qquad y_1 = \varphi e^{\Phi}\left[1 + \int_x^\infty A_1(t_1)\int_a^{t_1} A_2(t_2)\,dt_2\,dt_1 + \alpha(x)\right],$$

$$y_2 = \varphi e^{\Phi}\left[\left[\int_x^\infty A_1\,dt - \int_x^\infty A_1(t_1)\int_{t_1}^\infty\int_{t_2}^\infty A_1(t_3)\,A_2(t_2)\,dt_3\,dt_2\,dt_1 + \beta(x)\right]\right],$$

$$y_1' = (\varphi e^{\Phi})'\left[1 + \int_x^\infty A_1(t_1)\int_a^{t_1} A_2(t_2)\,dt_2\,dt_1 + \alpha(x)\right] - \varphi e^{\Phi} A_1\,.$$

$$\cdot\left[\left[\int_a^x A_2\,dt + \int_a^x A_2(t_2)\int_{t_2}^\infty\int_a^{t_1} A_2(t_3)\,A_1(t_1)\,dt_3\,dt_1\,dt_2 + \delta(x)\right]\right],$$

$$y_2' = (\varphi e^{\Phi})'\left[\left[\int_x^\infty A_1\,dt - \int_x^\infty A_1(t_1)\int_{t_1}^\infty\int_{t_2}^\infty A_1(t_3)\,A_2(t_2)\,dt_3\,dt_2\,dt_1 + \beta(x)\right]\right] -$$

$$-\ \varphi e^{\Phi} A_1\left[1 - \int_x^\infty A_2(t_2)\int_{t_2}^\infty A_1(t_1)\,dt_1\,dt_2 + \varepsilon(x)\right]$$

und es gilt

$$(4,4)\qquad |\alpha(x)| \leqq \int_x^\infty A_1(t_1)\int_a^{t_1} |A_2(t_2)|\,dt_2\,dt_1 \sum_{i=2}^\infty \gamma_2^{i-1}(a) =$$

$$= \int_x^\infty A_1(t_1)\int_a^{t_1} |A_2(t_2)|\,dt_2\,dt_1\,\gamma_2(a)\,\frac{1}{1-\gamma_2(a)},$$

$$|\beta(x)| \leqq \int_x^\infty A_1(t)\,dt \sum_{i=2}^\infty \frac{\gamma_2^i(x)}{i!} \leqq \int_x^\infty A_1(t)\,dt\,\frac{\gamma_2^2(x)}{2!}\,\exp\{\gamma_2(x)\},$$

$$|\delta(x)| \leqq \int_a^x |A_2(t)|\,dt \sum_{i=2}^\infty \gamma_2^i(a) = \int_a^x |A_2(t)|\,dt\,\gamma_2(a)\,\frac{1}{1-\gamma_2(a)},$$

$$|\varepsilon(x)| \leqq \sum_{i=2}^\infty \frac{\gamma_2^i(x)}{i!} \leqq \frac{\gamma_2^2(x)}{2!}\,\exp\{\gamma_2(x)\}\,.$$

Der Beweis folgt aus dem Satz 3.1 durch die Wahl $P = 1$, $Q = -1$ und aus (2,6).

Folgerung 4.2. *Es seien* $q \in C_0(J)$, $p \in C_1(J)$, $p > 0$, $\varphi \in C_2(J)$, $\varphi > 0$. *Es gelte*

$$(4,5)\qquad \int_a^\infty \left|(p\varphi')'\,\varphi + q\varphi^2 + \frac{1}{p\varphi^2}\right| e^{2\Phi} < \infty\,.$$

Dann hat die Differentialgleichung (1,1) *ein Fundamentalsystem der Lösungen*

$$(4,6)\qquad y_1 = \varphi e^{\Phi}\left[1 + \frac{1}{2}\int_x^\infty \left(e^{-2\Phi(t)} - e^{-2\Phi(x)}\right) A_2(t)\,dt + \alpha(x)\right],$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\varphi e^{-\Phi}\left[1 + \frac{1}{2}\int_x^\infty (e^{2\Phi(x)} - e^{2\Phi(t)})\, e^{-4\Phi(t)} A_2(t)\, dt + \beta(x)\right],$$

$$y_1' = (\varphi' + \varphi\Phi')e^{\Phi}\left[1 + \frac{1}{2}\int_x^\infty \left(e^{-2\Phi(t)} - \frac{\varphi'(x) - \varphi(x)\Phi'(x)}{\varphi'(x) + \varphi(x)\Phi'(x)}\, e^{-2\Phi(x)}\right) .\right.$$

$$\left. . A_2(t)\, dt + \delta(x)\right],$$

$$y_2' = \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi\Phi')\, e^{-\Phi}\left[1 + \frac{\varphi\Phi'}{\varphi' - \varphi\Phi'}\int_x^\infty A_2(t)\, e^{-2\Phi(t)}\, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{\varphi' + \varphi\Phi'}{2(\varphi' - \varphi\Phi')}\int_x^\infty (e^{2\Phi(x)} - e^{2\Phi(t)})\, e^{-4\Phi(t)} A_2(t)\, dt + \varepsilon(x)\right]$$

und es gilt

$$(4{,}7) \qquad |\alpha(x)| < \frac{1}{8}\, e^{-4\Phi}\left(\int_x^\infty |A_2|\right)^2,$$

$$|\beta(x)| < \frac{1}{8}\, e^{-4\Phi}\left(\int_x^\infty |A_2|\right)^2,$$

$$|\delta(x)| < e^{-4\Phi}\left(\int_x^\infty |A_2(t)|\, dt\right)^2 \left[\frac{1}{8} + \frac{\varphi\Phi'}{2(\varphi' + \varphi\Phi')} + \frac{1}{8}\, e^{-2\Phi}\int_x^\infty |A_2|\right],$$

$$|\varepsilon(x)| < \frac{1}{8}\, e^{-4\Phi}\left(\int_x^\infty |A_2(t)\, dt\right)^2 \left[\left|\frac{\varphi' + \varphi\Phi'}{\varphi' - \varphi\Phi'}\right| + 2\left|\frac{\varphi\Phi'}{\varphi' - \varphi\Phi'}\right|\right].$$

Beweis. Wir setzen im vorigen Satz $P = 1$, $Q = -1$, $\Phi' = 1/p\varphi^2$, $U = e^{\Phi}$, $V = e^{-\Phi}$. Dann ist

$$A_1^{-1} = \frac{e^{2\Phi}}{\Phi'}, \quad A_2 = \left[(p\varphi')'\varphi + q\varphi^2 + \frac{1}{p\varphi^2}\right] e^{2\Phi},$$

$$\gamma_1(x) = \int_x^\infty |A_2(t_2)| \int_x^{t_2} A_1(t_1)\, dt_1\, dt_2 \leqq \int_x^\infty |A_2(t_2)| \int_x^\infty \Phi'(t_1)\, e^{-2\Phi(t_1)}\, dt_1\, dt_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\, e^{-2\Phi(x)}\int_x^\infty |A_2|,$$

$$\gamma_2(x) = \int_x^\infty |A_2(t_2)| \int_{t_2}^\infty A_1(t_1)\, dt_1\, dt_2 = \frac{1}{2}\int_x^\infty |A_2(t_2)|\, e^{-2\Phi(t_2)}\, dt_2 \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2}\, e^{-2\Phi(x)}\int_x^\infty |A_2|.$$

Nach dem Satz 3.2 gilt

$$y_1 = \varphi e^{\Phi}[1 - \mathscr{C}_1(1) + \sum_{i=2}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_1^i(1)],$$

$$y_2 = \varphi e^{\Phi}\left[\int_x^\infty A_1(t)\,dt - \mathscr{C}_1\left(\int_x^\infty A_1\right) + \sum_{i=2}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_1^i\left(\int_x^\infty A_1\right)\right],$$

$$y_1' = (\varphi e^{\Phi})'\left[1 - \mathscr{C}_1(1) + \sum_{i=2}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_1^i(1)\right] +$$

$$+ \varphi e^{\Phi} A_1\left[\int_x^\infty A_2(t)\,dt - \mathscr{C}_2\left(\int_x^\infty A_2\right) + \sum_{i=2}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_2^i\left(\int_x^\infty A_2\right)\right],$$

$$y_2' = (\varphi e^{\Phi})'\left[\int_x^\infty A_1(t)\,dt - \mathscr{C}_1\left(\int_x^\infty A_1\right) + \sum_{i=2}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_1^i\left(\int_x^\infty A_1\right)\right] -$$

$$- \varphi e^{\Phi} A_1\left[1 - \mathscr{C}_2(1) + \sum_{i=2}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_2^i(1)\right].$$

Nun haben wir

$$y_1 = \varphi e^{\Phi}\left[1 - \int_x^\infty \Phi'(t_1)\, e^{-2\Phi(t_1)} \int_{t_1}^\infty A_2(t_2)\,dt_2\,dt_1 + \alpha(x)\right],$$

wo

$$\alpha(x) = \sum_{i=2}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_1^i(1)$$

ist. Nach leichter Berechnung bekommen wir

$$y_1 = \varphi e^{\Phi}\left[1 - \int_x^\infty A_2(t_2) \int_x^{t_2} \Phi'(t_1)\, e^{-2\Phi(t_1)}\,dt_1\,dt_2 + \alpha(x)\right] =$$

$$= \varphi e^{\Phi}\left\{1 + \frac{1}{2}\int_x^\infty \left[e^{-2\Phi(t)} - e^{-2\Phi(x)}\right] A_2(t)\,dt + \alpha(x)\right\},$$

und es gilt

$$|\alpha(x)| \leqq \sum_{i=2}^\infty \frac{\gamma_1^i(x)}{i!} \leqq \frac{\gamma_1^2(x)}{2!}\, e^{\gamma_1(x)} < \frac{\gamma_1^2(x)}{2!} \leqq \frac{1}{8}\, e^{-4\Phi}\left(\int_x^\infty |A_2|\right)^2.$$

Ferner ist

$$y_2 = \varphi e^{\Phi}\left[\frac{1}{2} e^{-2\Phi(x)} + \frac{1}{2}\int_x^\infty e^{-2\Phi(t_1)}\,\Phi'(t_1) \int_{t_1}^\infty A_2(t_2)\left(-e^{-2\Phi(t_2)}\right) dt_2\,dt_1 +\right.$$

$$\left. + \sum_{i=2}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_1^i\left(\int_x^\infty A_1\right)\right] = \varphi e^{\Phi}\left[\frac{1}{2} e^{-2\Phi(x)} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int_x^\infty A_2(t_2)\, e^{-2\Phi(t_2)} \int_x^{t_2} e^{-2\Phi(t_1)}\,\Phi'(t_1)\,dt_1\,dt_2 + \sum_{i=2}^\infty (-1)^i \mathscr{C}_1^i\left(\int_x^\infty A_1\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\varphi e^{-\Phi}\left[1 + \frac{1}{2}\int_x^\infty \left(e^{2\Phi(x)} - e^{2\Phi(t)}\right) e^{-4\Phi(t)} A_2(t)\,dt + \beta(x)\right],$$

wo

$$\beta(x) = 2\mathrm{e}^{2\Phi(x)} \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_1^i \left(\int_x^{\infty} A_1 \right),$$

so dass

$$|\beta(x)| \leqq 2\mathrm{e}^{2\Phi} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\gamma_1^i(x)}{i!} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2\Phi} \leqq \frac{\gamma_1^2(x)}{2!}\,\mathrm{e}^{\gamma_1(x)} < \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-4\Phi} \left(\int_x^{\infty} |A_2| \right)^2 .$$

Für die Ableitung y_1' erhalten wir

$$y_1' = (\varphi' + \varphi\Phi')\,\mathrm{e}^{\Phi} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \int_x^{\infty} [\mathrm{e}^{-2\Phi(t)} - \mathrm{e}^{-2\Phi(x)}]\, A_2(t)\,\mathrm{d}t + \alpha(x) \right\} +$$

$$+ \varphi\Phi'\mathrm{e}^{-\Phi} \left\{ \int_x^{\infty} A_2(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2} \int_x^{\infty} A_2(t_2) \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-2\Phi(t_1)} A_2(t_1)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_2^i \left(\int_x^{\infty} A_2 \right) \right\} =$$

$$= (\varphi' + \varphi\Phi')\,\mathrm{e}^{\Phi} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \int_x^{\infty} \left[\mathrm{e}^{-2\Phi(t)} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\varphi'(x) - \varphi(x)\,\Phi'(x)}{\varphi'(x) + \varphi(x)\,\Phi'(x)}\,\mathrm{e}^{-2\Phi(x)} \right] A_2(t)\,\mathrm{d}t + \delta(x) \right\},$$

wo

$$\delta(x) = \alpha(x) + \frac{\varphi\Phi'}{\varphi' + \varphi\Phi'}\,\mathrm{e}^{-2\Phi} \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_2^i \left(\int_x^{\infty} A_2 \right) -$$

$$- \frac{1}{2}\,\frac{\varphi\Phi'}{\varphi' + \varphi\Phi'}\,\mathrm{e}^{-2\Phi} \int_x^{\infty} A_2(t_2) \int_{t_2}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\Phi(t_1)} A_2(t_1)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\,,$$

so dass

$$|\delta(x)| \leqq |\alpha(x)| + \left| \frac{\varphi\Phi'}{\varphi' + \varphi\Phi'} \right| \left[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-4\Phi} \left(\int_x^{\infty} |A_2(t)|\,\mathrm{d}t \right)^2 + \mathrm{e}^{-2\Phi}\,\frac{\gamma_2^2(x)}{2!}\,\mathrm{e}^{\gamma_2(x)} \int_x^{\infty} |A_2| \right] <$$

$$< \mathrm{e}^{-4\Phi} \left(\int_x^{\infty} |A_2(t)|\,\mathrm{d}t \right)^2 \left[\frac{1}{8} + \frac{\varphi\Phi'}{2(\varphi' + \varphi\Phi')} + \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-2\Phi} \int_x^{\infty} |A_2| \right].$$

Schliesslich haben wir

$$y_2' = (\varphi' + \varphi\Phi')\,\mathrm{e}^{\Phi} \left\{ \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2\Phi} + \frac{1}{4} \int_x^{\infty} A_2(t)\,\mathrm{e}^{-2\Phi(t)} [\mathrm{e}^{-2\Phi(t)} - \mathrm{e}^{-2\Phi(x)}]\,\mathrm{d}t + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_2^i \left(\int_x^{\infty} A_1 \right) \right\} - \varphi\Phi'\mathrm{e}^{-\Phi} \left[1 - \frac{1}{2} \int_x^{\infty} A_2(t)\,\mathrm{e}^{-2\Phi(t)}\,\mathrm{d}t + \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \mathscr{C}_2^i(1) \right] =$$

$$= \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi\Phi')\,e^{-\Phi}\left\{1 + \frac{\varphi\Phi'}{\varphi' - \varphi\Phi'}\int_x^\infty A_2(t)\,e^{-2\Phi(t)}\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{\varphi' + \varphi\Phi'}{2(\varphi' - \varphi\Phi')}\int_x^\infty \left[e^{2\Phi(x)} - e^{2\Phi(t)}\right] e^{-4\Phi(t)} A_2(t)\,dt + \varepsilon(x)\right\},$$

mit

$$\varepsilon(x) = \frac{\varphi' + \varphi\Phi'}{\varphi' - \varphi\Phi'}\,\beta(x) - 2\,\frac{\varphi\Phi'}{\varphi' - \varphi\Phi'}\sum_{i=2}^{\infty}(-1)^i\,\mathscr{C}_2^i(1)\,.$$

Es gilt also

$$|\varepsilon(x)| < \left|\frac{\varphi' + \varphi\Phi'}{\varphi' - \varphi\Phi'}\right| |\beta(x)| + 2\left|\frac{\varphi\Phi'}{\varphi' - \varphi\Phi'}\right| \frac{\gamma_2^2(x)}{2!}\,e^{\gamma_2(x)}\,.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Literatur

[1] *M. Ráb:* Note sur les formules asymptotiques pour les solutions d'un système d'équations différentielles linéaires, Czech. Math. J., T. *16* (*91*) (1966), 127—129.

[2] *J. Mařík - M. Ráb:* Asymptotische Eigenschaften von Lösungen der Differentialgleichung $y'' = Ay$ im nichtoszillatorischen Fall, Czech. Math. J., T. *10* (*85*) (1960), 501—522.

[3] *U. Richard:* Serie asintotiche per una classe di equazioni differenziali lineari non oscillanti del 2° ordine, Rend. Sem. Mat. Torino, Vol. *23* (1963 64), 171—217.

Anschrift des Verfassers: Brno, Zemědělská 3 (Vysoká škola zemědělská).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

ON CONTINUITY OF LINEAR TRANSFORMATIONS COMMUTING WITH GENERALIZED SCALAR OPERATORS IN BANACH SPACE

PAVLA VRBOVÁ, Praha

(Received June 8, 1970)

1. INTRODUCTION

In the present paper we give a modification of methods having been presented in the paper of B. E. JOHNSON and A. M. SINCLAIR [5]. The question is, under which condition a linear transformation S commuting with a linear continuous operator T in a (complex) Banach space X is continuous. Similarly as in the paper mentioned above we shall deal with operator T having a suitable spectral decomposition. More exactly: suppose that there exists, for every closed subset F of the complex plane $\mathbf{C}$, a closed linear subspace $\mathscr{E}(F)$ in X such that the following conditions are fulfilled:

(1) $$\mathscr{E}(\emptyset) = \{0\}\,, \quad \mathscr{E}(\mathbf{C}) = X\,;$$

(2) $$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{E}(F_n) = \mathscr{E}\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\big)\,;$$

(3) if $\{G_j\}_{j=1}^{m}$ is a finite open covering of the complex plane, then
$$X = \mathscr{E}(\bar{G}_1) + \ldots + \mathscr{E}(\bar{G}_m)\,;$$

(4) $$T\mathscr{E}(F) \subset \mathscr{E}(F) \quad \text{and} \quad \sigma(T \mid \mathscr{E}(F)) \subset F\,.$$

For the sake of completness we recall now some definitions.

Definition. Let $x \in X$. A complex number λ is an element of $\varrho_T(x)$ if there is a vector-valued analytic function $x(.)$ defined in a neighbourhood G_λ of λ such that $(\mu I - T)\, x(\mu) = x$ for all $\mu \in G_\lambda$. The spectrum $\sigma_T(x)$ is the complement of $\varrho_T(x)$.
Obviously $\sigma_T(x) \subset \sigma(T)$.

Definition. An operator $T \in \mathscr{L}(X)$ (the algebra of all linear continuous operators of X) is said *to have the single-valued extension property* if for every open subset G

of the complex plane and for any vector valued analytic function $f : G \to X$ the equality $(\lambda I - T) f(\lambda) \equiv 0$ on G implies $f \equiv 0$.

For every operator T having the single-valued extension property $\sigma_T(x) = \emptyset$ if and only if $x = 0$.

It has been shown in [2] that each operator of the present class has the single-valued extension property and that the present class of operators is nothing else than the class of decomposable operators (in sense of [2]) with

$$\mathscr{E}(F) = \{x : \sigma_T(x) \subset F\} . \tag{5}$$

We shall use the usual notation $X_T(F) = \mathscr{E}(F)$. Let $L \in \mathscr{L}(X)$ be such that $TL = LT$. Then it is easy to prove that $LX_T(F) \subset X_T(F)$ for every F closed.

Hence, consider now a linear transformation S commuting with our operator T and such that $S\, X_T(F) \subset X_T(F)$ for every F closed.

Denote by σ_S the linear subspace of X consisting of all elements x such that there exists a sequence $x_n \to 0$ with $Sx_n \to x$. The subspace σ_S is closed. According to the closed graph theorem the transformation S is continuous if and only if $\sigma_S = 0$.

Since we have, for an arbitrary finite open covering, the decomposition of X, it is natural to take into account only the subspaces on which S is not continuous. It is easy to see that each such subspace must have a non-trivial intersection with σ_S. We shall consider, therefore, the subspace $X_T(F)$ such that $\sigma_S \subset X_T(F)$. If λ is not an element of F, then there exists a closed neighbourhood G of λ with $G \cap F = \emptyset$ and $S \mid X_T(G)$ is continuous by the closed graph theorem. This fact leads quite naturally to the following

Definition. We shall call a number λ *a discontinuity value* if the operator $S \mid X_T(F)$ is discontinuous for every closed neighbourhood F of λ.

Obviously every discontinuity value is an element of the set F such that $\sigma_S \subset X_T(F)$.

Further, from the definition it follows immediately that the set of all discontinuity values is closed and contained in $\sigma(T)$.

Lemma. $\sigma_S \subset X_T(K)$ *where K is the set of all discontinuity values.*

Proof. Let $\lambda \notin K$, let F_0 be a closed neighbourhood of λ such that $S \mid X_T(F_0)$ is continuous. Let $\{G_0, G_1\}$ be an open covering of the complex plane, $\bar{G}_0 \subset F_0$, $\lambda \notin \bar{G}_1$. Take an $x \in X$, let $x_n \to 0$ with $Sx_n \to x$. Since we have, for every $x \in X$, the decomposition $x = x_1 + x_2$ where $x_1 \in X_T(\bar{G}_0)$, $x_2 \in X_T(\bar{G}_1)$, we can find sequences $x_n^1 \to 0$, $x_n^2 \to 0$ such that $x_n = x_n^1 + x_n^2$, $x_n^1 \in X_T(\bar{G}_0)$, $x_n^2 \in X_T(\bar{G}_1)$. We have $Sx_n = Sx_n^1 + Sx_n^2$. Since $S \mid X_T(\bar{G}_0)$ is continuous it follows $Sx_n^1 \to 0$, $Sx_n^2 \to x$ and $x \in X_T(\bar{G}_1)$, i.e. $\sigma_S \subset X_T(\bar{G}_1)$. We have obtained the following implication: if $\lambda \notin K$ then there is a closed F_λ such that $\lambda \notin F_\lambda$ and $\sigma_S \subset X_T(F_\lambda)$. By (5) the family of subspaces $X_T(F)$ is closed with respect to the intersection and we have

$$\sigma_S \subset \bigcap_{\lambda \notin K} X_T(F_\lambda) = X_T\Big(\bigcap_{\lambda \notin K} F_\lambda\Big) \subseteq X_T(K) .$$

However, for the proof of the main theorem we have taken generalized scalar operators for which it is easy to characterize the structure of spaces $X_T(\{\lambda\})$.

2. PRELIMINARIES

2.1. Definition. Denote by $(C^\infty(R_2), \tau)$ the Fréchet space of all infinitely differentiable complex functions $\varphi(x_1, x_2)$ defined on R_2 with the family of pseudonorms

$$|\varphi|_{k,m} = \sum_{p_1+p_2=0}^{m} \sup_{(x_1,x_2)\in K} \left| \frac{\partial^{p_1+p_2}\varphi(x_1, x_2)}{\partial^{p_1}x_1\, \partial^{p_2}x_2} \right|$$

for every compact set K and $p_1, p_2, m \geqq 0$.

2.2. Definition. A continuous linear operator T in a Banach space X is said to be *a generalized scalar operator* if there exists a continuous linear mapping $\mathscr{U}$: : $(C^\infty(R_2), \tau) \to \mathscr{L}(X)$ such that

$$\mathscr{U}_{\varphi\psi} = \mathscr{U}_\varphi \mathscr{U}_\psi \quad \text{for} \quad \varphi, \psi \in C^\infty(R_2)\,,$$

$$\mathscr{U}_1 = I\,, \quad \mathscr{U}_a = T \quad \text{where} \quad a(\lambda) = \lambda\,.$$

We shall use some properties of generalized scalar operators contained in [1] (Theorem 2, Propositions 1, 2, 3) which we mention without proving them.

2.3. Proposition. *Every generalized scalar operator T has the single valued extension property. If we denote $X_T(F) = \{x : \sigma_T(x) \subset F\}$ for $F = \bar{F}$, then $X_T(F)$ is a closed invariant subspace with respect to T such that $\sigma(T \mid X_T(F)) \subset F$.*

2.4. Proposition. *Let $x \in X$, let φ_1, φ_2 be two functions from $C^\infty(R_2)$ such that $\varphi_1 \equiv$ $\equiv 1$ in a neighbourhood of $\sigma_T(x)$ and* supp $\varphi_2 \cap \sigma_T(x) = \emptyset$. *Then $\mathscr{U}_{\varphi_1}x = x$ and $\mathscr{U}_{\varphi_2}x = 0$.*

2.5. Proposition. *Let $x \in X$. Then $\mathscr{U}_\varphi x \in X_T$* (supp φ) *for every $\varphi \in C^\infty(R_2)$. Further* supp $\mathscr{U} = \sigma(T)$.

Remark. Every generalized scalar operator T is an element of the class of operators having been considered in the introduction.

Indeed, proposition 2.3 asserts that (1) and (4) is satisfied for each $X_T(F)$. (2) is obviously satisfied and to prove (3) take an open covering $\{G_j\}_{j=1}^m$ of the complex plane. There exist functions $\varphi_j \in C^\infty(R_2)$ such that $0 \leqq \varphi_j \leqq 1$, supp $\varphi_j \subset \bar{G}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ and $\sum_{j=1}^{m} \varphi_j \equiv 1$ in a neighbourhood of $\sigma(T)$. Since supp $\mathscr{U} = \sigma(T)$ we may write, for every x, that $x = \sum_{j=1}^{m} \mathscr{U}_{\varphi_j}x$ where $\mathscr{U}_{\varphi_j}x \in X_T$ (supp φ_j) $\subset X_T(\bar{G}_j)$ for $j = 1, 2, \ldots, m$ and (3) holds.

Every linear operator in the finite dimensional space as well as every spectral operator of the finite type are generalized scalar operators. For other examples see [1].

It will be useful to characterize the spaces $X_T(\{\lambda\})$.

2.6. Proposition. *Let Q be a polynomial with the roots $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Then $\{x : : Q(T)\, x = 0\} \subset X_T(\{\mu_1, \ldots, \mu_n\})$.*

Proof. Let λ be a complex number and let $x, y \in X$ be such that $x = (\lambda I - T)\, y$. Obviously $\sigma_T(x) \subset \sigma_T(y)$. We shall show that $\sigma_T(y) \subset \sigma_T(x) \cup \{\lambda\}$ or equivalently $\varrho_T(x) \cap \{\mathbf{C} \setminus \lambda\} \subset \varrho_T(y)$. Take a $\mu \neq \lambda$ and $\mu \in \varrho_T(x)$. There exists an analytic function $x(\gamma)$ defined in a neighbourhood G_μ of $\mu(\lambda \notin G_\mu)$ with $x = (\gamma I - T)\, x(\gamma)$ for $\gamma \in G_\mu$. Put $y(\gamma) = [1/(\gamma - \lambda)]\,(y - x(\gamma))$. The function $y(\gamma)$ is analytic in G_μ and $(\gamma I - T)\, y(\gamma) = y$. This means of course that $\mu \in \varrho_T(y)$.

Let $Q(T)\, z = x$. The induction with respect to the degree of the polynomial Q yields $\sigma_T(z) \subset \sigma_T(x) \cup \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$. Particularly if $x = 0$ then we obtain the result desired.

2.7. Proposition. *If $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ is a finite set of complex numbers, then there is a polynomial $P(.)$ with the roots $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ such that*

$$P(T) \mid X_T(\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}) = 0 .$$

Proof. Denote $\mathscr{U}'_\varphi = \mathscr{U}_\varphi \mid X_T(\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\})$. It is easy to see that $T' = T \mid X_T(\{\lambda_1, \ldots \ldots, \lambda_k\})$ is a generalized scalar operator and $\mathscr{U}'$ is its distribution. Let n be the order of the distribution $\mathscr{U}$, let f be a continuous linear functional defined on $\mathscr{L}(X)$. Put $P(\lambda) = [(\lambda - \lambda_1) \,.\, (\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_k)]^{n+1}$. Then $\mathscr{V}_\varphi = f\mathscr{U}'_\varphi$ is a continuous linear functional on $(C^\infty(R_2), \tau)$, supp $\mathscr{V} \subset$ supp $\mathscr{U}' \subseteq \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ and the order of $\mathscr{V}$ does not exceed the order of $\mathscr{U}'$. Since $P(\lambda)$ is zero on supp $\mathscr{V}$ and all derivatives up to n are zero as well, it follows by [3], theorem 1.5.4. that $\mathscr{V}_P = f\mathscr{U}'_P = 0$ for each f so that $P(T) \mid X_T(\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}) = \mathscr{U}'_P = 0$.

Remark. From 2.6 and 2.7 it follows that $X_T(\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}) = X_T(\{\mu_1, \ldots, \mu_j\})$ $(j \leqq k)$ where μ_j are all eigenvalues of T from the set $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$.

3. LINEAR TRANSFORMATIONS COMMUTING WITH GENERALIZED SCALAR OPERATORS

Let T be a generalized scalar operator and let S be a linear transformation such that $S\, X_T(F) \subset X_T(F)$ for $F = \bar{F}$.

3.1. Lemma. *The set of discontinuity values is either empty or it has only a finite number of elements.*

Proof. To prove the lemma, we shall suppose that there is a sequence of distinct discontinuity values $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ and a closed sets F_i such that $\lambda_i \in \operatorname{Int} F_i$ and $F_i \cap \overline{\bigcup_{j \neq i} F_j} = \emptyset$ for every $i \in N$. Take further $\varphi_i \in C^{\infty}(R_2)$ with $\operatorname{supp} \varphi_i \cap \overline{\bigcup_{j \neq i} F_j} = \emptyset$ and $\varphi_i \equiv 1$ in a neighbourhood of F_i. The restriction of S to each of $X_T(F_i)$ is a discontinuous operator so that there exists, for each $i \in N$, an element $\xi_i \in X_T(F_i)$ such that

$$(1) \qquad |\xi_i| < \frac{1}{2^i},$$

$$(2) \qquad |S\xi_i| > i\,|\mathcal{U}_{\varphi_i}|.$$

Now put $\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i$. We can write, for each $i \in N$,

$$S\eta = S\xi_i + S\sum_{j \neq i} \xi_j.$$

If a $j \neq i$ is given, then $\xi_j \in X_T(F_j) \subset X_T(\overline{\bigcup_{j \neq i} F_j})$ and $\sum_{j \neq i} \xi_j \in X_T(\overline{\bigcup_{j \neq i} F_j})$.

By the assumption all $X_T(F)$ are invariant with respect to S so that $S\xi_i \in X_T(F_i)$ and $S\sum_{j \neq i} \xi_j \in X_T(\overline{\bigcup_{j \neq i} F_j})$. Using 2.4 we obtain

$$\mathcal{U}_{\varphi_i} S \sum_{j \neq i} \xi_j = 0, \quad \mathcal{U}_{\varphi_i} S\xi_i = S\xi_i.$$

We have, for any $i \in N$, the estimate

$$|\mathcal{U}_{\varphi_i}| \cdot |S\eta| \geqq |\mathcal{U}_{\varphi_i} S\eta| = |S\xi_i| > i\,|\mathcal{U}_{\varphi_i}|$$

and this is a contradiction.

We shall show now that the existence of the distribution $\mathcal{U}$ is not essential and we can prove the same result for wider class of operators.

3.2. Definition. A decomposable operator T is said *to be a strongly decomposable operator* if the equality

$$\mathscr{E}(F) = \mathscr{E}(F) \cap \mathscr{E}(\bar{G}_1) + \ldots + \mathscr{E}(F) \cap \mathscr{E}(\bar{G}_m)$$

holds for every finite open covering $\{G_j\}_{j=1}^{m}$ of the complex plane and for every subspace $\mathscr{E}(F)$.

The problem if there exists a decomposable operator which is not a strongly decomposable one is still open.

We shall use again the notation $X_T(F) = \mathscr{E}(F)$.

Lemma 3.1.' *Let T be a strongly decomposable operator. Then the set of discontinuity values is empty or it has only a finite number of elements.*

Proof. Take the same sequence of discontinuity values as in 3.1. Let i be fixed. Since T is strongly decomposable, we have, for every $x \in X_T(\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i})$, a unique representation $x = x_1^i + x_2^i$ where $x_1^i \in X_T(F_i)$, $x_2^i \in X_T(\overline{\bigcup_{j \neq i} F_j})$. The operator $R_1^i x = x_1^i$ is linear, continuous and $R_1^i \neq 0$. The transformation $S \mid X_T(F_i)$ is a discontinuous operator and we can find a $\xi_i \in X_T(F_i)$ with $|\xi_i| < 1/2^i$ and $|S\xi_i| > i|R_1^i|$. Put $\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i$. Then

$$R_1^i S\eta = R_1^i S\xi_i + R_1^i S \sum_{j \neq i} \xi_j = S\xi_i .$$

We have, for each $i \in N$,

$$|R_1^i| \, . \, |S\eta| \geqq i|R_1^i| .$$

With regard to the properties of generalized scalar operators we can reformulate the lemma from the introduction as follows:

3.3. Lemma. *Either* $\sigma_S = \{0\}$ *or there exists a finite set of eigenvalues* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ *of* T *with the property*

$$\sigma_S \subset X_T(\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}) .$$

Proof. First we shall find the minimal subspace $X_T(F)$ containing σ_S. Denote by $\mathfrak{A}$ the family of all closed F such that $\sigma_S \subset X_T(F)$. Put $Y = \bigcap_{F \in \mathfrak{A}} X_T(F)$. It follows immediately from 2.3 that $Y = X_T(\bigcap_{F \in \mathfrak{A}} F)$ and $\sigma(T \mid Y) \subset F$ for each $F \in \mathfrak{A}$. To prove the lemma, it is sufficient to show that $\sigma(T \mid Y)$ consists of discontinuity values only. Indeed, if the set of discontinuity values is empty, then $\sigma_S \subset Y = X_T(\sigma(T \mid Y)) = X_T(\emptyset) = \{0\}$. If the set of discontinuity values consists of elements $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, then $\sigma_S \subset X_T(\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\})$.

In view of the remark in the end of the preceding section we may assume that all $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ are eigenvalues of T.

Take a λ which is not a discontinuity value. In such case there is a closed neighbourhood F_0 of λ such that $S \mid X_T(F_0)$ is continuous. We can find functions $\varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty(R_2)$ such that $\varphi_1 + \varphi_2 \equiv 1$, $\varphi_1 \equiv 1$ in a neighbourhood of λ and $\operatorname{supp} \varphi_1 \subset F_0$.

We shall show that there exists a closed set F for which $\lambda \notin F$ and $\sigma_S \subset X_T(F)$. To prove that, take an $x \in \sigma_S$. Let $\{x_n\}$ be a sequence such that $x_n \to 0$ and $Sx_n \to x$.

