STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

JIŘÍ SOUČEK, Praha: *Spaces of functions on domain Ω, whose k-th derivatives are measures defined on $\bar{\Omega}$.* (Prostory funkcí na Ω, jejichž k-té derivace jsou míry na $\bar{\Omega}$.)

V práci jsou definovány nové prostory funkcí, jejichž k-té derivace jsou míry. Tyto prostory se liší od prostorů BV nebo $\overline{BV}$ a tvoří základ pro zkoumání variačních problémů v nereflexivních prostorech, např. pro neparametrický problém minimální plochy.

ZDENA RIEČANOVÁ, Bratislava: *A note on weakly Borel measures.* (Poznámka o slabo borelovských mierach.)

Článok obsahuje tvrdenia o regulárnosti mier definovaných na najmenšom σ-okruhu nad systémom všetkých uzavretých podmnožín ľubovoľného (resp. lokálne kompaktného) Hausdorffovho topologického priestoru.

MARSHALL SAADE, Athens: *On decompositions of groupoids.* (O rozkladech grupoidů.)

V článku jsou dokázány věty o rozkladech pro grupoidy splňující jisté identity. Tyto věty byly motivovány studiem příkladů grupoidů, tzv. bodových algeber. Podmínky splněné v tomto případě byly použity pro obecnější případ.

LADISLAV DRS, Praha: *Parallele Axonometrie und Einschneideverfahren.* (Rovnoběžná axonometrie a Eckhartova metoda.)

V první části jsou uvedeny vzorce, určující rekonstrukci souřadnicové soustavy z její axonometrie dané speciální zářezovou (Eckhartovou) metodou (a-metoda). Konstrukcemi ve druhé části se získávají s-metody splňující dodatečné požadavky na jimi určené axonometrie (dimetrie, isometrie, kolmá axonometrie, názorná axonometrie). Poslední část je věnována obecnější a-metodě, pomocí níž lze již určit jakoukoli rovnoběžnou axonometrii.

JINDŘICH NEČAS, Praha: *Fredholm alternative for nonlinear operators and applications to partial differential equations and integral equations.* (Fredholmova alternativa pro nelineární operátory a aplikace na parciální diferenciální rovnice a integrální rovnice.)

Autor dokazuje za použití věty Borsukova typu Fredholmovu alternativu pro nelineární operátory a aplikuje ji na okrajové úlohy.

BRUNO BUDINSKÝ, Praha: *Zum Petrschen Satz.* (K Petrově větě.)

V roce 1905 publikoval K. Petr zajímavou a elegantní větu z teorie rovinných mnohoúhelníků. V předložené práci je podán čistě geometrický důkaz této věty, kterou K. Petr dokázal algebraicky.

BRUNO BUDINSKÝ a ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha: *Mehrdimensionales Analogon zu den Sätzen von Menelaos und Ceva.* (Vícerozměrné analogie k Menelaově a Cevově větě.)

Pomocí homogenních barycentrických souřadnic jsou odvozeny pro $(n + 1)$-úhelníky ležící v n-dimensionálním prostoru Menelaova a Cevova věta.

BRUNO BUDINSKÝ, Praha: *Sätze von Menelaos und Ceva für Vielecke im sphärischen n-dimensionalen Raum.* (Menelaova a Cevova věta pro mnohoúhelník ve sférickém n-dimensionálním prostoru.)

Pro normální mnohoúhelník ve sférickém prostoru S_n je dokázána Menelaova a Cevova věta. K danému mnohoúhelníku je definován polární mnohoúhelník, pomocí něhož jsou věty „dualisovány". Pomocí limitního přechodu, kdy poloměr kruhové plochy $R \to +\infty$, jsou dokázány Menelaova a Cevova věta a příslušné duální věty v euklidovském prostoru E_n.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

RŮZNÉ

O JEDNOM ZOVŠEOBECNENÍ ČÍSELNOTEORETICKÉHO VZŤAHU $[a_1, a_2] = \frac{a_1 a_2}{(a_1, a_2)}$ A JEHO POUŽITÍ

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 30. septembra 1970)

V tomto článku odvodíme jedno zovšeobecnenie vzťahu

(1) $$[a_1, a_2] = \frac{a_1 a_2}{(a_1, a_2)}$$

a tento použijeme na riešenie diofantickej rovnice

(2) $$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

v prirodzených číslach.

Lema. *Vzťah* (1) *možno písať v tvare*

(3) $$[a_1, a_2] = (a_1, a_2)\left[\frac{[a_1, a_2]}{a_1}, \frac{[a_1, a_2]}{a_2}\right].$$

Dôkaz. Platí

$$[a_1, a_2] = \frac{a_1 a_2}{(a_1, a_2)} = (a_1, a_2)\frac{a_1}{(a_1, a_2)} \cdot \frac{a_2}{(a_1, a_2)} = (a_1, a_2)\left[\frac{a_1}{(a_1, a_2)}, \frac{a_2}{(a_1, a_2)}\right] =$$

$$= (a_1, a_2)\left[\frac{[a_1, a_2]}{a_1}, \frac{[a_1, a_2]}{a_2}\right],$$

lebo

$$\left(\frac{a_1}{(a_1, a_2)}, \frac{a_2}{(a_1, a_2)}\right) = 1.$$

Tým je lema dokázaná.

Vzťah (3) možno zovšeobecniť pre ľubovoľný počet prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$, $n \geqq 2$.

