Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

STEJNOMĚRNÁ STABILITA A STEJNOMĚRNÁ ASYMPTOTICKÁ STABILITA MNOŽIN VZHLEDEM K SPOJITÉMU TOKU

FRANTIŠEK TUMAJER, Liberec

(Received August 19, 1970)

1. DEFINICE ABSTRAKTNÍHO SPOJITÉHO TOKU

1.1. Označení. V práci se studují některé vlastnosti parciálního zobrazení $t : R^1 \times P \times R^1 \to P$, kde P je metrický prostor s metrikou ϱ a R^1 množina všech reálných čísel s eukleidovskou metrikou. O parciálním zobrazení t předpokládáme, že splňuje následující podmínku

$$(\beta, x, \alpha) \in \text{domain } t \Rightarrow \beta \geqq \alpha \quad \text{v} \quad R^1 . \tag{1}$$

Symbolem ${}_\beta t_\alpha$ označíme parciální zobrazení z P do P definované předpisem

$${}_\beta t_\alpha x = t(\beta, x, \alpha) .$$

Symbolem E budeme rozumět $\{(x, \alpha) \in P \times R^1 : (\alpha, x, \alpha) \in \text{domain } t\}$. Pomocí právě zavedených pojmů a označení vyslovíme následující definici.

1.2. Definice. Říkáme, že t je *tok* na P nad R^1, právě když t je parciální zobrazení $R^1 \times P \times R^1 \to P$ s podmínkou (1) a mající následující vlastnosti:

(i) $(x, \alpha) \in E \Rightarrow {}_\alpha t_\alpha x = x$,

(ii) ${}_\gamma t_\beta \circ {}_\beta t_\alpha x = {}_\gamma t_\alpha x$ pro všechna $\gamma \geqq \beta \geqq \alpha$, kdykoliv je jedna z obou stran této rovnosti definována.

1.3. Poznámka. Je-li dán tok t a $(x, \alpha) \in E$, je přirozené ptát se po vlastnosti množiny $\{\vartheta \in R^1 : (\vartheta, x, \alpha) \in \text{domain } t\}$. Je zřejmé přímo z definice toku, že tato množina tvoří interval v R^1 mající α jako počáteční bod. Označme

$$\varepsilon : E \to (-\infty, +\infty\rangle : \varepsilon(x, \alpha) = \sup \{\vartheta \in R^1 : (\vartheta, x, \alpha) \in \text{domain } t\} .$$

1.4. Definice. Říkáme, že tok t na P nad R^1 je *lokální*, resp. *globání*, právě když platí $\varepsilon(x, \alpha) > \alpha$, resp. $\varepsilon(x, \alpha) = +\infty$ pro všechna $(x, \alpha) \in E$.

1.5. Definice. Nechť t je tok na P nad R^1. Říkáme, že s je *řešením* toku t, právě když

(i) s je parciální zobrazení z R^1 do P,

(ii) domain s je interval v R^1,

(iii) $s(\beta) = {}_\beta t_\alpha\, s(\alpha)$ platí pro všechna $\alpha \leqq \beta$ v domain s.

1.6. Definice. Říkáme, že lokální tok t na P nad R^1 je *spojitý*, právě když jsou všechna jeho řešení spojitá zobrazení.

Jako základní interpretaci definice 1.6 uvedeme příklad.

1.7. Příklad. Nechť je dána diferenciální rovnice

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\vartheta} = f(x, \vartheta) \tag{2}$$

v n-rozměrném eukleidovském prostoru R^n, kde $f : E \to R^n$ je spojité zobrazení otevřené podmnožiny E prostoru R^{n+1} splňující Lipschitzovu podmínku vzhledem k proměnné x. Řešení rovnice (2) jsou parciální zobrazení $s : R^1 \to R^n$ taková, že domain s je interval v R^1 takový, že platí

$$\frac{\mathrm{d}s(\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta} = f(s(\vartheta), \vartheta) \quad \text{pro všechna} \quad \vartheta \in \text{domain } s\,.$$

K diferenciální rovnici (2) můžeme přiřadit spojitý tok t na R^n nad R^1 tímto způsobem:

$$\text{definujme} \quad y = t(\beta, x, \alpha) \quad \text{právě když} \quad x, y \in R^n\,, \quad \alpha \leqq \beta \ \text{ v } R^1$$

a existuje řešení rovnice (2) nabývající hodnotu x v bodě α a y v β.

1.8. Poznámka. Zřejmě každý tok t na P nad R^1 definuje na odpovídajícím E částečné uspořádání předpisem

$$(y, \beta) \succ (x, \alpha) \Leftrightarrow y = t(\beta, x, \alpha)\,.$$

Je tedy přirozené vyslovit následující definici.

