Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

# MEHRDIMENSIONALES ANALOGON ZU DEN SÄTZEN VON MENELAOS UND CEVA[1])

BRUNO BUDINSKÝ und ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingegangen am 29. Mai 1970)

Wir bezeichnen mit $E_{n+1}$ den $(n + 1)$-dimensionalen euklidischen Raum, mit $V_{n+1}$ seinen Vektorraum und mit $\{V_{n+1}\}$ die Menge aller Richtungen in $V_{n+1}$; $n \geqq 2$. Wir benutzen im ähnlichen Sinn die Bezeichnungen $E_n$, $V_n$, $\{V_n\}$ und nehmen an, daß $E_n \subset E_{n+1}$, $V_n \subset V_{n+1}$, $\{V_n\} \subset \{V_{n+1}\}$. Die Ergebnisse formulieren wir in der projektiven Erweiterung $\bar{E}_n = E_n \cup \{V_n\}$ von $E_n$.

Wir wählen einen Punkt $A_0 \in (E_{n+1} - E_n)$ und auf übliche Weise definieren wir die eineindeutige Abbildung $f : \bar{E}_n \to \{V_{n+1}\}$, nämlich $B \to \{B - A_0\}$ [2]) für $\forall B \in E_n$ und $B \to B$ für $\forall B \in \{V_n\}$. Mit $B^*$ bezeichnen wir einen Repräsentanten der Richtung $f(B)$.

Im folgenden setzen wir stets voraus, daß $A_1, \ldots, A_{n+1}$ linear unabhängige Punkte in $E_n$ sind. Dann gibt es immer solche Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_{n+1}$, daß

$$(1) \qquad B^* = b_0A_0 + b_1A_1 + \ldots + b_{n+1}A_{n+1}\,; \quad b_0 + b_1 + \ldots + b_{n+1} = 0\,.$$

Für $b_0 = 0$ ist $B^* \in V_n$ und $B$ ist ein uneigentlicher Punkt in $\bar{E}_n$. Für $b_0 \neq 0$ ist $B = -b_1b_0^{-1}A_1 - \ldots - b_{n+1}b_0^{-1}A_{n+1}$ und demzufolge $B \in E_n$.

*Die in $\bar{E}_n$ durch $B_i^* = \sum_{j=0}^{n+1} b_{ij}A_j$ $(i = 1, \ldots, n + 1)$ bestimmten Punkte $B_1, \ldots, B_{n+1}$ liegen dann und nur dann in einer Ebene, wenn* $\det(b_{ij}) = 0$ $(i, j = 1, \ldots, n + 1)$.

In der Tat, infolge (1) haben die Matrizen $\mathscr{B} = (b_{ij})$ mit $i, j = 1, \ldots, n + 1$ und $\mathscr{B}' = (b_{ij})$ für $i = 1, \ldots, n + 1$; $j = 0, 1, \ldots, n + 1$ denselben Rang. Also $\det \mathscr{B} = 0$ dann und nur dann, wenn $B_i^*$ linear abhängig sind, d. h. wenn sich die Punkte $B_i$ in einer Ebene befinden.

[1]) Mit den $n$-dimensionalen Seitenstücken zu diesen Sätzen haben sich fortschreitend K. K. MOKRIŠČEV [2], [3], Z. NÁDENÍK [5], [6], N. M. BESKIN [1], H. SASAYAMA [7] und F. MOLNÁR [4] beschäftigt. Es ist der Zweck der vorliegenden Note, die auf langwierige synthetische Weise hergeleitete Hauptergebnisse aus [5] und [6] kurz zu begründen. Das Verfahren kann auf sphärische Räume ausgedehnt werden.

[2]) $\{B - A_0\}$ bedeutet freilich die durch den Vektor $B - A_0$ bestimmte Richtung.