Veta 1. *Nech* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \geqq 2$ *sú ľubovoľné prirodzené čísla. Potom platí*

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\left[\frac{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}{a_1}, \frac{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}{a_2}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \frac{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}{a_n}\right].$$

D ô k a z. Nech

$$a_i = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha_{i,j}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

pričom p_i sú prvočísla, $\alpha_{i,j}$ je pre každé i a každé j nezáporné celé číslo a aspoň pre jedno i číslo prirodzené. Potom

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\max\limits_i \alpha_{i,j}}$$

a teda

$$\left[\frac{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}{a_1}, \ldots, \frac{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}{a_n}\right] =$$

$$= \left[\prod_{j=1}^{k} p_j^{\max\limits_i \alpha_{i,j} - \alpha_{1,j}}, \ldots, \prod_{j=1}^{k} p_j^{\max\limits_i \alpha_{i,j} - \alpha_{n,j}}\right] = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\max\limits_i \alpha_{i,j} - \min\limits_i \alpha_{i,j}} = \frac{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$$

odkiaľ vyplýva tvrdenie vety.

Odvodenú vetu možno použiť pri riešení rovnice (2) v prirodzených číslach. O tejto rovnici pojednáva článok [1]. V ňom odvodenú vetu 1 môžeme pomocou tu odvodenej vety 1 doplniť.

Veta 2. *Všetky riešenia rovnice* (2) *v prirodzených číslach* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y *dostaneme nasledovne*:

Nech $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *je ľubovoľné riešenie rovnice*

$$\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \ldots + \frac{1}{\xi_n} = 1 \tag{5}$$

v prirodzených číslach. Potom

$$x_i = \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_i} t, \quad y = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \tag{6}$$

je riešenie rovnice (2) *v prirodzených číslach, keď* t *je ľubovoľné prirodzené číslo.*

Dôkaz. Podľa vety (1) v článku [1] treba len dokázať, že $y = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Keďže podľa (2) a (6) je

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_i} t}{\left[\frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_1} t, \ldots, \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_n} t\right]} =$$

$$= \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]\, t}{t \left[\frac{[\xi_1, \ldots, \xi_n]}{\xi_1}, \ldots, \frac{[\xi_1, \ldots, \xi_n]}{\xi_n}\right]} =$$

$$= \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\left[\frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_1}, \ldots, \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_n}\right]} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

podľa vety 1, keďže $\sum_{i=1}^{n} 1/\xi_i = 1$ a $[ta_1, ta_2, \ldots, ta_n) = t[a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Poznámka. Ak $\xi_1 \leqq \xi_2 \leqq \ldots \leqq \xi_n$, platí $\xi_1 \leqq n$ a $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \leqq \xi_1$, takže $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \leqq n$, čo hovorí veta (2) v článku [1].

Literatúra

[1] *Bartoš, P.:* O riešení rovnice $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a rovnice $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = yx_1x_2 \ldots x_n$ v prirodzených číslach. Čas. pěst. mat. *94* (1971), 367—370.

Adresa autora: Bratislava, Sibírska 9.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

RECENSE

P. Lorenzen „EINFÜHRUNG IN DIE OPERATIVE LOGIK UND MATHEMATIK", 2. vydání, Springer-Verlag Berlin—Heidelberg—New York, 1969, VIII + 298 str., 54,— DM.

Práce P. Lorenzena patří k dílům, jejichž cílem je ukázat možnost vybudování matematiky na základech, které vzbuzují méně pochybností než intuitivní teorie množin.

Autor vychází z toho, že finitní metody metamatematiky jsou přijímány jak zastánci klasické matematiky tak i formalisty a intuicionisty. Předmětem metamatematiky jsou určité kalkuly — formalisace matematických teorií. Proto P. Lorenzen bere za základ operativní logiky a matematiky studium libovolných kalkulů. Tím jsou z dalšího zkoumání vyloučena některá odvětví matematiky (např. geometrie). Naproti tomu zůstává vše, co patří k matematice v užším slova smyslu (aritmetika, analysa, topologie). Kromě stanovení předmětu studia je ještě nutno vymezit okruh „dovolených" metod. Autor, aby příliš nezúžil možnosti operativní matematiky, stanoví jedinou podmínku: zkoumané pojmy musí být „definitní". Pokusíme se vysvětlit, v čem toto omezení spočívá.

Kalkul K je určen zadáním abecedy A, seznamu slov v abecedě A (tzv. počátečních slov kalkulu) a seznamu odvozovacích pravidel v abecedě A, nazývaných pravidly kalkulu.

Řekneme, že konečná posloupnost slov v abecedě A — $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — je odvozením (slova P_n) v K, jestliže každé slovo této posloupnosti je buď počátečním slovem kalkulu K nebo se dá vytvořit ze slov, která mu v posloupnosti předcházejí, pomocí jednoho z odvozovacích pravidel kalkulu K. Zavedený pojem nazveme definitním, protože je možno efektivně (finitními metodami, manipulací se slovy) rozhodnout, zda je daná konečná posloupnost slov odvozením v daném kalkulu nebo není.

Řekneme, že slovo P je odvoditelné v kalkulu K (a označíme $\vdash_K P$), jestliže existuje odvození tohoto slova v K. Jak víme, existují kalkuly, pro něž problém odvoditelnosti slov není efektivně řešitelný. Zavedený pojem však nazveme definitním, protože k tomu, abychom potvrdili, že slovo je odvoditelné v kalkulu K, stačí předložit odvození tohoto slova v K a pojem „býti odvozením" je definitní.

Pojem „slovo ... není odvoditelné v kalkulu ..." nazveme též definitním, protože je možno předložením odvození slova P v K příslušný výrok vyvrátit.