1.9. Definice. Nechť t je tok na P nad R^1. Parciální zobrazení

$$V : E \to R^1$$

nazýváme *ljapunovskou funkcí* toku t, právě když je V nezáporné a nerostoucí podél t, tj. právě když ze vztahů

$$(y, \beta) \in \text{domain } V,\ (x, \alpha) \in \text{domain } V, \quad y = t(\beta, x, \alpha) \Rightarrow 0 \leqq V(y, \beta) \leqq V(x, \alpha)\,.$$

2. STEJNOMĚRNÁ STABILITA A STEJNOMĚRNÁ ASYMPTOTICKÁ STABILITA

2.1. Označení. Kromě symboliky zavedené v předcházející části budeme v následujícím textu používat tato další označení. R^0, R^+, I znamenají po řadě množiny $\langle 0, +\infty), (0, +\infty), (0, 1\rangle$. Dále předpokládáme, že je dána neprázdná uzavřená množina

$$m \subset P \times R^1 \tag{1}$$

taková, že zobrazení

$$g : P \times R^1 \to R^0 \tag{2}$$

definované předpisem

$$g(x, \alpha) = \inf \{\varrho(x, y) : (y, \alpha) \in m\}$$

je spojité.

2.2. Poznámka. Z definice zobrazení g je zřejmé, že platí

$$(x, \alpha) \in m \Leftrightarrow g(x, \alpha) = 0\,. \tag{3}$$

2.3. Definice. Říkáme, že m je *invariantní* vzhledem k toku t, právě když platí

$$(\vartheta, x, \alpha) \in \text{domain } t\,, \quad (x, \alpha) \in m \Rightarrow ({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \in m\,.$$

2.4. Poznámka. Ze vztahu (3) plyne, že m je invariantní vzhledem k t, právě když platí

$$(\vartheta, x, \alpha) \in \text{domain } t\,, \quad g(x, \alpha) = 0 \Rightarrow g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta,) = 0\,.$$

2.5. Definice. Říkáme, že m je *stejnoměrně stabilní* vzhledem k toku t, právě když existuje zobrazení

$$\psi : I \to I \tag{4}$$

takové, že platí

$$(\vartheta, x, \alpha) \in \text{domain } t\,, \quad g(x, \alpha) \leqq \psi(\xi) \Rightarrow g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \leqq \xi\,. \tag{5}$$

2.6. Věta. *Nechť m je stejnoměrně stabilní vzhledem k toku t. Potom je m invariantní vzhledem k t.*

Důkaz. Nechť existuje $(\beta, x, \alpha) \in \text{domain } t$ takové, že $g(x, \alpha) = 0$, $g({}_\beta t_\alpha x, \beta) = k > 0$. Zřejmě pro každou volbu zobrazení ψ v (4) a pro každé $k_1 \in (0, k) \cap I$ platí $g(x, \alpha) \leqq \psi(k_1)$ a $g({}_\beta t_\alpha x, \beta) > k_1$, což je spor s (5).

2.7. Věta. *m je stejnoměrně stabilní vzhledem k spojitému toku t, právě když existuje ljapunovská funkce V s následujícími vlastnostmi:*

(i) *existuje* $\delta \in I$ *takové, že* domain $V = \{(x, \alpha) \in E : g(x, \alpha) \leqq \delta\}$,

(ii) *existují rostoucí spojitá zobrazení* $a : (0, \delta\rangle \to R^+$, $b : (0, \delta\rangle \to R^+$, $b(\xi) \to 0$ *pro* $\xi \to 0_+$ *taková, že platí*

$$(x, \alpha) \in \text{domain } V,\ 0 < g(x, \alpha) \Rightarrow a(g(x, \alpha)) \leqq V(x, \alpha) \leqq b(g(x, \alpha)).$$