We have

$$Sx_n = S\mathcal{U}_{\varphi_1} x_n + S\mathcal{U}_{\varphi_2} x_n .$$

Since $\operatorname{supp} \varphi_1 \subset F_0$, it follows that $\mathcal{U}_{\varphi_1} x_n \in X_T(F_0)$ and $S\mathcal{U}_{\varphi_1} x_n \to 0$ by the assumption that $S \mid X_T(F_0)$ is continuous. From this fact $S\mathcal{U}_{\varphi_2} x_n \to x$; x being a limit of elements of X_T ($\operatorname{supp} \varphi_2$), it is an element of X_T ($\operatorname{supp} \varphi_2$) as well.

3.4. Definition. A complex number λ is said *to be a critical eigenvalue* of T if λ is an element of the point spectrum of T and the range $R(\lambda I - T)$ is of infinite codimension, i.e. a Hamel basis in the quotient space $X/R(\lambda I - T)$ is not a finite set.

Consider now a T having a critical eigenvalue. Then there exists a discontinuous S such that $TS = ST$ and $SX_T(F) \subset X_T(F)$ for every F closed. To prove this we shall apply the example given in [4], lemma 2.1.

Let λ be a critical eigenvalue, let $y \in X$ be a corresponding eigenvector $Ty = \lambda y$. $R(\lambda I - T)$ has not a finite codimension. Using a Hamel basis in $X/R(\lambda I - T)$ we can construct a discontinuous linear functional f defined on X with the property $f(x) = 0$ for $x \in R(\lambda I - T)$. The linear transformation S defined by the formula

$$Sx = y f(x)$$

is obviously discontinuous and from the equality $(\lambda I - T) S = S(\lambda I - T) = 0$ it follows that S commutes with T.

According to the definition we have, for every x, $\sigma_T(Sx) \subset \sigma_T(y) = \{\lambda\}$. Providing that $\lambda \in \sigma_T(x)$ we have $\sigma_T(Sx) \subset \sigma_T(x)$. If $\lambda \notin \sigma_T(x)$, then there is an x_λ such that $x = (\lambda I - T) x_\lambda \in R(\lambda I - T)$ and $Sx = y \,.\, f(x) = 0$ so that $\sigma_T(Sx) = \emptyset \subset \sigma_T(x)$. We have obtained $\sigma_T(Sx) \subset \sigma_T(x)$ for every $x \in X$ and this is obviously equivalent to $SX_T(F) \subset X_T(F)$ for $F = \bar{F}$.

Now, knowing the properties of space $X_T(\{\lambda\})$ in case of generalized scalar operators, we can prove the following

3.5. Theorem. *Let T be a generalized scalar operator in a Banach space X which has no critical eigenvalue. Let S be a linear transformation such that*

1) $TS = ST$,

2) $SX_T(F) \subset X_T(F)$ for $F = \bar{F}$.

Then S is continuous.

Proof. In the preceding lemma we showed that either $\sigma_S = \{0\}$ and S is continuous or that there exists a $k \geqq 1$ and elements $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ of the point spectrum of T such that $\sigma_S \subset X_T(\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\})$. By 2.7 there exists a polynomial $P(.)$ with $P(T) \mid \sigma_S = 0$. Denote by q the quotient map from X onto X/σ_S and by $P(T)'$ the corresponding operator to $P(T)$ from X/σ_S into X both being continuous. By the closed graph theorem we see that qS is a continuous operator so that $P(T) S = P(T)' qS$ is continuous as well.

Since each $R(\lambda_i I - T)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ has a finite codimension, it is easy to see that $P(T) X$ has also a finite codimension. In this case there exists a finite dimensional vector space Z such that we can find, for each $x \in X$, a unique representation $x = x_1 + x_2$ with $x_1 \in P(T)$ and $x_2 \in Z$. It is not difficult to prove that the maps

$R_1 x = x_1$, $R_2 x = x_2$ are continuous and the space $P(T)\,X$ is closed. See also [4]. Now we have

$$Sx = SR_1 x + SR_2 x\,.$$

Since $S \mid P(T)\,X$ and $S \mid Z$ are continuous, S is a continuous operator on the whole X as well.

We have obtained the above result by a slight modification of the methods in [5]. However, the assumption that $\{0\}$ is the only T-divisible subspace can be replaced by the assumption that all $X_T(F)$ are invariant with respect to S, which is weaker.

3.6. Definition. A subspace Y is called *T-divisible* if for every complex number λ there is $(\lambda I - T)\,Y = Y$.

Let Z be a subspace of X invariant with respect to T. Similarly as in [5] we denote by $\overset{\infty}{\bigcap}(\lambda \in M)\,(\lambda I - T)\,Z$ the constant value of the transfinite sequence $Z(\alpha)$ defined by

1) $Z(0) = Z$,
2) $Z(\alpha + 1) = \bigcap\limits_{\lambda \in M} (\lambda I - T)\,Z(\alpha)$,
3) $Z(\alpha) = \bigcap\limits_{\beta \prec \alpha} Z(\beta)$ for limit ordinals.

We can always find such transfinite sequence with eventual constant value. If we put $Z = X$ and $M = \mathbf{C}$, then $\overset{\infty}{\bigcap}(\lambda \in \mathbf{C})\,(\lambda I - T)\,X$ is the largest T-divisible subspace in X. For other properties see also [5]. It is easy to see that every $\overset{\infty}{\bigcap}(\lambda \in M)\,(\lambda I - T)\,X$ is invariant with respect to any linear transformation commuting with T. Further, $X_T(F) \subset \overset{\infty}{\bigcap}(\lambda \notin F)\,(\lambda I - T)\,X$ and particularly $x \in \overset{\infty}{\bigcap}(\lambda \notin \sigma_T(x))\,(\lambda I - T)\,X$.

3.7. Proposition. *Let T be a generalized scalar operator for which $\{0\}$ is the only T-divisible subspace.*

Then, for every closed F, the subspace $X_T(F)$ is invariant with respect to any linear transformation S such that $ST = TS$.

Proof. Take an $x \in X$ and a $\varphi \in C^\infty(R_2)$ with the properties $0 \leqq \varphi \leqq 1$ and $\varphi \equiv 1$ in a neighbourhood of $\sigma_T(x)$. We shall show that $\mathcal{U}_{1-\varphi} Sx = 0$. We have

$$x \in \overset{\infty}{\bigcap}(\lambda \notin \sigma_T(x))\,(\lambda I - T)\,X\,.$$

Since the subspace on the right hand side is invariant with respect to S, we obtain

$$Sx \in \overset{\infty}{\bigcap}(\lambda \notin \sigma_T(x))\,(\lambda I - T)\,X\,.$$

On the other hand we can easily show that

$$\mathscr{U}_{1-\varphi} \bigcap^{\infty} (\lambda \notin \sigma_T(x))\,(\lambda I - T)\,X \subset \bigcap^{\infty} (\lambda \notin \sigma_T(x))\,(\lambda I - T)\,\mathscr{U}_{1-\varphi}X\,.$$

Take a $\lambda \in \sigma_T(x)$. By 2.5 the subspace $\mathscr{U}_{1-\varphi}X \subset X_T(\operatorname{supp}(1 - \varphi))$ and thus the operator $(\lambda I - T)$ is one-to-one on $\mathscr{U}_{1-\varphi}X$. Let us show that $(\lambda I - T)$ maps $\mathscr{U}_{1-\varphi}X$ onto itself.

Let $x = \mathscr{U}_{1-\varphi}z$, then there is a $y \in X_T(\operatorname{supp}(1 - \varphi))$ such that $x = (\lambda I - T)\,y$. Put $\psi(\lambda) = 0$ and $\psi(\mu) = (1 - \varphi(\mu))/(\lambda - a(\mu))$ for $\mu \neq \lambda$, so that $\psi \in C^\infty(R_2)$. Denote $u = \mathscr{U}_\psi z - y$. Since

$$(\lambda I - T)\,u = \mathscr{U}_{1-\varphi}z - (\lambda I - T)\,y = 0\,,$$

it is $\sigma_T(u) \subset \{\lambda\}$. On the other hand $\sigma_T(y) \subset \operatorname{supp}(1 - \varphi)$, $\sigma_T(\mathscr{U}_\psi z) \subset \operatorname{supp}(\psi) = \operatorname{supp}(1 - \varphi)$ and thus $\sigma_T(u) \subset \operatorname{supp}(1 - \varphi)$. But $\sigma_T(u) \subset \operatorname{supp}(1 - \varphi) \cap \{\lambda\} = \emptyset$ and $u = 0$. We have obtained $y = \mathscr{U}_\psi z$. Let $\varphi_0 \in C^\infty(R_2)$, $\varphi_0 \equiv 1$ in a neighbourhood of $\sigma_T(y)$ such that $\operatorname{supp}\varphi_0 \cap \sigma_T(x) = \emptyset$. Then $y = \mathscr{U}_{\varphi_0}y = \mathscr{U}_{1-\varphi}\mathscr{U}_{\varphi_0/(\lambda - a)}z \in \mathscr{U}_{1-\varphi}X$.

So we can write

$$\bigcap^{\infty} (\lambda \notin \sigma_T(x))\,(\lambda I - T)\,\mathscr{U}_{1-\varphi}X = \bigcap^{\infty} (\lambda \in \mathbf{C})\,(\lambda I - T)\,\mathscr{U}_{1-\varphi}X\,.$$

Since $\{0\}$ is the only T-divisible subspace, we have $\mathscr{U}_{1-\varphi}Sx = 0$ and $Sx = \mathscr{U}_{1-\varphi}Sx + \mathscr{U}_\varphi Sx = \mathscr{U}_\varphi Sx \in X_T(\operatorname{supp}\varphi)$ for every $\varphi \in C^\infty(R_2)$ such that $\varphi \equiv 1$ in a neighbourhood of $\sigma_T(x)$. From this fact it follows obviously $\sigma_T(Sx) \subset \sigma_T(x)$.

Open problem: Is there a generalized scalar operator or a spectral operator of the finite type having a non-trivial divisible subspace? [1])

References

[1] *C. Foiaş:* Une applications des distributions vectorielles à la téorie spectrale, Bull. Sc. Math., *84*, 1960, 147—158.

[2] *C. Foiaş:* Spectral Capacities and Decomposable Operators, Rev. Roum. Math., *13*, 1968, 1537—1543.

[3] *L. Hörmander:* Linear partial differential operators, 1963.

[4] *B. E. Johnson:* Continuity of linear operators commuting with continuous linear operators, Trans. Amer. Soc. *128*, 1967, 88—102.

[5] *B. E. Johnson, A. M. Sinclair:* Continuity of linear operators commuting with continuous linear operators II (preprint).

Author's address: Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV v Praze).

---

[1]) The problem was solved by the author and the results will be published.

O BODOVÉ DEFORMACI KONGRUENCÍ ROVIN V PĚTIROZMĚRNÉM PROJEKTIVNÍM PROSTORU

JOSEF ČUČKA, Brno

(Došlo dne 18. června 1970)

V práci, k níž dal podnět prof. K. SVOBODA v semináři o soustavách Pfaffových rovnic, jsou studovány Cartanovou metodou pohyblivého reperu některé otázky související s bodovou deformací dvou dvojparametrických systémů rovin — dále stručněji nazývaných kongruencemi L, L' — vnořených do pětirozměrných projektivních prostorů P_5, P'_5.

Ukazuje se, že některé poznatky dnes již dobře zpracované teorie přímkových kongruencí v P_3 (např. [1]), mají své analogické protějšky v dále studovaném případě kongruencí rovin v P_5.

V **§1** je pro další účely vhodně specialisován průvodní reper kongruence L a zavedeny bodové formy φ_i.

V **§2** je zcela přirozeným způsobem modifikován pojem bodové deformace užívaný akademikem E. ČECHEM. Obsah paragrafu je shrnut ve větě 1 a existenční větě 2.

V **§3** je objasněn geometrický smysl rovnosti bodových forem kongruencí L, L'. Věta 4 poukazuje na vztah mezi bodovou deformací kongruencí L, L' a projektivní deformací prvního řádu příslušných fokálních ploch.

Na rozdíl od indexů j, k, l, jejichž průběh je vždy vyznačen, probíhá index „i" zásadně čísla 1, 2, 3.

1. Reperem pětirozměrného projektivního prostoru P_5 budeme rozumět libovolnou uspořádanou šestici lineárně nezávislých aritmetických bodů A_j $(j = 1, \ldots, 6)$, pro něž je

$$[A_1A_2A_3A_4A_5A_6] = 1 . \tag{1}$$

O funkcích vyskytujících se dále budeme předpokládat, že jsou analytické.

Základní derivační formule jsou

$$\mathrm{d}A_j = \sum_k \omega_j^k A_k \quad (j, k = 1, \ldots, 6) , \tag{2}$$

kde relativní komponenty ω_j^k vyhovují rovnicím struktury

$$\mathrm{d}\omega_j^k = \sum_l \omega_j^l \wedge \omega_l^k \quad (j, k, l = 1, \ldots, 6)\,. \tag{3}$$

Hlavní parametry značme u, v. Pfaffovy formy ω_j^j splňují rovnici

$$\sum_j \omega_j^j = 0 \quad (j = 1, \ldots, 6)\,.$$

Nechť vrcholy A_1, A_2, A_3 reperu incidují s běžnou rovinou p kongruence L. Pak

$$\mathrm{d}[A_1A_2A_3] = [\mathrm{d}A_1A_2A_3] + [A_1\,\mathrm{d}A_2A_3] + [A_1A_2\,\mathrm{d}A_3] =$$
$$= \sum_i \omega_i^i[A_1A_2A_3] + \sum_i\sum_l \omega_i^l[A_jA_kA_l]\,,$$

kde i, j, k jsou cyklické permutace z prvků 1, 2, 3 a $l = 4, 5, 6$.

Variace (tj. diferencování jen podle vedlejších parametrů) je

$$\delta[A_1A_2A_3] = \sum_i e_i^i[A_1A_2A_3]\,,$$

kde jako obvykle

$$e_m^n = \omega_m^n(\delta)\,,$$

takže formy

$$\omega_i^{3+j} \quad (j = 1, 2, 3) \tag{4}$$

jsou hlavní a z nich lze vybrat právě dvě nezávislé; nechť jsou to

$$\omega_1^4 \equiv \omega^1\,, \quad \omega_2^5 \equiv \omega^2\,.$$

Zbývající formy (4) lze vyjádřit jako jejich kombinace s koeficienty závisejícími obecně na hlavních i vedlejších parametrech.

Ohniskem roviny (A_1, A_2, A_3) příslušným k fokálnímu směru (např. $q^1\omega^1 + q^2\omega^2 = 0$) rozumíme bod F této roviny, který při jejím pohybu ve fokálním směru splňuje relaci $[A_1A_2A_3\,\mathrm{d}F] = 0$. Jak známo [6], existují v každé rovině kongruence tři ohniska, o nichž budeme v dalším předpokládat, že neleží v jediné přímce.

Volme nyní vrcholy A_1, A_2, A_3 reperu v ohniscích roviny p příslušných k fokálním směrům

$$\omega^1 = 0\,, \quad \omega^2 = 0\,, \quad \omega^1 + r\omega^2 \equiv \omega^3 = 0\,,$$

kde

$$r \neq 0\,. \tag{5}$$

Rovnicím

$$[A_1A_2A_3\,\mathrm{d}A_i]_{\omega^i=0} = 0$$

lze vzhledem k (2) ($j = 1, 2, 3$; $k = 1, \ldots, 6$) vyhovět, když

$$\omega^i \wedge \omega_i^{3+j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3)\,. \tag{6}$$

Užitím Cartanova lemmatu nabývají (6) tvaru

$$\omega_i^{3+j} = a_i^{3+j}\omega^i \quad (j = 1, 2, 3;\ a_1^4 = a_2^5 = 1)\,. \tag{7}$$

Omezme se na případ, kdy každé ze tří ohnisek A_i opisuje regulární plochu (tzv. plochu fokální).

Tečné roviny fokálních ploch $\{A_i\}$ v bodech dotyků A_i leží v prostorech

$$\left(A_1, A_2, A_3, \sum_j a_i^{3+j} A_{3+j}\right) \quad (j = 1, 2, 3;\ a_1^4 = a_2^5 = 1)\,. \tag{8}$$

Zvolíme reper tak, aby tyto tečné prostory byly

$$(A_1, A_2, A_3, A_4)\,, \quad (A_1, A_2, A_3, A_5)\,, \quad (A_1, A_2, A_3, a_3^6 A_6)\,, \quad a_3^6 \neq 0\,,$$

to jest

$$a_i^{3+j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3;\ i \neq j)\,.$$

Odtud a ze (7) vyplývá

$$\omega_i^{3+j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3;\ i \neq j)\,.$$

Vnějším diferencováním rovnic (7) pro $i = j = 3$ vychází

$$\omega^1 \wedge \{\mathrm{d}a_3^6 + a_3^6(\omega_1^1 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_4^4)\} +$$
$$+ \omega^2 \wedge \{\mathrm{d}a_3^6 r + a_3^6 r(\omega_2^2 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_5^5)\} = 0\,.$$

Bez újmy na obecnosti zvolíme $a_3^6 = 1$.

Vnějším diferencováním zbývajících rovnic (7) dostaneme

$$\omega^i \wedge \omega_j^i - \omega^j \wedge \omega_{3+j}^{3+i} = 0 \quad (j = 1, 2, 3;\ i \neq j) \tag{9}$$

a vidíme, že formy

$$\omega_1^1 + \omega_6^6 - \omega_3^3 - \omega_4^4,\ \omega_j^i,\ \omega_{3+j}^{3+i} \quad (j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$$

jsou hlavní.

Vzhledem k (6) a nerovnostem

$$\omega^i \wedge \omega^j \neq 0 \quad (j = 1, 2, 3;\ i \leqq j + 1)$$

můžeme na (9) aplikovat Cartanovo lemma a obdržíme

$$\omega_i^j = a_i^j\omega^i + \alpha_i^j\omega^j\,, \quad \omega_{3+i}^{3+j} = \beta_i^j\omega^i - a_i^j\omega^j \quad (j = 1, 2, 3;\ i \neq j)\,. \tag{10}$$

Přihlédneme k rovnostem

$$\mathrm{d}\omega^i = (\omega_i^i - \omega_{3+i}^{3+i}) \wedge \omega^i\,, \tag{11}$$

které okamžitě plynou z podmínek integrability (3) a prodloužíme (10). Získáme tím rovnice tvaru

$$\omega^i \wedge \Delta a_i^j + \omega^j \wedge \Delta\alpha_i^j + \omega_i^l \quad \wedge \omega_l^j \quad = 0\,,$$

$$\omega^i \wedge \Delta\beta_i^j - \omega^j \wedge \Delta a_i^j + \omega_{3+i}^{3+l} \wedge \omega_{3+l}^{3+j} = 0\,, \quad (j, l = 1, 2, 3;\ i \neq j \neq l \neq i)$$

kde

$$(12)\quad \Delta a_i^j = \mathrm{d}a_i^j + a_i^j(\omega_j^j - \omega_{3+i}^{3+i}) + \omega_{3+i}^j\,,$$

$$\Delta\alpha_i^j = \mathrm{d}\alpha_i^j + \alpha_i^j(2\omega_j^j - \omega_i^i - \omega_{3+j}^{3+j})\,,$$

$$\Delta\beta_i^j = \mathrm{d}\beta_i^j + \beta_i^j(\omega_i^i + \omega_{3+j}^{3+j} - 2\omega_{3+i}^{3+i}) \quad (j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$$

jsou další hlavní formy.

Ze vztahů $(12)_1$ poznáváme, že lze reper dále specialisovat volbou

$$a_i^j = 0 \quad (j = 1, 2, 3;\ i \neq j)\,,$$

přičemž se stávají formy

$$\omega_{3+i}^j \quad (j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$$

hlavními formami.

Z definice hodnoty vnějšího diferenciálu a hodnoty vnějšího součinu plyne z (11)

$$(13)\qquad \delta\omega^i = \omega^i(e_i^i - e_{3+i}^{3+i})\,.$$

Uveďme ještě kvůli přehlednosti variace relativních invariantů a derivační formule reperu.

$$(14)\qquad \delta\alpha_i^j = \alpha_i^j(e_i^i + e_{3+j}^{3+j} - 2e_j^j)\,,\quad \delta\beta_i^j = \beta_i^j(2e_{3+i}^{3+i} - e_i^i - e_{3+j}^{3+j})$$

$$(j = 1, 2, 3;\ i \neq j)\,,$$

$$\delta r = r(e_5^5 + e_1^1 - e_2^2 - e_4^4) = r(e_5^5 + e_3^3 - e_2^2 - e_6^6)\,.$$

$$(15)\qquad \begin{aligned}
\mathrm{d}A_1 &= \omega_1^1 A_1 + \alpha_1^2\omega^2 A_2 + \alpha_1^3\omega^3 A_3 + \omega^1 A_4\,,\\
\mathrm{d}A_2 &= \alpha_2^1\omega^1 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \alpha_2^3\omega^3 A_3 + \omega^2 A_5\,,\\
\mathrm{d}A_3 &= \alpha_3^1\omega^1 A_1 + \alpha_3^2\omega^2 A_2 + \omega_3^3 A_3 + \omega^3 A_6\,,\\
\mathrm{d}A_4 &= \omega_4^1 A_1 + \omega_4^2 A_2 + \omega_4^3 A_3 + \omega_4^4 A_4 + \beta_1^2\omega^1 A_5 + \beta_1^3\omega^1 A_6\,,\\
\mathrm{d}A_5 &= \omega_5^1 A_1 + \omega_5^2 A_2 + \omega_5^3 A_3 + \beta_2^1\omega^2 A_4 + \omega_5^5 A_5 + \beta_2^3\omega^2 A_6\,,\\
\mathrm{d}A_6 &= \omega_6^1 A_1 + \omega_6^2 A_2 + \omega_6^3 A_3 + \beta_3^1\omega^3 A_4 + \beta_3^2\omega^3 A_5 + \omega_6^6 A_6\,.
\end{aligned}$$

Nyní lze snadno ověřit, že bodové formy

$$(16)\qquad \varphi_1 = \alpha_2^3\alpha_3^2\omega^2\omega^3\,,\quad \varphi_2 = \alpha_1^3\alpha_3^1\omega^1\omega^3\,,\quad \varphi_3 = \alpha_1^2\alpha_2^1\omega^1\omega^2$$

a formy

$$\psi_1 = \alpha_1^2\alpha_2^3\alpha_3^1\omega^1\omega^2\omega^3\,, \quad \psi_2 = \alpha_2^1\alpha_3^2\alpha_1^3\omega^1\omega^2\omega^3$$

jsou invariantní (tj. $\delta\varphi_i = \delta\psi_j = 0$). Z identity

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3 = \psi_1\psi_2$$

je ovšem ihned vidět, že nejsou nezávislé.

2. Předně připomeňme [1] pojem bodové deformace.

Budiž dána

- kongruence $L \subset P_5$ rovin $p = p(u, v)$,
- kongruence $L' \subset P'_5$ rovin $p' = p'(u', v')$,
- regulární korespondence $C : L \to L'$, $Cp(u, v) = p'(u', v')$ rovnicemi $u' = u'(u, v)$, $v' = v'(u, v)$.

Řekneme, že C^b je bodové rozšíření korespondence C, jestliže je pro každou dvojici odpovídajících si rovin $p \in L$, $Cp = p' \in L'$ dána kolineace

$$\pi = \pi(u, v) : p(u, v) \to p'\{u'(u, v); v'(u, v)\}\,.$$

Dostáváme tak bodovou korespondenci $C^b : V_4(L) \to V'_4(L')$ mezi čtyřrozměrnými bodovými varietami $V_4(L)$, $V'_4(L')$.

Korespondence C se nazývá bodovou deformací, jestliže existuje takové bodové rozšíření C na C^b, že lze pro každou dvojici (u, v) najít kolineaci $K(u, v) : P_5 \to P'_5$ takovou, že platí:

Je-li $A \in p(u, v)$ bod a Γ libovolná křivka ($A \in \Gamma \subset V_4(L)$), pak křivky $C^b\Gamma$ a $K(u, v)\,\Gamma$ mají v bodě C^bA analytický styk prvního řádu, tj. při

$$KA = C^bA \tag{17}$$

platí rovnost

$$K\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}(C^bA) + \vartheta C^bA\,, \tag{18}$$

kde ϑ je jistá hlavní forma. Říkáme pak, že K realizuje (v rovině $p(u, v)$) bodovou deformaci.

Jde nám nyní o nalezení podmínek při jejichž splnění budou kongruence $L \subset P_5$, $L' \subset P'_5$ v bodové deformaci.

Ke kongruenci L přiřadíme ovšem reper s derivačními formulemi (15) a ke kongruenci L' zcela analogický reper čárkovaný.

Korespondence C nechť je určena relacemi

$$\omega'^k = \sum_l b_k^l\omega^l \quad (k, l = 1, 2)\,, \tag{19}$$

kde

(20) $$|b_k^l| \neq 0 \quad (k, l = 1, 2).$$

Pak je ovšem

$$\omega'^3 = b_1^1\omega^1 + b_1^2\omega^2 + r'(b_2^1\omega^1 + b_2^2\omega^2).$$

Bodové rozšíření C^b korespondence $C : L \to L'$ nechť je dáno kolineací $\pi : p \to p'$ určenou rovnicemi

$$\pi A_i = \sum_j c_i^j A'_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

s determinantem

(21) $$|c_i^j| \neq 0 \quad (j = 1, 2, 3).$$

Předpokládejme, že kolineace K

$$KA_i \quad = c_i^k A'_k \qquad (k = 1, 2, 3)$$
$$KA_{3+i} = c_{3+i}^l A'_l \quad (l = 1, \ldots, 6)$$

realizuje bodovou deformaci kongruencí L, L'.

Nechť je křivka Γ opisována bodem

$$A = \sum_i x^i(t)\, A_i(u, v),$$

kde

$$u = u(t), \quad v = v(t).$$

Pak

$$dA = \sum_j \sum_i \{(dx^i + x^j\omega_j^i)\, A_i + x^i\omega^i A_{3+i}\} \quad (j = 1, 2, 3)$$

a

(22) $$K\, dA = \sum_i \sum_j \sum_k \{c_i^j(dx^i + x^k\omega_k^i) + c_{3+i}^j x^i\omega^i\}\, A'_j \quad (j = 1, \ldots, 6;\ k = 1, 2, 3).$$

Dále je

(23) $$C^b A = KA = \sum_i \sum_j c_i^j x^i A'_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

a

(24) $$d(C^b A) = \sum_i \sum_j \sum_k \{[c_i^j\, dx^i + x^i(dc_i^j + c_i^k\omega_k'^j)]\, A'_j + c_k^j x^k \omega'^j A'_{3+j}\}$$
$$(j, k = 1, 2, 3).$$

Dosadíme z (22), (23) a (24) do (18) a porovnáme koeficienty u $x^i A'_l$ ($l = 4, 5, 6$). Dostaneme

(25) $$\omega^i c_{3+i}^{3+j} = \omega'^j c_i^j \quad (j = 1, 2, 3).$$

S uvážením (19) porovnejme v (25) koeficienty nyní u forem ω^1, ω^2. Získáme tak systém rovnic

(26)
$$
\begin{gathered}
c_1^1 b_1^2 = c_2^1 b_1^1 = c_1^2 b_2^2 = c_2^2 b_2^1 = 0\,, \\
c_1^3(b_1^2 + r' b_2^2) = 0\,, \quad c_2^3(b_1^1 + r' b_2^1) = 0\,, \\
c_4^6 = c_1^3(b_1^1 + r' b_2^1)\,, \quad c_5^6 = c_2^3(b_1^2 + r' b_2^2)\,, \\
c_6^6 = c_3^3(b_1^1 + r' b_2^1)\,, \quad c_6^6 r = c_3^3(b_1^2 + r' b_2^2)\,, \\[6pt]
c_4^4 = c_1^1 b_1^1\,, \quad c_6^4 = c_3^1 b_1^1\,, \quad c_6^4 r = c_3^1 b_1^2\,, \quad c_5^4 = c_2^1 b_1^1\,, \\
c_4^5 = c_1^2 b_2^1\,, \quad c_5^5 = c_2^2 b_2^2\,, \quad c_6^5 = c_3^2 b_2^1\,, \quad c_6^5 r = c_3^2 b_2^2\,.
\end{gathered}
$$

Po přihlédnutí k podmínkám (20), (21), (5) a analogické $r' \neq 0$, lze diskusí systému (26) ukázat, že je řešitelný jen když

(27)
$$b_1^2 = b_2^1 = 0\,,$$

nebo $b_1^1 = b_2^2 = 0$. Výběr jedné z těchto dvou možností je geometricky nepodstatný a my zvolíme (27).

Všimněme si ještě rovnic (25). Lehce z nich plyne

(28)
$$(c_4^4 c_5^5 c_6^6 + c_4^5 c_5^6 c_6^4 + c_4^6 c_5^4 c_6^5)\, \omega^1 \omega^2 \omega^3 = (c_1^1 c_2^2 c_3^3 + c_1^2 c_2^3 c_3^1 + c_1^3 c_2^1 c_3^2)\, \omega'^1 \omega'^2 \omega'^3\,.$$

Korespondence $C : L \to L'$ tedy transformuje rozvinutelné variety (torsy) kongruence L do rozvinutelných variet kongruence L'. Taková korespondence se nazývá rozvinutelná (torsální).

Vraťme se nyní k relacím (26) a (27). Nahlédneme z nich platnost rovností

(29)
$$c_1^2 = c_1^3 = c_2^1 = c_2^3 = c_3^1 = c_3^2 = c_4^5 = c_4^6 = c_5^4 = c_5^6 = c_6^4 = c_6^5 = 0\,.$$

Vztahy (19) vzhledem k (27) jsou nyní

(30)
$$\omega'^1 = b_1^1 \omega^1\,, \quad \omega'^2 = b_2^2 \omega^2$$

a po přihlédnutí ke (29) nabývá (28) tvaru

$$c_6^6 c_5^5 c_4^4 \omega^1 \omega^2 \omega^3 = c_3^3 c_2^2 c_1^1 \omega'^1 \omega'^2 \omega'^3\,.$$

Označme

$$\omega_k'^k - \omega_k^k = \tau_k^k\,.$$

Vnějším diferencováním (30) vychází

$$\{\mathrm{d}b_1^1 + b_1^1(\tau_4^4 - \tau_1^1)\} \wedge \omega^1 = 0\,, \quad \{\mathrm{d}b_2^2 + b_2^2(\tau_5^5 - \tau_2^2)\} \wedge \omega^2 = 0$$

a tím se přesvědčujeme, že b_1^1, b_2^2 jsou relativní invarianty. Můžeme tedy klást

$$b_1^1 = b_2^2 = 1\,.$$

Pak ovšem

$$\tau_{3+k}^{3+k} - \tau_k^k = f_k\omega^k \quad (k = 1, 2)$$

jsou hlavní formy.

Dosáhli jsme tak bez obsahové újmy na obecnosti situace, kdy

$$\omega'^k = \omega^k \quad (k = 1, 2). \tag{31}$$

Systém (26) se tak zredukoval na

$$c_4^4 = c_1^1, \quad c_5^5 = c_2^2, \quad c_6^6 = c_3^3, \quad c_6^6 r = c_3^3 r'. \tag{32}$$

Z posledních dvou rovnic (32) ihned vyplývá

$$r = r'. \tag{33}$$

S použitím (29), (31), (32), (33) porovnávejme dále koeficienty v (18) nyní u $x^i A'_j$ $(j = 1, 2, 3)$. Současně použijme vyjádření hlavních forem přichystaného v (15). Dostaneme

$$\mathrm{d}c_i^i = c_i^i \tau_i^i + c_i^i \vartheta = c_{3+i}^i \omega^i \tag{34$_{1-3}$}$$

$$c_i^i \alpha_j^i \omega^i + c_{3+j}^i \omega^j = c_j^j \alpha_j'^i \omega^i \quad (j = 1, 2, 3;\ i \neq j). \tag{34$_{4-9}$}$$

Porovnáním koeficientů u forem ω^1, ω^2 v rovnicích $(34)_{4-9}$ máme ihned

$$c_4^2 = c_4^3 = c_5^1 = c_5^3 = c_6^1 = c_6^2 = 0$$

a

$$c_i^i \alpha_j^i = c_j^j \alpha_j'^i \quad (j = 1, 2, 3;\ i \neq j). \tag{35}$$

Jelikož lze požadavku (21) vzhledem k (29) vyhovět právě když

$$c_1^1 c_2^2 c_3^3 \neq 0, \tag{36}$$

dospíváme ze systému rovnic (35) pro neznámé c_1^1, c_2^2, c_3^3 k podmínkám

$$\begin{gathered} \alpha_1^2 \alpha_2^1 = \alpha_1'^2 \alpha_2'^1, \quad \alpha_1^3 \alpha_3^1 = \alpha_1'^3 \alpha_3'^1, \quad \alpha_2^3 \alpha_3^2 = \alpha_2'^3 \alpha_3'^2, \\ \alpha_1^2 \alpha_2^3 \alpha_3^1 = \alpha_1'^2 \alpha_2'^3 \alpha_3'^1, \quad \alpha_2^1 \alpha_3^2 \alpha_1^3 = \alpha_2'^1 \alpha_3'^2 \alpha_1'^3, \end{gathered} \tag{37}$$

které ovšem nejsou nezávislé.

Kolineace K realizující bodovou deformaci C je tedy určena rovnicemi

$$KA_i = c_i^i A'_i, \quad KA_{3+i} = c_{3+i}^i A'_i + c_i^i A'_{3+i}, \tag{38}$$

kde koeficienty c_i^i, c_{3+i}^i jsou řešením systému rovnic (35) a $(34)_{1-3}$.

Shrnutím dosavadních úvah a porovnáním (37) a (16) je dokázána

Věta 1. *Bodová deformace $C : L \to L'$ je rozvinutelná korespondence; kolineace K ji realisující transformuje ohniska A_1, A_2, A_3 do ohnisek A'_1, A'_2, A'_3.*

Kongruence L, L' jsou v bodové deformaci $C : L \to L'$ právě tehdy, platí-li

$$\varphi_1 = \varphi'_1\,, \quad \varphi_2 = \varphi'_2\,, \quad \varphi_3 = \varphi'_3$$

a aspoň jedna z rovností

$$\psi_1 = \psi'_1\,, \quad \psi_2 = \psi'_2\,.$$

Vyšetřujme nyní, zda k dané kongruenci $L \subset P_5$ opravdu existuje korespondence C a kongruence $L' \subset P'_5$ – dále stručněji dvojice (C, L') – tak, že $C : L \to L'$ je bodovou deformací.