Řekneme, že odvozovací pravidlo $\mathscr{A}$ je přípustné (resp. relativně přípustné) pro kalkul K, jestliže pro každé slovo P (resp. každé slovo P v abecedě kalkulu K) platí: $\vdash_K P$ právě když $\vdash_{K'} P$, kde K' označuje kalkul, který vznikne z K připojením odvozovacího pravidla $\mathscr{A}$. Zavedené pojmy jsou definitní, protože je možno příslušný výrok vyvrátit předložením slova P v odpovídající abecedě, které je odvoditelné v K' a není odvoditelné v K (příslušné pojmy jsou, jak již víme, definitní).

Stručně řečeno: pojem $\mathscr{P}$ je definitní, jestliže 1) problem pravdivosti odpovídajícího predikátu je efektivně řešitelný nebo 2) je zadán takový způsob, jak pravdivost příslušných výroků potvrdit (resp. vyvrátit), v němž všechny použité pojmy jsou již definitní.

Autor uvádí, že omezením se na definitní pojmy automaticky vyloučíme všechny nepredikativní pojmy. Poznamenejme, že množinami jsou v operativní matematice obory pravdivosti predikátů, vyjádřitelných formulemi.

Kniha má tři části. První (kapitoly 1—3) je věnována logice, druhá (kapitoly 4—6) — konkrétní matematice a třetí — abstraktní matematice.

V první kapitole P. Lorenzen zavádí pojem kalkulu a zkoumá metody, pomocí nichž je možno se přesvědčit, že dané odvozovací pravidlo je přípustné pro daný kalkul. Na základě získaných zkušeností nachází pět základních metod, které formuluje jako protologické principy (princip eliminace, indukce, inverse, neodvoditelnosti a grafické rovnosti). Uvádí, že tyto metody sice nevyčerpávají všechny možnosti, stačí však k vybudování logiky a matematiky v potřebném rozsahu.

V druhé kapitole na základě studia odvozovacích pravidel, která jsou přípustná pro libovolný kalkul, a relativně přípustných pravidel autor zavádí logické spojky a kvantory a odvozuje příslušné logické zákony. Ukazuje se, že tímto způsobem dostaneme intuicionistickou logiku, kdežto platnost klasické logiky nelze prokázat (proto ji autor nazývá fiktivní logikou). Je ovšem známo (van Dantzig), že je možno přiřadit pomocí systému pravidel každé klasické formuli F formuli F' tak, že a) F a F' jsou klasicky ekvivalentní a b) formule F' je dokazatelná klasicky, právě když je dokazatelná intuicionisticky. Na základě toho autor dochází k závěru, že použití klasické logiky je možno v mnohých případech ospravedlnit. Ve své knize užívá P. Lorenzen klasické logiky, např. při budování analysy.

Třetí kapitola je věnována diskusi o možnostech rozšíření logiky o grafickou rovnost slov, individuální termy, funktory a relace. Kapitola je zakončena paragrafem o modalitě a pravděpodobnosti.

Čtvrtá kapitola obsahuje elementární teorii konečných množin. Na tomto základě je budována aritmetika a je ukázáno, že je v rámci daného systému možno definovat funkce primitivní rekursí. Závěr kapitoly je věnován teorii reálných algebraických čísel, které je v dalším metodicky využito při definování reálných čísel.

Další dvě kapitoly obsahují základy analysy. Ukazuje se, že je třeba vybudovat hierarchii jazyků (do určitého limitního spočetného ordinálního čísla většího než ω^2). To s sebou přináší výsledky, které se značně odchylují od klasických představ. Dostáváme tak např. celou hierarchii druhů množin přirozených čísel. Pojmy spočetnosti a nespočetnosti množin se stávají relativními: množina všech množin přirozených čísel, vyjádřitelných v jazyce S_σ je nespočetná vzhledem k S_σ a spočetná vzhledem k $S_{\sigma+1}$.

Reálnými čísly jsou nazývány ty řezy množiny všech racionálních čísel, které lze vyjádřit v jazyce S_{ω^2} (tj. v některém jazyce menšího typu). Množinu (resp. posloupnost) nazveme primární, je-li ji možno vyjádřit v jazyce S_{ω^2}.

Uvedeme alespoň několik základních výsledků. Pro primární množiny reálných čísel platí věta o supremu a Borelova věta o pokrytí, každá omezená posloupnost reálných čísel má hromadný bod. Pro tzv. quasiprimární funkce jsou dokázány základní věty o spojitých funkcích známé z klasické matematiky.

V závěru šesté kapitoly autor ukazuje, jak je možno v operativní matematice definovat měřitelné funkce a vybudovat teorii Riemannova a Lebesgueova integrálu.

Zbývající dvě kapitoly jsou věnovány úvahám o významu axiomatických systémů a základům algebry a topologie.

Osvald Demuth, Praha

Underwood Dudley: ELEMENTARY NUMBER THEORY, edice "A Series of Books in Mathematics", W. H. Freeman & Co., San Francisco, 1969, vázané, 262 stran.

Kniha je učebnicí elementární teorie čísel. Od čtenáře nepředpokládá žádnou speciální matematickou erudici kromě znalosti základních vlastností reálných čísel a elementární algebry. Uvádí čtenáře do většiny partií elementární teorie čísel a to velmi poutavým způsobem. Protože autor počítal se širokou čtenářskou obcí, především z řad mladších studentů matematiky, jsou důkazy psány elementární formou a podrobně a pro snadnější pochopení a zvládnutí teorie je zařazeno značné množství numerických příkladů. Na druhé straně, na své si přijde i velmi talentovaný studující, neboť kniha nabízí velké množství problémů k samostatnému řešení.