Důkaz. Nechť m je stejnoměrně stabilní. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že zobrazení ψ z definice 2.5 je rostoucí a spojité s $\lim_{\xi \to 0_+} \psi(\xi) = 0$. Zvolme $\sigma > 1$, položme $\delta = \psi(1)$ a definujme parciální zobrazení $V : E \to R^0$ předpisem

$$V(x, \alpha) = \sup \left\{ g({}_{\vartheta}t_{\alpha}x, \vartheta) \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} : \vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, \alpha)) \right\} \tag{6}$$

pro $(x, \alpha) \in E$ s $g(x, \alpha) \leqq \delta$. (Činitel $(1 + (\vartheta - \alpha)\sigma)/(1 + \vartheta - \alpha)$ je zde uveden jen pro aplikaci v důkazu následující věty). Z (5) vyplývá, že zobrazení V je pro uvedená (x, α) předpisem (6) skutečně definováno. Má tedy V vlastnost (i). Nechť jsou dány $(x, \alpha) \in$ domain V, $(y, \beta) \in$ domain V, $y = {}_{\beta}t_{\alpha}x$. Pak pro každé $z = {}_{\vartheta}t_{\beta}y$ platí také

$$z = {}_{\vartheta}t_{\alpha}x \quad \text{a} \quad \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} \geqq \frac{1 + (\vartheta - \beta)\sigma}{1 + \vartheta - \beta},$$

takže

$$V(y, \beta) = \sup \left\{ g({}_{\vartheta}t_{\beta}y, \vartheta) \frac{1 + (\vartheta - \beta)\sigma}{1 + \vartheta - \beta} : \vartheta \in \langle \beta, \varepsilon(y, \beta)) \right\} \leqq$$

$$\leqq \sup \left\{ g({}_{\vartheta}t_{\alpha}x, \vartheta) \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} : \vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, \alpha)) \right\} = V(x, \alpha).$$

Odtud plyne, že zobrazení V je ljapunovskou funkcí. Je-li nyní $(x, \alpha) \in$ domain V, $g(x, \alpha) > 0$, existuje $\xi \in I$ tak, že $g(x, \alpha) = \psi(\xi)$, odkud dostáváme pomocí (5)

$$g({}_{\vartheta}t_{\alpha}x, \vartheta) \leqq \xi = \psi^{-1}(g(x, \alpha))$$

pro každé $\vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, \alpha))$. Jelikož je $(1 + (\vartheta - \alpha)\sigma)/(1 + \vartheta - \alpha) < \sigma$, plyne odtud vztah

$$V(x, \alpha) \leqq \sigma \psi^{-1}(g(x, \alpha)). \tag{7}$$

Zřejmě platí

$$g(x, \alpha) \in \left\{ g({}_{\vartheta}t_{\alpha}x, \vartheta) \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} : \vartheta \in \langle \alpha, \varepsilon(x, \alpha)) \right\},$$

takže

$$g(x, \alpha) \leqq V(x, \alpha). \tag{8}$$

Definujeme-li nyní zobrazení a, b z (ii) předpisem

$$a(\xi) = \xi\,, \quad b(\xi) = \sigma\,\psi^{-1}(\xi) \quad \text{pro} \quad \xi \in (0, \delta\rangle\,,$$

vyplývá z (7) a (8), že V má také vlastnost (ii).

Nechť nyní existuje ljapunovská funkce V s vlastnostmi (i) a (ii). Zvolme $0 < \delta_0 < \delta$ a definujme zobrazení ψ z (4) tak, aby platil vztah

$$0 < b(\psi(\xi)) \leqq a(\xi) \quad \text{pro} \quad 0 < \xi \leqq \delta_0 \quad \text{a} \quad \psi(\xi) = \psi(\delta_0) \quad \text{pro} \quad \delta_0 < \xi \leqq 1$$

a ukažme, že platí (5).

Nechť je dáno $0 < \xi \leqq \delta_0$ a předpokládejme, že existuje $(x, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \psi(\xi)$ tak, že pro nějaké $\gamma \in \langle\alpha, \varepsilon(x, \alpha))$ platí $\xi < g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma)$. Označme $\beta_0 = \inf\{\beta \in R^1 : : g({}_\beta t_\alpha x, \beta) = \xi\}$. Protože t a g jsou spojité, můžeme o $\gamma > \beta_0$ předpokládat, že je $g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \leqq \delta$ pro všechna $\vartheta \in \langle\beta_0, \gamma\rangle$. Pak je $a(g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma)) \leqq V({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) \leqq V(x, \alpha) \leqq \leqq b(g(x, \alpha)) \leqq b(\psi(\xi)) \leqq a(\xi)$, odkud plyne $g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) \leqq \xi$, což je spor s naším předpokladem.