Bez újmy na obecnosti volme v relacích (35) $\alpha_i^j = \alpha_i'^j$ $(j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$ a pamatujme na (31) a (33). Při dané kongruenci L je pak dvojice (C, L') určena systémem

(39) $$\tau_i^j = 0 \quad (j = 1, \ldots, 6;\ i \neq j)$$

s uzávěrem

(40) $$\omega^1 \wedge \Omega_3 = 0\,, \quad \omega^2 \wedge \Omega_4 = 0\,, \quad \omega^3 \wedge \Omega_5 = 0\,,$$

$$\begin{aligned}
&\omega^1 \wedge \tau_4^2 + \omega^2 \wedge \alpha_1^2\Omega_1 = 0 && \omega^2 \wedge \tau_5^1 - \omega^1 \wedge \alpha_2^1\Omega_1 = 0\\
&\omega^1 \wedge \tau_4^3 + \omega^3 \wedge \alpha_1^3(\Omega_1 + \Omega_2) = 0 && \omega^3 \wedge \tau_6^1 - \omega^1 \wedge \alpha_3^1(\Omega_1 + \Omega_2) = 0\\
&\omega^2 \wedge \tau_5^3 + \omega^3 \wedge \alpha_2^3\Omega_2 = 0 && \omega^3 \wedge \tau_6^2 - \omega^2 \wedge \alpha_3^2\Omega_2 = 0\,,
\end{aligned}$$

kde

$$\Omega_1 = \tau_2^2 - \tau_1^1\,, \quad \Omega_2 = \tau_3^3 - \tau_2^2\,, \quad \Omega_3 = \tau_4^4 - \tau_1^1\,,$$
$$\Omega_4 = \tau_5^5 - \tau_2^2\,, \quad \Omega_5 = \tau_6^6 - \tau_3^3\,.$$

Snadno nahlédneme, že hlavní formy

$$\tau_4^2, \tau_4^3, \tau_5^1, \tau_5^3, \tau_6^1, \tau_6^2, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5\,,$$

stejně jako vnější kvadratické rovnice (40), jsou lineárně nezávislé. Při obvyklém označení je tedy

$$q = 11\,, \quad s_1 = 9\,, \quad s_2 = 11-9 = 2\,.$$

Cartanovo číslo

$$Q = s_1 + 2s_2 = 9 + 4 = 13\,.$$

Rozřešme (40) užitím Cartanova lemmatu.

(41) $$\Omega_3 = f_1\omega^1\,, \quad \Omega_4 = f_2\omega^2\,, \quad \Omega_5 = f_3\omega^3\,,$$

$$\begin{aligned}
\tau_4^2 &= f_4\omega^1 + f_5\omega^2\,, & \tau_5^1 &= f_{13}\omega^2 + f_{14}\omega^1\,,\\
\alpha_1^2\Omega_1 &= f_5\omega^1 + f_6\omega^2\,, & \alpha_2^1\Omega_1 &= -f_{14}\omega^2 + f_{15}\omega^1\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_4^3 &= f_7\omega^1 + f_8\omega^2 , & \tau_6^1 &= f_{16}\omega^3 + f_{17}\omega^1 , \\ \alpha_1^3(\Omega_1 + \Omega_2) &= f_8\omega^1 + f_9\omega^2 , & \alpha_3^1(\Omega_1 + \Omega_2) &= -f_{17}\omega^3 + f_{18}\omega^1 , \\ \tau_5^3 &= f_{10}\omega^2 + f_{11}\omega^3 , & \tau_6^2 &= f_{19}\omega^3 + f_{20}\omega^2 , \\ \alpha_2^3\Omega_2 &= f_{11}\omega^2 + f_{12}\omega^3 , & \alpha_3^2\Omega_2 &= -f_{20}\omega^3 + f_{21}\omega^2 . \end{aligned}$$

Dosadíme-li ze (41) do (40), najdeme mezi koeficienty f_k ($k = 1, \ldots, 21$) osm lineárních relací, tedy $N = 21 - 8 = 13$. Protože $Q = N$ je systém (39) v involuci a je dokázána existenční

Věta 2. *Je-li dána kongruence $L \subset P_5$ pak dvojice (C, L') existuje a závisí na dvou funkcích dvou proměnných.*

3. Předně se budeme zabývat otázkou, kdy jsou dvojice fokálních ploch $\{A_i\}$, $\{A_i'\}$ v projektivních deformacích C_i prvního řádu [5], které budeme realisovat současně jednou kolineací $\mathscr{K}$, transformující ohniska A_i do ohnisek A_i'.

Rovnice kolineace $\mathscr{K}$ předpokládejme ve tvaru

$$\mathscr{K}A_i = K_i^i A_i' \tag{42}$$

$$\mathscr{K}A_{3+i} = \sum_j K_{3+i}^j A_j' \quad (j = 1, \ldots, 6) , \tag{43}$$

kde

$$K_1^1 K_2^2 K_3^3 \neq 0 . \tag{44}$$

Fokální plochy $\{A_i\}$, $\{A_i'\}$ jsou v projektivních deformacích $C_i : \{A_i\} \to \{A_i'\}$ prvního řádu realizovaných kolineací $\mathscr{K}$, platí-li při

$$\mathscr{K}A_i = K_i^i A_i'$$

relace $\mathscr{K}(\mathrm{d}A_i) = \mathrm{d}(K_i^i A_i') + \vartheta_i K_i^i A_i'$, neboli

$$\mathscr{K}(\mathrm{d}A_i) = K_i^i\, \mathrm{d}A_i' + \gamma_i A_i' , \tag{45}$$

kde ϑ_i jsou vhodné Pfaffovy formy a $\gamma_i = \mathrm{d}K_i^i + \vartheta_i K_i^i$.

Jest

$$\mathrm{d}A_i = \sum_j \omega_i^j A_j , \quad \mathrm{d}A_i' = \sum_j \omega_i'^j A_j' \quad (j = 1, \ldots, 6) ,$$

tedy

$$\sum_j \omega_i^j(\mathscr{K}A_j) = K_i^i \sum_j \omega_i'^j A_j' + \gamma_i A_i' \quad (j = 1, \ldots, 6) . \tag{46}$$

Nyní dosadíme za $\mathscr{K}A_j$ do (46) ze (42), resp. (43), a za ω_i^j jejich vyjádření z matice koeficientů (15). Porovnáním koeficientů u $A_j'(j = 1, \ldots, 6)$ a pak u ω^1 a ω^2 dospějeme po snadných výpočtech ke vztahům

$$K_4^2 = K_4^3 = K_4^5 = K_4^6 = K_5^1 = K_5^3 = K_5^4 = K_5^6 = K_6^1 = K_6^2 = K_6^4 = K_6^5 = 0$$

$$K_i^i \alpha_j^i = K_j^j \alpha_j'^i \qquad (j = 1, 2, 3; \quad i \neq j) \tag{47}$$

$$K_{3+i}^{3+i} = K_i^i \tag{48}$$

$$K_i^i \tau_i^i + \gamma_i = K_{3+i}^i \omega^i . \tag{49}$$

Systém rovnic (47) je až na označení hledaných funkcí K_i^i identický se systémem (35). Obsahově jsou stejné i požadavky (44) a (36). Jest tedy

$$K_i^i = c_i^i$$

a vzhledem k (48)

$$K_{3+i}^{3+i} = c_i^i .$$

Rovnice (49) nabývají nyní tvaru

$$c_i^i \tau_i^i + \gamma_i = K_{3+i}^i \omega^i$$

a lze z nich určit K_{3+i}^i. Tím je dokázána

Věta 3. *Fokální plochy $\{A_i\}$, $\{A_i'\}$ kongruencí L, L' jsou v projektivních deformacích prvního řádu $C_i : \{A_i\} \to \{A_i'\}$ realisovaných současně jedinou kolineací $\mathscr{K}$ právě tehdy, platí-li*

$$\varphi_i = \varphi_i'$$

a aspoň jedna z rovností

$$\psi_1 = \psi_1' , \quad \psi_2 = \psi_2' .$$

Rovnice kolineace $\mathscr{K}$ jsou tvaru

$$\begin{aligned} \mathscr{K} A_i &= c_i^i A_i' \\ \mathscr{K} A_{3+i} &= c_{3+i}^i A_i' + c_i^i A_{3+i}' . \end{aligned}$$

Z obsahů věty 1 a věty 2 vyplývá tvrzení, které podává

Věta 4. *Rozvinutelná korespondence $C : L \to L'$ mezi kongruencemi L, L' je bodovou deformací právě tehdy, jsou-li korespondence $C_i : \{A_i\} \to \{A_i'\}$ mezi fokálními plochami $\{A_i\}$, $\{A_i'\}$ projektivními deformacemi prvního řádu.*

Literatura

[1] *Švec A.:* Projective differential geometry of line congruences, Praha 1965.
[2] *Finikov S. P.:* Teorie párů kongruencí (rusky), Moskva 1956.
[3] *Ščerbakov R. N.:* Kurs afinní a projektivní diferenciální geometrie (rusky), Tomsk 1960.
[4] *Svoboda K.:* Über die Punktdeformation einer vollständig fokalen Pseudokongruenz, Mathematische Nachrichten, Band *38* (1968), Heft 3/4, str. 197—206.
[5] *Švec A.* Projektivní deformace kongruencí (studijní pomůcka k semináři E. Čecha), Praha 1955.
[6] *Šepelenková L. M.:* Projektivní deformace dvojparametrického systému p-1 rovin v $(2p$-1)-rozměrném projektivním prostoru (rusky), Trudy tomsk. gosud. univ., Tom *161*, (1962) str. 29—38.

Adresa autora: Hilleho 6, Brno (Vysoké učení technické).

Zusammenfassung

ÜBER DIE PUNKTDEFORMATION DER EBENENKONGRUENZEN IM FÜNFDIMENSIONALEN PROJEKTIVEN RAUM

JOSEF ČUČKA, Brno

In der Arbeit wird die Korrespondenz C zwischen zwei zweiparametrigen ebenen Gebilden L, L' (Kongruenzen von Ebenen), welche in die fünfdimensionalen projektiven Räume P_5, P'_5 eingebettet sind, erwägt. Es wird vorausgesetzt, dass die Kongruenz L, bzw. L' drei verschiedene nicht ausgeartete Brennflächen $\{A_i\}$, bzw. $\{A'_i\}$ besitzt. Mittels der Cartan'schen Methode des beweglichen Bezugssystems werden zu der Kongruenz L geometrisch bedeutsame invariante quadratische Formen φ_i, (die sog. Punktformen) und invariante kubische Formen ψ_1, ψ_2 aufgefunden.

Es wird bewiesen, dass die Gleichheit der Punktformen $\varphi_i = \varphi'_i$ und die Gültigkeit zumindest einer der Gleichung $\psi_1 = \psi'_1$, $\psi_2 = \psi'_2$ eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür sind, dass

1) die abwickelbare Korrespondenz $C : L \rightarrow L'$ eine Punktdeformation ist,

2) alle drei Brennflächenpaare $\{A_i\}$, $\{A'_i\}$ sich zugleich in der projektiven Deformation C_i erster Ordnung entsprechen.

Der Satz 2 sichert dass zu der gegebenen Kongruenz L das Paar (C, L') tatsächlich existiert und von zwei Funktionen zweier Variablen abhängt.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

LJAPUNOVSKÉ FUNKCE V TEORII OMEZENOSTI ABSTRAKTNÍCH RESTRINGOVANÝCH PROCESŮ

FRANTIŠEK TUMAJER, Liberec

(Došlo dne 21. srpna 1970)

ÚVOD

V práci [1] zavádí J. NAGY pojem abstraktního regulovaného procesu, který je bezprostředně spjat s pojmem abstraktního procesu uvedeného O. HÁJKEM na symposiu EQUADIFF II. Abstraktní regulovaný proces není sice abstraktním procesem, ale ukazuje se, že má s ním mnoho společných vlastností. V práci [2] jsou studovány pomocí ljapunovských funkcí vlastnosti omezenosti abstraktních procesů. V předložené práci užíváme podobných metod ke studiu silné a slabé omezenosti tzv. abstraktních restringovaných procesů; jejichž speciálním případem jsou regulované procesy z práce [1]. Připomeneme si proto nejprve základní definice a označení z prací [1] a [2].

Symboly R^1, R^0, R^+ budou značit po řadě následující množiny: $(-\infty, +\infty)$, $\langle 0, +\infty)$, $(0, +\infty)$. R značí danou neprázdnou podmnožinu množiny R^1, P a W dané abstraktní množiny. V textu budeme používat zobrazení projekce, které definujeme následujícím způsobem. Nechť je dán systém množin X_j pro $j = 1, 2, \ldots, n$. Pro každou kombinaci $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ přirozených čísel takových, že $1 \leqq i_s < i_{s+1} \leqq n$ pro $1 \leqq s \leqq k - 1$, definujeme

$$\mathrm{proj}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to X_{i_1} \times X_{i_2} \times \ldots \times X_{i_k}$$

předpisem

$$\mathrm{proj}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}) .$$

Dále se budeme zabývat jistou relací t na množině $P \times W \times R$. Předpokládáme, že relace t má vždycky následující vlastnost:

(1) je-li $(y, w_1, \beta), (x, w, \alpha) \in P \times W \times R$, $(y, w_1, \beta)\, t(x, w, \alpha)$, pak $\beta \geqq \alpha$.

Každá taková relace určuje systém relací

$$(2) \qquad \{_\beta t_\alpha : \beta \geqq \alpha \text{ v } R\} \quad \text{na} \quad P \times W$$

definovaných vztahem

$$(3) \qquad (y, w_1)\, _\beta t_\alpha(x, w) \Leftrightarrow (y, w_1, \beta)\, t(x, w, \alpha)$$

a také obráceně každý systém relací (2) definuje pomocí vztahu (3) relaci t na $P \times \times W \times R$. Je-li t relace na množině $P \times W \times R$, pak označíme

$$E = \text{domain}\, t\,,$$

$$D = \{(\vartheta, x, w, \alpha) \in R \times P \times W \times R : (y, w_1, \vartheta)\, t(x, w, \alpha) \text{ pro nějaké } (y, w_1) \in P \times W\}\,,$$

$$_\vartheta t_\alpha(x, w) = \{(y, w_1) \in P \times W : (y, w_1, \vartheta)\, t(x, w, \alpha)\}$$

a zobrazení

$$\varepsilon : E \to (-\infty, +\infty\rangle : \varepsilon(x, w, \alpha) = \sup\{\beta \in R : (\beta, x, w, \alpha) \in D\}\,.$$

1. DEFINICE ABSTRAKTNÍHO RESTRINGOVANÉHO PROCESU

1.1. V této části připomeneme nejdříve definici abstraktního procesu z práce [2] a zavedeme pojem abstraktního restringovaného procesu. Budeme přitom bez dalších poznámek používat označení a konvencí zavedených v úvodní části. Identickou relaci na $P \times W$ označíme $1_{P \times W}$.

1.2. Definice. Říkáme, že t je *proces* na $P \times W$ nad R, právě když P, W jsou množiny, $R \subset R^1$, t je relace na $P \times W \times R$ vyhovující podmínce

$$(1) \qquad _\beta t_\alpha \Rightarrow \beta \geqq \alpha \quad \text{pro všechna} \quad \alpha, \beta \in R$$

a mající následující dvě vlastnosti:

(i) $_\alpha t_\alpha \subset 1_{P \times W}$ pro všechna $\alpha \in R$,
(ii) $_\gamma t_\beta \circ {}_\beta t_\alpha = {}_\gamma t_\alpha$ pro všechna $\beta \in \langle\alpha, \gamma\rangle$ v R.

Říkáme, že proces t je *lokální*, resp. *globální*, právě když pro každé $(x, w, \alpha) \in E$ platí $\varepsilon(x, w, \alpha) > \alpha$, resp. $\varepsilon(x, w, \alpha) = +\infty$.

1.3. Definice. Nechť t je proces na $P \times W$ nad R. Říkáme, že t *připouští periodu* $\tau \in R^1$, právě když pro všechna $\beta \geqq \alpha$ v R platí

$$_{\beta-\tau}t_{\alpha-\tau} = {}_\beta t_\alpha = {}_{\beta+\tau}t_{\alpha+\tau}\,.$$

1.4. Definice. Nechť t je proces na $P \times W$ nad R. Říkáme, že σ je *řešením* procesu t, právě když

(i) σ je parciální zobrazení $R \to P \times W$,
(ii) domain σ je interval v R,
(iii) $(\sigma(\vartheta), \vartheta)\ t(\sigma(\alpha), \alpha)$ platí pro všechna $\vartheta \geqq \alpha$ v domain σ.

Říkáme, že t je *úplný vzhledem k řešením*, právě když ke každé dvojici (x, w, α), $(y, w_1, \beta) \in E$, $(y, w_1, \beta)\ t(x, w, \alpha)$ existuje řešení σ takové, že $\sigma(\alpha) = (x, w)$, $\sigma(\beta) = (y, w_1)$.

1.5. Poznámka. Je-li σ řešením procesu t, $\alpha \in$ domain σ, pak říkáme, že σ prochází bodem (x, w, α), právě když $\sigma(\alpha) = (x, w)$.

1.6. Definice. Nechť t je proces na $P \times W$ nad R. *Restringovaným procesem* p na P nad R nazýváme relaci p mezi $P \times W \times R$ a $P \times R$ definovanou takto:

$$(z, \vartheta)\ p(x, w, \alpha)\,, \text{ právě když existuje } w_1 \in W \text{ takové, že platí } (z, w_1, \vartheta)\ t(x, w, \alpha)\,.$$

Říkáme, že restringovaný proces p je *lokální* (*globální*), resp. *připouští periodu* $\tau \in R^1$, právě když t je lokální (globální), resp. připouští periodu τ.

1.7. Lemma. *Nechť p je restringovaný proces procesu t. Pak platí*

$$(z, \vartheta)\ p(x_1, w_1, \alpha_1),\ (x_1, w_1, \alpha_1)\ t(x, w, \alpha) \Rightarrow (z, \vartheta)\ p(x, w, \alpha)\,.$$

Důkaz plyne přímo z definice 1.6.

1.8. Definice. Nechť p je restringovaný proces procesu t. Zobrazení $V: E \to R^0$ nazýváme *ljapunovskou funkcí* restringovaného procesu p, právě když je V nerostoucí podél p, tj. právě když ze vztahů

$$(x_j, w_j, \alpha_j) \in E\,, \quad j = 1, 2\,, \quad (x_2, w_2, \alpha_2)\ t(x_1, w_1, \alpha_1) \quad \text{plyne}$$
$$V(x_2, w_2, \alpha_2) \leqq V(x_1, w_1, \alpha_1)\,.$$

1.9. Definice. Nechť p je restringovaný proces procesu t. Říkáme, že parciální zobrazení $s : R \to P$ je *řešením* restringovaného procesu p, právě když existuje řešení σ procesu t takové, že $s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$.

Říkáme, že p je *úplný vzhledem k řešením*, právě když t je úplný vzhledem k řešením.

1.10. Definice. Nechť p je restringovaný proces procesu t. Říkáme, že zobrazení $V: E \to R^0$ je *slabě ljapunovskou funkcí* restringovaného procesu p, právě když ke každému $(x, w, \alpha) \in E$ existuje řešení σ procesu t takové, že domain $\sigma \supset \langle\alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ a V je nerostoucí podél σ, tj.

$$V(\sigma(\vartheta), \vartheta) \leqq V(\sigma(\beta), \beta) \text{ pro všechna } \alpha \leqq \beta \leqq \vartheta < \varepsilon(x, w, \alpha) \quad \text{v} \quad R\,.$$

2. SILNÁ OMEZENOST RESTRINGOVANÝCH PROCESŮ

2.1. Označení. V této části předpokládáme, že jsou dány restringovaný proces p procesu t, neprázdná množina

(1) $$m \subset P \times R$$

a zobrazení

(2) $$g : P \times R \to R^0$$

tak, že platí

(3) $$g(x, \alpha) = 0 \Leftrightarrow (x, \alpha) \in m \, .$$

2.2. Definice. Říkáme, že p je *silně omezený* vzhledem k m, právě když existuje zobrazení

(1) $$\varphi : \text{proj}_{1,3}\, E \to R^+$$

takové, že platí

(2) $$(\vartheta, x, w, \alpha) \in D \, , \quad (z, \vartheta)\, p(x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varphi(x, \alpha) \, .$$

2.3. Věta. *p je silně omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení*

(1) $V : E \to R^0$, $\varphi_0 : \text{proj}_{1,3}\, E \to R^+$, $a : R^+ \to R^+$, *a je rostoucí,* $a(v) \to +\infty$ *pro* $v \to +\infty$,

mající následující vlastnosti:

(i) *V je ljapunovská funkce,*
(ii) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \varphi_0(x, \alpha)$,
(iii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \in R^+ \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, w, \alpha)$.

Důkaz. Nechť p je silně omezený. Definujme zobrazení

(2) $V : E \to R^0 : V(x, w, \alpha) = \sup \{g(z, \vartheta) : (z, \vartheta)\, p(x, w, \alpha)\}$,

(3) $\varphi_0 : \text{proj}_{1,3}\, E \to R^+ : \varphi_0(x, \alpha) = \varphi(x, \alpha)$,

(4) $a : R^+ \to R^+ : a(v) = v$.

Nyní dokážeme, že zobrazení (2), (3) a (4) mají vlastnosti (i) až (iii).

Ad (i): Nechť $(x, w, \alpha) \in E$ a nechť $(x_1, w_1, \alpha_1)\, t\, (x, w, \alpha)$. Pak pro každé $(z, \vartheta)\, p\, (x_1, w_1, \alpha_1)$ platí podle 1.7 také $(z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha)$, a tedy

$$V(x_1, w_1, \alpha_1) = \sup \{g(z, \vartheta) : (z, \vartheta)\, p\, (x_1, w_1, \alpha_1)\} \leqq$$
$$\leqq \sup \{g(z, \vartheta) : (z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha)\} = V(x, w, \alpha) \, ,$$

takže V je ljapunovskou funkcí.

Ad (ii): Nechť $(x, w, \alpha) \in E$. Pak pro každé $(z, \vartheta)\ p\,(x, w, \alpha)$ platí podle 2.2 (2) vztah $g(z, \vartheta) \leqq \varphi(x, \alpha)$, takže $V(x, w, \alpha)$ je předpisem (2) skutečně definováno a má vlastnost (ii).

Ad (iii): Zřejmě platí

$$g(x, \alpha) \in \{g(z, \vartheta) : (z, \vartheta)\ p\,(x, w, \alpha)\}\,,$$

a tedy

$$g(x, \alpha) \leqq V(x, w, \alpha)\,.$$

Nechť existují zobrazení (1) mající vlastnosti (i) až (iii). Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$. Definujme zobrazení φ z 2.2(1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\varphi(x, \alpha)) \geqq \varphi_0(x, \alpha)\,.$$

Nyní se snadno ukáže, že pro každé $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $(z, w_1, \vartheta)\ t\,(x, w, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in R^+$ platí

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, w_1, \vartheta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq \varphi_0(x, \alpha) \leqq a(\varphi(x, \alpha))\,,$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \varphi(x, \alpha)$. Je tedy p silně omezený vzhledem k m.

2.4. Poznámka. Podmínku (iii) ve větě 2.3 lze zaměnit podmínkou:

(iii)′ *existuje zobrazení* $\zeta_1 : R^+ \to R^+$ *takové, že platí*

$$V(x, w, \alpha) \leqq \omega \Rightarrow g(x, \alpha) \leqq \zeta_1(\omega)\,.$$

2.5. Definice. Říkáme, že p je *silně asymptoticky omezený* vzhledem k m, právě když p je silně omezený vzhledem k m a existují konstanta

$$\varkappa \in R^+ \tag{1}$$

a zobrazení

$$T : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+ \tag{2}$$

takové, že platí

$$(\vartheta, x, w, \alpha) \in D\,, \quad \vartheta \geqq \alpha + T(x, \alpha)\,, \quad (z, \vartheta)\ p\,(x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varkappa\,. \tag{3}$$

2.6. Věta. *Restringovaný proces p procesu t je silně asymptoticky omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení* 2.3 (1) *s vlastnostmi* 2.3 (i) *až* 2.3 (iii) *a zobrazení* $T_0 : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+$, $\varkappa_0 \in R^+$ *takové, že platí*

(iv) $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $\vartheta \geqq \alpha + T_0(x, \alpha)$, $(z, w_1, \vartheta)\ t\,(x, w, \alpha) \Rightarrow V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0$.

Důkaz. Nechť p je silně asymptoticky omezený. Pak podle první části důkazu věty 2.3 existují zobrazení 2.3 (1) s vlastnostmi 2.3 (i) až 2.3 (iii). Zvolme v (iv) za $\varkappa_0 \in R^+$ konstantu $\varkappa$ z 2.5 a definujme zobrazení $T_0 : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+ : T_0(x, \alpha) = T(x, \alpha)$, kde

T je zobrazení z 2.5. Pak podle 2.5 (3) pro každé $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $(z, w_1, \vartheta)\ t\ (x, w, \alpha)$, $\vartheta \geqq \alpha + T_0(x, \alpha)$ platí $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa_0$, a tedy vzhledem k 2.3 (2) je také $V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0$.

Nechť existují zobrazení 2.3 (1) s vlastnostmi 2.3 (i) až 2.3 (iii), $\varkappa_0 \in R^+$ a zobrazení T_0 mající vlastnost (iv). Z vlastností 2.3 (i) až 2.3 (iii) vyplývá podle věty 2.3, že p je silně omezený vzhledem k m. Definujme konstantu $\varkappa$ z 2.5 (1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\varkappa) \geqq \varkappa_0$$

a za zobrazení T z 2.5 (2) zvolme zobrazení T_0 z (iv). Pak pro každé $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $\vartheta \geqq \alpha + T(x, \alpha)$, $(z, w_1, \vartheta)\ t\ (x, w, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in R^+$ platí

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0 \leqq a(\varkappa),$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p silně asymptoticky omezený vzhledem k m.

2.7. Věta. *Nechť p je globální restringovaný proces procesu t, úplný vzhledem k řešením. Nechť existují zobrazení* 2.3 (1) *s vlastnostmi* 2.3 (i) *až* 2.3 (iii), *konstanty $\varkappa_0, \varkappa_1 \in R^+$ a zobrazení $c : \langle \varkappa_1, +\infty) \to R^+$ zdola omezené na každém kompaktním podintervalu intervalu $\langle \varkappa_1, +\infty)$ kladným číslem a mající následující vlastnosti:*

(iv) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) < \varkappa_1 \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \varkappa_0$,

(v) *pro každé řešení σ procesu t a všechna $\alpha, \vartheta \in \operatorname{domain} \sigma$, $\alpha \leqq \vartheta$ platí $V(\sigma(\vartheta), \vartheta) - V(\sigma(\alpha), \alpha) \leqq -\int_\alpha^\vartheta c(g(\operatorname{proj}_1 \circ \sigma(v), v))\, dv$, kdykoliv je $c(g(\operatorname{proj}_1 \circ \circ \sigma(v), v))$ definováno pro všechna $v \in \langle \alpha, \vartheta \rangle$, $v \in R$.*

Potom je p silně asymptoticky omezený vzhledem k m.

Důkaz. Z vlastností 2.3 (i) až 2.3 (iii) zobrazení 2.3 (1) vyplývá podle věty 2.3, že p je silně omezený vzhledem k m. Volme $\varkappa$ z 2.5 (1) tak, aby platil vztah

$$a(\varkappa) \geqq \varkappa_0 .$$

Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) < \varkappa_1$ a předpokládejme, že existují $(\beta, x, w, \alpha) \in D$, $(y, w_1, \beta)\ t\ (x, w, \alpha)$ takové, že $g(y, \beta) > \varkappa$. Pak je

$$a(\varkappa) < a(g(y, \beta)) \leqq V(y, w_1, \beta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq \varkappa_0 ,$$

odkud plyne $a(\varkappa) < \varkappa_0$, což je spor s volbou konstanty $\varkappa$. Platí tedy

(1) $\quad (\vartheta, x, w, \alpha) \in D\,, \quad g(x, \alpha) < \varkappa_1\,, \quad (z, \vartheta)\ p\ (x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varkappa\,.$

Nechť je nyní $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \geqq \varkappa_1$. Položme

$$\lambda(x, \alpha) = \inf \{c(v) : \varkappa_1 \leqq v \leqq \varphi(x, \alpha)\}\,,$$

kde φ je zobrazení z definice 2.2.

Definujme zobrazení T z 2.5 (2) předpisem

$$T(x, \alpha) = 1 + \frac{\varphi_0(x, \alpha)}{\lambda(x, \alpha)}$$

a ukažme, že $\varkappa$ a T vyhovují definici 2.5. Předpokládejme, že pro nějaké $(y, w_1, \beta)\, t\, (x, w, \alpha)$, $\beta \geqq \alpha + T(x, \alpha)$ platí vztah $g(y, \beta) > \varkappa$. Nechť σ je řešení procesu t procházející body (x, w, α) a (y, w_1, β). Je-li $\varkappa_1 \leqq g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(\vartheta), \vartheta)$ pro všechna $\vartheta \in \langle \alpha, \beta \rangle$, $\vartheta \in R$, pak pomocí 2.3 (ii) a 2.7 (v) dostáváme vztah $V(\sigma(\beta), \beta) \leqq \leqq V(\sigma(\alpha), \alpha) - \int_\alpha^\beta c(g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(v), v)\, \mathrm{d}v \leqq \varphi_0(x, \alpha) - \lambda(x, \alpha)\, T(x, \alpha) < 0$, což je ve sporu s definicí zobrazení V. Existuje-li $\gamma \in \langle \alpha, \beta \rangle$ takové, že $g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(\gamma), \gamma) < \varkappa_1$, plyne z $(y, \beta)\, p\, (\sigma(\gamma), \gamma)$ a ze vztahu (1) nerovnost $g(y, \beta) \leqq \varkappa$, což je spor s naším předpokladem. Odtud dostáváme, že pro každé $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $\vartheta \geqq \alpha + T(x, \alpha)$, $(z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha)$ platí $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p silně asymptoticky omezený vzhledem k m.

2.8. Poznámka. Zřejmě v obou předcházejících větách lze podmínku 2.3 (iii) nahradit podmínkou 2.4 (iii)'.

2.9. Definice. Říkáme, že p je *silně stejně omezený* vzhledem k m, právě když existuje zobrazení

(1) $$\zeta : R \times R^+ \to R^+$$

takové, že platí

(2) $$(\vartheta, x, w, \alpha) \in D\,, \quad g(x, \alpha) \leqq \omega\,, \quad (z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, \omega)\,.$$

2.10. Věta. *p je silně stejně omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení*

(1) $$V : E \to R^0\,, \quad \zeta_0 : R \times R^+ \to R^+\,, \quad a : R^+ \to R^+\,, \quad a \textit{ rostoucí}\,,$$
$$a(\omega) \to +\infty \quad \textit{pro} \quad \omega \to +\infty\,,$$

mající následující vlastnosti:

(i) *V je ljapunovská funkce,*
(ii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \zeta_0(\alpha, \omega)$,
(iii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \in R^+ \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, w, \alpha)$.

Důkaz. Nechť p je silně stejně omezený. Definujme zobrazení $V : E \to R^0$ vztahem 2.3 (2), zobrazení

(2) $$\zeta_0 : R \times R^+ \to R^+ : \zeta_0(\alpha, \omega) = \zeta(\alpha, \omega)\,,$$

(3) $$a : R^+ \to R^+ : a(\omega) = \omega\,.$$

Nyní dokážeme, že zobrazení V, (2) a (3) mají vlastnosti (i) až (iii). Zobrazení V a (3) mají zřejmě podle 2.3 ad (i) a 2.3 ad (iii) vlastnosti (i) a (iii). Podle 2.9 (2) ze vztahů $(\vartheta, x, w, \alpha) \in \hat{D}$, $(z, \vartheta)\, p\,(x, w, \alpha)$, $g(x, \alpha) \in R^+$ plyne $g(z, \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, g(x, \alpha))$, takže $V(x, w, \alpha)$ je předpisem 2.3 (2) skutečně definováno a má vlastnost (ii).

Nechť existují zobrazení (1) s vlastnostmi (i) až (iii). Definujme zobrazení ζ z 2.9 (1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\zeta(\alpha, \omega)) \geqq \zeta_0(\alpha, \omega)\,.$$

Pak ze vztahů $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\,(x, w, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in R^+$ dostáváme

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, w_1, \vartheta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq \zeta_0(\alpha, \omega) \leqq a(\zeta(\alpha, \omega))\,,$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, \omega)$. Je tedy p silně stejně omezený vzhledem k m.

2.11. Poznámka. Podmínku (iii) ve větě 2.10 lze zaměnit podmínkou 2.4 (iii)'.

2.12. Definice. Říkáme, že p je *silně stejně asymptoticky omezený* vzhledem k m, právě když p je silně stejně omezený vzhledem k m a existují konstanta

$$\varkappa \in R^+ \tag{1}$$

a zobrazení

$$T : R \times R^+ \to R^+ \tag{2}$$

takové, že platí

$$\begin{gathered}(\vartheta, x, w, \alpha) \in D\,, \quad g(x, \alpha) \leqq \omega\,, \quad \vartheta \geqq \alpha + T(\alpha, \omega)\,, \\ (z, \vartheta)\, p\,(x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varkappa\,.\end{gathered} \tag{3}$$

2.13. Věta. *Restringovaný proces p procesu t je silně stejně asymptoticky omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení* 2.10 (1) *s vlastnostmi* 2.10 (i) *až* 2.10 (iii) *a zobrazení*

$$T_0 : R \times R^+ \to R^+\,, \quad \varkappa_0 \in R^+ \tag{1}$$

takové, že platí

(iv) $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$, $\vartheta \geqq \alpha + T_0(\alpha, \omega)$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\,(x, w, \alpha) \Rightarrow$ $\Rightarrow V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0$.

Důkaz. Nechť p je silně stejně asymptoticky omezený. Pak podle první části důkazu věty 2.10 existují zobrazení 2.10 (1) s vlastnostmi 2.10 (i) až 2.10 (iii). Zvolme v (1) za $\varkappa_0 \in R^+$ konstantu $\varkappa$ z definice 2.12 a zobrazení $T_0 : R \times R^+ \to R^+$ definujme předpisem

$$T_0(\alpha, \omega) = T(\alpha, \omega)\,,$$

kde T je zobrazení z 2.12. Pak podle 2.12 (3) pro každé $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\, (x, w, \alpha)$ a $\vartheta \geqq \alpha + T_0(\alpha, \omega)$ platí $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa_0$, a tedy vzhledem k 2.3 (2) je $V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0$. Odtud plyne, že zobrazení V má také vlastnost (iv).