Probereme obsah knihy podle jednotlivých kapitol: V kapitolách 1 až 5 jsou vyloženy základní vlastnosti celých čísel a kongruencí. V 6. kapitole jsou podány důkazy malé Fermatovy a Wilsonovy věty. Číselně-teoretické funkce d, σ a Φ jsou zavedeny a studovány v kapitolách sedmé až deváté. Kapitoly 10 až 12 vrcholí větou o kvadratické reciprocitě. V následujících kapitolách třinácté až patnácté je vyložen materiál týkající se reprezentace celých čísel v různých číselných soustavách. Šestnáctá až dvacátá kapitola pojednávají o různých diofantických rovnicích a kapitoly 21 a 22 o elementárních vlastnostech prvočísel. Poslední, dvacátá třetí kapitola sestává ze 105 rozmanitých problémů a spolu s ostatními příklady a cvičeními má realizovat autorovu ideu o tom, že jediný způsob, jak se lze naučit matematiku je „dělat" ji.

Pro podrobnější představu o struktuře knihy uvádíme názvy jednotlivých kapitol: 1. Integers. 2. Unique Factorization. 3. Linear Diophantine Equations. 4. Congruences. 5. Linear Congruences. 6. Fermat's and Wilson's Theorems. 7. The Divisors of an Integer. 8. Perfect Numbers. 9. Euler's Theorem and Function. 10. Primitive Roots and Indices. 11. Quadratic Congruences. 12. Quadratic Reciprocity. 13. Numbers in Other Bases. 14. Duodecimals. 15. Decimals. 16. Pythagorean Triangles. 17. Infinite Descent and Fermat's Conjecture. 18. Sums of Two Squares. 19. Sums of Four Squares. 20. $x^2 - Ny^2 = 1$. 21. Formulas for Primes. 22. Bounds for $\pi(x)$. 23. Miscellaneous Problems.

Kniha bude nepochybně velmi užitečná pro první, avšak důkladné seznámění s elementární teorií čísel a lze ji jako výbornou učebnici doporučit studujícím i přednášejícím.

Jaroslav Morávek, Praha

C. Berge: PRINCIPES DE COMBINATOIRE, Dunod, Paris 1968, brožované, 149 stran.

V dnešní době se velmi často mluví o kombinatorice nebo o kombinatorické analýze a řada matematiků, kteří se sice touto specializací bezprostředně nezabývají, střetává se ve svých oborech často s problémy, u kterých „instinktivně" cítí jejich kombinatorickou povahu. Přitom, jak je výstižně připomenuto v úvodu knihy, kombinatorika se vyvíjela často ve stínu velkých matematických událostí, její základní poznatky bývaly často několikrát zapomínány a znovu objevovány. Za všechno mluví fakt, že N. Bourbaki neuvádí ani v jednom z množství doposud vyšlých svazků, žádnou kombinatorickou větu obecnějšího charakteru, třebaže se v celém díle používá, a to nikoliv ojediněle, různých vzorců z kombinatoriky vždy, kdykoliv to text vyžaduje. Claude Berge si zřejmě kladl za cíl přispět k odstranění tohoto nedorozumění.

V úvodu ke knize vymezuje pojem kombinatoriky jako disciplíny, která se zabývá studiem konfigurací. O „konfiguraci" mluvíme tehdy, máme-li rozmístit nějaké objekty takovým způsobem, aby byla respektována nějaká předem daná omezení. Matematičtěji lze pojem konfigurace vyjádřit jako zobrazení nějaké množiny objektů do konečné abstraktní množiny, na níž je dána nějaká známá struktura. Z tohoto obecného hlediska lze kombinatoriku rozdělit podle několika aspektů: 1) Studium známé konfigurace, 2) Hledání neznámé konfigurace, 3) Určení přesného počtu konfigurací (enumerační problémy), 4) Určení přibližného počtu konfigurací (např. různé asymptotické odhady), 5) explicitní nalezení všech konfigurací, 6) extremální kombinatorické problémy (určení konfigurace, pro kterou nabývá daná reálná funkce na množině konfigurací svého extrému).

Kniha se zabývá pouze enumeračními problémy (převážně aspekt 3)), které jsou dnes velmi aktuální a přitom z historického hlediska náležejí k nejstarším tématům kombinatoriky. Vznikla na základě autorovy přednášky uspořádané ve školním roce 1967—68 na „Faculté des Sciences de Paris". Kniha je psána moderním matematickým jazykem ve světle díla Nicolas Bourbaki, takže se energicky vypořádala s klasickou terminologií typu „variace", „kombinace s opakováním", aj., která svou těžkopádnou zastaralostí působila odpudivě na zájemce. K aktuálnosti díla přispívá ta okolnost, že na úkor dosti speciálních aplikací kombinatoriky na speciální funkce a elementární teorii čísel autor dává přednost aplikacím obecnějšího významu a aplikacím v moderních oblastech, jako např. teorie informací. Autor se též zásadně vyhýbá použití různých symbolických kalkulů pro odvozování kombinatorických identit, protože zpravidla nemají vybudovánu dostatečně pevnou teoretickou základnu a při formulaci výsledků dává přednost explicitním vyjádřením typu „počet konfigurací dané množiny = ...“ před méně názornými formulacemi pomocí vytvořujících funkcí.