2.8. Definice. Říkáme, že m je *stejnoměrně asymptoticky stabilní* vzhledem k toku t, právě když m je stejnoměrně stabilní vzhledem k t a existují konstanta

$$\Omega \in I \tag{9}$$

a zobrazení

$$T : I \to R^+ \tag{10}$$

takové, že platí

$$(\vartheta, x, \alpha) \in \text{domain}\; t\,, \quad g(x, \alpha) \leqq \Omega\,, \quad \vartheta \geqq \alpha + T(\xi) \Rightarrow g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \leqq \xi\,.$$

2.9. Věta. *m je stejnoměrně asymptoticky stabilní vzhledem ke spojitému globálnímu toku t, právě když existuje ljapunovská funkce V s vlastnostmi* 2.7(i), 2.7(ii) *a*

(iii) *existuje rostoucí spojité zobrazení $c : (0, \delta\rangle \to R^+$ s $\lim_{\xi \to 0+} c(\xi) = 0$ takové, že platí*

$$(x, \alpha) \in \text{domain}\; V \Rightarrow V({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) - V(x, \alpha) \leqq -\int_\alpha^\vartheta c(g({}_v t_\alpha x, v))\,\mathrm{d}v\,,$$

kdykoliv je $c(g({}_v t_\alpha x, v))$ definováno pro všechna $v \in \langle\alpha, \vartheta\rangle$.

Důkaz. Nechť m je stejnoměrně asymptoticky stabilní vzhledem k t. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že zobrazení T z definice 2.8 je klesající a spojité s $\lim_{\xi \to 0+} T(\xi) = +\infty$. Položme $\delta = \min\{\Omega, \psi(1)\}$, zvolme $\sigma > 1$ a definujme parciální zobrazení $V : E \to R^0$ předpisem (6). Odtud a z důkazu věty 2.7 plyne, že V je ljapunovskou funkcí s vlastnostmi 2.7(i) a 2.7(ii). Nechť je dáno $(x, \alpha) \in \text{domain}\; V$, $g(x, \alpha) >$

> 0. Pak z definice 2.8 pro všechna $\vartheta \geqq \alpha + T[g(x, \alpha)/\sigma^2]$ plyne $g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \leqq$ $\leqq g(x, \alpha)/\sigma^2$, odkud dostáváme

$$g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\,\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} \leqq \frac{g(x, \alpha)}{\sigma^2} \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\,\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} < \frac{g(x, \alpha)}{\sigma} < g(x, \alpha) \leqq V(x, \alpha)\,,$$

takže

$$\sup \left\{ g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \frac{1 + (\vartheta - \alpha)\,\sigma}{1 + \vartheta - \alpha} : \vartheta \geqq \alpha + T\left(\frac{g(x, \alpha)}{\sigma^2}\right)\right\} < g(x, \alpha) \leqq V(x, \alpha)\,.$$

Nyní ze spojitosti t a g vyplývá existence $\vartheta_0 \in \langle \alpha, \alpha + T[g(x, \alpha)/\sigma^2] \rangle$ takového, že platí

$$V(x, \alpha) = g({}_{\vartheta_0} t_\alpha x, \vartheta_0) \frac{1 + (\vartheta_0 - \alpha)\,\sigma}{1 + \vartheta_0 - \alpha}\,.$$

Označíme-li $y = {}_\beta t_\alpha x$ a $z = {}_\vartheta t_\beta y$, pak zřejmě pro $(y, \beta) \in \operatorname{domain} V$, $(z, \vartheta) \in \operatorname{domain} V$ platí

$$V(z, \vartheta) = g({}_{\gamma_0} t_\vartheta z, \gamma_0) \frac{1 + (\gamma_0 - \vartheta)\,\sigma}{1 + \gamma_0 - \vartheta} = g({}_{\gamma_0} t_\vartheta \circ {}_\vartheta t_\beta y, \gamma_0) \frac{1 + (\gamma_0 - \vartheta)\,\sigma}{1 + \gamma_0 - \vartheta} =$$

$$= g({}_{\gamma_0} t_\beta y, \gamma_0) \frac{1 + (\gamma_0 - \beta)\,\sigma}{1 + \gamma_0 - \beta} \left[1 - \frac{(\sigma - 1)(\vartheta - \beta)}{(1 + \gamma_0 - \vartheta)[1 + (\gamma_0 - \beta)\,\sigma]}\right] \leqq$$

$$\leqq V(y, \beta) \left[1 - \frac{(\sigma - 1)(\vartheta - \beta)}{(1 + \gamma_0 - \vartheta)[1 + (\gamma_0 - \beta)\,\sigma]}\right],$$

takže

$$\frac{V(z, \vartheta) - V(y, \beta)}{\vartheta - \beta} \leqq -(\sigma - 1) \frac{V(y, \beta)}{(1 + \gamma_0 - \vartheta)[1 + (\gamma_0 - \beta)\,\sigma]}\,.$$