Nechť existují zobrazení 2.10 (1) s vlastnostmi 2.10 (i) až 2.10 (iii) a (1) mající vlastnost (iv). Z vlastností 2.10 (i) až 2.10 (iii) vyplývá podle věty 2.10, že p je silně stejně omezený vzhledem k m. Definujme konstantu $\varkappa$ z 2.12 (1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\varkappa) \geqq \varkappa_0$$

a za zobrazení T z 2.12 (2) zvolme zobrazení T_0 z (1). Pak pro každé $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$, $\vartheta \geqq \alpha + T(\alpha, \omega)$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\, (x, w, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in R^+$ platí

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0 \leqq a(\varkappa)\,,$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p silně stejně asymptoticky omezený vzhledem k m.

2.14. Věta. *Nechť p je globální restringovaný proces procesu t, úplný vzhledem k řešením. Nechť existují zobrazení* 2.10 (1) *s vlastnostmi* 2.10 (i) *až* 2.10 (iii), *konstanty $\varkappa_0, \varkappa_1 \in R^+$ a zobrazení $c : \langle \varkappa_1, +\infty) \to R^+$ zdola omezené na každém kompaktním podintervalu intervalu $\langle \varkappa_1, +\infty)$ kladným číslem a mající následující vlastnosti:*

(iv) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) < \varkappa_1 \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \varkappa_0$,

(v) *pro každé řešení σ procesu t a všechna $\alpha, \vartheta \in \text{domain}\, \sigma$, $\alpha \leqq \vartheta$ platí*

$$V(\sigma(\vartheta), \vartheta) - V(\sigma(\alpha), \alpha) \leqq -\int_\alpha^\vartheta c(g(\text{proj}_1 \circ \sigma(v), v))\, dv\,,$$

kdykoliv je $c(g(\text{proj}_1 \circ \sigma(v), v))$ definováno pro všechna $v \in \langle \alpha, \vartheta \rangle$, $v \in R$.

Potom je p silně stejně asymptoticky omezený vzhledem k m.

Důkaz. Z vlastností 2.10 (i) až 2.10 (iii) zobrazení 2.10 (1) vyplývá podle věty 2.10, že p je silně stejně omezený vzhledem k m. Nechť ζ je zobrazení z definice 2.9. Položme $\lambda(\alpha, \omega) = \inf \{c(v) : \varkappa_1 \leqq v \leqq \zeta(\alpha, \omega)\}$. Definujeme-li zobrazení T z 2.12 (2) předpisem

$$T(\alpha, \omega) = 1 + \frac{\zeta_0(\alpha, \omega)}{\lambda(\alpha, \omega)}\,,$$

konstantu $\varkappa \in R^+$ tak, aby platilo $a(\varkappa) \geqq \varkappa_0$, ukážeme podobně jako v důkazu věty 2.7, že pro $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$, $\vartheta \geqq \alpha + T(\alpha, \omega)$, $(z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha)$ je $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p silně stejně asymptoticky omezený vzhledem k m.

2.15. Poznámka. Zřejmě v obou předcházejících větách lze podmínku 2.10 (iii) nahradit podmínkou 2.4 (iii)$'$.

2.16. Definice. Říkáme, že p je *silně stejnoměrně omezený* vzhledem k m, právě když existuje zobrazení

$$(1) \qquad \xi : R^+ \to R^+$$

takové, že platí

$$(2) \qquad (\vartheta, x, w, \alpha) \in D\,, \quad g(x, \alpha) \leqq \psi\,, \quad (z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \xi(\psi)\,.$$

2.17. Věta. *p je silně stejnoměrně omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení*

(1) *$V : E \to R^0$, rostoucí $a : R^+ \to R^+$, $a(\psi) \to +\infty$ pro $\psi \to \infty$, neklesající $b : R^0 \to R^+$,*

s následujícími vlastnostmi:

(i) *V je ljapunovská funkce,*
(ii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \in R^+ \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, w, \alpha)$,
(iii) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq b(g(x, \alpha))$.

Důkaz. Nechť p je silně stejnoměrně omezený. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že zobrazení ξ z 2.16 je rostoucí. Definujme zobrazení $V: E \to R^0$ předpisem 2.3 (2). Odtud a z 2.16 (2) plyne, že zobrazení V je tímto předpisem skutečně definováno a má vlastnost (i). Definujme zobrazení a, b z (1) vztahy

$$a(\psi) = \psi\,; \quad b(\psi) = \xi(\psi) \quad \text{pro} \quad \psi \geqq 1\,, \quad b(\psi) = \xi(1) \quad \text{pro} \quad \psi \in \langle 0, 1\rangle\,.$$

Ze vztahů $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \in R^+$, $(z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha)$ plyne $g(z, \vartheta) \leqq \xi(g(x, \alpha))$, takže také $V(x, w, \alpha) \leqq \xi(g(x, \alpha))$. Zřejmě platí $g(x, \alpha) \leqq V(x, w, \alpha)$, a tedy zobrazení (1) mají vlastnosti (ii) a (iii).

Nechť existují zobrazení (1) s vlastnostmi (i) až (iii). Definujme zobrazení ξ z 12 (1) tak, aby platilo

$$a(\xi(\psi)) \geqq b(\psi)\,.$$

Pak ze vztahů $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\, (x, w, \alpha)$, $g(z, \vartheta) \in R^+$ dostáváme

$$a(g(z, \vartheta)) \leqq V(z, w_1, \vartheta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq b(\psi) \leqq a(\xi(\psi))\,,$$

odkud plyne $g(z, \vartheta) \leqq \xi(\psi)$. Je tedy p silně stejnoměrně omezený vzhledem k m.

2.18. Poznámka. Podmínku (iii) ve větě 2.17 můžeme zaměnit následující podmínkou:

(iii)′ *existuje zobrazení $\xi_0 : R^+ \to R^+$ takové, že platí $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi \Rightarrow$ $\Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \xi_0(\psi)$.*

2.19. Poznámka. Podmínku (ii), resp. (iii), ve větě 2.17 můžeme zřejmě zaměnit podmínkou 2.4 (iii)', resp. 2.18 (iii)'.

2.20. Poznámka. *Nechť restringovaný proces p připouští periodu $\tau > 0$ a nechť zobrazení g z* 2.1 (2) *je periodické v druhé proměnné s periodou τ. Je-li p silně stejně omezený vzhledem k m a existuje-li zobrazení $\mu : R^+ \to R^+$ takové, že $\mu(\omega) \geqq \zeta(\alpha, \omega)$ pro všechna $\alpha \in \langle 0, \tau \rangle$, $\alpha \in R$, $\omega \in R^+$ a nějaké ζ vyhovující definici* 2.9, *pak platí:*

(i) *p je silně stejnoměrně omezený vzhledem k m,*
(ii) *existuje ljapunovská funkce V periodická v poslední proměnné s periodou τ a mající vlastnosti* 2.17 (ii), 2.17 (iii), 2.4 (iii)' *a* 2.18 (iii)'.

Důkaz je zřejmý.

2.21. Definice. Říkáme, že p je *silně stejnoměrně asymptoticky omezený* vzhledem k m, právě když p je silně stejnoměrně omezený vzhledem k m a existují konstanta

(1) $$\varkappa \in R^+$$

a zobrazení

(2) $$T : R^+ \to R^+$$

takové, že platí

(3) $$(\vartheta, x, w, \alpha) \in D\,, \quad g(x, \alpha) \leqq \psi\,, \quad \vartheta \geqq \alpha + T(\psi)\,,$$
$$(z, \vartheta)\, p\, (x, w, \alpha) \Rightarrow g(z, \vartheta) \leqq \varkappa\,.$$

2.22. Věta. *Restringovaný proces p procesu t je silně stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení* 2.17 (1) *s vlastnostmi* 2.17 (i) *až* 2.17 (iii) *a zobrazení*

(1) $$T_0 : R^+ \to R^+\,, \quad \varkappa_0 \in R^+$$

takové, že platí

(iv) $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$, $\vartheta \geqq \alpha + T_0(\psi)$, $(z, w_1, \vartheta)\, t\, (x, w, \alpha) \Rightarrow$ $\Rightarrow V(z, w_1, \vartheta) \leqq \varkappa_0$.

Důkaz je zřejmý, neboť věta 2.22 je stejnoměrnou modifikací věty 2.13.

2.23. Věta. *Nechť p je globální restringovaný proces procesu t, úplný vzhledem k řešením. Nechť existují zobrazení* 2.17 (1) *s vlastnostmi* 2.17 (i) *až* 2.17 (iii), *konstanta $\varkappa_1 \in R^+$ a zobrazení $c : \langle \varkappa_1, +\infty) \to R^+$ zdola omezené na každém kompaktním podintervalu intervalu $\langle \varkappa_1, +\infty)$ kladným číslem a mající následující vlastnost:*

(iv) *pro každé řešení σ procesu t a všechna* α, $\vartheta \in$ domain σ, $\alpha \leqq \vartheta$ *platí* $V(\sigma(\vartheta), \vartheta) - V(\sigma(\alpha), \alpha)) \leqq -\int_\alpha^\vartheta c(g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(v), v))\,\mathrm{d}v$, *kdykoliv je* $c(g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(v), v))$ *definováno pro všechna* $v \in \langle \alpha, \vartheta \rangle$, $v \in R$.

Potom je p silně stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k m.

Důkaz. Z vlastností 2.17 (i) až 2.17 (iii) zobrazení 2.17 (1) vyplývá podle věty 2.17, že p je silně stejnoměrně omezený vzhledem k m. Nechť ξ je zobrazení z definice 2.16. Položme $\lambda(\psi) = \inf \{c(v) : \varkappa_1 \leqq v \leqq \xi(\psi)\}$. Definujeme-li konstantu $\varkappa$ z 2.16 (1) předpisem

$$\varkappa = \xi(\varkappa_1)$$

a zobrazení T z 2.16 (2) předpisem

$$T(\psi) = 1 + \frac{b(\psi)}{\lambda(\psi)},$$

ukážeme podobně jako v důkazu věty 2.7, že pro $(\vartheta, x, w, \alpha) \in D$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$, $\vartheta \geqq \alpha + T(\psi)$, $(z, \vartheta)\ p(x, w, \alpha)$ je $g(z, \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p silně stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k m.

2.24. Poznámka. Zřejmě v obou předcházejících větách lze podmínku 2.17 (ii), resp. 2.17 (iii), nahradit podmínkou 2.4 (iii)′, resp. 2.18 (iii)′.

3. SLABÁ OMEZENOST RESTRINGOVANÝCH PROCESŮ

3.1. Označení. V celé této části používáme i nadále označení zavedených v předcházejícím textu. Speciálně bude t značit lokální proces na $P \times W$ nad R, p jemu odpovídající lokální restringovaný proces. Podobně jako v předchozí části je dána množina $m \subset P \times R$ a zobrazení 2.1 (2) vyhovující vztahu 2.1 (3). Kromě toho pro dané $(x, w, \alpha) \in E$ označíme symbolem $\Sigma(x, w, \alpha)$ množinu všech řešení σ procesu t takových, že $\sigma(\alpha) = (x, w)$ a domain $\sigma \supset \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$; symbolem $S(x, w, \alpha)$ pak množinu všech řešení s restringovaného procesu p takových, že existuje $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$, pro které $s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$.

3.2. Definice. Říkáme, že p je *slabě omezený* vzhledem k m, právě když existuje zobrazení

(1) $$\varphi : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+$$

takové, že platí

(2) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varphi(x, \alpha)$ pro nějaké $s \in S(x, w, \alpha)$ a všechna $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R.

3.3. Věta. *p je slabě omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení*

(1) $V : E \to R^0$, $\varphi_0 : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+$, $a : R^+ \to R^+$, *a je rostoucí,* $a(v) \to +\infty$ *pro* $v \to +\infty$,

mající následující vlastnosti:

(i) *V je slabě ljapunovská funkce,*
(ii) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \varphi_0(x, \alpha)$,
(iii) $(x, w, \alpha) \in E,\ g(x, \alpha) \in R^+ \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, w, \alpha)$.

Důkaz. Nechť p je slabě omezený. Podle definice 3.2 k danému $(x, w, \alpha) \in E$ existuje řešení $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že pro $s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$ platí 3.2 (2). Definujme zobrazení

(2) $$V : E \to R^0 : V(x, w, \alpha) = \sup \{g(s(\vartheta), \vartheta) : \vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha)) \text{ v } R\},$$

(3) $$\varphi_0 : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+ : \varphi_0(x, \alpha) = \varphi(x, \alpha),$$

(4) $$a : R^+ \to R^+ : a(v) = v$$

a ukažme, že (2), (3), (4) mají vlastnosti (i), (ii) a (iii). Podle 3.2 (2) je vidět, že $V(x, w, \alpha)$ je předpisem (2) skutečně definováno a má vlastnost (ii). Zřejmě pro každé $(x, w, \alpha) \in E$ platí

$$g(x, \alpha) \in \{g(s(\vartheta), \vartheta) : \vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha)) \text{ v } R\},$$

takže podle (2) je také $g(x, \alpha) \leqq V(x, w, \alpha)$, což je vlastnost (iii). Zbývá ještě dokázat, že V je slabě ljapunovskou funkcí restringovaného procesu p. Jsou-li $\beta, \gamma \in R$ taková, že $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma < \varepsilon(x, w, \alpha)$, pak je

$$\{(\sigma(\vartheta), \vartheta) : \vartheta \in \langle \gamma, \varepsilon(x, w, \alpha)) \text{ v } R\} \subset \{(\sigma(\vartheta), \vartheta) : \vartheta \in \langle \beta, \varepsilon(x, w, \alpha)) \text{ v } R\}.$$

Odtud snadno plyne

$$V(\sigma(\gamma), \gamma) = \sup \{g(s(\vartheta), \vartheta) : \vartheta \in \langle \gamma, \varepsilon(x, w, \alpha)) \text{ v } R\} \leqq$$
$$\leqq \sup \{g(s(\vartheta), \vartheta) : \vartheta \in \langle \beta, \varepsilon(x, w, \alpha)) \text{ v } R\} = V(\sigma(\beta), \beta),$$

takže zobrazení V z (2) je slabě ljapunovskou funkcí.

Nechť nyní existují zobrazení (1) s vlastnostmi (i) až (iii). Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$. Definujme zobrazení φ z 3.2 (1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\varphi(x, \alpha)) \geqq \varphi_0(x, \alpha).$$

Podle (i) existuje $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že V je nerostoucí podél σ. Nyní se snadno ukáže, že řešení $s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$ vyhovuje definici 3.2 (2). Platí totiž pro každé $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$, ϑ v R, $g(s(\vartheta), \vartheta) \in R^+$, $a(g(s(\vartheta), \vartheta)) \leqq V(\sigma(\vartheta), \vartheta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq \varphi_0(x, \alpha) \leqq a(\varphi(x, \alpha))$, odkud vzhledem k tomu, že a je rostoucí, plyne $g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varphi(x, \alpha)$. Je tedy p slabě omezený vzhledem k m.

3.4. Definice. Říkáme, že p je *slabě asymptoticky omezený* vzhledem k m, právě když p je slabě omezený vzhledem k m a existují konstanta

(1) $$\varkappa \in R^+$$

a zobrazení

(2) $$T : \mathrm{proj}_{1,3}\, E \to R^+$$

takové, že platí

(3) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varkappa$ pro nějaké s z 3.2 (2) a všechna $\vartheta \geqq \alpha + T(x, \alpha)$ v domain s.

3.5. Věta. *Nechť p je globální restringovaný proces. Nechť existují zobrazení* 3.3 (1) *s vlastnostmi* 3.3 (ii) *a* 3.3 (iii), *zobrazení $c : R^0 \to R^+$ zdola omezené na každém kompaktním podintervalu intervalu R^+ kladnou konstantou a konstanty $\varkappa_0, \varkappa_1 \in R^+$ s následujícími vlastnostmi:*

(iv) $(x, w, \alpha) \in E,\ g(x, \alpha) < \varkappa_1 \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \varkappa_0$,

(v) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow V(\sigma(\gamma), \gamma) - V(\sigma(\beta), \beta) \leqq -\int_\beta^\gamma c(g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(v), v))\, \mathrm{d}v$ *pro nějaké $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ a každé $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma \in$ domain σ.*

Potom je p slabě asymptoticky omezený vzhledem k m.

Důkaz. Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$. Podle vlastnosti (v) existuje $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že V je nerostoucí podél σ. Odtud a z věty 3.3 vyplývá, že p je slabě omezený vzhledem k m. Volme $\varkappa$ z 3.4 (1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\varkappa) \geqq \varkappa_0\,.$$

Nechť $g(x, \alpha) < \varkappa_1$ a předpokládejme, že existuje $\beta \geqq \alpha$ takové, že platí $g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(\beta), \beta) > \varkappa$. Pak je

$$a(\varkappa) < a(g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(\beta), \beta)) \leqq V(\sigma(\beta), \beta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq \varkappa_0\,,$$

odkud plyne $a(\varkappa) < \varkappa_0$, což je spor s volbou konstanty $\varkappa$. Platí tedy

(1) $(x, w, \alpha) \in E,\ g(x, \alpha) < \varkappa_1 \Rightarrow g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(\vartheta), \vartheta) \leqq \varkappa$ pro všechna $\alpha \leqq \vartheta \in$ domain σ.

Nechť je nyní $(x, w, \alpha) \in E,\ g(x, \alpha) \geqq \varkappa_1$. Položme

$$\lambda(x, \alpha) = \inf \{c(v) : \varkappa_1 \leqq v \leqq \varphi(x, \alpha)\}\,,$$

kde φ je zobrazení z definice 3.2. Definujme zobrazení T z 3.4 (2) předpisem

$$T(x, \alpha) = 1 + \frac{\varphi_0(x, \alpha)}{\lambda(x, \alpha)}\,,$$

řešení s restringovaného procesu p vztahem

$$s = \text{proj}_1 \circ \sigma$$

a ukažme, že $\varkappa$, T a s vyhovují definici 3.4. Předpokládejme, že pro nějaké $\beta \geqq \alpha + T(x, \alpha)$ platí vztah $g(s(\beta), \beta) > \varkappa$. Je-li $\varkappa_1 \leqq g(s(\vartheta), \vartheta)$ pro všechna $\vartheta \in \langle\alpha, \beta\rangle$ v R, pak pomocí 3.3 (ii) a (v) dostáváme vztah

$$V(\sigma(\beta), \beta) \leqq V(x, w, \alpha) - \int_\alpha^\beta c(g(s(v), v)) \, dv \leqq \varphi_0(x, \alpha) - \lambda(x, \alpha) \, T(x, \alpha) < 0 \,,$$

což je ve sporu s definicí zobrazení V.

Existuje-li $\gamma \in \langle\alpha, \beta\rangle$ takové, že $g(s(\gamma), \gamma) < \varkappa_1$, plyne z $(s(\beta), \beta) \, p \, (\sigma(\gamma), \gamma)$ a vztahu (1) nerovnost $g(s(\beta), \beta) \leqq \varkappa$, což je spor s naším předpokladem. Odtud dostáváme, že platí $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varkappa$ pro všechna $\vartheta \geqq \alpha + T(x, \alpha)$ v R. Je tedy p slabě asymptoticky omezený vzhledem k m.

3.6. Poznámka. Zřejmě v obou předcházejících větách lze podmínku 3.3 (iii) nahradit podmínkou 2.4 (iii)'.

3.7. Definice. Říkáme, že p je *slabě stejně omezený* vzhledem k m, právě když existuje zobrazení

(1) $$\zeta : R \times R^+ \to R^+$$

takové, že platí

(2) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega \Rightarrow g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, \omega)$ pro nějaké $s \in S(x, w, \alpha)$ a všechna $\vartheta \in \langle\alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R.

3.8. Věta. *p je slabě stejně omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení*

(1) $V: E \to R^0$, $\zeta_0 : R \times R^+ \to R^+$, $a : R^+ \to R^+$, *a rostoucí*, $a(\omega) \to +\infty$ *pro* $\omega \to +\infty$, *s následujícími vlastnostmi*:

(i) *V je slabě ljapunovská funkce,*
(ii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \zeta_0(\alpha, \omega)$,
(iii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \in R^+ \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, w, \alpha)$.

Důkaz. Nechť p je slabě stejně omezený. Podle definice 3.7 k danému $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$ existuje řešení $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že pro $s = \text{proj}_1 \circ \sigma$ platí 3.7 (2). Definujme zobrazení $V: E \to R^0$ vztahem 3.3 (2), zobrazení

(2) $$\zeta_0 : R \times R^+ \to R^+ : \zeta_0(\alpha, \omega) = \zeta(\alpha, \omega) \,,$$

(3) $$a : R^+ \to R^+ : a(\omega) = \omega \,.$$

Nyní dokážeme, že zobrazení V, (2) a (3) mají vlastnosti (i) až (iii). Stejným způsobem jako v důkazu věty 3.3 se ukáže, že zobrazení V a (3) mají vlastnosti (i) a (iii). Podle 3.7 (2) ze vztahů $\vartheta \in \langle\alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R, $g(x, \alpha) \in R^+$ plyne $g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, g(x, \alpha))$, takže $V(x, w, \alpha)$ je předpisem 3.3 (2) skutečně definováno a má vlastnost (ii).

Nechť existují zobrazení (1) s vlastnostmi (i) až (iii). Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$. Definujme zobrazení z 3.7 (1) tak, aby byl splněn vztah

$$a(\zeta(\alpha, \omega)) \geqq \zeta_0(\alpha, \omega).$$

Podle vlastnosti (i) existuje řešení $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že zobrazení V je nerostoucí podél σ. Nyní se snadno ukáže, že řešení $s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$ a zobrazení ζ vyhovují definici 3.7. Platí totiž pro $g(s(\vartheta), \vartheta) \in R^+$, $\vartheta \in \langle\alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R vztah

$$a(g(s(\vartheta), \vartheta)) \leqq V(\sigma(\vartheta), \vartheta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq \zeta_0(\alpha, \omega) \leqq a(\zeta(\alpha, \omega)),$$

odkud plyne $g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \zeta(\alpha, \omega)$. Je tedy p slabě stejně omezený vzhledem k m.

3.9. Definice. Říkáme, že p je *slabě stejně asymptoticky omezený* vzhledem k m, právě když p je slabě stejně omezený vzhledem k m a existují konstanta

(1) $$\varkappa \in R^+$$

a zobrazení

(2) $$T : R \times R^+ \to R^+$$

takové, že platí

(3) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega \Rightarrow g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varkappa$ pro nějaké s z 3.7 (2) a všechna $\vartheta \geqq \alpha + T(\alpha, \omega)$ v domain s.

3.10. Věta. *Nechť p je globální restringovaný proces. Nechť existují zobrazení 3.8 (1) s vlastnostmi 3.8 (ii) a 3.8 (iii), zobrazení $c : R^0 \to R^+$ zdola omezené na každém kompaktním podintervalu intervalu R^+ kladnou konstantou a konstanty $\varkappa_0, \varkappa_1 \in R^+$ s následujícími vlastnostmi:*

(iv) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) < \varkappa_1 \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq \varkappa_0$,

(v) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow V(\sigma(\gamma), \gamma) - V(\sigma(\beta), \beta) \leqq -\int_\beta^\gamma c(g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(v), v))\, dv$ *pro nějaké $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ a každé $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma \in$ domain σ.*

Potom je p slabě stejně asymptoticky omezený vzhledem k m.

Důkaz. Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$. Podle vlastnosti (v) existuje $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že V je nerostoucí podél σ. Odtud a z vlastností 3.8 (ii), 3.8 (iii) dostáváme podle věty 3.8, že p je slabě stejně omezený vzhledem k m. Nechť ζ je zobrazení z definice 3.7. Položme

$$\lambda(\alpha, \omega) = \inf \{c(v) : \varkappa_1 \leqq v \leqq \zeta(\alpha, \omega)\}.$$

Definujeme-li zobrazení T z 3.9 (2) předpisem

$$T(\alpha, \omega) = 1 + \frac{\zeta_0(\alpha, \omega)}{\lambda(\alpha, \omega)},$$

řešení s restringovaného procesu p vztahem

$$s = \text{proj}_1 \circ \sigma$$

a konstantu $\varkappa$ z 3.9 (1) tak, aby platilo

$$a(\varkappa) \geqq \varkappa_0,$$

ukážeme podobně jako u důkazu věty 3.5, že pro $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \omega$ a všechna $\vartheta \geqq \alpha + T(\alpha, \omega)$ v domain s platí $g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p slabě stejně asymptoticky omezený vzhledem k m.

3.11. Poznámka. V obou předcházejících větách lze podmínku 3.8 (iii) nahradit podmínkou 2.4 (iii)'.

3.12. Definice. Říkáme, že p je *slabě stejnoměrně omezený* vzhledem k m, právě když existuje zobrazení

(1) $$\xi : R^+ \to R^+$$

takové, že platí

(2) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi \Rightarrow g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \xi(\psi)$ pro nějaké $s \in S(x, w, \alpha)$ a všechna $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R.

3.13. Věta. *p je slabě stejnoměrně omezený vzhledem k m, právě když existují zobrazení*

(1) $V : E \to R^0$, *rostoucí* $a : R^+ \to R^+$, $a(\psi) \to +\infty$ *pro* $\psi \to +\infty$, *neklesající* $b : R^0 \to R^+$,

s následujícími vlastnostmi:

(i) *V je slabě ljapunovská funkce,*
(ii) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \in R^+ \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, w, \alpha)$,
(iii) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow V(x, w, \alpha) \leqq b(g(x, \alpha))$.

Důkaz. Nechť p je slabě stejnoměrně omezený. Podle definice 3.12 k danému $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$ existuje řešení $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že pro $s = \text{proj}_1 \circ \sigma$ platí 3.12 (2). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že zobrazení ξ z 3.12 je rostoucí. Definujme zobrazení $V: E \to R^0$ předpisem 3.3 (2). Odtud a z 3.12 (2) plyne, že zobrazení V je tímto vztahem skutečně definováno a má vlastnost (i). Definujme zobrazení a, b z (1) vztahy

$$a(\psi) = \psi\,; \quad b(\psi) = \xi(\psi) \quad \text{pro} \quad \psi \geqq 1\,, \quad b(\psi) = \xi(1) \quad \text{pro} \quad \psi \in \langle 0, 1\rangle\,.$$

Ze vztahů $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R, $g(x, \alpha) \in R^+$ plyne $g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \xi(g(x, \alpha))$, takže také $V(x, w, \alpha) \leqq \xi(g(x, \alpha))$. Zřejmě platí $g(x, \alpha) \leqq V(x, w, \alpha)$, a tedy zobrazení (1) mají vlastnosti (ii) a (iii).

Nechť existují zobrazení (1) s vlastnostmi (i) až (iii). Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$. Definujme zobrazení ξ z 3.12 (1) tak, aby platilo

$$a(\xi(\psi)) \geqq b(\psi)\,.$$

Podle vlastnosti (i) existuje řešení $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že zobrazení V je nerostoucí podél σ. Označme $s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma$. Pak ze vztahů $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, w, \alpha))$ v R, $g(s(\vartheta), \vartheta) \in R^+$ dostáváme

$$a(g(s(\vartheta, \vartheta)) \leqq V(\sigma(\vartheta), \vartheta) \leqq V(x, w, \alpha) \leqq b(\psi) \leqq a(\xi(\psi))\,,$$

odkud plyne $g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \xi(\psi)$. Je tedy p slabě stejnoměrně omezený vzhledem k m.

3.14. Poznámka. Podmínku (ii), resp. (iii), ve větě 3.13 můžeme zřejmě zaměnit podmínkou 2.4 (iii)′, resp. 2.18 (iii)′.

3.15. Poznámka. *Nechť restringovaný proces p připouští periodu $\tau > 0$ a nechť zobrazení g z* 2.1 (2) *je periodické v druhé proměnné s periodou τ. Je-li p slabě stejně omezený vzhledem k m a existuje-li zobrazení $\mu : R^+ \to R^+$ takové, že $\mu(\omega) \geqq \zeta(\alpha, \omega)$ pro všechna $\alpha \in \langle 0, \tau\rangle$, $\alpha \in R$, $\omega \in R^+$ a nějaké ζ vyhovující definici* 3.7, *pak platí:*

(i) *p je slabě stejnoměrně omezený vzhledem k m,*

(ii) *existuje slabě ljapunovská funkce V periodická v poslední proměnné s periodou τ a mající vlastnosti* 3.13 (ii), 3.13 (iii), 2.4 (iii)′ a 2.18 (iii)′.

Důkaz je zřejmý.

3.16. Definice. Říkáme, že p je *slabě stejnoměrně asymptoticky omezený* vzhledem k m, právě když p je slabě stejnoměrně omezený vzhledem k m a existují konstanta

(1) $$\varkappa \in R^+$$

a zobrazení

(2) $$T : R^+ \to R^+$$

takové, že platí

(3) $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi \Rightarrow g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varkappa$ pro nějaké s z 3.12 (2) a všechna $\vartheta \geqq \alpha + T(\psi)$ v domain s.

3.17. Věta. *Nechť p je globální restringovaný proces. Nechť existují zobrazení 3.13 (1) s vlastnostmi 3.13 (ii) a 3.13 (iii), zobrazení $c : R^0 \to R^+$ zdola omezené na každém kompaktním podintervalu intervalu R^+ kladnou konstantou a mající následující vlastnost:*

(iv) $(x, w, \alpha) \in E \Rightarrow V(\sigma(\gamma), \gamma) - V(\sigma(\beta), \beta) \leqq -\int_\beta^\gamma c(g(\mathrm{proj}_1 \circ \sigma(v), v))\, dv$ *pro nějaké* $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ *a každé* $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma \in$ domain σ.

Potom je p slabě stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k m.

Důkaz. Nechť je dáno $(x, w, \alpha) \in E$. Podle vlastnosti (iv) existuje $\sigma \in \Sigma(x, w, \alpha)$ takové, že V je nerostoucí podél σ. Odtud a z vlastností 3.13 (ii) a 3.13 (iii) dostáváme podle věty 3.13, že p je slabě stejnoměrně omezený vzhledem k m. Nechť ξ je zobrazení z definice 3.12. Položme $\lambda(\psi) = \inf\{c(v) : 1 \leqq v \leqq \xi(\psi)\}$. Definujeme-li konstantu $\varkappa$ z 3.16 (1) předpisem

$$\varkappa = \xi(1),$$

zobrazení T z 3.16 (2) předpisem

$$T(\psi) = 1 + \frac{b(\psi)}{\lambda(\psi)}$$

a řešení s restringovaného procesu p vztahem

$$s = \mathrm{proj}_1 \circ \sigma,$$

ukážeme podobně jako v důkazu věty 3.5, že pro $(x, w, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi$ a všechna $\vartheta \geqq \alpha + T(\psi)$ v domain s platí $g(s(\vartheta), \vartheta) \leqq \varkappa$. Je tedy p slabě stejnoměrně asymptoticky omezený vzhledem k m.

3.18. Poznámka. Zřejmě v předcházející větě lze podmínku 3.13 (ii), resp. 3.13 (iii), nahradit podmínkou 2.4 (iii)', resp. 2.18 (iii)'.

Literatura

[1] *Nagy, J.:* Ljapunov's direct method in abstract control processes, Čas. pro pěst. mat. *93*, 1968, 299—325.

[2] *Tumajer, F.:* Omezenost abstraktních procesů, Čas. pro pěst. mat. *95*, 1970, 196—211.

Adresa autora: Liberec, Hálkova 6 (Vysoká škola strojní a textilní).

Summary

LIAPUNOV'S FUNCTIONS IN THE THEORY OF BOUNDEDNESS OF ABSTRACT RESTRICTED PROCESSES

FRANTIŠEK TUMAJER, Liberec

The notions of strong boundedness, strong asymptotical boundedness, strong equiboundedness, strong asymptotical equiboundedness and their uniform and weak modifications for abstract restricted processes are introduced. By means of Liapunov's functions theorems are proved which give sufficient and in most cases also necessary conditions for the above-mentioned types of boundedness.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

ON AN APPLICATION OF THE STONE THEOREM IN THE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

VALTER ŠEDA, Bratislava

(Received September 4, 1970)

In the theory of differential equations one often solves a given problem by approximating it by a similar one with additional properties which allow to solve it and then by making a limit passage. This method sometimes requires the approximation of a continuous function by means of smoother functions, usually by polynomials. However, when some additional properties of the approximating functions are required, the Weierstrass theorem is of no use. Still much can be done by using the more poverful Stone theorem. This theorem is especially useful when the uniform approximation of a continuous function by means of Hölder continuous functions is required. This case is of importance in the theory of differential equations. Of course, the same method can be applied to other classes of continuous functions such as to the class of continuous functions of bounded variation etc.

Let (R, ϱ) be a metric space, $\emptyset \neq M \subset R$ be a set and let $d(M)$ be the diameter of M. A set $A \neq \emptyset$ of real continuous functions on M (in what follows only real continuous functions are considered) will be called *a lattice of continuous functions on* M if with each pair $f, g \in A$ also $\max(f, g) \in A$ and $\min(f, g) \in A$. $H_\alpha(M)$ will mean the set of all Hölder continuous functions on M of exponent α, $0 < \alpha \leqq 1$. Thus $f \in H_\alpha(M)$ iff f is defined on M and there exists a constant $L = L(f) > 0$ such that for any two points $x, y \in M$ the inequality $|f(y) - f(x)| \leqq L[\varrho(x, y)]^\alpha$ is true. The following remarks will be of use.

a) If $d = d(M) < +\infty$, in virtue of the inequality $|h(y)\,g(y) - h(x)\,g(x)| \leqq$ $\leqq |h(y) - h(x)| \,.\, |g(y)| + |g(y) - g(x)| \,.\, |h(x)|$, $x, y \in M$ being arbitrary points, and by the boundedness of $h, g \in H_\alpha(M)$ it follows that $H_\alpha(M)$ forms an algebra of continuous functions on M.

b) Since for each $f \in H_\alpha(M)$ also $|f| \in H_\alpha(M)$, and on basis of the equalities $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$, $\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$ which are true for arbitrary real numbers a, b, we get that $H_\alpha(M)$ is a lattice of continuous functions on M.

c) If $d = d(M) < +\infty$, and β satisfies the inequalities $0 < \alpha \leqq \beta \leqq 1$, then from the relation $[\varrho(x, y)]^\beta \leqq [\varrho(x, y)]^\alpha$ and $[\varrho(x, y)]^\beta \leqq d^{\beta-\alpha}[\varrho(x, y)]^\alpha$, respectively, which is valid for $\varrho(x, y) \leqq 1$ and $1 < \varrho(x, y) \leqq d$ (if $d > 1$), respectively, it follows that $H_\beta(M) \subset H_\alpha(M)$.

d) If $f \in H_\alpha(M)$ for $0 < \alpha \leqq 1$, then there exists an extension f_0 of the function f on R with the property $f_0 \in H_\alpha(R)$ ([1], p. 117–118). The proof of that statement is given in the euclidean space, but applies to an arbitrary metric space.