Zmíníme se o obsahu knihy. Po úvodu, o kterém jsem podrobně referoval, následuje 5 kapitol. V první kapitole, nazvané „*Les fonctions élémentaires de dénombrement*“ jsou různé elementární funkce kombinatoriky, známé většinou z gymnasiálních kursů, zavedeny a interpretovány jako mohutnosti jistých tříd zobrazení konečných množin. Kapitola je ukončena výkladem Stirlingových a Bellových čísel.

Druhá kapitola je pojmenována „*Problèmes de partages*“. V ní je určen jednak počet všech rozkladů přirozeného čísla n na m sčítanců a počet rozkladů, jejichž nejmenší sčítanec je h, jednak počet standardních tabulek, přiřazených danému rozkladu a kapitola končí použitím Youngova svazu na problémy rozkladu.

Třetí kapitola „*Formules d'inversion et applications*“ je věnována kombinatorickému principu inkluse a exkluse, jeho různým zobecněním a aplikacím. Je zaveden jistý operátor obecného derivování, přiřazený tzv. normální posloupnosti polynomů, s pomocí něhož se formuluje jistá obecná věta o inversi a uvádí se několik jejích aplikací (např. inversní formule Stirlingovy a Lahovy). V dalším paragrafu 3. kapitoly je vyloženo jedno zobecnění věty o inversi na lokálně konečné, částečně uspořádané množiny, pocházející od G. C. Rota. Tato zobecněná věta o inversi se potom aplikuje na aditivní funkci (např. míru) konečných množin, odkud vyplývá mimo jiné známá Sylvestrova formule pro určení míry množiny všech prvků patřících do dané konečné množiny X a současně nepatřících ani do jedné z daných množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Zbytek třetí kapitoly je věnován různým aplikacím principu inkluse a exkluse, z nichž k nejvýznamnějším patří enumerace různých tříd stromů.

Ve čtvrté kapitole „*Groupes de permutations*“ se vykládají různé vlastnosti grup permutací. Hlavní důraz se přitom klade na kombinatorické vlastnosti. Pro zajímavost uveďme, že je vyložena jedna Denésova věta o minimálním počtu transposic k vyjádření dané permutace ve tvaru jejich součinu a v kapitole je podniknuta i exkurse do Galoisovy teorie. Kromě samostatného významu slouží 4. kapitola jako příprava pro studium páté, závěrečné kapitoly, přinášející velmi kompaktní a elegantní výklad Polyova enumeračního principu a pojmenované „*La méthode de Polya*“. Polyova metoda je ilustrována na několika důležitých aplikacích, zejména z teorie grafů. V posledním paragrafu kapitoly a knihy je určen cyklický indikátor pro několik často se vyskytujících grup permutací.

Bohatostí a aktuálností vyloženého materiálu, jakož i originalitou, stručností i jasností výkladu, je kniha vynikající učebnicí enumeračních metod a kromě studentů a přednášejících v ní naleznou mnoho zajímavého jistě i odborníci.

Jaroslav Morávek, Praha

L. Chambadal, J. L. Ovaert: ALGÈBRE LINÉAIRE ET ALGÈBRE TENSORIELLE, 544 stran, vázané, Dunod, Paris, 1968.

Při psaní této knihy měli autoři, jak je patrné z předmluvy, před očima typ čtenáře, který odpovídá francouzskému studentovi matematiky asi druhého roku vysoké školy. V knize je moderním způsobem vyložena lineární a multilineární (tensorová) algebra libovolné dimenze (konečné i nekonečné) nad libovolným komutativním tělesem. Knihy lze přímo použít jako solidní přípravy pro aplikace lineární algebry v důležitých partiích analýzy, jako je teorie diferenciálních rovnic (obyčejných i parciálních), lineární topologické prostory, spektrální teorie operátorů, Lieovy algebry aj. a podobně v řadě partií moderní algebry, např. teorie komutativních těles, teorie komutativních algeber a teorie invariantů. Při výkladu není sice explicitně používáno jazyku kategorií a funktorů, avšak poukazuje se na důležitost universálních vlastností.

Kniha je rozdělena do 24 kapitol, jejichž názvy uvádíme: 1. Vektorové prostory. 2. Lineární zobrazení. 3. Direktní součty, projektory. 4. Vytvořující systémy, lineárně nezávislé systémy, base. 5. Existence basí vektorového prostoru. 6. Vektorové prostory konečné dimenze. 7. Dualita. 8. Tensorové součiny. 9. Příklady použití tensorových součinů. 10. Algebry. 11. Matice. 12. Význačné čtvercové matice. 13. Tensorová algebra vektorového prostoru. 14. Smíšená tensorová algebra vektorového prostoru. 15. Symetrická algebra vektorového prostoru. 16. Vnější algebra vektorového prostoru. 17. Lineární rovnice. 18. Redukce endomorfismů. 19. Redukce endomorfismů v případě konečné dimenze. 20. Bilineární a sesquilineární formy. 21. Redukce bilineárních a sesquilineárních forem. 22. Adjungovaná zobrazení. 23. Hermitovy a Eukleidovy vektorové prostory. 24. Redukce normálních endomorfismů.

Celkově lze říci, že kniha je velmi pečlivě vypracovanou učebnicí lineární algebry, vhodnou pro třetí semestr vysokoškolského studia matematiky. Autorům se podařilo spojit modernost výkladu s klasickými interpretacemi pomocí maticového počtu a stejně koncentrovanost a kompaktnost výkladu „monografického" typu s velmi dobrou čitelností. Ke kvalitě knihy přispívá v neposlední řadě i bohatá zásoba cvičení uvedených na jejím konci a rozdělených podle jednotlivých kapitol.