Odtud a ze vztahů

$$0 \leqq \gamma_0 - \vartheta \leqq T\left(\frac{g(z, \vartheta)}{\sigma^2}\right), \quad 0 < \gamma_0 - \beta \leqq T\left(\frac{g(z, \vartheta)}{\sigma^2}\right) + \vartheta - \beta$$

dostáváme nerovnost

(11)

$$\frac{V(z, \vartheta) - V(y, \beta)}{\vartheta - \beta} \leqq -(\sigma - 1) \frac{V(y, \beta)}{\left[1 + T\left(\frac{g(z, \vartheta)}{\sigma^2}\right)\right]\left[1 + \sigma T\left(\frac{g(z, \vartheta)}{\sigma^2}\right) + \sigma(\vartheta - \beta)\right]} \leqq$$

$$\leqq -(\sigma - 1) \frac{g(y, \beta)}{\left[1 + T\left(\frac{g(z, \vartheta)}{\sigma^2}\right)\right]\left[1 + \sigma T\left(\frac{g(z, \vartheta)}{\sigma^2}\right) + \sigma(\vartheta - \beta)\right]}\,.$$

Jelikož je $\lim_{\vartheta \to \beta+} g(z, \vartheta) = \lim_{\vartheta \to \beta+} g({}_\vartheta t_\beta y, \vartheta) = g(y, \beta)$ a funkce T je podle předpokladu spojitá, vyplývá z (11), že platí

$$\limsup_{\vartheta \to \beta+} \frac{V({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) - V({}_\beta t_\alpha x, \beta)}{\vartheta - \beta} \leqq$$

$$\leqq \frac{-(\sigma - 1)\, g({}_\beta t_\alpha x, \beta)}{\left[1 + T\left(\frac{g({}_\beta t_\alpha x, \beta)}{\sigma^2}\right)\right]\left[1 + \sigma T\left(\frac{g({}_\beta t_\alpha x, \beta)}{\sigma^2}\right)\right]}.$$

Definujeme-li zobrazení c z (iii) předpisem

$$c(\xi) = (\sigma - 1) \frac{\xi}{\left[1 + T\left(\frac{\xi}{\sigma^2}\right)\right]\left[1 + \sigma T\left(\frac{\xi}{\sigma^2}\right)\right]}$$

a uvědomíme-li si, že zobrazení T je spojité a klesající, vidíme, že ljapunovská funkce V má také vlastnost (iii).

Nechť nyní existuje ljapunovská funkce V mající vlastnosti 2.7(i), 2.7(ii) a (iii). Z vlastností 2.7(i) a 2.7(ii) vyplývá podle věty 2.7, že m je stejnoměrně stabilní. Zvolme $0 < \delta_0 < \delta$ a položme $\Omega = b^{-1}(a(\delta_0))$. Předpokládejme, že existují $(x, \alpha) \in \in \operatorname{domain} V$, $g(x, \alpha) \leqq \Omega$, $\gamma \geqq \alpha$ takové, že platí

$$g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) > \delta_0 .$$

Podobně jako v důkazu věty 2.7 se snadno ukáže, že lze předpokládat $g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) \leqq \delta$. Pak je

$$a(g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) \leqq V({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) \leqq V(x, \alpha) \leqq b(g(x, \alpha)) \leqq b(\Omega) = a(\delta_0),$$

odkud plyne $g({}_\gamma t_\alpha x, \gamma) \leqq \delta_0$, což je spor s naším předpokladem. Je-li tedy $(x, \alpha) \in \in \operatorname{domain} V$ a $g(x, \alpha) \leqq \Omega$, potom je také $({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \in \operatorname{domain} V$ pro všechna $\vartheta \geqq \alpha$. Definujme zobrazení T z 2.8(10) předpisem

$$T(\xi) = \frac{b(\Omega)}{c(\psi(\xi))},$$

kde ψ je zobrazení z definice 2.5 a ukažme, že Ω a T vyhovují definici 2.8. Nechť jsou dány $(x, \alpha) \in E$, $g(x, \alpha) \leqq \Omega$ a $\xi \in I$. Předpokládejme, že pro nějaké $\beta \geqq \alpha + T(\xi)$ platí vztah $g({}_\beta t_\alpha x, \beta) > \xi$. Je-li $\psi(\xi) < g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta) \leqq \delta$ pro všechna $\vartheta \in \langle \alpha, \beta \rangle$, pak z (iii) plyne nerovnost

$$V({}_\beta t_\alpha x, \beta) \leqq V(x, \alpha) - \int_\alpha^\beta c(g({}_\vartheta t_\alpha x, \vartheta))\, d\vartheta < b(\Omega) - c(\psi(\xi))\, T(\xi) = 0,$$