The last remark deals with locally compact separable metric spaces. If (R, ϱ) is such a space, then there exists an increasing sequence $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ of compact sets in R such that $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. This follows from the Theorem 3.18.3, [2], p. 62.

Before going to give the application of the Stone theorem, we shall state this theorem in an appropriate formulation. (For the proof, see [3], p. 150–152.)

Stone's theorem. *Let M be a compact set, $f \in C_0(M)$ and let A be a lattice of continuous functions on M with the following property:*

(a) *For every pair $x, y, x \neq y$, of points of M, there exists a function $g \in A$ such that $g(x) = f(x)$, $g(y) = f(y)$.*

Then there exists a sequence $\{f_n\}$ of functions $f_n \in A$ which uniformly converges to f on M.

Recall that an algebra A of functions on M which separates points on M and vanishes at no point of M has the property (a) ([3], p. 149).

Theorem 1. *Let M be a compact set, α be a real number satisfying the inequalities $0 < \alpha \leqq 1$ and $f \in C_0(M)$. Let further the functions $F_1, F_2 \in H_\alpha(M)$ and such that $F_1(x) \leqq f(x) \leqq F_2(x)$ for each $x \in M$. Then there exists a sequence $f_n \in H_\alpha(M)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ which is uniformly convergent to f on M whereby*

$$F_1(x) \leqq f_n(x) \leqq F_2(x) \tag{1}$$

for each $x \in M$ and all natural n.

Proof. By the remarks a) and b), $H_\alpha(M)$ forms an algebra as well as a lattice of continuous functions on M. Since for $x_1 \in M$ the function $\varrho(x, x_1) \in H_1(M) \subset H_\alpha(M)$ (with regard to the remark c) is such that $\varrho(x_1, x_1) = 0 < \varrho(x_2, x_1)$ for $x_2 \in M$, $x_2 \neq x_1$, and $H_\alpha(M)$ contains a constant function different from 0, the lattice $H_\alpha(M)$ has the property (a). Hence, by the Stone theorem, there exists a sequence $g_n \in H_\alpha(M)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ which is uniformly convergent to f on M.

Let us consider now the functions f_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, defined on M in this way:

$$f_n(x) = \begin{cases} g_n(x) & \text{if} \quad F_1(x) \leqq g_n(x) \leqq F_2(x) \\ F_2(x) & \text{if} \quad F_2(x) < g_n(x) \\ F_1(x) & \text{if} \quad g_n(x) < F_1(x) \end{cases}$$

The sequence f_n already satisfies the inequalities (1) for each $x \in M$ and all natural n, and is uniformly convergent to f on M. Further by the remark b) as well as by the equality $f_n(x) = \max\{F_1(x), \min[g_n(x), F_2(x)]\}$, $x \in M$, we have that all $f_n \in H_\alpha(M)$.

Theorem 2. *Let (R, ϱ) be a locally compact separable metric space and $\{M_m\}_{m=1}^{\infty}$ an arbitrary increasing sequence of compact sets in R such that $R = \bigcup_{m=1}^{\infty} M_m$. Let the number α satisfy the inequalities $0 < \alpha \leqq 1$. Let the function $f \in C_0(R)$. Then there exists a sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ of the functions $f_n \in H_\alpha(R)$ which is uniformly convergent to f on each M_m, $m = 1, 2, 3, \ldots$*

If moreover there exist two functions F_1, F_2 such that $F_1, F_2 \in H_\alpha(R)$ (for each $m = 1, 2, 3, \ldots$, $F_1, F_2 \in H_\alpha(M_m)$) and $F_1(x) \leqq f(x) \leqq F_2(x)$ for every $x \in R$, then the sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfies the inequalities (1) for each $x \in R$ and all natural n (the sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfies the inequalities (1) for each $x \in R$ and all natural n, but instead of $f_n \in H_\alpha(R)$ it is only true that $f_n \in H_\alpha(M_m)$ for each $m = 1, 2, 3, \ldots$).

Proof. By Theorem 1 for each $m = 1, 2, 3, \ldots$ there exists a function $g_m \in H_\alpha(M_m)$ such that $|g_m(x) - f(x)| \leqq 1/m$, $x \in M_m$. Let g_{m0} be its extension with $g_{m0} \in H_\alpha(R)$ as it is mentioned in the remark d). Then, with respect to the inclusion $M_m \subset M_{m+1}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, the sequence $\{g_{n0}\}$ uniformly converges to f on each M_m, $m = 1, 2, 3, \ldots$

If $F_1, F_2 \in H_\alpha(R)$ (if $F_1, F_2 \in H_\alpha(M_m)$ for each $m = 1, 2, 3, \ldots$) and $F_1(x) \leqq f(x) \leqq F_2(x)$, $x \in R$, we define the functions f_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ on R by the relation $f_n(x) = \max\{F_1(x), \min[g_{n0}(x), F_2(x)]\}$. The sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfies the inequalities (1) for all $x \in R$ and all natural n, is uniformly convergent to f on each M_m and by the remark b) all $f_n \in H_\alpha(R)$ (all $f_n \in H_\alpha(M_m)$ for $m = 1, 2, 3, \ldots$).

Remarks. 1. By approximating a continuous function by means of polynomials in the euclidean space R^n we obtain Theorems 1 and 2 only in a special case when $F_1 \leqq f - \varepsilon$, $F_2 \geqq f + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

2. When the Stone theorem is considered in a compact topological space, then Theorem 2 is true for a σ-compact space R.

3. Theorem 2 was applied to the proof of the existence of a generalized solution to the first boundary value problem for a nonlinear parabolic equation [4]. Here another theorem is given by means of which a result in the theory of ordinary differential equations will be improved.

Theorem 3. *Suppose a is a real number, $f = f(x, y, z)$ is continuous on $D = \langle a, +\infty) \times R^2$ and such that*

b) f is nondecreasing in y for fixed x, z, f is nondecreasing in z for fixed x, y,

c) $f(x, 0, 0) \equiv 0$ on $\langle a, +\infty)$.

Then there exists a sequence $\{f_n\}$ of functions $f_n \in C_0(D)$ satisfying the conditions b) and c) as well as

d) a Lipschitz condition with respect to z on each compact subset of D which uniformly converges to f on each compact subset of D.

Proof. For each natural m, let $M_m = \langle a, a + m\rangle \times \langle -m, m\rangle \times \langle -m, m\rangle$. Let us choose and fix an M_m. Let A be the set of all functions $f \in C_0(D)$ having the properties b), c) and d). $A \neq \emptyset$, since $f_1(x, y, z) \equiv y + z \in A$. When considering the restriction of the functions $g \in A$ on M_m, we shall show that A is a lattice of continuous functions on M_m with the property (a). This will imply that there is a function $f_m \in A$ such that $|f(x, y, z) - f_m(x, y, z)| < 1/m$ for $(x, y, z) \in M_m$. Then $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ will possess all required properties.

If $g_1 \in A$, $g_2 \in A$, $(x, y_1, z) \in M_m$, $(x, y_2, z) \in M_m$ and $g_i(x, y_k, z) = g_{ik}$, $i, k = 1, 2$, then in the case $g_{11} \leqq g_{21}$, $g_{12} \geqq g_{22}$

$$\min (g_{12}, g_{22}) = g_{22} \geqq g_{21} \geqq \min (g_{11}, g_{21})$$

and

$$\max (g_{11}, g_{21}) = g_{21} \leqq g_{22} \leqq \max (g_{12}, g_{22}) .$$

The same result will be obtained in the other cases. It can be similarly proved that $\min (g_1, g_2)$ as well as $\max (g_1, g_2)$ are nondecreasing in z, too. Hence $\min (g_1, g_2)$, $\max (g_1, g_2)$ possess the property b). The property c) is clearly shared by these two functions. Finally, by using the remark b) we have that A is a lattice of continuous functions on M_m.

In proving that A satisfies the condition (a), the following lemma will be useful.

Lemma 1. *Given three points (y_i, z_i), $i = 0, 1, 2$, on the plane and a function $f_0 = f_0(y, z)$ which is the restrinction to these points of a function satisfying the condition b) from the last theorem, there exists an extension g_0 of f_0 on the whole plane which is continuous, fulfils the condition b) and satisfies a Lipschitz condition with respect to z on the entire plane.*

Proof. The straight lines $y = y_i$, $z = z_i$, $i = 0, 1, 2$, divide the plane into a system of rectangles, half-stripes and quadrants. f_0 can be extended first to all vertices of those sets and then to the entire plane, by using the linear inter- and extrapolation in such a way that g_0 possesses all the properties stated in the lemma.

Now, consider two different points $(x_i, y_i, z_i) \in M_m$, $i = 1, 2$. When $x_1 \neq x_2$, by Lemma 1, there exist two functions $g_i = g_i(x, y, z)$ defined on the plane $x = x_i$, $i = 1, 2$, such that $g_i(x_i, 0, 0) = 0$, $g_i(x_i, y_i, z_i) = f(x_i, y_i, z_i)$, having the property b) and d). The functions g_i can be extended into a function $g \in C_0(D)$ possessing the required properties b), c) and d) and satisfying

$$g(x_i, y_i, z_i) = f(x_i, y_i, z_i)\,, \quad i = 1, 2\,. \tag{2}$$

If $x_1 = x_2$, again by Lemma 1, there exists a function g_1 with the properties mentioned in Lemma 1 such that $g_1(x_1, y_i, z_i) = f(x_1, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$, and $g_1(x_1, 0, 0) = 0$. Then $g(x, y, z) = g_1(x_1, y, z)$ for $x \in \langle a, \infty)$, y, z arbitrary shows all the desired properties. Thus $g \in A$ and satisfies the conditions (2).

By means of Theorem 3 a theorem by L. K. Jackson [5], p. 342, will be improved. Preserving the notations from Theorem 3, the statement of the Jackson's theorem given here as Lemma 2 is as follows:

Lemma 2. *Let $f = f(x, y, z)$ be continuous on D, satisfy the conditions b) and c). Assume either that f satisfies d) or is such that the solutions of initial-value problems for $y'' = f(x, y, y')$ are unique.*

Then for any real A the boundary-value problem

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = A \tag{3}$$

has a unique bounded solution on $\langle a, \infty)$.

From the proof of that theorem it follows that this unique bounded solution y satisfies the inequalities: If $A \geqq 0$ $(A < 0)$, then $0 \leqq y(x) \leqq A$, $y'(x) \leqq 0$, for every $x \geqq a$ (then $A \leqq y(x) \leqq 0$, $y'(x) \geqq 0$, for $x \geqq a$). The bounds for y' from the other side are given by

Lemma 3. *Suppose that f satisfies all conditions from Lemma 2, for every $x \geqq a$, $y \geqq 0$, $S(x, y) = \{(s, t) : x \leqq s \leqq x + 1,\ 0 \leqq t \leqq y(1 - s + x)\}$ for every $x \geqq a$, $y < 0$, $S(x, y) = \{(s, t) : x \leqq s \leqq x + 1,\ y(1 - s + x) \leqq t \leqq 0\}$, $M(x, y) = \max_{(s,t)\in S(x,y)} f(s, t, 0)$, $m(x, y) = \min_{(s,t)\in S(x,y)} f(s, t, 0)$. Then the unique bounded solution y of the problem (3) satisfies for $x \geqq a$ the inequality*

$$y' \geqq -y - M(x, y) \tag{4}$$

when $A \geqq 0$ and the inequality

$$y' \leqq -y - m(x, y)$$

if $A < 0$.

Proof. Consider only the case $A \geqq 0$. The remaining case can be dealt with similarly. Let x, $a \leqq x < \infty$, be arbitrary but fixed. By the properties b) and c) of f, $M(x, y) \geqq 0$. Two cases may happen: 1. $y'(x) \geqq -y(x)$. Then (4) is true at x. 2. $y'(x) < -y(x)$. Then $y(x) > 0$ since otherwise $y(x + \delta) < 0$ for a $\delta > 0$. Let H be the hypotenuse of $S(x, y)$. y must cross H at a point b, $x < b \leqq x + 1$. By the mean value theorem there is a point c, $x < c < b$, such that $y'(c) = -y(x)$. Then there exists c_1, $x < c_1 \leqq c$, with $y'(s) < -y(x)$ for $x \leqq s < c_1$, $y'(c_1) = -y(x)$

and $(s, y(s)) \in S(x, y)$, $x \leqq s \leqq c_1$. This implies

$$y'(c_1) = \dot{-} y(x) = y'(x) + \int_x^{c_1} f(s, y(s), y'(s))\, ds \leqq y'(x) + \int_x^{c_1} f(s; y(s), 0)\, ds \leqq$$
$$\leqq y'(x) + M(x, y)\,.$$

Again (4) is true.

Applying the last theorem and lemmas the following theorem will be proved. The notations will be the same as in Theorem 3.

Theorem 4. *Suppose $f = f(x, y, z)$ is continuous on D and fulfils the conditions b) and c). Then for every real A the boundary-value problem* (3) *has at least one bounded solution on* $\langle a, \infty)$.

Proof. The case $A = 0$ is trivial. The case $A < 0$ can be dealt with similarly to the case $A > 0$, therefore only the last case will be considered.

By Theorem 3, there exists a sequence $\{f_n\}$ of functions $f_n \in C_0(D)$ satisfying the conditions b), c) and d) which is uniformly convergent to f on each compact subset of D. Lemma 2 then assures that the problem

$$(5) \qquad y'' = f_n(x, y, y')\,, \quad y(a) = A$$

has a unique bounded solution y_n on $\langle a, \infty)$. Following the remark after Lemma 2, and by Lemma 3, all y_n satisfy the inequalities:

$$(6) \qquad 0 \leqq y_n(x) \leqq A\,, \quad -A - M(x, A) \leqq -y_n(x) - M(x, y_n(x)) \leqq$$
$$\leqq y_n'(x) \leqq 0\,, \quad x \geqq a\,.$$

Choose an arbitrary positive integer m. By the continuity of f_n the inequalities (6) imply that $\{y_n''\}$ is uniformly bounded on $\langle a, a + m\rangle$ and so, both sequences $\{y_n\}$, $\{y_n'\}$ are uniformly bounded and equicontinuous on $\langle a, a + m\rangle$. Therefore there is a subsequence $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ which is uniformly convergent on $\langle a, a + m\rangle$ together with $\{y_{n_k}'\}_{k=1}^{\infty}$ to a function y, and its derivative, respectively. Making use of (5) we have that $\{y_{n_k}''\}_{k=1}^{\infty}$ is uniformly convergent to y'' on the same interval and that y satisfies $y'' = f(x, y, y')$ on $\langle a, a + m\rangle$. In this way for every $m = 1, 2, 3, \ldots$ a sequence $\{y_{m,n}\}_{n=1}^{\infty}$ can be constructed such that:

1. $\{y_{1,n}\}$ is a subsequence of $\{y_n\}$;
2. $\{y_{m+1,n}\}$ is a subsequence of $\{y_{m,n}\}$ for every $m = 1, 2, 3, \ldots$;
3. The sequences $\{y_{m,n}\}$, $\{y_{m,n}'\}$, $\{y_{m,n}''\}$ are uniformly convergent on $\langle a, a + m\rangle$ to a function $\bar{y}_m$ and $\bar{y}_m'$, $\bar{y}_m''$ respectively, whereby $\bar{y}_m''(x) = f(x, \bar{y}_m(x), \bar{y}_m'(x))$ for every $x \in \langle a, a + m\rangle$. By 2., $\bar{y}_{m+1}(x) = \bar{y}_m(x)$ for every $x \in \langle a, a + m\rangle$ and so there is a function y on $\langle a, \infty)$ such that $y(x) = \bar{y}_m(x)$ on $\langle a, a + m\rangle$. From 1. and 3. it follows that y is a bounded solution of (3) on $\langle a, \infty)$.

Bibliography

[1] *L. M. Graves:* The Theory of Functions of Real Variable, Mc Graw-Hill, New York, 1946.
[2] *J. Dieudonné:* Foundations of Modern Analysis, New York 1960.
[3] *W. Rudin:* Principles of Mathematical Analysis, Mc Graw-Hill, Kogakusha, New York, Tokyo, 1964.
[4] *V. Šeda:* On the Existence of a Generalized Solution to the First Initial-Boundary Value Problem for a Non-linear Parabolic Equation, Ann. di Mat. p. ed app. *87* (1970), pp. 375—388.
[5] *L. K. Jackson:* Subfunctions and Second- Order Ordinary Differential Inequalities, Advances in Mathematics, *2* (1968), pp. 307—363.

Author's address: Bratislava 16, Mlynská dolina, (Prírodovedecká fakulta Komenského Univerzity).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

CONTINUITY AND DIFFERENTIABILITY PROPERTIES OF NONLINEAR OPERATORS

JOSEF KOLOMÝ, Praha

(Received October 5, 1970)

1. INTRODUCTION

A number of fixed-point theorems and approximate methods of solutions of nonlinear equations involving continuous, weakly continuous and strongly continuous operators have been recently discovered by methods of the nonlinear functional analysis. Hence it is important to establish some simple conditions under which a mapping F or its derivative $F'(u)$ possess certain continuity properties at some point $u_0 \in X$ or on some subset M of a normed linear space X.

This note is devoted to the study of the above mentioned problems and it is a continuation of our papers [1], [2], [3], [4]. For the recent results concerning the related topics, see the bibliography in [1–4].

2. TERMINOLOGY AND NOTATION

Let X, Y be normed linear spaces, X^*, Y^* their (adjoint) dual spaces. The pairing between the points of X^* or Y^* and the elements of X or Y respectively we denote by $\langle . , . \rangle$. We use the symbols "$\rightarrow$", "$\rightharpoonup$" to denote the strong and weak convergence in X, Y. To fix our notation we introduce the following well-known definitions. A mapping $F : X \rightarrow Y$ is said to be

a) "closable" if $u_n \rightarrow 0$, $F(u_n) \rightarrow v$ implies $v = F(0)$;
b) weakly continuous at $u_0 \in X$, if $u_n \rightharpoonup u_0$ implies $F(u_n) \rightharpoonup F(u_0)$;
c) strongly continuous at $u_0 \in X$, if $u_n \rightharpoonup u_0$ implies $F(u_n) \rightarrow F(u_0)$;
d) bounded in X, if for each bounded subset $M \subset X$, $F(M)$ is bounded in X;
e) compact in X, if for each bounded set $N \subset X$, $F(N)$ is compact in Y (a subset $M \subset X$ is called compact in X, if from each sequence $(u_n) \in M$ one can select a subsequence (u_{n_k}) so that (u_{n_k}) converges to some point $u_0 \in X$);
f) p – positively homogeneous on X, if $F(tu) = t^p F(u)$ for each $t \geqq 0$ and $u \in X$, $(p > 0)$.

A mapping $F : X \to X^*$ is said to be monotone, if $\langle F(u) - F(v), u - v\rangle \geqq 0$ for each $u, v \in X$.

For the Gâteaux, Fréchet differentials and derivatives, the notions of compactness, strong continuity of the Fréchet derivative and uniform differentiability of mappings see the terminology and notations given in the Vainberg's book [5, Chap. I.]. We need also the concept of the bounded differential which is due to SUCHOMLINOV [6]. This notion can be introduced equivalently as follows: We shall say that a mapping $F : X \to Y$ possesses a bounded differential $dVF(u_0, h)$ at $u_0 \in X$, if

$$F(u_0 + h) - F(u_0) = dVF(u_0, h) + \omega(u_0, h), \quad h \in X,$$

where $\lim_{\|h\| \to 0} \|\omega(u_0, h)\|/\|h\| = 0$, $dVF(u_0, .)$ is bounded in some open neighborhood $V(0)$ of 0 and $dVF(u_0, \alpha h) = \alpha\, dVF(u_0, h)$ for each real α, $h \in X$.

Suppose that there exists a linear Gâteaux differential $DF(u, h)$ in some neighborhood $V(u_0)$ of $u_0 \in X$. Then $DF(u, h)$ is said to be

g) continuous jointly at $(u_0, u_0) \in X \times X$, if $(u_n) \in V(u_0)$, $(h_n) \in X$, $u_n \to u_0$, $h_n \to u_0$ imply

$$DF(u_n, h_n) \to DF(u_0, u_0);$$

h) weakly continuous jointly (strongly continuous jointly) at (u_0, u_0) if $(u_n) \in V(u_0)$, $(h_n) \in X$, $u_n \rightharpoonup u_0$, $h_n \rightharpoonup u_0$ imply $DF(u_n, h_n) \rightharpoonup DF(u_0, u_0)$ $(DF(u_n, h_n) \to DF(u_0, u_0))$.

3. CONTINUITY AND DIFFERENTIABILITY OF NONLINEAR OPERATORS

Theorem 1. *Let X, Y be normed linear spaces, F a p-positively homogeneous mapping on X. Suppose one of the following two conditions to be fulfilled:* 1) $F : X \to Y$, $\dim Y < \infty$, *F is "closable".* 2) $F : X \to X^*$ *is monotone on X*, $\dim X < \infty$. *Then F is continuous at* 0 *and bounded in X.*

Proof. First of all, $F(0) = 0$. Suppose that F is not continuous at 0. Then there exists a sequence $(v_n) \in X$, $v_n \to 0$ and $\varepsilon_0 > 0$ so that $\|F(v_n)\| \geqq \varepsilon_0$. Set

$$u_n = \frac{1}{\|F(v_n)\|^{1/p}}\, v_n, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Then $\|u_n\| \leqq (1/\varepsilon_0^{1/p})\,\|v_n\| \to 0$ whenever $n \to \infty$ and

$$\|F(u_n)\| = \left\|F\left(\frac{1}{\|F(v_n)\|^{1/p}}\, v_n\right)\right\| = \left(\frac{1}{\|F(v_n)\|^{1/p}}\right)^p . \|F(v_n)\| = 1$$

for each n $(n = 1, 2, \ldots)$. Denote $K = \{y \in Y : \|y\| \leqq 1\}$, $K^* = \{\omega^* \in X^* : \|\omega^*\| \leqq 1\}$. As $\dim Y < \infty$ and $\dim X = \dim X^*$ in the case 2), the Riesz's theorem implies that K, K^* are compact in Y, X^*, respectively. Hence there exists a subsequence $(F(u_{n_k}))$ of $(F(u_n))$ so that $F(u_{n_k}) \to y$ as $k \to \infty$ and $y \in Y$, $y \in X^*$, respectively. Assume 1), then $u_{n_k} \to 0$, $F(u_{n_k}) \to y$ imply $y = F(0) = 0$, a contradiction to $\|y\| = 1$. Assuming 2), we have $\langle F(u) - F(u_{n_k}), u - u_{n_k}\rangle \geqq 0$, $u \in X$. Passing to the limit in this inequality, we obtain $\langle F(u) - y, u\rangle \geqq 0$ for all $u \in X$. Set $u = tv$, $t > 0$, $v \in X$. Then $\langle F(tv) - y, v\rangle \geqq 0$, $v \in X$. Since

$$\lim_{t \to 0+} \|F(tu)\| = \lim_{t \to 0+} t^p \|F(u)\| = 0\,,$$

we conclude that $\langle y, v\rangle = 0$ for every $v \in X$. Therefore $y = 0$, a contradiction to $\|y\| = 1$. Hence F is continuous at 0 in the both cases 1), 2). Thus for given $\varepsilon = 1$ there exists $\delta_0 > 0$ so that $\|u\| \leqq \delta_0 \Rightarrow \|F(u)\| < 1$. Let $D_R(0) = \{u \in X : \|u\| \leqq R\}$ be an arbitrary closed ball in X. Then there exists an integer n_0 so that $R/n_0 \leqq \delta_0$. For $u \in D_R(0)$ it holds

$$\|F(u)\| = \left\|F\left(\frac{u}{n_0} . n_0\right)\right\| = n_0^p \left\|F\left(\frac{u}{n_0}\right)\right\| < n_0^p\,.$$

Hence F is bounded in X. This completes the proof.

Theorem 2. *Let X, Y be linear normed spaces, $F : X \to Y$ a p – positively homogeneous operator. Let one of the following three conditions be fulfilled:* (a) *There exists an open subset $G \subset X$, $0 \in G$, so that $\sup_{u \in G} \|F(u)\| < +\infty$.* (b) *There exists a Baire subset $M \subset X$ of the second category in X such that $\sup_{u \in M} \|F(u)\| < +\infty$ and*

$$\|F(u - v)\| \leqq f(\max(\|u\|, \|v\|)) \max(\|F(u)\|, \|F(v)\|) \tag{1}$$

for each $u, v \in M$, where a real function $f(r)$ is defined on $J = [0, +\infty]$ and is bounded on each subinterval $[0, a]$ of J. (c) *$(u_n) \in X$, $u \in X$, $u_n \to u \Rightarrow \|F(u)\| \leqq \leqq \varliminf_{n \to \infty} \|F(u_n)\|$, X is of the second category in itself and F satisfies* (1) *on X.*

Then F is continuous at 0 *and bounded in X.*

Proof. First of all we prove (a). Assume $\varepsilon_0 > 0$ is such that $\|u\| < \varepsilon_0 \Rightarrow u \in G$. Suppose F is not continuous at 0. Then there exists a sequence $(u_n) \in X$, $u_n \to 0$ such that $\|F(u_n)\| \geqq m > 0$. Set

$$v_n = \frac{\varepsilon_0}{2\|u_n\|}\, u_n\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Then $v_n \in G$ and

$$\|F(v_n)\| = \left(\frac{\varepsilon_0}{2\|u_n\|}\right)^p \|F(u_n)\| \geq \left(\frac{\varepsilon_0}{2\|u_n\|}\right)^p m\,.$$

It is $u_n \to 0$, $\lim_{n\to\infty} (\varepsilon_0^p/(2\|u_n\|)^p) = +\infty$ and therefore $\sup_{n=1,2,\dots} \|F(v_n)\| = +\infty$, a contradiction to $v_n \in G$. Hence F is continuous at 0. Assume (b). According to the well-known theorem [7, Chap. 3] the set W of all differences $w = u - v$, where $u, v \in \in M$, is a neighbourhood of 0. Using (1), we see that F is bounded on some open neighbourhood of 0. This fact together with the assertion (a) imply that F is continuous at 0. Assuming (c), let $X_n = \{u \in X : \|F(u)\| \leqq n\}$. Then X_n are closed and $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. By the Baire Category Theorem at least one of X_n, say X_{n_0} contains an open ball $D \neq \emptyset$. Since X is of the second category in itself and D is open, D is a Baire subset of the second category in X. Moreover, $\sup_{u\in D} \|F(u)\| \leqq n_0$. Now it suffices to apply (b). Hence F is continuous at 0 in all the cases (a), (b), (c). This property together with the p – positive homogeneity imply the boundedness of F in X. Theorem is proved.

Let us remark that we need not require the assumption of the p – positive homogeneity of F for the boundedness of F in (c). Compare with the proof of Theorem 1 [3]. Theorem 2 extends the Banach's results [8], see also [9], which concern the continuity properties of linear operations.

Theorem 3. *Let X, Y be normed linear spaces, $F : M \to Y$, $M \subset X$ a bounded subset of X, $K : X \to Y$ a linear compact mapping in X such that $\|F(u) - F(v) - K(u - v)\| \leqq \alpha\|u - v\|$, $(\alpha > 0)$ for each $u, v \in M$. Suppose there is a constant $\gamma > 0$ such that $\|F(u) - F(v)\| \geqq \gamma\|u - v\|$, $u, v \in M$. If $\gamma > \alpha$, then F is strongly continuous on M.*

Proof. For $u, v \in M$ we have

$$\|F(u) - F(v)\| \leqq \alpha\|u - v\| + \|K(u - v)\| \leqq$$

$$\leqq \frac{\alpha}{\gamma} \|F(u) - F(v)\| + \|K(u - v)\| .$$

Hence

$$\|F(u) - F(v)\| \leqq \left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right)^{-1} \|K(u - v)\| , \quad u, v \in M .$$

Suppose u_0 is an arbitrary point of M and $(u_n) \in M$, $u_n \rightharpoonup u_0$. As K is compact and linear, $Ku_n \rightharpoonup Ku_0$. Since $(Ku_n) \in K(M)$ and the weak convergence is equivalent with the strong one on a compact set [5, chapt. I.], $Ku_n \to Ku_0$. Hence K is strongly continuous in X and in view of the last inequality $F(u_n) \to F(u_0)$. This concludes the proof.

The following theorem is a completion and generalization of Proposition 1 [10].

Theorem 4. *Let X, Y be normed linear spaces, $F : X \to Y$ a mapping having a linear Gâteaux differential $DF(u, h)$ on some convex neighborhood $V(u_0)$ of $u_0 \in X$.*

If $DF(u, .)$ is continuous jointly, weakly continuous jointly, strongly continuous jointly at (u_0, u_0), then F is continuous, weakly continuous, strongly continuous at u_0, respectively.

Corollary 1. *Suppose that $F : M \to Y$ is a compact mapping on a convex bounded set $M \subset X$ and that F possesses a linear Gâteaux differential $DF(u, .)$ on M. If $DF(u, h)$ is weakly continuous jointly at the points of the diagonal ΔM of M ($\Delta M = \{(u, u) : u \in M\}$), then F is strongly continuous on M.*

Corollary 2. *Let $M \subset X$ be an open convex bounded set, $F : M \to Y$ a uniformly Fréchet – differentiable mapping on M. Suppose $F'(u)\, h$ is strongly continuous jointly at the points of the diagonal ΔM of M. If $F'(u)$ is compact on M, then $F'(u)$ is strongly continuous on M.*

Proof. Use Theorem 4 and the arguments similar to those in [5, Thm. 4.5].

Theorem 5. *Let $G \subset X$ be a convex bounded subset of X, $F : G \to Y$ a mapping such that F possesses the Fréchet derivative $F'(u)$ and the second linear Gâteaux differential $D^2F(u, h, k)$ on G. Assume $D^2F(u, h, k)$ is strongly continuous jointly in (u, k) at the points of the diagonal ΔG of G for each (but fixed) $h \in X$. If $F'(u)$ is compact on G, then $F'(u)$ is strongly continuous on G.*

Proof. Let $u_0 \in G$ be arbitrary (but fixed), $(u_n) \in G$ so that $u_n \rightharpoonup u_0$, $h \in X$. By the mean-value theorem for any $e_n^* \in Y^*$, $\|e_n^*\| = 1$, $(n = 1, 2, \ldots)$, we have

$$\begin{aligned}\langle F'(u_n)\, h - F'(u_0)\, h, e_n^* \rangle &= \langle D^2F(u_0 + \tau_n(u_n - u_0), h, u_n - u_0), e_n^* \rangle = \\ &= \langle D^2F(u_0 + \tau_n(u_n - u_0), h, u_n), e_n^* \rangle - \\ &- \langle D^2F(u_0 + \tau_n(u_n - u_0), h, u_0), e_n^* \rangle \leqq \\ &\leqq \|D^2F(u_0 + \tau_n(u_n - u_0), h, u_n) - D^2F(u_0, h, u_0)\| + \\ &+ \|D^2F(u_0, h, u_0) - D^2F(u_0 + \tau_n(u_n - u_0), h, u_0)\|,\end{aligned}$$

where $\tau_n = \tau_n(e_n^*) \in (0, 1)$. As $u_n \rightharpoonup u_0$ and $u_0 + \tau_n(u_n - u_0) \rightharpoonup u_0$, the both terms on the right hand side of the last inequality tend to 0. By the Hahn-Banach theorem we can choose $e_{n(0)}^* \in Y^*$ with $\|e_{n(0)}^*\| = 1$, $(n = 1, 2, \ldots)$ so that

$$\langle F'(u_n)\, h - F'(u_0)\, h, e_{n(0)}^* \rangle = \|F'(u_n)\, h - F'(u_0)\, h\| .$$

Hence $F'(u_n)\, h \to F'(u_0)\, h$ for each $h \in X$ whenever $n \to \infty$. As $(F'(u_n)) \in F'(G) = \{F'(u) : u \in G\}$ and $F'(G)$ is a compact set in the space $(X \to Y)$ of all linear continuous operators from X into Y, $F'(u_n) \to F'(u_0)$ as $n \to \infty$ in the norm of $(X \to Y)$ by Lemma 4.2 [5]. This completes the proof.

Theorem 6. *Let X, Y be normed linear spaces, $F : X \to Y$ a p – positively homogeneous operator on X. If F possesses a bounded differential $dVF(u_0, h)$ at some $u_0 \in X$, then F has $dVF(u, h)$ on the set $\{tu_0, t > 0\}$ and $t^p \omega(u_0, h) = \omega(tu_0, th)$ for each $t > 0$ and $h \in X$.*

Proof. First of all, we prove the following fact: if F possesses the Gâteaux differential $VF(u_0, h)$ at u_0, then $VF(tu_0, h)$ exists and $VF(tu_0, h) = t^{p-1} VF(u_0, h)$ for each $t > 0$ and $h \in X$. Indeed,

$$VF(tu_0, h) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} [F(tu_0 + \alpha h) - F(tu_0)] =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} (1/t) [F(t(u_0 + (\alpha/t) h)) - F(tu_0)] (t/\alpha) =$$

$$= t^{p-1} \lim_{\alpha' \to 0} \frac{1}{\alpha'} [F(u_0 + \alpha' h) - F(u_0)] = t^{p-1} VF(u_0, h), \quad \alpha' = \alpha/t.$$

Now it is easy to see that $dVF(tu_0, h)$ exists for each $t > 0$ and $h \in X$ and that

$$dVF(tu_0, h) = t^{p-1} dVF(u_0, h). \tag{2}$$

For each $h \in X$ we have

$$F(t(u_0 + h)) - F(tu_0) = dVF(tu_0, th) + \omega(tu_0, th).$$

This equality, the p – positive homogeneity of F and (2) give

$$t^p(F(u_0 + h) - F(u_0)) = t^p dVF(u_0, h) + \omega(tu_0, th), \quad h \in X, \quad (t > 0).$$

By the hypothesis

$$F(u_0 + h) - F(u_0) = dVF(u_0, h) + \omega(u_0, h). \quad h \in X.$$

Our assertion follows immediately from the last two equalities. This concludes the proof.