Jaroslav Morávek, Praha

MATHEMATISCHE HILFSMITTEL DES INGENIEURS. Vydávají Robert Sauer a István Szabó. *Část čtvrtá:* Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1970. XVIII + 596 stran, 130 obrázků. Cena DM 124,—.

Posuzovaná kniha uzavírá čtyřdílnou příručku, která vyšla v nakladatelství Springer v letech 1967—1970 jako díly 139—142 známé žluté řady „Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen" a která chce inženýry seznámit s těmi oddíly moderní matematiky, které se v technické praxi výrazně uplatňují už dnes nebo se uplatní — podle názoru autorů a vydavatelů — v nejbližší budoucnosti.

První tři díly už byly v tomto časopise recenzovány, a to v roč. *94* (1969), str. 480—482 (část první a třetí), a v roč. *96* (1971), str. 109—110 (část druhá). Závěrečná část je tvořena třemi oddíly L, M a N:

L. WOLFGANG HAHN: *Stabilita pohybu soustav s konečně mnoha stupni volnosti* (113 stran).

M. DIETRICH MORGENSTERN a VOLKER MAMMITZSCH: *Počet pravděpodobnosti a matematická statistika* (134 strany).

N. *Věty a vzorce mechaniky a elektrotechniky:*

N I. WOLFGANG ZANDER: *Mechanika* (171 stran).

N II. KLAUS PÖSCHL: *Elektrotechnika* (107 stran).

Na rozdíl od předcházejících tří dílů, v nichž byly shrnuty výsledky řady matematických disciplín, převažují v posledním díle disciplíny, v nichž se matematické prostředky aplikují. V oddílu L jsou to především výsledky z teorie obyčejných diferenciálních rovnic, jak je patrno i z názvů jednotlivých kapitol: I. Lineární systémy nezávislé na čase. II. Lineární parametry závislé na čase. III. Nelineární soustavy ve fázové rovině. IV. Přímá Ljapunovova metoda. V. Vynucené kmity. VI. Samobuzené kmity autonomních soustav. VII. Harmonická linearizace a příbuzné přibližné metody.

Oddíl M je věnován matematické statistice a teorii pravděpodobnosti a jeho obsah je rozdělen do 12 paragrafů. Po úvodu následuje část věnovaná kombinatorice a základním definicím, další paragrafy jsou věnovány zákonům rozložení náhodných veličin a mírám závislosti, v obsáhlém paragrafu je pojednáno o speciálních rozloženích. Následující část je věnována teoriím náhodného výběru, odhadů, testů, lineárních modelů, korelace a regrese a metodě náhodného výběru. Závěr tvoří dva paragrafy věnované stochastickým procesům a teorii informace.

Oddíl N je rozdělen na dvě části. Pododdíl N I je věnován mechanice a začíná rozsáhlým výkladem obecné teorie kontinua; v druhé části jsou pak obecné zákonitosti specifikovány pro speciální případy: je zde pojednáno o mechanice tuhého tělesa, o mechanice proudění (ideální kapaliny a plyny, vazká kapalina) a o teorii pružného tělesa. Dva dodatky obsahují diferenciální výrazy ve speciálních souřadných soustavách (obecné ortogonální křivočaré souřadnice, kulové souřadnice a válcové souřadnice) a některé formule z tenzorového počtu na plochách.

Pododdíl N II podává přehled teoretických metod elektrotechniky. Nejprve je široce pojednáno o teorii pole, především o elektrickém a magnetickém poli; tuto část uzavírá paragraf věnovaný pohybu nabitých částic v elektromagnetickém poli (včetně magnetohydrodynamiky a vln v polovodičích). Závěr tvoří paragrafy věnované šumům, sítím a přenosovým soustavám a teorii signálů.

Knihu uzavírá jednak rejstřík k této čtvrté části, jednak pak rozsáhlý (58 stran) celkový rejstřík, zahrnující všechny čtyři díly.

Jak už bylo řečeno v recenzích předcházejících dílů, tvoří jednotlivé oddíly příručky samostatné celky a obsah každého z nich by měl čtenář pochopit i bez podrobné znalosti oddílů ostatních. Jednotlivé oddíly jsou spojeny odkazy a společným rejstříkem.

Záměr vydavatelů lze jen uvítat, stejně jako skutečnost, že čtyřsvazkové dílo o celkovém počtu 2385 stran skutečně také během čtyř let vyšlo. Koordinovat práci dvaceti autorů — to je jistě úctyhodný výkon. Teprve čas však prověří, do jaké míry se vydavatelům podařilo plánované záměry také uskutečnit. Je zcela pochopitelné, že celé dílo nemůže tvořit jednolitý celek — různé oddíly jsou psány na různých úrovních, některé jsou zaměřeny spíše teoreticky, jiné zase inklinují k praktickým metodám. Jak volba oddílů, které jsou do příručky zařazeny, tak i výběr látky v každém oddíle je do značné míry subjektivní, a teprve čtenáři, kteří tuto příručku budou užívat, uvidí, co jim ještě v příručce chybí a co případně nebudou potřebovat. Je však velmi užitečné, že podobná publikace vůbec vyšla, neboť tvoří základ pro eventuální změny a doplňky, a to základ zcela reálný: dokud tu taková příručka není, jsou všechny úvahy nad jejím případným obsahem a rozsahem zcela platonické.

Je tedy třeba na závěr jen zopakovat, že se jedná o dílo velmi užitečné, že v něm podle mého názoru není nic zbytečného, že výběr autorů je reprezentativní a že široký okruh zainteresovaných čtenářů dostává do rukou pomůcku, kterou si jistě dávno přál.