4. SOME REMARKS

i) The following assertion is a simple consequence of Thm. 2(b). Suppose that X, Y are normed linear spaces, $F : X \to Y$ a p – positively homogeneous operator on X. Assume there exists a subset $M \subset X$ of the second category in X, a mapping $G : M \to Y$ having the Baire property in M (i.e. there exists a subset $A \subset M$ of the first category in M so that the restriction $G/(M - A)$ of G to $M - A$ is continuous) so that $u \in M \Rightarrow \|F(u)\| \leqq \|G(u)\|$. If F satisfies the inequality (1) for each $u, v \in M$, then F is continuous at 0 and bounded in X.

ii) Let us note that the existence of a linear Gâteaux differential $DF(u, h)$ of $F: X \to Y$ in some convex neighborhood $V(u_0)$ of $u_0 \in X$ and its joint continuity at (u_0, u_0) does not imply the existence of the Fréchet derivative $F'(u_0)$, in general. A. Alexiewicz and W. Orlicz [11] proved that there exists a mapping $f: c_0 \to c_0$ satisfying the condition of Lipschitz, having everywhere linear Gâteaux differential $DF(u, h)$ continuous in (u, h) jointly and being nowhere Fréchet differentiable. The above conclusion does not hold even if we impose on X more restrictive conditions. Indeed, let $h(u) = g(u(x), x)$ be an operator of Nemyckii, where a function $g(u, x)$ satisfies the conditions of Thm. 20.2 [5]. Then [12] $h(u)$ is Gâteaux – differentiable in the space L_2, $Dh(u, v)$ is continuous jointly in (u, v) on L_2 and $h(u)$ satisfies the condition of Lipschitz on L_2. However, $h(u)$ is nowhere Fréchet – differentiable in L_2.

iii) Let $F: X \to Y$ be a mapping having a bounded differential $DVF(u_0, h)$ at $u_0 \in X$. Then F is continuous at u_0. Indeed, $dVF(u_0, .)$ is bounded in some open neighborhood $U(0)$ of 0 and being homogeneous in $h \in X$, $dVF(u_0, .)$ is continuous at 0 by Thm. 2 (a). Hence for given $\varepsilon = 1$ there exists $\delta_0 > 0$ so that $h \in X$, $\|h\| \leqq \delta_0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \|dVF(u_0, h)\| \leqq 1$. Let $h \in X$ be arbitrary, then

$$\left\|\frac{h\delta_0}{\|h\|}\right\| = \delta_0 \Rightarrow \left\|dVF\left(u_0, \frac{h\delta_0}{\|h\|}\right)\right\| \leqq 1 .$$

Hence $\|dVF(u_0, h)\| \leqq \delta_0^{-1}\|h\|$ for each $h \in X$. Let $(u_n) \in X$, $u_0 \in X$, $u_n \to u_0$. Then $u_n = u_0 + z_n$, $(z_n) \in X$, where $z_n \to 0$. By our hypothesis

$$\|F(u_0 + z_n) - F(u_0)\| \leqq \|dVF(u_0, z_n)\| + \|\omega(u_0, z_n)\| \leqq \delta_0^{-1}\|z_n\| + o(\|z_n\|) .$$

Hence $F(u_n) \to F(u_0)$.

iiii) If $F: X \to Y$ is p – positively homogeneous on X, $(p > 1)$ and $\sup\limits_{\|u\|=1} \|F(u)\| <$ $< +\infty$, then F possesses the Fréchet derivative $F'(0)$ at 0 and $F'(0) = 0$.

References

[1] *J. Kolomý:* A note on the continuity properties of nonlinear operators. Comment. Math. Univ. Carolinae *8* (1967), 503–514.

[2] *J. Kolomý:* Differentiability of convex functionals and boundedness of nonlinear operators and functionals. Comment. Math. Univ. Carolinae *10* (1969), 91–114.

[3] *J. Kolomý:* A note on uniform boundedness principle for nonlinear operators. Comment. Math. Univ. Carolinae *10* (1969), 207–216.

[4] *J. Kolomý:* Remarks on nonlinear operators and functionals. Comment. Math. Univ. Carolinae *10* (1969), 391–405.

[5] *M. M. Vainberg:* Variational methods for the study of nonlinear operators, Holden-Day, San Francisco, 1964.

[6] *G. A. Suchomlinov:* Analytic functionals. Bull. Mosk. gos. univ., Sev. A, T. *1* (1937), 1–19.

[7] *J. L. Kelley, I. Namioka* and *co-authors:* Linear topological spaces. D. Van Nostrand Co., Inc., 1963.
[8] *S. Banach:* Théorie des opérations linéaires. Monografje Matematyczne, Warszaw 1932.
[9] *M. Katětov:* O normovaných vektorových prostorech. Rozpravy II. tř. České akad. *53*, č. 45 (1944), 1—27.
[10] *J. Kolomý:* On the continuity properties of nonlinear operators and functionals. Comment. Math. Univ. Carolinae *10* (1969), 241—259.
[11] *A. Alexiewicz, W. Orlicz:* On the differentials in Banach spaces. Ann. Soc. Pol. Math. *25* (1952), 95—99.
[12] *M. M. Vainberg:* Some questions of differential calculus in linear spaces. Uspechi mat. nauk, T. *VII* (1952), vyp. 4 (50), 55—102.
[13] *G. J. Minty:* Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space. Duke Math. J. *29* (1962), 341—346.

Author's address: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

ÜBER DIE ZERLEGUNG VON LINEAREN HOMOGENEN DIFFERENTIALOPERATOREN IN OPERATOREN ERSTER ORDNUNG

JAROMÍR SUCHOMEL, Brno

(Eingegangen am 26. October 1970)

Mit $C_n(I)$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller Funktionen $y(x)$, die im Intervall I stetige Ableitungen bis zur n-ten Ordnung einschließlich besitzen. Gegeben sei die homogene lineare Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n-i)} = 0 \quad \text{mit} \quad a_i \in C_0(I) \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots, n\,. \tag{1}$$

Jeder Funktion $y \in C_n(I)$ ordnen wir die Funktion $z = \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n-i)}$ zu. Diese Zurodnung ist ein Differentialoperator n-ter Ordnung mit dem Definitionsbereich $C_n(I)$. Wir bezeichnen ihn mit $A = \sum_{i=0}^{n} a_i D^{n-i}$ und nennen ihn den durch die Gleichung (1) erzeugten Operator. In der oben eingeführten Schreibweise gilt also $z = Ay$. Ist $a_0 \neq 0$ für alle $x \in I$, so ist A ein regulärer Operator.

Es seien zwei Differentialoperatoren B, C gegeben, für die $Ay = B(Cy)$ für alle $y \in C_n(I)$ gilt. Das symbolische Produkt BC nennt man die Zerlegung von A. Mit den Zerlegungen von regulären Operatoren von der Form $A = \prod_{i=n}^{1} A_i$, wo A_i reguläre Operatoren erster Ordnung sind, befaßten sich z. B. Mammana in [1] und Ascoli in [2]. In der Arbeit [3] wurden die Zerlegungen von der Form

$$u^{2n} Y_n = [u^2 D + a_1 u^2 - (n-1)\, uu']^n \tag{2}$$

studiert, wo Y_n der reguläre, durch die iterierte Differentialgleichung

$$I_n(y; a_1, a_2) = 0 \quad \text{mit} \quad a_i \in C_{n-i} \quad \text{für} \quad i = 1, 2\,, \quad \text{siehe [3; S. 49]}\,, \tag{3}$$

erzeugte Operator ist. Die Funktion u ist ein Integral der Gleichung

$$y'' + \frac{3}{n+1}\left(a_2 - a_1' - a_1^2\right) y = 0 \tag{4}$$

und kann also isolierte Nullstellen haben. Die Aufgabe dieser Arbeit ist zu jedem regulären Operator A n-ter Ordnung eine Funktion $f \in C_0(I)$ zu suchen, sodaß $fA = \prod_{i=n}^{1} A_i$ gilt. Vgl. [4].

Das Symbol $W(y_1, y_2, \ldots, y_s) = v_s$ bedeutet die Wronskische Determinante von $y_1, y_2, \ldots, y_s \in C_s(I)$ und $W(y_1, y_2, \ldots, y_s, D)$ ist der durch die Differentialgleichung $W(y_1, y_2, \ldots, y_s, y) = 0$ erzeugte Operator.

1. Lemma. *Es seien Funktionen $y_i \in C_s(I)$ für $i = 1, 2, \ldots, s$, $2 \leqq s$, gegeben. Dann gilt*

(5) $$v_{s-1}\, W(y_1, y_2, \ldots, y_s, D) = (v_s D - v_s')\, W(y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}, D)\,.$$

Beweis. Die Formel (5) wird in der Form

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_{s-1})\, W(y_1, y_2, \ldots, y_s, y) = \\ = W[W(y_1, y_2, \ldots, y_s), W(y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}, y)]$$

in [5; S. 403] bewiesen.

2. Lemma. *Es seien Funktionen $y_i \in C_{n-1}(I)$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ gegeben, für die $v_n \neq 0$ für alle $x \in I$ in Kraft ist. Dann können die Funktionen v_s für $s = 1, 2, \ldots, n$ nur isolierte Nullstellen haben.*

Beweis folgt aus dem Satz 1 der Arbeit [6].

3. Lemma. *Es seien Funktionen $y_i \in C_s(I)$ für $i = 1, 2, \ldots, s$ gegeben. Dann gilt*

(6) $$u_s\, W(y_1, y_2, \ldots, y_s, D) = \prod_{i=s}^{1} (b_i D - b_i')$$

mit

(7) $$b_i = v_i u_{i-1} \quad \textit{für} \quad i = 1, 2, \ldots, s\,, \quad u_1 = u_0 = 1$$
$$u_i = \prod_{k=1}^{i-1} v_k^{2^{i-k-1}} \quad \textit{für} \quad i = 2, 3, \ldots, s\,.$$

Beweis wird mittels Induktion in bezug auf s vermöge (5) und $u_s = u_{s-1}^2 v_{s-1}$ durchgeführt.

4. Satz. *Es seien die Gleichung (1) mit $a_0 \neq 0$ für alle $x \in I$ und ihr beliebiges Hauptsystem $y_1, y_2, \ldots, y_n \in C_n(I)$ gegeben. Dann existieren Funktionen $b_i \in \in C_{n+1-i}(I)$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ und eine Funktion $f \in C_0(I)$, die nur isolierte Nullstellen haben kann, sodaß folgendes gilt*

$$f \sum_{i=0}^{n} a_i D^{n-i} = \prod_{i=n}^{1} (b_i D - b_i')$$
$$\Big\{\prod_{i=s}^{1} (b_i D - b_i')\Big\}\, y_k = 0 \quad \textit{für} \quad s = 1, 2, \ldots, n\,, \quad k = 1, 2, \ldots, s\,.$$

Beweis. Der Satz folgt aus Lemma 2 und Lemma 3, wo $f = a_0^{-1} v_n u_n$ und (7) zu nehmen ist.

5. Folgerung. Zu jeder regulären Gleichung (1) existiert eine mit ihr quasiidentische Gleichung, sodaß der durch sie erzeugte Operator in der Form eines symbolischen Produkts von Operatoren erster Ordnung geschrieben werden kann. Vgl. [3; Def. 6,3].

6. Satz. *Es sei das Hauptsystem* $y_i = ((i-1)!)^{-1} \alpha u^{n-i} v^{i-1}$ *für* $i = 1, 2, \ldots, n$ *der Gleichung* (3) *gegeben, wo* u, v *Lösungen von* (4) *mit* $W(u, v) = 1$ *für alle* $x \in I$ *sind und* $\alpha = \exp\{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\, dt\}$, $x_0 \in I$. *Bezeichnen wir* $v_n^{-1} W(y_1, y_2, \ldots \ldots, y_n, D) = Y_n$. *Dann ist die Zerlegung* (2) *richtig.*

Beweis. Nach [7; (3,2)] ist $v_i = \alpha^i u^{i(n-i)}$ und nach (7) gilt $u_i = u^2(\alpha u^{n-3})^{2^i} \cdot (\alpha u^{n-i-1})^{-i-1}$ und $b_i = u^2(\alpha u^{n-3})^{2^{i-1}}$ für $i = 1, 2, \ldots, n$. Die Formel

$$\prod_{i=s}^{1} (b_i D - b_i') = (\alpha u^{n-3})^{2^s - 1} [u^2 D + a_1 u^2 - (n-1) uu']^s \tag{8}$$

für $s = 1, 2, \ldots, n$ kann mittels Induktion in bezug auf s bewiesen werden. Nach (6), (8) gilt für $s = n$

$$u^2 \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{n+1} (\alpha u^{n-3})^{2^n} W(y_1, y_2, \ldots, y_n, D) =$$
$$= (\alpha u^{n-3})^{2^n - 1} [u^2 D + a_1 u^2 - (n-1) uu']^n ,$$

woraus die Formel (2) folgt. Vgl. [3; Satz 8,1].

Literatur

[1] *G. Mammana:* Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari. Math. Z. *33* (1931), 186—231.

[2] *G. Ascoli:* Sulla decomposizione degli operatori differenziali lineari in fattori lineari e sopra alcune questioni geometriche che vi si riconnettono. Revista Matem. y Fisica teorica, Serie A (1940), 189—215.

[3] *Z. Hustý:* Die Iteration homogener linearer Differentialgleichungen. Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně, Brno, No 449 (1964), 23—56.

[4] *J. Suchomel:* Über gewisse Zerlegungen der gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichung. Wissenschaftliche Zeitschrift der Techn. Hochschule Karl-Marx-Stadt, Jahrgang *XI* (1969) Heft 3, 381—382.

[5] *E. Barvínek:* Über zwei Eigenschaften der Wronskischen Determinanten. Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně, Brno, No 456 (1964), 401—407.

[6] *V. Jarník:* Lineární závislost funkcí jedné reálné proměnné. Časop. pěstov. mat. *80* (1955), 32—43.

[7] *J. Suchomel:* Wronskische Determinanten von Lösungen iterierter Gleichungen. Czechoslovak Math. J. *19* (*94*) (1969), 711—715.

Anschrift des Verfassers: Brno, Nám. 28. října 26.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

O VNOŘENÍ DICHOTOMICKÉHO STROMU DO KRYCHLE

Ivan Havel, Petr Liebl, Praha

(Došlo dne 2. listopadu 1970)

Triviální nutnou podmínkou pro vnořitelnost konečného grafu $\mathscr{G} = \langle V, E \rangle$ do n-rozměrné krychle je, aby $|V| \leqq 2^n$. V případě, že $\mathscr{G}$ je had (viz [1]), je tato podmínka rovněž postačující (viz [2]). Na druhé straně nemůže být n menší než maximální stupeň uzlu v $\mathscr{G}$. Vzniká zajímavá otázka: jak souvisí minimální dimense n se strukturálními vlastnostmi grafu, např. se stupni jeho uzlů. V článku je tento problém řešen pro třídu tzv. úplných dichotomických stromů $\mathscr{D}_n$. Ukáže se, že zde je minimální dimense příslušné krychle přesně o jedničku větší, než vyžaduje odhad podle počtu uzlů.

V dalším bude N označovat množinu všech přirozených čísel.

Definice 1. *Buď $\mathscr{G} = \langle V, E \rangle$ graf, konečný nebo nekonečný. Zobrazení $\psi : E \to N$ nazveme $\bar{C}$-ohodnocením grafu $\mathscr{G}$, jestliže platí*

a) *Je-li $(e_1, \ldots, e_r)$ posloupnost hran prosté konečné otevřené cesty v $\mathscr{G}$, pak existuje $i \in N$ takové, že se v posloupnosti čísel $(\psi(e_1), \ldots, \psi(e_r))$ vyskytuje i lichý počet krát.*

b) *Je-li $(f_1, \ldots, f_s)$ posloupnost hran prosté uzavřené cesty v $\mathscr{G}$, pak se každé číslo z posloupnosti $(\psi(f_1), \ldots, \psi(f_s))$ vyskytuje v této posloupnosti sudý počet krát.*

$\bar{C}$-ohodnocení grafu $\mathscr{G}$ nazveme jeho C_n-ohodnocením, jestliže E zobrazuje do množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Definice 2. *Říkáme, že graf $\mathscr{G} = \langle V, E \rangle$ je částečným podgrafem grafu $\mathscr{G}' = \langle V', E' \rangle$ jestliže $V \subseteq V'$, $E \subseteq E' \cap (V \times V)$.*

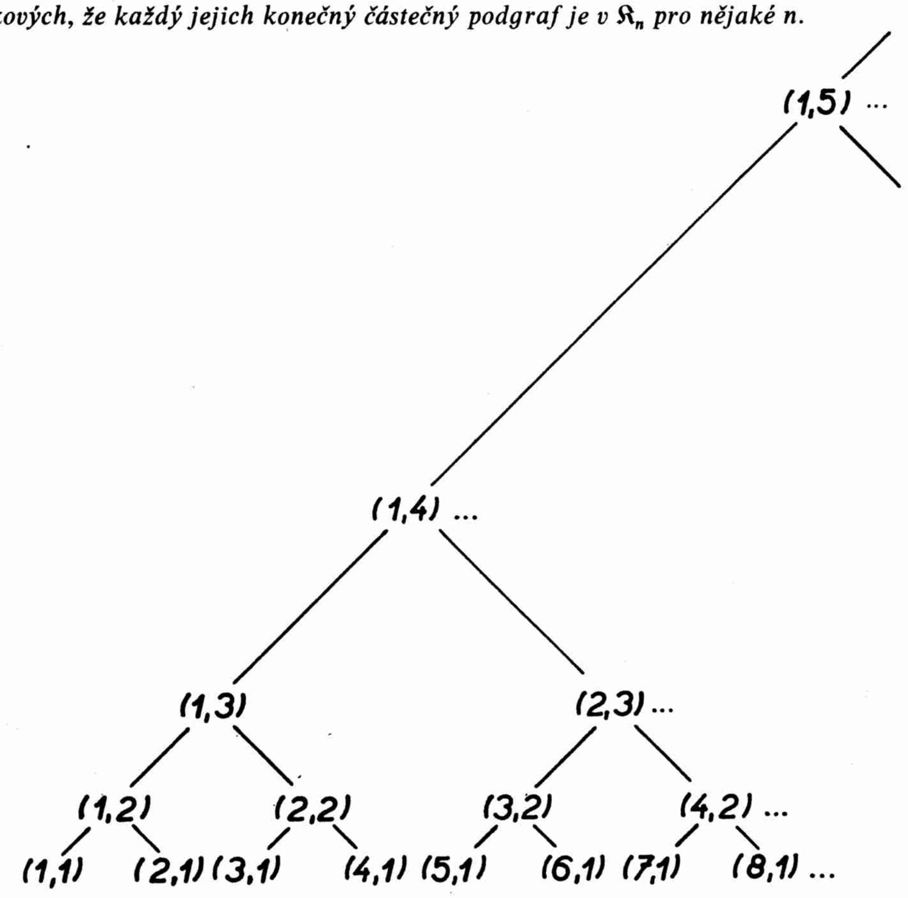
Definice 3. *Označme $\bar{\mathfrak{C}}$ množinu grafů, pro něž existuje $\bar{C}$-ohodnocení, $\mathfrak{C}_n$ množinu grafů pro něž existuje C_n-ohodnocení, $\mathfrak{C}$ množinu grafů takových, že každý jejich konečný částečný podgraf je v $\bar{\mathfrak{C}}$.*

Poznámka. Je-li $\mathscr{G}$ konečný, pak z $\mathscr{G} \in \bar{\mathfrak{C}}$ vyplývá $\mathscr{G} \in \mathfrak{C}_n$ pro jisté n. Dále je zřejmě $\bigcup_n \mathfrak{C}_n \subseteq \bar{\mathfrak{C}} \subseteq \mathfrak{C}$.

Definice 4. *Krychlí dimense n rozumíme graf* $\mathcal{K}_n = \langle V, E\rangle$, *kde* $V = \{1, 2, 3, \ldots$ $\ldots, 2^n\}$ *a* $(a, b) \in E$ *právě když existuje právě jedno* $p \in \{1, \ldots, n\}$ *tak, že* $a = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i 2^{i-1}$, $b = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i' 2^{i-1}$, $\varepsilon_i = \varepsilon_i'$ *pro* $i \neq p$, $\varepsilon_p \neq \varepsilon_p'$, *kde* ε_i, ε_i' *nabývají hodnot* 0,1.

$\mathcal{K}_n$ má, jak známo, $n \cdot 2^{n-1}$ hran a každý uzel je stupně n.

Definice 5. *Označme* $\mathfrak{K}_n$ *množinu částečných podgrafů* $\mathcal{K}_n$ *a* $\mathfrak{K}$ *množinu grafů takových, že každý jejich konečný částečný podgraf je v* $\mathfrak{K}_n$ *pro nějaké n.*



Obr. 1

Věta 1 práce [2] říká v našem označení, že

(1) $\mathfrak{K}_n \subset \mathfrak{C}_n$,

(2) $\mathcal{G}$ souvislý a $\mathcal{G} \in \mathfrak{C}_n \Rightarrow \mathcal{G} \in \mathfrak{K}_n$,

(3) $\mathfrak{C} = \mathfrak{K}$.

Z této věty ihned vyplývá, že libovolný strom je v $\mathfrak{K}$.

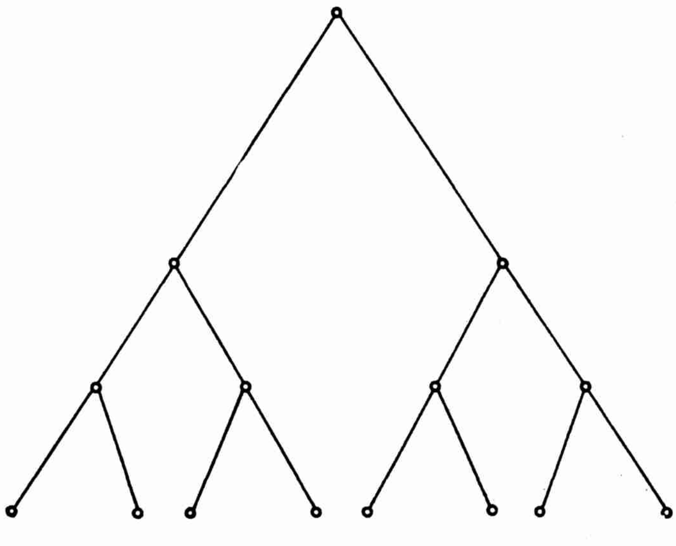
V [2] je dále formulován následující problém: k danému konečnému stromu $\mathcal{T}$ nalézt minimální n takové, aby bylo $\mathcal{T} \in \mathfrak{K}_n$. (Je-li $\mathcal{T}$ nekonečný strom, pak takové n ovšem neexistuje). Níže je tento problém řešen pro úplné dichotomické stromy (pro nejjednodušší stromy – hady – byl již řešen v [2]).

Definice 6. *Směrem nahoru nekonečný úplný dichotomický strom je graf* $\mathcal{D} = \langle V, E \rangle$, *kde* $V = \{(i, k) \mid i \in N,\ k \in N\}$, $E = \{((2r - 1, s), (r, s + 1)) \mid r \in N, s \in N\} \cup \{((2r, s), (r, s + 1)) \mid r \in N, s \in N\}$ (viz obr. 1).

Hrany $((\alpha, s), (\beta, s + 1))$ *budeme nazývat hranami s-té úrovně.*

Definice 7. *Úplný dichotomický strom o n úrovních je graf* $\mathcal{D}_n$ *indukovaný grafem* $\mathcal{D}$ *na podmnožině jeho uzlů* $\{(i, k) \mid k \leqq n + 1,\ i \leqq 2^{n+1-k}\}$.

Poznámka. $\mathcal{D}_n$ má zřejmě $2^{n+1} - 1$ uzlů, z toho 2^n uzlů stupně 1, a $2^{n+1} - 2$ hran. Obr. 2 ukazuje $\mathcal{D}_3$.



Obr. 2

Věta. $\mathcal{D}_1 \in \mathfrak{K}_2$. $\mathcal{D}_n \in \mathfrak{K}_{n+2}$ a $\mathcal{D}_n \notin \mathfrak{K}_{n+1}$ pro $n > 1$.

Důkaz. Definujme ohodnocení ψ grafu $\mathcal{D}$ takto:

$$\left.\begin{aligned} \psi((2r - 1, 2m - 1), (r, 2m)) &= 1 \\ \psi((2r, 2m - 1), (r, 2m)) &= 2m + 1 \end{aligned}\right\} \quad m \geqq 1$$

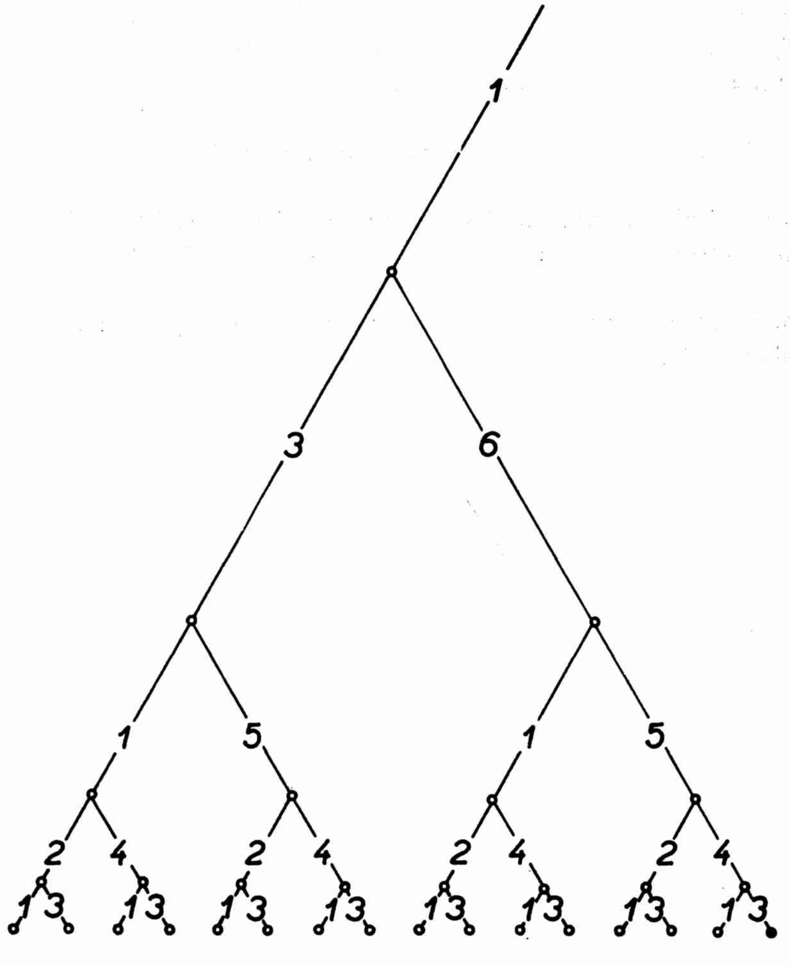
$$\psi((2r - 1, 2m), (r, 2m + 1)) = 2m - 1 \quad m > 1$$

$$\psi((2r, 2m), (r, 2m + 1)) = 2m + 2 \qquad m \geqq 1$$

$$\psi((2r - 1, 2), (r, 3)) = 2$$

pro všechna $r \in N$ (viz obr. 3).

Dokážeme nejprve, že ψ je $\bar{C}$-ohodnocením $\mathscr{D}$.



Obr. 3

Buď $p = (e_1, \ldots, e_r)$ posloupnost hran nějaké konečné cesty v $\mathscr{D}$ takové, že v posloupnosti $y = (\psi(e_1), \ldots, \psi(e_r))$ se každé číslo vyskytuje sudý počet krát. Je zřejmé, že p neobsahuje dvě hrany téže úrovně. V opačném případě totiž budiž s nejvyšší úroveň taková, že p obsahuje aspoň 2 hrany úrovně s. Pak jsou tyto hrany nutně právě 2 a jsou sousední. p navíc neobsahuje hrany úrovně vyšší než s. Právě jedné ze dvou sousedních hran úrovně s přiřazuje ψ číslo $s + 2$, které se nevyskytuje na hranách nižších úrovní — spor.

Z definice ψ je vidět, že každé sudé číslo se vyskytuje jen na hranách jediné úrovně, a proto nemůže být obsaženo v $\boldsymbol{y}$. Kromě toho nemůže $\boldsymbol{p}$ obsahovat žádnou hranu úrovně 2. Buď $2n + 1$ nejmenší liché číslo z $\boldsymbol{y}$, které je větší než 1. To se vyskytuje na hranách úrovně $2n - 1$ a $2n + 2$. $\boldsymbol{p}$ tudíž obsahuje po jedné hraně těchto úrovní. Obsahuje tedy i hranu úrovně $2n$ (plyne ze souvislosti cesty).

Avšak v $\boldsymbol{p}$ nejsou hrany úrovně 2, je tedy $n > 1$; ψ přiřazuje hraně úrovně $2n$ $(n > 1)$ liché číslo $2n - 1$ – spor.

Dále zobrazuje ψ zřejmě množinu hran grafu $\mathscr{D}_n$ do množiny $\{1, \ldots, n + 2\}$ a je tedy $\mathscr{D}_n \in \mathfrak{C}_{n+2}$. Podle výše citované věty 1 z [2] je konečně $\mathscr{D}_n \in \mathfrak{K}_{n+2}$.

Kromě triviálního $\mathscr{D}_1 \in \mathfrak{K}_2$ je třeba ještě dokázat, že $\mathscr{D}_n \notin \mathfrak{K}_{n+1}$. Provedeme to sporem. Nechť tedy $n > 1$ a $\mathscr{D}_n$ je částečným podgrafem $\mathscr{K}_{n+1}$. Nazveme hrany $\mathscr{K}_{n+1}$, které nejsou hranami $\mathscr{D}_n$, „novými". Nových hran je $(n + 1) 2^n - (2^{n+1} - 2) = (n - 1) 2^n + 2$. Žádná nová hrana nespojuje dva uzly stupně 1 grafu $\mathscr{D}_n$, neboť by vznikla kružnice liché délky, která, jak známo, se v $\mathscr{K}_{n+1}$ nevyskytuje. Jsou tedy nové hrany, incidující s navzájem různými uzly stupně 1 grafu $\mathscr{D}_n$, navzájem různé a jejich počet je $n \,.\, 2^n$. Musí tudíž platit $n \,.\, 2^n \leqq (n - 1) 2^n + 2$, to však je spor s předpokladem $n > 1$. Q.E.D.

Literatura

[1] *Sedláček, J.*: Kombinatorika v teorii a praxi. NČSAV, Praha, 1964.

[2] *Havel, I., Morávek, J.*: *B*-valuations of graphs. Vyjde v Czech. Math. Journ. *22* (1972).

Adresa autorů: Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV v Praze).

Summary

EMBEDDING THE DICHOTOMIC TREE INTO THE n-CUBE

IVAN HAVEL, PETR LIEBL, Praha

The following theorem is proved: The complete dichotomic tree $\mathscr{D}_n$ $(n > 1)$ can be embedded into the graph of the $n + 2$-dimensional cube but not into that of the $n + 1$-dimensional one.

Here $\mathscr{D}_n = \langle V, E \rangle$, where $V = \{1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$, $E = \{(p, q);\ 1 \leqq p \leqq 2^n - 1,\ b = 2p \text{ or } q = 2p + 1\}$.

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ UVEŘEJNĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

IVO RES, Brno: *Asymptotische Entwicklungen der Lösungen der Differentialgleichung* $[p(x)\,y']' + q(x)\,y = 0$ *im nichtoszillatorischen Fall.* (Asymptotické rozvoje řešení diferenciální rovnice $[p(x)\,y']' + q(x)\,y = 0$ v neoscilatorickém případě.)

V předložené práci jsou studovány asymptotické vlastnosti řešení diferenciální rovnice $(py')' + qy = 0$ v neoscilatorickém případě. Pro řešení této rovnice a jeho derivaci jsou pro $x \geqq x_0$ konstruovány stejnoměrně konvergentní řady, jejichž členy závisí na řešeních vhodné diferenciální rovnice $(PY')' + QY = 0$.

PAVLA GVOZDKOVÁ, Praha: *On continuity of linear transformations commuting with generalized scalar operators in Banach space.* (Spojitost lineárních transformací záměnných se zobecněným skalárním operátorem v Banachově prostoru.)

Vyšetřuje se spojitost lineární transformace v Banachově prostoru záměnné s daným operátorem T, který má vhodný spektrální rozklad. Každá spojitá transformace je invariantní vůči podprostorům odpovídajícím libovolnému rozkladu spektra operátoru T. Tato podmínka je zároveň postačující pro spojitost transformace, bereme-li T z dostatečně široké třídy operátorů.

VALTER ŠEDA, Bratislava: *On an application of Stone theorem in the theory of differential equations.* (O aplikácii Stoneho vety v teórii diferenciálnych rovníc.)

V práci je odvodená vhodná formulácia Stoneho vety, ktorá je výhodná pre aplikácie. S jej pomocou sa dokazuje, že spojitú funkciu na kompaktnej množine v metrickom priestore možno rovnomerne aproximovať postupnosťou hölderovsky spojitých funkcií s rovnakým exponentom α, $0 < \alpha \leqq 1$. Výsledek je rozšírený na lokálne kompaktné separabilné metrické priestory a je dokázaná možnosť rovnomernej aproximácie spojitej funkcie, ktorá splňuje ďalšie dodatočne podmienky. Nakoniec je daná aplikácia v teórii obyčajných diferenciálnych rovníc.

JOSEF KOLOMÝ, Praha: *Continuity and differentiability properties of nonlinear operators.* (Spojitost a diferencovatelnost nelineárních operátorů.)

V poznámce jsou odvozeny jednoduché podmínky pro to, aby dané zobrazení F resp. derivace $F'(u)$ bylo spojité, slabě spojité, zesíleně spojité v daném bodě nebo na dané podmnožině lineárního normovaného prostoru.

JAROMÍR SUCHOMEL, Brno: *Über die Zerlegung von linearen homogenen Differentialoperatoren in Operatoren erster Ordnung.* (O rozkladu lineárních homogenních dieferenciálních operátorů v operátory prvního řádu.)

V práci je konstruktivně dokázáno, že ke každé regulární lineární homogenní diferenciální rovnici n-tého řádu $Ay = 0$ existuje funkce f, která může mít pouze isolované kořeny, tak, že diferenciální operátor fA se rovná součinu diferenciálních operátorů prvního řádu.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

K úloze č. 4, kterou položil I. Babuška v Čas. pro pěst. mat. *79* (1954); úloha byla znovu přetištěna v Čas. pro pěst. mat. *89* (1964), str. 103.

Formulace úlohy: *Buď C jednoduchá rovinná křivka konečné délky a D její vnitřek (komplement). Budiž $t_0 \in C$. Utvořme funkci $\vartheta(z, t)$, kde z probíhá množinu D a t množinu $(C - t_0)$ tak, aby $\vartheta(z, t)$ bylo úhlem mezi kladným směrem osy x a vektorem $\overrightarrow{zt}$ a aby funkce ϑ byla spojitá. Budiž $F(z) = \int_C |d_t\vartheta(z, t)|$. (Funkce F je zřejmě spojitá na D a nezávisí na volbě funkce ϑ.) Dokažte (přesně a pokud možno jednoduše) nějakou nutnou a postačující podmínku, aby funkce F byla omezená.* (Viz J. Radon, Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss., Wien, Math. Naturw. Kl. 128, Abt. 2a, IIa, 1123; 1919.)

Řešení úlohy je dáno následující větou:

Označme pro $\zeta \in C$ a $\alpha \in (0, 2\pi)$ symbolem $\mu(\zeta, \alpha)$ počet průsečíků křivky C s polopřímkou $\{\zeta + re^{i\alpha}; r > 0\}$ a položme $v(\zeta) = \int_0^{2\pi} \mu(\zeta, \alpha)\, d\alpha$. Je-li výše definovaná funkce F omezená na některé z komplementárních oblastí křivky C, pak

$$\sup_{\zeta \in C} v(\zeta) < \infty . \tag{1}$$

Naopak, platí-li (1), pak F je omezená na komplementu křivky C.

Důkaz tohoto tvrzení plyne z vět 1.11 a 2.7 článku [1]; viz též [3] a Corollary a Remark 4 na str. 7 ve sdělení [2].

[1] *J. Král:* On the logarithmic potential of the double distribution, Czech. Math. Journal *14* (*89*) 1964, 306–321.

[2] *J. Král:* On cyclic and radial variations of a plane path, Comment. Math. Univ. Carolinae *4* (1963), No 1, 3–9.

[3] *J. Král:* On the logarithmic potential, Comment. Math. Univ. Carolinae *3* (1962), No 1, 3–10.

Poznámka. Zvolme pevně komplementární oblast D jednoduché uzavřené křivky C a každé spojité funkci f na C přiřaďme funkci Wf na D předpisem

$$Wf(z) = \operatorname{Im} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_C f(t)\, d_t\vartheta(z, t) .$$

Z věty 2.10 v [1] (viz též věty 3 a 4 v [3]) plyne, že (1) je nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby pro každou spojitou f na C byla funkce Wf omezená (resp. stejnoměrně spojitá) na D.

Buď nyní $\gamma \in (0, 1)$ a označme pro každou neprázdnou množinu M v rovině symbolem $C_\gamma(M)$ třídu všech funkcí f, které na M splňují Hölderovu podmínku s exponentem γ, tj. existuje konstanta m_f tak, že

$$(u, v \in M) \Rightarrow (|f(u) - f(v)| \leqq m_f|u - v|^\gamma) .$$

Lze dokázat, že za předpokladu (1) platí implikace

$$f \in C_\gamma(C) \Rightarrow Wf \in C_\gamma(D) . \tag{2}$$

Nyní přirozeně vzniká následující

Úloha. Nalezněte jednoduchou a geometricky názornou nutnou a postačující podmínku na křivku C, která by zaručovala platnost implikace (2).

Josef Král, Praha

Řešení úlohy č. 5 (autor Jan Mařík) z roč. *82* (1957), str. 365

Úloha: *Buď G otevřená množina v m-rozměrném Euklidově prostoru E_m, $\emptyset \neq G \neq E_m$; buď f spojitá funkce na hranici H množiny G. Je-li funkce F spojitá na $G \cup H$, harmonická na G a rovna f na H, nazveme funkci F řešením Dirichletovy úlohy příslušné k funkci f a množině G. Rozhodněte, zda platí tato věta: Nechť ke každé omezené spojité funkci na množině H existuje omezené řešení příslušné Dirichletovy úlohy. Potom ke každé nezáporné omezené spojité funkci na množině H existuje nezáporné řešení příslušné Dirichletovy úlohy.*

Při řešení této úlohy budeme užívat výsledků práce

[M] *J. Mařík*: Dirichletova úloha, Čas. pro pěst. mat. *82* (1957), 257–282.

Je-li $m = 2$, tvrzení uvedené věty platí. Plyne to např. ze cvičení 11 v [M].

Nechť je $m > 2$. Ukážeme, že uvedená věta neplatí. Stejně jako v [M] označme $\mathfrak{G}$ systém všech regulárních množin v E_m.

Označme $G_1 = \{x \in E_m; |x| > 1\}$ (vnějšek koule) a buď H_1 hranice množiny G_1. Zřejmě je $G_1 \in \mathfrak{G}$. Jestliže f_1 je spojitá funkce na H_1, sestrojme podle odst. 16 v [M] omezené řešení Dirichletovy úlohy příslušné k funkci f_1 a množině G_1. Hodnotu tohoto řešení v bodě $x \in G_1 \cup H_1$ označme $D(G_1, f_1, x)$.

Zvolme nyní $c \in G_1$ a označme $G = G_1 - \{c\}$, $H = H_1 \cup \{c\}$. Potom je zřejmě H hranicí množiny G. Pro $x \in E_m - \{0\}$ položme

$$h(x) = |x|^{2-m} - 1 .$$

Předpokládejme, že f je spojitá funkce na H a buď f_1 restrikce funkce f na množinu H_1. Pro $x \in H \cup G$ položme

$$F(x) = D(G_1, f_1, x) + (f(c) - D(G_1, f_1, c))\, h(x)/h(c)\,.$$

Potom je, jak snadno zjistíme, funkce F omezeným řešením Dirichletovy úlohy příslušné k funkci f a množině G.

Vidíme, že ke každé omezené spojité funkci na množině H existuje omezené řešení příslušné Dirichletovy úlohy.

Kdyby ke každé nezáporné omezené spojité funkci existovalo nezáporné řešení příslušné Dirichletovy úlohy, platilo by $G \in \mathfrak{G}$ podle věty 11 v [M]. Podle věty 15 v [M] však není $G \in \mathfrak{G}$.

Dokázali jsme, že věta vyslovená v úloze neplatí.

Poznamenejme, že snadno lze přímo sestrojit nezápornou omezenou spojitou funkci na H, pro niž neexistuje nezáporné řešení příslušné Dirichletovy úlohy. Nechť k je nezáporná spojitá funkce na H, která není identicky rovna nule a nechť je $k(c) = 0$. Kdyby existovalo nezáporné řešení K Dirichletovy úlohy příslušné k funkci k a množině G, byla by funkce K harmonická v G_1 podle známé věty o odstranitelné singularitě harmonických funkcí. Protože potom je K nezáporná harmonická funkce v G_1 a $K(c) = 0$, je funkce K identicky rovna nule v G_1 a tedy funkce k je identicky rovna nule na H, což je spor s předpokladem.

Ivan Netuka, Praha

RECENSE

D. S. Mitrinovič: ANALYTIC INEQUALITIES. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1970, str. XII + 400, 4 obr., cena 88,— DM.

Snahou autorovou je v této knize doplnit a rozmnožit výsledky, které jsou uvedeny ve dvou základních monografiích o nerovnostech a to v klasické práci C. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya: *Inequalities* (1934) a E. F. Beckenbach, R. Bellman: *Inequalities* (1961), kde jsou shrnuty výsledky z let 1934—1960. Autor též upozorňuje, jaká pozornost je v moderní analýze ve stále větší míře věnována nerovnostem, přičemž se odvolává např. na knihu J. Dieudonné: *Calcul Infinitesimal* (Paris 1968).

Tato kniha má sloužit převážně jako pomůcka, ve které lze najít informace o všech možných typech nerovností, vyskytujících se v moderní analýze. Z tohoto záměru a ze snahy o systematičnost podání vyplývá uspořádání knihy. Kniha se skládá ze tří částí. V první, úvodní části jsou uvedeny některé základní poznatky. Velká pozornost je věnována konvexním funkcím. Druhá, hlavní část, je rozdělena do 27 odstavců, z nichž každý je věnován některému typu nerovností, důležitých pro moderní analýzu. Autor věnuje některým typům nerovností speciální pozornost, jako např. Schweitzerově, Diaz-Metcalfově a Rennieho nerovnosti, nerovnostem pro střední hodnoty, Steffensenově nerovnosti, integrálním nerovnostem obsahujícím derivace, nerovnostem pro vektorové normy a pod. Konečně třetí část obsahuje asi 450 speciálních nerovností.

Vzhledem k určení této knihy nebylo možné formulovat některé výsledky v nejobecnější formě. Proto je kniha doplněna velkým počtem odkazů na podrobnější literaturu (okolo 750 autorů). Zejména ve třetí části jsou mnohá tvrzení bez důkazů, vždy s odkazem na příslušnou literaturu. Tímto přístupem získala kniha na přehlednosti a lze říci, že v ní lze snadno najít informaci o všech známých nerovnostech týkajících se reálných čísel a funkcí jedné reálné proměnné.

V této době, kdy pro svou důležitost a pro velké množství výsledků vyniká potřeba knih, které by přehledně a systematicky pojednávaly o tomto odvětví matematiky, je tato kniha zajisté cenným přínosem jak pro studenty v základních kursech, tak i pro vědecké pracovníky.

Otto Vejvoda, Praha

Herbert S. Wilf: FINITE SECTIONS OF SOME CLASSICAL INEQUALITIES. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1970, str. VII + 82, 28,— DM.

Nechť f, g jsou reálné funkce reálných proměnných $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ a A je nejmenší možná konstanta, pro kterou platí

$$(*) \qquad f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) < Ag(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) .$$

Jestliže se omezíme na konečně mnoho proměnných (tj. položíme $x_j = 0$ pro $j > n$), dá se očekávat, že bude platit odhad

$$f(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots) \leqq A_n g(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$$

kde $A_n < A$ a $A_n \to A$ pro $n \to \infty$. Jedním z hlavních předmětů této knihy je určení rychlosti konvergence A_n k A pro některé důležité typy vztahů (*).

Kniha je rozdělena do čtyř kapitol. V první kapitole jsou shrnuty některé klasické výsledky, týkající se Hilbertovy, Hardyho a Carlemanovy nerovnosti a základní vlastnosti Toeplitzových forem. Ve druhé kapitole je vyložena Widomova teorie Toeplitzových integrálních jader. Je zde také ukázáno, jak se některé typy jader, které se vyskytují v klasických nerovnostech, dají převést na Toeplitzova jádra. Jsou dány též aplikace na Dirichletovy řady. Kapitola třetí se zabývá Hankelovými formami a jejich spektrální teorií. Některé výsledky v sobě zahrnují na příklad odpověď na některé problémy týkající se Hilbertových matic. V kapitole čtvrté se zkoumají některé nelineární problémy, na příklad Carlemanova nerovnost. Zde se nedá aplikovat obecná teorie a každý speciální případ vyžaduje svoji metodu výzkumu. Autor doufá, že v této oblasti bude pokračovat intenzivní výzkum a ukazuje na některé nevyřešené problémy.

Přesto, že je tato kniha svým obsahem určena matematikům, kteří se více specializují v tomto oboru, je svou formou přístupná každému, kdo absolvoval základní kursy matematické analýzy a může sloužit i jako informativní pomůcka pro ty, kdo při své práci narazí na typ problému, formulovaného na začátku.

Otto Vejvoda, Praha

Robert Sauer: DIFFERENZENGEOMETRIE, Springer-Verlag 1970, stran 234, 95 obrázků, cena DM 48,—, cena v ČSSR Kčs 440,—.

Tato kniha je učebnicí diferenciální geometrie křivek a ploch v trojrozměrném eukleidovském prostoru a již její název naznačuje, že se podstatně liší od všech běžných učebnic diferenciální geometrie. Autor neodvozuje totiž věty z diferenciální geometrie přímo užitím diferenciálního počtu, nýbrž vychází z elementárních geometrických modelů jako jsou mnohoúhelníky, posloupnosti přímek, trojúhelníkové sítě a podobně, pro které nejdříve ukáže platnost různých vět a dále dokáže, že při limitním přechodu přejdou zpravidla tyto věty ve věty z diferenciální geometrie pro křivky, přímkové plochy nebo obecné plochy. Vychází tedy z části geometrie, kterou nazývá diferenční geometrií, protože v ní studuje metrické vztahy mezi sousedními objekty nějakého systému. Je to způsob odvozování dosti neobvyklý, který se obyčejně užívá jen pro odvození vzorce pro délku křivky či plošný obsah plochy, kdežto v recensované knize se užívá skoro systematicky. A je nutno dodat, že to není způsob nezajímavý. Čtenář na příklad tak pozná, že známé podmínky integrability Mainardi-Codazziho nebo Gaussova věta Theorema egregium mají svůj základ v metrických vztazích mezi stranami a úhly trojúhelníkové sítě a to není jediný příklad tohoto druhu, jež se v Sauerově knize probírá. Kniha obsahuje též některé příklady, kdy limitní přechod nevede k správnému tvrzení nebo je výsledné tvrzení sice správné, ale dokazuje se jinou metodou. V takových případech slouží příslušný elementární geometrický model jako metodická pomůcka, návod k vedení důkazu nebo nalezení správného výsledku. Autor mluví v této souvislosti o heuristických modelech. Příkladem je studium deformací ploch záporné křivosti nebo věty o deformacích rotačních a šroubových ploch.

Kniha je rozdělena do tří kapitol: První kapitola — Obecná teorie — obsahuje základní výsledky z teorie prostorových křivek, rozvinutelných ploch a plošných pásů. Dále pojednává o nerozvinutelných přímkových plochách a plochách obecných (první a druhá základní forma, křivosti křivek plochy, sítě konjugovaných křivek, asymptotické křivky). V druhé kapitole jsou probrány některé specielní plochy — plochy konstantní negativní křivosti, Vossovy plochy se sítí konjugovaných geodetik, plochy rotační a šroubové a tzv. profiloafinní. Vychází se přitom ze speciálních čtyřúhelníkových sítí — Čebyševských, s rovinnými čtyřúhelníky, lichoběžníkových s dalšími podmínkami apod. Třetí kapitola se zabývá infinitesimálními deformacemi plochy též v souvislosti s kinematikou a obsahuje zajímavý paragraf o tzv. Darbouxově cyklu ploch.

Dá se říci, že svým obsahem je předložená kniha určena spíše technikům, kteří jistě též ocení, s jakou názorností je čtenář do každého příkladu uveden. Na druhé straně nutno konstatovat, že výše uvedený způsob odvození výsledků není vždy právě nejrychlejší a nejpřístupnější a uspokojí spíše ty, kteří nejsou zainteresováni skoro výlučně na výsledcích a chtějí se dozvědět též něco o souvislostech diferenciální a elementární geometrie.

Z několika drobných nedostatků, jež se v knize vyskytují, bych chtěl upozornit na nepřesné znění vět typu 2.18 resp. 2.19, ve kterých je nutno vyloučit případ, kdy křivost nabývá v některých bodech resp. na některých intervalech nulové hodnoty a na to, že některé věty platí jen lokálně, což není v knize zdůrazněno. Drobné tiskové chyby, kterých je bohužel dost, si jistě čtenář opraví sám.

Leo Boček, Praha

ESSEYS ON TOPOLOGY AND RELATED TOPICS. Memoires dédiés à Georges de Rham. Publiés sous la direction de A. Haefliger - R. Narasimhan. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1970. XII + 252 stran, cena 60,— DM.

Georges de Rham se narodil 10. září 1903. Na jeho počest uspořádala universita v Ženevě ve dnech 26.—28. března 1969 kolokvium; kniha obsahuje přednesené referáty a práce, napsané de Rhamovými žáky a přáteli.

Úvodní stať od H. Cartana je věnována de Rhamovým pracím o diferencovatelných varietách, a to de Rhamově větě, pojmu toku, teorii harmonických forem a reducibilitě Riemannových prostorů. Tento přehled je bohužel velmi stručný a až na zcela nepatrné zmínky nejsou uvedeny teorie, které vznikly na základě de Rhamových výsledků. Úplný seznam de Rhamových prací je uveden na konci svazku.

Jednotlivé práce sborníku jsou věnovány různým tématům z diferenciální geometrie, teorie komplexních variet a topologie; uvedu alespoň jejich autory a názvy: J. Milnor - O. Burlet, *Torsion et type simple d'homotopie*; M. Atiyah - F. Hirzebruch, *Spin-Manifolgs and Group Actions*; P. F. Baum - R. Bott, *On the Zeroes of Meromorphic Vector-Fields*; R. Bott - S. S. Chern, *Some Formulas Related to Complex Transgression*; K. Kodaira, *On Homotopy* K^3 *Surfaces*; A. Borel, *Pseudo-concavité et groupes arithmétiques*; A. Andreotti - G. Tomassini, *Some Remarks on Pseudo-concave Manifolds*; J. L. Koszul, *Trajectoires convexes de groupes affines unimodulaires*; E. Vesentini, *Maximum Theorems for Spectra*; N. H. Kuiper - B. Terpstra-Keppler, *Differentiable Closed Embeddings of Banach Manifolds*; M. W. Hirsch, *On Invariant Subsets of Hyperbolic Sets*; W. Browder - T. Petrie, *Semi-Free and Quasi-Free* S^1 *Actions on Homotopy Spheres*; S. P. Novikov-*Pontrjagin Classes, the Fundamental Group and Some Problems of Stable Algebra*; J. Boéchat - A. Haefliger, *Plongements différentiables des variétés orientées de dimension* 4 *dans* R^7; C. Weber, *Taming Complexes in the Metastable Range*; B. Eckmann - S. Maumary, *Le groupe des types simples d'homotopie sur un polyèdre*; J. Tits, *Sur le groupe des automorphismes d'un arbre*; M. A. Kervaire, *Multiplicateurs de Schur et K-théorie*; R. Thom, *Topologie et linguistique*.

Alois Švec, Praha

M. Gross - A. Lentin: INTRODUCTION TO FORMAL GRAMMARS (Úvod do formálních gramatik), Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1970, 231 str. (překlad z francouzského originálu, který vyšel u Gauthier-Villars, Paříž 1967), cena 38,— DM.

Kniha chce být učebnicí a autoři si nečiní žádných nároků na původnost. Vědomě přebírají mnohé od jiných autorů, zejména však ze známé knihy M. Davise „*Computability and Unsolvability*" a z kapitoly „*Formal Properties of Grammars*", kterou sepsal N. Chomský pro knihu „*Handbook of Mathematical Psychology*".

Chomsky napsal také třístránkovou předmluvu, v níž obhajuje tradiční pojetí tzv. „universální gramatiky", které bylo pozdějším vývojem jazykovědy zatlačeno do pozadí. Upozorňuje, že dnešní algebraické linguistice, jakožto studiu formálních vlastností přirozeného jazyka vyabstrahovaných z jednotlivých jazyků, nejde o nic jiného. V tradiční jazykovědě byla veliká pozornost věnována „tvořivému aspektu" jazyka, totiž skutečnosti, že v jazyce je rekurentní mechanismus, který — nezávisle na vnějších podnětech nebo na rozlišitelných vnitřních stavech — dovoluje vyjádřit nekonečně mnoho myšlenek, pocitů, záměrů atd. Avšak ke studiu tohoto tvořivého aspektu se nemohlo přistoupit dříve, než byly zavedeny a rozvinuty pojmy algoritmu a rekurence při studiu základů matematiky, což se stalo teprve v posledních třiceti letech. Dnes se studium těchto mechanismů nazývá „generativní gramatikou". Přitom generativní gramatikou jednotlivého jazyka rozumí Chomsky soustavu pravidel a postupů, jimiž se charakterizuje potenciálně nekonečná třída vět přirozeného jazyka tak, že se větám přiřazují popisy jejich struktury, které zahrnují její významné vlastnosti fonetické, syntaktické a semantické. Chomsky zde vyslovuje domněnku, že jazykovědci příští generace objeví, že každý přirozený jazyk je zvláštní realizací velmi omezeného schematu, které připouští jen gramatické postupy a struktury značně ohraničené rozmanitosti, takže se ukáže, že si lze představit nesčetně mnoho jazyků, které těmto omezením nevyhovují a tedy, že v psychologickém smyslu tyto jazyky nemohou být přirozenými jazyky přestože jsou v zásadě schopny vyjádřit celý obsah kteréhokoliv přirozeného jazyka. Nakonec Chomsky znova zdůrazňuje, že zatím stále ještě trvá závažná mezera mezi matematickými a empirickými výzkumy, které se týkají universální gramatiky. Empirické popisy jsou příliš složité, než aby dovolily vybudování matematické teorie, a naproti tomu to, co se matematicky zvládnout podařilo (např. teorie bezkontextových jazyků), je opět natolik zjednodušeno, že je to zaručeně empiricky neadekvátní. Toto je starý Chomského argument, který však je podstatně oslaben existencí podmínkových bezkontextových gramatik. Vytvoření matematické teorie universální gramatiky považuje Chomsky dnes za jeden z nejdráždivějších problémů, neboť tato teorie by se v příštích letech stala zcela novým základem pro studium jazyka a byla by ústřední oblastí celé jazykovědné teorie.

Chomsky je zakladatelem algebraické linguistiky a přirozeně se tedy nabízí srovnat předešlé jeho názory s těmi výsledky a směry výzkumu, kterých bylo zatím dosaženo a které jsou zahrnuty do této knihy.

Kniha je rozdělena do tří částí a je doplněna jedním dodatkem. První část (str. 1—80) je věnována logickým a algebraickým předpokladům vlastního výkladu. Zavádí se zde následující pojmy: základní prvek a základní množina (tj. abeceda či slovník) $\mathfrak{A}$, řetěz a jeho stupeň (tj. délka), operace zřetězení, volný monoid (tj. volná pologrupa s jednotkou) $\mathfrak{A}^*$, asociativní kalkul Thuea, ekvivalence slov (tj. řetězů) a vyslovuje se problém slov. Formálním jazykem se rozumí podmnožina volného monoidu (tj. je to množina řetězů). Formálním systémem se patrně rozumí tzv. logistický systém (podle J. Porte), který je určen spočetnou abecedou $\mathfrak{A}$, formálním jazykem nad $\mathfrak{A}$ zvaným množinou formulí, jeho podmnožinou tzv. axiomů či schemat axiomů a konečně množinou odvozovacích pravidel, což jsou $(n + 1)$-tice formulí, přičemž prvních n formulí jsou předpoklady a poslední je závěrem. Toto je zbytečně obecný pojem vzhledem k záměru a obsahu knihy. Je objasněn na formalizaci výrokového kalkulu, přičemž jsou jen velmi povrchně zmíněny pojmy axiomatické teorie, metajazyka, syntaxe, významu, interpretace a modelu, ačkoliv pro vlastní výklad nejsou vůbec potřebné. Důležitý však je kombinatorický systém Γ, který je určen konečnou abecedou $\mathfrak{A}$, jediným axiomem, který je řetězem $A \in \mathfrak{A}^*$, přičemž $A \neq E$, kde $E \in \mathfrak{A}^*$ je tzv. prázdný řetěz délky nula a konečnou množinou produkcí či přepisovacích pravidel tvaru $G \to \overline{G}$, kde $G, \overline{G} \in \mathfrak{A}^*$. Řetěz $Y = P\overline{G}Q$ (který je zřetězením řetězů P, $\overline{G}$ a Q, přičemž $P, Q \in \mathfrak{A}^*$ a tedy P i Q mohou být i prázdným řetězem) se nazývá důsledkem řetězu $X = PGQ$ podle produkce $G \to \overline{G}$. Je však zavádějící psát také $PGQ \to P\overline{G}Q$ (místo odlišujícího značení, např. $PGQ \Rightarrow P\overline{G}Q$) a proto je také nejasné zavedení pojmu typu produkce a to semi-Thueovské, normální a anti-normální (výstižné je nazvat výše uvedený důsledek semi-Thueovským, zatímco $Y = \overline{P}G$ je důsledkem normálním řetězu $X = GP$ příp. $Y' = \overline{G}P$ je anti-normálním důsledkem řetězu $X' = PG$ podle produkce $G \to \overline{G}$, tj. ze začátku (příp. z konce) řetězu X se ubere G a na jeho konci (příp. na jeho začátku) se přidá $\overline{G}$). Posloupnost $X_1, X_2, \ldots, X_m$ řetězů se nazývá důkazem příp. derivací věty či řetězu X_m v Γ, když $X_1 = A$ a když X_j je důsledkem (semi-Thueovským, neboť jiný zaveden nebyl) řetězu X_{j-1} podle nějaké produkce z Γ pro $j = 2, 3, \ldots, m$. Kombinatorický systém se nazývá monogenický, když každý řetěz má nejvýše jeden důsledek. Řetěz se nazývá víceznačný, když existují v Γ dvě různé jeho derivace (3.4.8), což je zbytečně slabý pojem. Dále se obvyklým, ale velmi stručným způsobem zavádí (podle M. Davise) pojem Turingova stroje, vyhodnotitelné funkce, Gödelovy enumerace, rekursivní a rekursivně spočetné množiny, nerozhodnutelnosti a rekursivní funkce. Vzhledem k příkladům nerozhodnutelných problémů se uvádí v souvislost Turingův stroj s kombinatorickým systémem. Formální gramatikou autoři rozumí algoritmus přiřazující přirozeným číslům všechny věty či řetězy příslušného jazyka (4.1.2), což je velmi neobvyklé pojetí.

Druhá část (str. 81—155) je věnována popisu některých důležitých tříd jazyků. Začíná se popisem bezkontextové (context-free čili CF) gramatiky $G = \langle V_T, V_A, S, \mathfrak{R} \rangle$, což je kombinatorický (semi-Thueovský) systém se dvěma konečnými abecedami, zde nazývanými obvykle slovníky, totiž V_T je terminální a V_A neterminální (čili pomocný) slovník (v knize se neuvádí požadavek $V_T \cup V_A = \emptyset$), $S \in V_A$ je axiom a $\mathfrak{R}$ je konečná množina bezkontextových pravidel, tj. pravidel tvaru $A \to \varphi$, kde $A \in V_A$ a $\varphi \in \{V_T \cup V_A\}^*$. Jestliže dokonce $\varphi \in V_T^*$, nazývá se pravidlo terminální (jinak neterminální). Bezkontextovým (čili CF-) jazykem $L(G)$ vytvořeným CF-gramatikou G se rozumí množina všech terminálních důsledků v G, tj. těch důsledků, které jsou terminálními řetězy. Bez důkazu je uvedeno, že jazyk $\{a^n b^n c^n\}$, kde $n = 1, 2, \ldots$, není bezkontextový. Sjednocení a zřetězení dvou CF-jazyků je zase CF-jazyk; je-li L CF-jazyk pak i $L^* = E \cup L \cup L^2 \cup \ldots \cup L^n \cup \ldots$ je CF-jazyk; zrcadlový obraz $\tilde{L}$ CF-jazyka L, tj. je-li $\varphi = x_1 x_2 \ldots x_n \in L$ pak $\tilde{\varphi} = x_n x_{n-1} \ldots x_1 \in \tilde{L}$, je také CF-jazyk a konečně substitucí CF-jazyků místo terminálních symbolů v řetězech CF-jazyka a zřetězením příslušných množin vznikne zase CF-jazyk (v knize se hovoří o komposici jazyků, protože substituce se popisuje pomocí odpovídající komposice gramatik). Naproti tomu průnik dvou CF-jazyků nemusí být CF-jazyk a ani komplement CF-jazyka vzhledem k V_T^* nemusí být CF-jazyk. CF-gramatika se nazývá Kleeneho či K-gramatikou (7.4.1), když pravé strany jejích neterminálních pravidel mají tvar aB, kde $a \in V_T$ a $B \in V_A$, což není zcela obvyklé (žádává se také, aby pravé strany terminálních pravidel obsahovaly jediný terminální symbol a kromě toho je ovšem možno místo tvaru aB žádat všude Ba); přitom poznámka (92[20]), že jde o tzv. konečně stavové gramatiky není docela přesná, neboť Chomsky je definoval pomocí orientovaných grafů s cykly. Dále CF-gramatika se nazývá lineární, když na pravé straně každého pravidla nejvýše jeden symbol je neterminální, ale není zcela srozumitelná definice sekvenční gramatiky (7.4.4). Bez důkazů se uvádí, že např. otázky zdali průnik dvou CF-jazyků je prázdný, nebo je CF-jazykem nebo K-jazykem, jsou nerozhodnutelné a podobně jsou nerozhodnutelné otázky, zdali je komplement CF-jazyka prázdný či nekonečný či CF-jazykem či K-jazykem atd. Řetězy či věty se znázorňují rovinnými representacemi vrcholových stromů, které však nejsou definovány, a které jsou známy pod názvem frázových ukazatelů. Další definici víceznačnosti řetězu, když se připouští dva různé stromy (8.2.3) je třeba ovšem rozumět tak, že oba stromy jsou neizomorfní. Jazyk se nazývá víceznačným, když obsahuje nějaký víceznačný řetěz (je výstižnější víceznačnost vztahovat ke gramatice než k jazyku) a vrozeně víceznačným, když každá jeho gramatika (jistého typu) je víceznačná. Zase je nerozhodnutelné, zdali je libovolný CF-jazyk víceznačný.

Dále se od Turingových strojů, které jsou příliš obecným a tedy nevhodným prostředkem studia, přechází k prostředkům speciálnějším, jimiž jsou různé druhy automatů. Zásobníkový automat je určen 1) vstupní páskou E, která je oboustranně nekonečná a do jejíž políček se píší buď symboly z konečného slovníku $V_E = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ nebo neutrální symbol e nebo jsou políčka prázdná, což je zachyceno zvláštním symbolem B; dále 2) paměťovou páskou M, která je jen zprava nekonečná a do jejíž políček se píší symboly konečného slovníku $V_M = \{A_1, A_2, \ldots, A_q\}$, přičemž může být $V_M \supset V_E$ a na pásce M je zvláštní symbol σ; a konečně 3) počítací jednotkou A, jejíž dvě čtecí hlavy čtou po jednom políčku na každé pásce a která může být v konečně mnoha vnitřních stavech $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$, a jejíž činnost je určena konečně mnoha příkazy následujícího tvaru: $(a_i, S_j, A_k) \to (S_m, x)$, kde místo x musí být buď e nebo σ nebo řetěz nad V_M a kde místo a_i případně místo A_k může být e; trojice tvaru (a_i, S_j, A_k) se nazývá fysikální situací a obecně situací se nazývá fysikální situace spolu s každou ze 4 uvedených možných trojic, takže automat je současně v několika situacích (to je zřejmě velmi neobratný popis). Vstupem výpočtu je řetěz nad V_E zpasaný na E, přičemž všechna ostatní políčka jsou prázdná, tj. je na nich B. Na začátku je počítací jednotka v počátečním stavu S_0, vstupní hlava čte nejlevější symbol vstupního řetězu a také paměťová hlava čte nejlevější symbol paměťové pásky, kterým je σ, tj. počáteční situace je určena. V obecné situaci (a_i, S_j, A_k) buď nelze použít žádný příkaz a pak se automat zastaví, nebo alespoň jednoho příkazu lze použít (a je-li jich použitelných více, pak se zvolí jeden, odkud je vidět, že jde o tzv. nedeterministický automat), který má na pravé straně (S_m, x) a to znamená, že: a) počítací jednotka přejde do stavu S_m, b) je-li první čtený symbol a_i, pak se vstupní hlava posune o jedno políčko doprava a je-li tam místo a_i neutrální symbol e, vstupní hlava se neposunuje vůbec a c) je-li $x = \sigma$ pak se vymaže (tj. nahradí se symbolem B) čtený symbol a páska M se posune o jedno políčko doprava; je-li $x = e$, páska se nehýbe a nic se nepíše a je-li $x = \varphi \in V_M^*$, pak x se napíše napravo od posledního symbolu na pásce M a páska se posune o délku řetězu φ doleva, takže paměťová hlava čte nejpravější napsaný symbol. Jestliže automat skončí (tj. patrně když nelze použít žádný příkaz) v situaci (B, S_0, B) je vstupní řetěz zapsaný na začátku výpočtu na vstupní pásce E, přijat a množina všech takto přijatých řetězů je jazykem přijatým tímto zásobníkovým automatem. Ukazuje se (9.3.1) obecné schema jak k CF-gramatice G určit zásobníkový automat, který přijímá jazyk $L(G)$, ale nedokazuje se jeho správnost; přitom se ukáže, že stav (a, S, σ) rovněž připouští stav (a, S, e), což nebylo výše uvedeno. Uvádí se bez důkazu (důkaz jedné části je až v 15.3.1), že třída všech CF-jazyků je právě třídou všech jazyků přijatých zásobníkovými automaty. Velmi nedostatečné jsou poznámky o využití bezkontextových jazyků, které se týkají programovacích jazyků ALGOL (má být ovšem ALGOL 60) a LISP, které musí být čtenáři = žáku zcela nesrozumitelné. Zcela je opomenut význam bezkontextových pravidel pro určení semantiky jazyka, ačkoliv to je nepochybně daleko nejdůležitější okolnost při hodnocení významu CF-gramatik a CF-jazyků.

Konečné (rozhodovací) automaty se zavádí v souvislosti s K-jazyky vytvořenými K-gramatikami (v 10.1.1 je už obecnější definice K-gramatiky než podle 7.4.1) obdobným způsobem jako zásobníkové automaty, tj. pomocí pásky a pravidel, a v definici (10.2.2) se nevylučuje nedeterminističnost (o které se však výslovně hovoří až v 10.3.1). Zase jenom poznámkovitě se hovoří o různých modifikacích konečných automatů, o jejich grafovém znázornění, o Kleeneovských výrazech vyjadřujících K-jazyky. Bez důkazu se uvádí tvrzení, že třída všech K-jazyků (tj. nad pevnou abecedou) je nejmenší třídou jazyků, která obsahuje všechny konečné jazyky (nad uvažovanou abecedou) a je uzavřena vzhledem k operacím sjednocení, zřetězení a unární operaci „*“, jíž se tvoří volná pologrupa. Opět velmi stručně je uvedena definice automatu s výstupem čili převodníku (což je neiniciální Mealyho automat). Je třeba připomenout, že termínem automat u nás označujeme jak rozhodovací automat, tj. automat bez výstupu, což je také v americké literatuře označováno termínem „automaton“, tak i obecný automat, tj. s výstupem, čemuž je v americké literatuře věnováno označení buď převodník „transducer“ nebo stroj, „machine“.

Jestliže se v Kleeneovských výrazech bez operace „*“ (tj. připouští se jen operace sjednocení a zřetězení) dovolí zavést proměnné pro jazyky, jsou těmito výrazy určeny funkce a z nich lze dostat rovnice, jejichž řešením jsou jisté jazyky. Každé CF-gramatice přísluší právě tolik rovnic a tolik jazykových proměnných, kolik je neterminálních symbolů. Např. CF-gramatice G s pravidly $\mathfrak{R} = \{S \to aAb,\ S \to c,\ A \to cSA,\ A \to b\}$ odpovídá soustava dvou rovnic $\mathfrak{S} = a\mathfrak{S}b \cup c$, $\mathfrak{A} = c\mathfrak{S}\mathfrak{A} \cup b$. Pak řetězy jazyka $L(G)$ lze odvozovat postupně podle rostoucího počtu potřebných pravidel k jejich odvození. Za tím účelem je dosti podrobně popsán pojem formální mocninné řady zavedený M. P. Schützenbergerem.