Alois Kufner, Praha

J. L. Lions: QUELQUES MÉTHODES DE RÉSOLUTION DES PROBLÈMES AUX LIMITES NON LINÉAIRES. Dunod a Gauthier-Villars, Paříž 1969. XX + 554 stran. Cena 128 F.

Monografie, vycházející v edici „Études mathématiques", je jednou z šesti publikací, které autor vydal sám nebo společně s jinými autory v průběhu posledních 4 let. Je to jistě úctihodný výkon, svědčící o autorově plodnosti; pozoruhodné také je, že kvantum práce, spojené s vydáním těchto knih, nemělo žádný negativní vliv na hodnotu knihy, která má podobně jako ostatní autorovy publikace vysokou odbornou i pedagogickou úroveň.

Ve velmi přehledné a instruktivní předmluvě (která by už sama o sobě stála za ocitování) autor zdůrazňuje, že kniha pojednává doslova o *některých* metodách řešení okrajových úloh pro nelineární parciální diferenciální rovnice (a nerovnosti), a plasticky demonstruje specifické problémy, které při řešení *nelineárních* úloh vznikají. Řešení nelineární okrajové úlohy, které má dvě základní etapy, totiž (a) konstrukci tzv. apriorních odhadů a (b) užití těchto odhadů, dělí autor na tyto tři kroky: (1) volba třídy funkcí, v níž budeme řešení hledat (to je krok zásadní důležitosti; přitom není třeba omezovat se už předem na lineární množiny funkcí a na příkladech je ukázáno, že to není někdy ani účelné); (2) volba aproximativní metody (celou úlohu nějakým způsobem převedeme na sled problémů, které jsou relativně jednodušší, které „umíme řešit"); (3) limitní přechod v této posloupnosti aproximativních řešení.

Oba poslední kroky tvoří právě zmíněnou etapu užití apriorních odhadů a lze je uskutečnit různými postupy; posuzovaná kniha pojednává o několika z takových možných postupů. Jsou to tyto metody: I. metoda kompaktnosti; II. metoda monotónních operátorů; III. metoda regularizace; IV. metoda penalizace; V. aproximativní iterační metody; a pochopitelně různé kombinace těchto metod. Metodě I je věnována první kapitola, metodě II a její kombinaci s metodou I pak kapitola druhá. Při obou těchto metodách se aproximativní řešení z kroku (2) konstruuje redukcí úlohy na konečně dimenzionální případ (např. Galerkinovou metodou), tj. řešení se hledá v množině funkcí, která má konečnou dimenzi, a jeho existence se dokáže např. užitím vět o pevném bodě zobrazení nebo vět o existenci řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic; krok (3) pak spočívá v tom, že přejdeme k limitě pro dimenzi rostoucí do nekonečna. K důkazu existence „limitního řešení" (což je velmi netriviální problém) se pak užije buď kompaktnosti vnoření jistých prostorů funkcí (u metody I) nebo monotónnosti příslušného operátoru (metoda II). Metoda II má proti metodě I tu výhodu, že — pokud ji lze užít — je po technické stránce jednodušší.

Kapitola třetí je věnována metodám III a IV, poslední čtvrtá kapitola pak metodě V. Na rozdíl od metod I a II, u nichž byla aproximativní metoda z kroku (2) stále táž a měnil se jen počet dimenzí, mění se u metod III až V aproximativní metoda a kompaktnosti nebo monotónnosti se pak užije při limitním přechodu. U metody III „regularizujeme" rovnici tím, že ji aproximujeme jistými „lepšími", už vyřešenými rovnicemi; metody IV se užívá především při řešení variačních nerovností: aproximujeme je nelineárními rovnicemi jednodušší povahy, které už umíme vyřešit; a konečně u metody V se při konstrukci aproximativního řešení užívá některé z klasických přibližných metod — metody postupných aproximací, metody sítí apod.

Autor přitom poukazuje na výhody i úskalí jednotlivých metod (např. na nebezpečí nestability některých metod a problémů vůči změnám, které by bylo možno považovat za malé) a vše ilustruje hojně na příkladech. Příklady vůbec hrají v knize důležitou roli; lze říci, že v Lionsově práci jde méně o rozvíjení *obecné* teorie existence řešení okrajových úloh a více o řešení řady úloh *konkrétnějšího* charakteru (Navier-Stokesovy rovnice, nelineární rovnice kmitů desek, rovnice z kvantové mechaniky, úlohy z optimální regulace aj.). Je též třeba zdůraznit, že metody, rozebrané v knize, jsou vhodné především pro důkaz *existence* řešení; případná jednoznačnost řešení vyžaduje většinou řadu dalších speciálních úvah.

Jak je snad patrno z předchozího, je kniha členěna ne podle typů rovnic, jak je to běžné, nýbrž podle použitých metod. Na začátku knihy však autor uvádí tabulku rovnic, které jsou v knize vyšetřovány, sestavenou podle typů, takže čtenář se může dobře orientovat. Z této tabulky je také patrno, že převažují rovnice parabolické a hyperbolické.

Za zmínku stojí též podrobné biliografické komentáře, kterými jsou jednotlivé kapitoly zakončeny. Považuji je za velmi cennou součást knihy, neboť umožňují čtenáři, aby celou problematiku poznal ze širšího hlediska, ukazují mu další možnosti, které dává přístupná literatura, a upozorňují na otevřené problémy.

Na závěr by bylo třeba uvést, komu je kniha určena. Zde jsem trochu na rozpacích. Kniha sice vznikla na základě přednášek autora na pařížské universitě ve školním roce 1968/69 a podle textu na záložce „bude zajímat všechny — matematiky čisté i užité, fyziky, elektroniky — kteří se s nelineárními parciálními diferenciálními rovnicemi setkávají v analýze, v diferenciální geometrii, v numerických metodách, v teorii optimální regulace, v mechanice atd.", je však třeba říci, že jde o knihu velmi náročnou, vyžadující čtenáře dobře připraveného. Není to tedy učebnice pro začátečníky, nýbrž kniha určena těm, kteří se v problematice okrajových úloh již trochu vyznají. Takovým čtenářům však může dát hodně.

Alois Kufner, Praha

Carlo Miranda: PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ELLIPTIC TYPE. Druhé přepracované vydání. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1970. XII + 370 stran. Cena DM 58,—.

První vydání této knihy, které vyšlo v italském jazyce v roce 1955, znají naši čtenáři nejspíše z ruského překladu, který byl vydán v roce 1957. Autor si tehdy kladl za úkol shrnout do jedné knihy základní výsledky, jichž bylo v průběhu let v teorii parciálních diferenciálních rovnic eliptického typu dosaženo. Systematicky vyložil v knize základní pojmy, myšlenky i metody této teorie, zpřístupnil širšímu okruhu čtenářů řadu důležitých výsledků, umožnil čtenářům, aby se snáze orientovali v literatuře, věnované eliptickým rovnicím, a otevřel tím cestu k novému bádání v této oblasti. Bibliografie prvního vydání obsáhla literaturu let 1924—1953 (starší byla shrnuta v Lichtensteinově příspěvku v *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*) a bylo v ní citováno více než 600 prací.

Druhé vydání pochopitelně nemohlo ignorovat velký rozvoj, který zmíněná teorie po roce 1953 prodělala, a autor také shledal, že k tématice prvního vydání bylo za 12 let publikováno více než 1600 nových prací, které by bylo třeba do nového vydání zahrnout. Musel proto přikročit k řadě úprav. Vynechal látku, související s obsahem posledních dvou paragrafů prvního vydání, tj. problémy souvislosti s teorií funkcí komplexní proměnné a úlohy závislé na parametru (tj. spektrální záležitosti), čímž excerpovanou literaturu značně zredukoval, vynechal i některé práce, které mezitím ztratily na významu, a tak nové vydání obsahuje na 69 stránkách seznam více než 1400 prací, zachycujících především (a skoro úplně) literaturu do roku 1965.

Takové kvantum výsledků ovšem nelze na necelých 300 stránkách detailně vyložit; znamenalo by to znásobit rozsah knihy. Autor se proto držel zásady, jíž se řídil už v prvním vydání: podrobněji pojednává především o výsledcích, týkajících se rovnic druhého řádu (a ani zde zdaleka ne o všech výsledcích), zatím co u rovnic vyššího řádu a u systémů rovnic se omezuje na obecné upozornění na metody, obsažené v citovaných pracích.

Struktura knihy je zhruba stejná jako u prvního vydání a rozsah se zvětšil přijatelným způsobem. Kapitola první, sloužící jako úvod a obsahující především klasické definice obecného charakteru, se až na několik doplňků nezměnila. Kapitola druhá, věnovaná vyšetřování zobecněných potenciálů, byla doplněna o nové výsledky Sobolevovy a Calderona se Zygmundem. Kapitola třetí je věnována jedné ze základních metod řešení eliptických rovnic — metodě převedení okrajové úlohy na integrální rovnici, a zde byly vedle doplňků podstatněji přepracovány paragrafy věnované otázce existence fundamentálního řešení a problému s kosou derivací. Kapitola čtvrtá, nazvaná *Zobecněná řešení okrajových úloh* a věnovaná funkcionálně-analytickým metodám řešení eliptických rovnic, byla doplněna a obsahuje dva nové paragrafy, věnované lokálním vlastnostem řešení eliptických rovnic a studiu slabých řešení okrajových úloh. Také v páté kapitole, věnované metodě apriorních odhadů, byla pozornost rozšířena z Dirichletovy úlohy na všechny typy okrajových úloh a paragrafy, věnované existenci a regularitě zobecněných řešení, byly podstatně přepracovány.

Zatím co u prvních pěti kapitol se jedná převážně o větší či menší dodatky, neměnící podstatně obecnou formu knihy, byly obě poslední kapitoly přepracovány zcela podstatně, neboť zde byl rozvoj v posledních letech nejbouřlivější: je to kapitola šestá o nelineárních rovnicích (druhého řádu) a kapitola sedmá pojednávající o dalších výsledcích pro rovnice druhého řádu, o rovnicích vyššího řádu a o soustavách rovnic.

Úkol, který si kladlo první vydání této knihy a o němž byla řeč na začátku recenze, splňuje tedy — na příslušně vyšší úrovni — i vydání druhé. Znovu je ovšem třeba zdůraznit, že nejde o učebnici, nýbrž o přehled výsledků z jisté disciplíny, obsažených v literatuře. I když mezitím vyšly už další publikace podobného charakteru (např. L. Bers, F. John, M. Schechter: *Partial Differential Equations.* Interscience Publishers 1964; ruský překlad 1966), je druhé vydání této knihy dobrým počinem, neboť Mirandovy encyklopedické znalosti velmi pomohou mladým matematikům a dalším specialistům při orientaci v rozsáhlé literatuře o eliptických rovnicích.

Alois Kufner, Praha