Posledním druhem gramatik, které se studují, jsou kontextové čili CS-gramatiky. U nich (12.1.2) se již požaduje $V_T \cap V_A = \emptyset$ a liší se od CF-gramatik typem pravidel: $\varphi_1 A \varphi_2 \to \varphi_1 w \varphi_2$, kde $A \in V_A$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \{V_A \cup V_T\}^*$ a w je neprázdný. Ukazuje se, ale nedokazuje, že třída všech jazyků vytvořených CS-gramatikami je (v (12.2.4) se uvádí ekvivalentní místo) identická s třídou jazyků přijatých nedeterministickými lineárně omezenými automaty, které jsou definovány takto: na jediné pásce se píší symboly abecedy V a zvláštní ukazatel $\#$, hlava automatu čte vždy jisté políčko pásky a je v některém vnitřním stavu S_j, když S_0 je počátečním stavem (v němž se začíná) a kromě něho je předepsána podmnožina tzv. koncových stavů; vstupní slovo se napíše na pásku a zleva i zprava je uzavřeno ukazatelem $\#$ a činnost záleží v používání příkazů tvaru $(a_i, S_j) \to \to (S_k, a_l, M)$, kde $a_i, a_l \in V$ a $M \in \{+1, -1, 0,\}$ což značí posun hlavy o jedno políčko doprava či doleva či žádný posun; začíná se ve stavu S_0 a je čten levý ukazatel $\#$ vstupního slova a užití příkazu znamená změnit stav z S_j na S_k, přepsat symbol a_i na a_l a příslušný pohyb hlavy; vstupní slovo je přijato, jestliže se automat dostane do některého koncového stavu a přitom jeho hlava čte pravý ukazatel $\#$ (přitom příkazy mohou obsahovat symbol $\#$, ale vždy dvakráte, tj. $\#$ se nedá přepsat na nic jiného).

Poslední třetí část (str. 157—215) je věnována podrobnějšímu algebraickému studiu různých otázek. Především je podrobně studován homomorfismus volných pologrup a některé kongruence s ním spojené. Standardním K-jazykem se nazývá jazyk K_S nad V_T definovaný následujícími podmínkami: 1. každý řetěz z K_S začíná symbolem z pevné množiny I, 2. každý řetěz z K_S končí symbolem z pevné množiny J a 3. slova z K_S neobsahují žádný řetěz délky 2 z dané množiny řetězů $\Delta \subset V_T \times V_T$. Dokazuje se, že skutečně K_S je K-jazykem a že k libovolnému K-jazyku L_1 lze vždy najít takový standardní K-jazyk L_2 a homomorfismus φ, že $\varphi(L_2) = L_1$. Dále se vychází z volné grupy, jejíž abeceda sestává ze dvou částí $\mathfrak{A} = \{a, b, \ldots\}$ a $\mathfrak{A}' = \{a', b', \ldots\}$, takže její prvky lze zpárovat do dvojic (a, a'), (b, b'), ... Jestliže jsou předepsány relace $aa' \sim E$, $bb' \sim E, \ldots$ případně dokonce $aa' \sim a'a \sim E$, $bb' \sim b'b \sim E, \ldots$, pak množina řetězů, které jsou ekvivalentní v prvním příp. v druhém systému, je omezeným Dyckovým příp. Dyckovým jazykem, jejichž studiu je věnována velká pozornost, aby byla dokázána fundamentální věta (15.2.3), že ke každému CF-jazyku lze přiřadit takový Dyckův (příp. omezený Dyckův) jazyk D, standardní K-jazyk Q a homomorfismus φ, že $L = \varphi(D \cap Q)$.

Dále se vychází z komutativního (a ovšem asociativního) okruhu Ω a pro volnou pologrupu X^* se konstruuje volná asociativní algebra $\Omega[X^*]$, jejíž prvky jsou tvaru $\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_k f_k$, kde $\alpha_i \in \Omega$ a $f_i \in X^*$, přičemž lze připustit prvky s nulovým koeficientem $0f$, takže sečítání je definováno po složkách, tj. je-li v jednom αf a ve druhém βf, je v součtu $(\alpha + \beta) f$, zatímco násobení, které je asociativní, ale nikoli komutativní, je definováno pravidlem $(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i)(\sum_{j=1}^{s} \beta_j g_j) = \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{r,s} (\alpha_i \beta_j)(f_i g_j)$. Pak se algebra $\Omega[X^*]$ rozšíří na velkou algebru $\Omega[[X^*]]$, jejímiž prvky jsou formální mocninné řady, které jsou zobecněním prvků z $\Omega[X^*]$. Řádem řady (S) se nazývá nejmenší délka řetězu s nenulovým koeficientem ord $[(S)]$ a vyhodnocením řady (S) se rozumí číslo val $[(S)] = 2^{-\mathrm{ord}[(S)]}$, takže se zavádí vzdálenost, ukazuje se, že uvažovaný prostor je metrický a úplný a studuje se v něm řada dalších operací; zavádí se pojem algebraického a racionálního jazyka.

Jako dodatek (str. 217—228) je připojeno několik srovnávacích úvah o pojetí jazykové transformace.

Celkově lze výběr temat a podrobnost jejich zpracování těžko zdůvodnit pedagogickými zřeteli, působí spíše náhodně a jsou dány zájmy autorů. V knize je veliký počet nadpisů, které však ne vždy vystihují obsah následujících řádků. Na konci řady odstavců jsou připojena cvičení.

Tiskové chyby: 84^{23} má být „applied"; 111^{10} v (9.3.1) má být $([1], w_{i,j})$ pro $1 \leq j \leq k_i$ a $1 \leq i \leq m$; 201^{17} v (16.1.6) má být „said to be equivalent".

Karel Čulík, Praha

A. Blanc-Lapierre, R. Fortet: THEORY OF RANDOM FUNCTIONS. Volume 1. Nakladatelství Gordon and Breach, New York, London, Paris, 1965, 1967, 443 stran, 50 obr.

Kniha je překladem z francouzského originálu, který byl publikován v roce 1953. Vzhledem k značnému rozsahu je původní text rozdělen na dvě části. Recenzovaná kniha je první částí. Profesoři R. Fortet a A. Blanc-Lapierre jsou známé osobnosti, které měly značný vliv na rozvoj teorie náhodných funkcí. Na výkladu a rozvrhu knihy je znát, že autoři mají značné praktické zázemí. Je věnována pozornost zvláště těm partiím teorie náhodných funkcí, které nutně potřebuje znát fyzik nebo technik, který musí zvládnout úkoly, kde důležitou úlohu hraje fluktuace a náhodné poruchy vůbec.

Kniha je psána tak, že pojmy jako náhodná veličina, střední hodnota aj. jsou vysvětleny na mnoha technických příkladech dříve, než je uvedena matematická formulace. Cílem autorů je zřejmě podat nejdůležitější fakta o teorii Markovských procesů.

První a druhá kapitola jsou věnovány základním vlastnostem náhodných veličin. V třetí kapitole jsou obecné definice a vlastnosti náhodných funkcí a procesů. Celá čtvrtá kapitola je věnována procesům s nezávislými přírůstky a to zvláště Wienerově procesu. Jest dokázána spojitost tohoto procesu a jsou odvozeny formule pro distribuční nebo charakteristické funkce veličin $I_m = \int_0^1 X^m(t)\,\mathrm{d}t$, $J_m = \int_0^1 |X(t)|^m\,\mathrm{d}t$, $(m \geqq 1)$, $I_0 = \max\limits_{\langle 0,1\rangle} X(t)$, $J_0 = \max\limits_{\langle 0,1\rangle} |X(t)|$. Velká pozornost je zde věnována také Poissonově procesu. Bez důkazu je uvedena věta o rozkladu stochasticky spojitého procesu s nezávislými přírůstky.

V další kapitole jsou studovány procesy, které mohou býti odvozeny z Poissonovského procesu. Jsou rozděleny do tří modelů.

1) $X(t) = \sum\limits_j R(t, t_j)$, kde okamžiky t_j tvoří Poissonovský proces a $R(t, t_j)$ jsou dané funkce. Uvažují se i procesy vyjádřené integrálem $X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t, z)\,\mathrm{d}N(z)$.

2) $X(t) = \sum\limits_j R_j(t - t_j)$, kde t_j tvoří Poissonovský proces a R_j jsou nádhoné funkce: $R_j(z) = 0$ pro $z < 0$ a $z > b_j$, $R_j(z) = 1$ pro $z \in \langle 0, b_j \rangle$, kde b_j jsou náhodné veličiny vzájemně nezávislé se stejnými distribučními funkcemi.

3) $X(t)$ má hodnoty ± 1, které se střídají v okamžicích t_k a t_k tvoří Poissonův proces. V intervalu $\langle t_j, t_{j+1} \rangle$ obsahující počátek se hodnota $X(t)$ zvolí náhodně.

Je předveden praktický význam těchto modelů a jsou řešeny problémy, které se nejvíce vyskytují při aplikacích.

Poslední dvě kapitoly se týkají Markovských procesů. Šestá kapitola je vyhrazena Markovským procesům s konečným a spočetným počtem možných stavů. Je zde naznačen rozklad množiny stavů na ireducibilní stavy, studuje se vlastnosti cyklických a uzavřených množin stavů ap. Dále je věnována pozornost vlastnostem matice transitivní funkce $P(t)$ (asymptotické vlastnosti, derivovatelnost, Kolmogorova rovnice). V sedmé kapitole se uvažují jednak permanentně nespojité a jednak spojité skoro všude Markovské procesy. Hlavním cílem je zde odvození Kolmogorovy rovnice a obdobných rovnic pro aditivní funkcionály.

Kniha je jistě užitečnou pomůckou fyziků a techniků, těžko ji však doporučit matematikům, poněvadž důkazy tvrzení většinou chybí a formulace jsou někdy z hlediska matematiků zbytečně komplikované až nejasné.

Ivo Vrkoč, Praha

R. L. Stratonovich: TOPICS IN THE THEORY OF RANDOM NOISE. Volume II, nakl. Gordon and Breach New York, London, Paris, 1967, 329 stran, 36 obr.

Kniha je revidovaným překladem z ruského originálu a je druhou částí dvousvazkového díla. První svazek je nazván: „*Obecná teorie náhodných procesů, nelineárních transformací signálů* *a šumu*". Čtenáři však stačí elementární znalosti z teorie pravděpodobnosti, aby mohl číst druhý svazek samostatně.

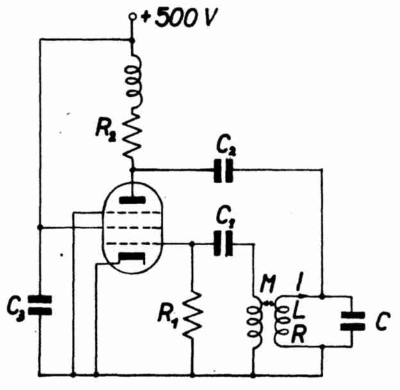
Druhý (recensovaný) svazek je hlavně věnován metodám, které jsou potřebné k zvládnutí teorie elektronkového oscilátoru, na který působí náhodné vlivy. Tento svazek je rozdělen do dvou částí. První část nese název: „*Vrcholy náhodných funkcí a vliv šumu na relé*" a skládá se ze tří kapitol. Autor se zabývá zkoumáním náhodného procesu $x(t)$, který je řešením rovnice $dx(t)/dt = f(x) + \xi(t)$, kde $\xi(t)$ je daný δ-korelovaný náhodný proces. Autor se zabývá určením doby T_{tr}, po které lze $x(t)$ považovat za stacionární proces. V teorii reléových systémů je zvláště důležité, kdy $x(t)$ překročí (zdola nahoru) jistou úroveň $x = b$, kdy dochází ke změně polohy. Z praktického pozorování je patrno, že tyto průsečíky se hromadí do skupin, mezi nimiž jsou zřetelné rozdíly. Střední dobu, která uplyne mezi těmito skupinami, autor označuje T_{fp} a určuje ji. Tyto veličiny jsou určeny na základě úvah o prvních aproximacích ve Fourrierově rozvoji. Doby T_{tr}, T_{fp} však nejsou matematicky definovány. Druhá kapitola je věnována určení středního počtu průsečíků $x(t)$ s $x = b$, po nichž nastává vrchol, který trvá déle než $\tau > 0$. Poněvadž ke změně stavu relé nestačí překročení úrovně $x = b$, ani doba trvání takového vrcholu, ale plocha, která se nachází mezi $x(t)$ a úrovní $x = b$, autor určuje tuto plochu pro dostatečně hladké procesy.

Druhá část knihy je nazvána: „*Nelineární samobuzené kmity za přítomnosti šumu*". Autor se nejprve věnuje aplikaci metody průměrů Krylova-Bogoljubova na nelineární rovnici druhého řádu s náhodnými poruchami a dalším zjednodušením. V páté kapitole jsou uvedeny různé metody pro řešení dříve zjednodušeného typu rovnice. Jde hlavně o využití Fokker-Plancovy rovnice, metodu linearisace a méně známou tzv. quasi-statickou metodu, která je vhodná v případě, že korelační doba poruch je větší než relaxační doba soustavy.

Kapitoly 6—8 tvoří hlavní náplň knihy. Zde se podrobně zkoumá vliv náhodných poruch na elektronkový oscilátor. Konkrétní formule jsou odvozeny pro případ vyobrazeného oscilátoru, který po jistém zjednodušení lze popsat rovnicí

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2[\omega_0 M F_0(\dot{x}/\omega_0) - RC\dot{x} + \omega_0 M I_f(t)]\,,$$

kde x je proud v obvodu LC a $I_f(t)$ popisuje náhodné poruchy anodového proudu. Autor se po-



drobně zabývá případem, kdy poruchy mají charakter slabého šumu, který je způsoben termálními vlivy nebo procesy v elektronce (kap. 6), dále případem, kdy poruchy mají charakter silného šumu způsobeného např. změnami napětí vnější sítě a konečně vlivu pomalu se měnících poruch, které mohou být způsobeny změnami teploty (viz vliv na kapacitu, indukci atd.). Autor určuje explicitně korelační funkce, spektrální hustoty ap. odpovídající různým fyzikálním veličinám tohoto oscilátoru. Používá se dříve objasněných metod, takže si čtenář může samostatně modifikovat výsledky i pro jiné typy oscilátorů.

Devátá kapitola je věnována problému synchronisace oscilátorů. V tomto případě mohou být poruchy neustálé, avšak malé intensity nebo může docházet k občasným skokům fáze o celé násobky periody. Nahromadění takových skoků má za následek změny frekvence. Autor se zabývá oběma případy. Závěrečná kapitola pojednává o parametrických oscilacích.

Kniha je určena hlavně pro techniky, pro které je zřejmě přínosem. Z matematického hlediska je však v mnoha směrech nevyhovující. Některé pojmy z první části (např. T_{tr}, T_{fp}) nejsou jasně definovány. V případě, že poruchy tvoří „bílý šum", neexistuje derivace řešení $x(t)$ a tedy samotný zápis rovnice je čistě formální. Tento fakt může být zdrojem hrubých chyb, pokud by čtenář, s menším technickým citem nebo matematickými znalostmi, chtěl provést netriviální úpravy výsledků nebo metod. Je nutno podotknout, že existuje teorie tzv. Itových stochastických rovnic, které vystihují vliv „bílého šumu" z matematického hlediska precisně. O této teorii však není v knize ani zmínka. Avšak i pro matematiky může tato kniha mít cenu, a to jako zdroj nových podnětů, zvláště, co se týče první části knihy.

Ivo Vrkoč, Praha

Lothar Collatz: FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZA A NUMERICKÁ MATEMATIKA, SNTL, Praha 1970. Z německého originálu Funktionalanalysis und numerische Mathematik přeložil Alois Apfelbeck. 420 stran, 96 obrázků, cena 47,— Kčs.

Český překlad této významné práce z oboru numerických metod, a vlastně první soustavné práce tohoto druhu vůbec, vychází šest let po německém originálu v Teoretické knižnici inženýra. Zájemci měli možnost seznámit se s knihou již dříve, mj. i z jejího překladu anglického (1966) nebo ruského (1969).

Kniha je rozvržena do tří kapitol. První kapitola, Základy funkcionální analýzy s aplikacemi, buduje po všeobecném úvodu celý aparát funkcionální analýzy, potřebný pro následující dvě kapitoly. Druhá kapitola, Iterační metody, je uvedena větou o pevném bodě pro obecnou iterační metodu v pseudometrických prostorech. Obsahem kapitoly pak jsou aplikace této věty v různých konkrétních případech. Obzvláště důkladně se autor zabývá metodou regula falsi a Newtonovou metodou. Třetí kapitola, Monotonie, nerovnosti a další oblasti, je věnována zejména aplikacím Schauderovy věty o pevném bodě (věta je dokázána v dodatku ke knize) a otázkám aproximace, především aproximace Čebyševovy.

Nesnadný úkol, vyložit základy funkcionální analýzy na necelých dvou stovkách stran první kapitoly, se autorovi podařilo splnit jen za cenu velkého zhuštění textu a místy i na úkor dobré srozumitelnosti výkladu. Další dvě kapitoly touto zhuštěností netrpí. V knize je řada různých názorných příkladů, včetně číselných příkladů u popisu jednotlivých numerických metod. Kromě toho všechny tři kapitoly obsahují netriviální příklady určené k řešení čtenářem.

Autorův záměr ukázat, že není „aplikovaná" matematika oddělena od „čisté" matematiky (ale ani „čistá" matematika od „aplikované") je v knize zdařile realizován. Už proto je kniha přínosem jak pro zájemce o teorii numerických metod, tak pro ty, kdo se zabývají praktickými výpočty. Český překlad dovoluje nyní i využití knihy při vysokoškolské výuce.

Překladatel značně přispěl ke zlepšení srozumitelnosti knihy, zejména pak její první kapitoly. Text je doplněn řadou poznámek pod čarou a některé pasáže jsou zlepšeny (např. důkaz Arzelovy věty v odstavci 5.3). Přesto se české vydání neobešlo bez tiskových chyb, z nichž některé mohou čtenáře-začátečníka zmást (např. v příkladu 4 odstavce 2.5 se jedná o prostor R_m, nikoli R_n).

Na několika místech je překlad značně nepřesný (např. v odstavci 14.7 se autorem užitý anglický termín *implicit alternating direction method* překládá jako *metoda implicitních střídavých směrů* místo *implicitní metoda střídavých směrů*). Kromě toho překladatel vytváří nové české termíny někdy i tam, kde už vžitý termín existuje (např. německý termín *Kondition der Matrix* je přeložen v odstavci 10.4 jako *stav matice*, přestože běžně vžitý český termín pro tento pojem je *číslo podmíněnosti matice*; analogický překlad se vyskytuje už v odstavci 6.6 při zavedení tohoto termínu pro operátory).

Přes zmíněné nedostatky lze český překlad Collatzovy knihy jen uvítat jako významný přínos pro všechny, kdo se jakýmkoli způsobem zabývají numerickými metodami.

Karel Segeth, Praha

Lubomír Kolek: PŘEHLED VZORCŮ STŘEDOŠKOLSKÉ MATEMATIKY. Polytechnická knižnice, 56. svazek II. řady, Praha, SNTL a nakladatelství Práce 1970, 324 str., 143 obr., 5 tabulek, brožované 24,— Kčs.

Hans-Jochen Bartsch: MATEMATICKÉ VZORCE. Z němčiny přeložil Mg. Mat. Vladimír Malý, CSc. Třetí nezměněné vydání, SNTL Praha a Nakladateľstvo Alfa Bratislava 1971, 580 str., 326 obr., vázané Kčs 35,—.

SNTL předkládá, poměrně krátce po sobě, dvě sbírky vzorců. Vedle již osvědčené a dle mého názoru užitečné rozsáhlejší sbírky H.-J. Bartsche, která vychází v českém překladu již ve třetím vydání, je to prvé vydání knihy L. Kolka.

Přestože sbírky vzorců byly, jsou a budou vždy velmi potřebné, zdá se mi tento počin SNTL, uvážíme-li poměry v našem polygrafickém průmyslu, zbytečným luxusem. Navíc, bohužel, sbírka L. Kolka je — vzhledem k mnoha chybám, a nejsou to pouze chyby tiskové — téměř nepoužitelná pro ty, kterým je určena.

A tak zájemcům o sbírku vzorců je možno jen doporučit: obětujte o 11,— Kčs více a kupte si sbírku H.-J. Bartsche, na kterou je možno se spolehnout.

Vladimír Doležal, Praha

DÁLE VYŠLO

P. F. Byrd, M. D. Friedman: HANDBOOK OF ELLIPTIC INTEGRALS FOR ENGINEERS AND SCIENTISTS. 2. revidované vydání, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1971, 358 + XVI stran, 22 obrázků, vázané 64,— DM.

Tato sbírka vycházející jako 67. svazek řady „Die Grundlehren der mathematischen Wiessenschaften in Einzeldarstelungen“ a obsahující více než 3000 vzorců a formulí týkajících se eliptických integrálů, theta funkcí a eliptických funkcí je zájemcům k disposici v knihovně Matematického ústavu ČSAV v Praze.

MO 1951—1971, 20 LET MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY V ČSSR. Připravili a redigovali *P. Benda, J. Moravčík, J. Vyšín a F. Zítek.* Vydal ÚV matematické olympiády v Praze 1971 jako zájmový tisk pro potřebu matematické olympiády s podporou ministerstev školství ČSR a SSR.

Neprodejná brožura, která vyšla při příležitosti XX. ročníku matematické olympiády v ČSSR. Jak uvádí redakční skupina v předmluvě, byla původně plánována publikace representativnější, zachycující již dnes bohatou historii této soutěže. Bohužel omezení edičních a finančních možností způsobilo vydání jen výseku z tohoto rozsáhlého materiálu. Přesto se podařilo přinést pestrou všehochuť, kterou si se zájmem přečte každý, kdo se zajímá o matematickou olympiádu. Spolu s redakční skupinou doufáme, že za pět let budou okolnosti příznivější a že bude možno vydat hodnotnou publikaci k čtvrtstoletí této soutěže.

Redakce

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

ZPRÁVY

MEZINÁRODNÍ KONFERENCE O TEORII ČÍSEL V MOSKVĚ

Ve dnech 14.—18. září 1971 pořádala AV SSSR spolu s Mezinárodní matematickou unií v Moskvě konferenci věnovanou analytické a algebraické teorii čísel. Datum zahájení konference přitom odpovídalo osmdesátinám význačného sovětského matematika I. M. Vinogradova.

Toto jubileum se odrazilo i v náplni přednášek na plenárních zasedáních konference. Prvé plenární zasedání, spojené se zahájením konference, se konalo v zasedací síni presidia AV SSSR. Po krátkém úvodním projevu akademika M. V. Keldyše a vystoupení předsedy organisačního výboru akademika I. M. Vinogradova vyslechli přítomní dva hodinové referáty. Oba přednášející (president MMU prof. K. Chandrasekharan i akademik J. V. Linnik) se věnovali významu díla I. M. Vinogradova z hlediska minulého i současného rozvoje teorie čísel. Na závěrečném druhém plenárním zasedání, kterému předsedal akademik N. N. Bogoljubov byly na programu dvě hodinové přednášky mladých matematiků. Prof. E Bombieri (Italie) i prof. A. A. Karacuba (SSSR) hovořili o vlastních výsledcích, které patří k nejzávažnějším úspěchům v teorii čísel v poslední době.

Vlastní jednání konference probíhalo ve dvou sekcích. Referáty byly pouze hodinové, zahraniční účastníci byli ke svým přednáškám jmenovitě zváni. V prvé sekci bylo předneseno celkem patnáct referátů věnovaných problematice analytické teorie čísel, v sekci druhé (algebraická teorie čísel) pak referátů čtrnáct. Konference se zúčastnilo třicet pět zahraničních matematiků a pochopitelně celá řada matematiků sovětských. Pro zajímavost uveďme (podle přednášek) zahraniční účastníky: A. Baker, B. J. Birch, B. A. Burgess, J. W. S. Cassels, L. J. Mordell (Anglie), T. Tonkov (Bulharsko), M. Jutila (Finsko), E. Bombieri (Italie), Y. Ihara, T. Mitsuji, T. Tatuzawa (Japonsko), K. Ramachandra (Indie), A. Schinzel (Polsko), H. Koch (NDR), F. Hirzebruch (NSR), A. A. Albert (USA), B. Novák (ČSSR). Ze sovětských účastníků jmenujme ještě např. A. I. Vinogradova, I. P. Šafareviče, A. F. Lavrika, J. P. Kubiliuse, A. N. Andrianova, V. G. Sprindžuka a A. B. Šidlovského. Mezi účastníky konference byli také členové předsednictva MMU (A. Cartan, M. F. Atiyah aj.), jehož zasedání se současně v Moskvě konalo.

Těžiště práce spočívalo — jako na většině podobných konferencích — hlavně ve skupinových diskusích mimo rámec přednášek. Přesto, že počet referátů byl značně redukován (pro ilustraci: symposium v r. 1968 v maďarském Debrecenu mělo v jediné sekci více než dvacet pět referátů) převládl spíše dojem, že účelné je na podobných setkáních specialistů zařadit ještě menší počet obsáhlejších referátů, které by byly věnovány buď přehledu problematiky v některém odvětví neb zásadním výsledkům poslední doby a ponechat více prostoru improvisovaným přednáškám a diskusím.

Závěrem je potřeba ještě dodat, že celá konference byla organisačně bezvadně připravena. Pro zahraniční účastníky byla připravena řada exkursí v Moskvě i v okolí a po konferenci několikadenní pobyt buď v Leningradě neb v oblasti Taškent, Samarakand. Netřeba snad dodávat, že k vzájemnému sblížení účastníků přispěla úvodní recepce i závěrečná večeře a pochopitelně celá řada neoficiálních večerních besed.

Břetislav Novák, Praha

JUBILEJNÍ XX. ROČNÍK MO V ČSSR

Ve školním roce 1970—71 proběhl XX. ročník tradiční školské matematické soutěže — matematické olympiády. Po organizační stránce byl průběh obdobný jako v ročníku předcházejícím: po studijním I. kole proběhlo ve všech kategoriích klauzurní II. kolo a v květnu pak dvoudenní soutěž III. kola kat. A v Pardubicích. Zvítězil JAN BRYCHTA z 3a gymnasia v Praze 3, Pražačka. Druhým byl ŠTEFAN SAKALOŠ ze 3d SVŠ Prievidza. Celkem bylo vyhlášeno 8 vítězů a 12 úspěšných řešitelů.

Pokračovaly též pomocné akce pro soutěžící v MO jako jsou přednášky a semináře v krajích a celostátní soustředění úspěšných řešitelů MO a FO kategorie B, kde byla probírána témata: Algoritmy a složitost úloh (dr. *J. Morávek*), Booleovy algebry (dr. *O. Odvárko*), Lineární transformace v rovině (dr. *P. Liebl*) a Metoda souřadnic v geometrii (dr. *M. Koman*, CSc). Po týdenním přípravném soustředění se osmičlenné družstvo zúčastnilo XIII. Mezinárodní matematické olympiády v Žilině (viz další zpráva).

Vlastimil Macháček, Praha

XIII. MEZINÁRODNÍ MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

V roce 1971 se MMO opět konala v Československu. Bylo tomu tak po druhé v historii této mezinárodní soutěže. Po prvé Československo pořádalo MMO v roce 1962 v rámci oslav 100. výročí založení JČMF. Tehdy to byla IV. MMO a dějištěm byly Jižní Čechy. XIII. MMO byla u nás pořádána při příležitosti XX. ročníku československé MO.

Pořadatelem XIII. MMO bylo ministerstvo školství Slovenské socialistické republiky. Přípravný výbor začal pracovat již v červnu 1970. Předsedou byl akademik ŠTEFAN SCHWARZ a místopředsedou akademik JOSEF NOVÁK. Z pozvaných 17 států (včetně ČSSR) přijalo pozvání 15 — Bulharsko (BG), ČSSR (CS), Francie (F), Holandsko (NL), Jugoslávie (YU), Kuba (C), Maďarsko (H), Mongolsko (M), NDR (D), Polsko (PL), Rakousko (A), Rumunsko (R), SSSR (SU), Švédsko (S) a Velká Británie (GB) — což je dosud největší počet. Belgie zdvořile odmítla a Itálie na pozvání neodpověděla.

Soutěž řídila mezinárodní jury, jejímž předsedou byl akademik Štefan Schwarz, místopředsedou akademik Josef Novák a členy byly vedoucí všech delegací, kteří většinou přijeli do Bratislavy 7. 7. 1971. První oficiální akcí XIII. MMO byla slavnostní večeře, kterou uspořádal 7. července v hotelu Carlton v Bratislavě na počest vedoucích delegací ministr školství SSR prof. ing. ŠTEFAN CHOCHOL, CSc. Žáci se svými pedagogickými vedoucími přijeli do Bratislavy většinou 10. 7. Na slavnostním zahájení soutěže 13. 7. v Žilině i na slavnostním závěru MMO v Bratislavě dne 19. 7., kde byly předány ceny, promluvil vždy náměstek ministra školství SSR prof. dr. MICHAL GREGUŠ, DrSc. Vlastní soutěž se konala ve dnech 12. 7. a 13. 7. v Žilině v budově střední průmyslové školy stavební. Žáci řešili celkem 6 úloh, každý den 3 po čtyři hodiny čistého času.

Žáci, vedoucí delegací a pedagogičtí vedoucí absolvovali též několik výletů, např. do Bojnic a do Vysokých Tater. Vedoucí delegací a pedagogičtí vedoucí při výletu do Vrátné doliny vzpomněli dlouholetého jednatele ÚV čs. MO RUDOLFA ZELINKU, který zde náhle v květnu 1965 zemřel.

Nyní k výsledkům soutěže. Nejlepší byli maďarští žáci — obdrželi celkem 255 bodů z 336 možných, za což byli odměněni 4 prvními a 4 druhými cenami. Českoslovenští žáci získali celkem pouze 55 bodů a jednu třetí cenu, což podle bodů tedy znamená 9. místo a podle cen dokonce 11. místo v žebříčku 15 států.

Počty získaných bodů a cen:

Stát	A	BG	C	CS	D	F	GB	H	M	NL	PL	R	S	SU	YU
Body	82	39	9	55	142	38	110	255	26	48	118	110	43	205	71
I. cena	—	—	—	—	1	—	—	4	—	—	1	—	—	1	—
II. cena	—	—	—	—	1	—	1	4	—	—	—	1	—	5	—
III. cena	4	—	—	1	4	—	4	—	—	2	4	4	2	2	2

Poznámka: Družstva všech zemí byla osmičlenná až na Kubu (4 žáci) a Švédsko (7 žáků).

Jiří Mída, Brandýs n. Labem

PADESÁT ROČNÍKŮ ROZHLEDŮ MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍCH

V tomto školním roce vychází již padesátý ročník Rozhledů matematicko-fyzikálních, které se kdysi odštěpily od Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky. Rozhledy jsou určeny středoškolským studentům a přinášejí pro ně články z matematiky, deskriptivní geometrie, fyziky, astronomie a přilehlých oborů. Po oněch padesát let ovlivňují naši středoškolskou matematiku a fyziku a pomáhají mladým talentům. V Rozhledech najdeme též každým rokem rubriku „Úlohy o ceny“, která je jakousi předchůdkyní celostátní matematické a fyzikální olympiády. V minulosti vedli tento časopis známí vědečtí pracovníci (např. A. URBAN, F. VYČICHLO), přispívala sem řada školských odborníků a mnoho dnes známých jmen bylo prvně otištěno právě v Rozhledech. Dnes časopis rediguje O. SETZER se spolupracovníky. Přejeme Rozhledům, aby měly stále zásobu pěkných článků a úloh a aby se jimi těšilo ještě mnoho generací.

Jiří Sedláček, Praha

OBHAJOBY A DISERTAČNÍ PRÁCE KANDIDÁTŮ VĚD

Před *komisemi pro obhajoby kandidátských disertačních prací* obhájili dne 28. června 1971 bulharský státní příslušník IVAN DIMOV JANČEV práci na téma: „O některých dvojicích monosystémů lineárních prostorů vnořených do prostoru sudé dimenze“, dne 9. listopadu 1971 JIŘÍ TAUFER práci na téma: „Řešení okrajových úloh pro soustavy lineárních diferenciálních rovnic“ a JAROSLAV MILOTA práci na téma: „Řádově optimální univerzální variační metody“, dne 19. listopadu 1971 vietnamský státní příslušník NGUYEN-VAN HUU práci na téma: „Rank tests for hypothesis of randomness against a group regression alternatives“, dne 15. prosince 1971 KAREL NAJZAR práci na téma: „Výpočet vlastních čísel a vlastních funkcí symetrického operátoru metodou nejmenších čtverců, JOSEF KOFROŇ práci na téma: „Odhady chyb kvadraturních a interpolačních formulí nezávisle na derivacích“ a KAREL SEGETH práci na téma „Univerzálně optimální integrační vzorce zahrnující hodnoty derivací integrandu“ a dne 23. prosince 1971 DAGMAR GLÜCKAUFOVÁ práci na téma: „Axiomatic foundation of indirect utility“.

Redakce

OZNÁMENÍ

Československá akademie věd a Universita J. E. Purkyně v Brně, navazujíce na tradici vědeckých konferencí Equadiff I a II z let 1962 a 1966, organizuje Konferenci o diferenciálních rovnicích a jejich aplikacích Equadiff III. Konference se bude konat v Brně od 28. srpna do 1. září 1972. Na konferenci přednesou zahraniční i českoslovenští matematici souhrnné přednášky z oboru obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic, numerických metod jejich řešení i jejich aplikací. Účastníci budou mít možnost přednést krátké vědecké sdělení (15—20 minut). Přednášky i vědecká sdělení budou proslovena v některém světovém jazyce.

Po dobu konference bude organizován společenský program pro rodinné příslušníky účastníků konference, např. prohlídka města Brna, výlety do okolí, návštěvy divadel a koncertů. Bude uspořádán zájezd do Slavkova, Lednice atd.

Zájemci o účast na konferenci, kteří nedostali předběžnou přihlášku, nechť sdělí laskavě svoji adresu organizačnímu výboru konference.

Organizační výbor Equadiff III
Universita J. E. Purkyně
Katedra matematiky
Janáčkovo nám. 2a
Brno