Wir wählen zwei Punkte $P, P' \in E_n$ und eine reelle Zahl $k$. Wir sagen, der durch $R^* = (k-1)A_0 + P - kP'$ definierte Punkt $R$ teile die Strecke $PP'$ im Verhältnis $k$; wir schreiben $(PP'R) = k$. Das ist in Übereinstimmung mit der üblichen Definition. Denn für $k \neq 1$ ergibt sich — als Spezialfall der obigen Bemerkungen, daß $R = (1-k)^{-1} P - k(1-k)^{-1} P'$. Für $k = 1$ ist freilich $R$ der uneigentliche Punkt der Geraden $PP'$.

Weiter betrachten wir das $(n+1)$-Eck $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$. Wir wählen von Null verschiedene Zahlen $k_1, \dots, k_{n+1}$ und auf jeder Seite $A_i A_{i+1}$ $(i = 1, \dots, n+1;$ $A_{n+2} \equiv A_1)$ den Punkt $B_1 \in \bar{E}_n$ derart, daß $(A_i A_{i+1} B_i) = k_i$.

**Der Satz von Menelaos.** *Die Punkte $B_1, \dots, B_{n+1}$ liegen in einer Ebene dann und nur dann, wenn $k_1 \dots k_{n+1} = 1$.*

Da die Repräsentanten der Punkte $B_i$ durch

$$B_1^* = (k_i - 1) A_0 + A_i - k_i A_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n+1) \tag{2}$$

ausgedrückt werden können, so ergibt sich der Satz unmittelbar aus der obigen Behauptung als ihr spezieller Fall.

Mit $\beta_i$ bezeichnen wir die Ebene, welche durch den Punkt $B_i$ der Verbindungslinie $A_i A_{i+1}$ und durch alle Ecken des betrachteten Polygons mit Ausnahme von $A_i$, $A_{i+1}$ geht.

**Der Satz von Ceva.** *Die Ebenen $\beta_1, \dots, \beta_{n+1}$ haben dann und nur dann einen gemeinsamen Punkt, wenn $k_1 \dots k_{n+1} = (-1)^{n+1}$.*

Angenommen, alle Ebenen $\beta_i$ gehen durch den Punkt $Q \in \bar{E}_n$. Es sei

$$Q^* = q_0 A_0 + q_1 A_1 + \dots + q_{n+1} A_{n+1}\,; \quad q_0 + q_1 + \dots + q_{n+1} = 0\,; \tag{3}$$

dabei ist $q_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, n+1$, wie leicht zu zeigen ist.[3]) Für den Punkt $B_1$ haben wir zugleich $B_1^* = (k_1 - 1) A_0 + A_1 - k_1 A_2$ und $B_1^* = bQ^* + b'_0 A_0 +$ $+ b'_3 A_3 + \dots + b'_{n+1} A_{n+1}$; die Koeffizienten $b'_0, b'_3, \dots, b'_{n+1}$ interessieren uns nicht. Setzt man für $Q^*$ aus (3) ein und vergleicht man dann beide Darstellungen, so erhält man $1 = bq_1$, $-k_1 = bq_2$.

Auf Grund der zyklischen Vertauschung ergibt sich daraus

$$k_1 = -q_2/q_1,\ k_2 = -q_3/q_2,\ \dots,\ k_{n+1} = -q_1/q_{n+1}\,, \tag{4}$$

was freilich unmittelbar zu $k_1 \dots k_{n+1} = (-1)^{n+1}$ führt. Daß bei $k_1 \dots k_{n+1} =$ $= (-1)^{n+1}$ die Ebenen $\beta_i$ einen gemeinsamen Punkt besitzen, beweist man auf bekannte elementare indirekte Weise.

Der gemeinsame Punkt der Ebenen $\beta_1, \dots, \beta_{n+1}$ ist dann und nur dann uneigentlich, wenn

$$K \equiv 1 - k_1 + k_1 k_2 - \dots + (-1)^n k_1 \dots k_n = 0\,. \tag{5}$$

[3]) Vgl. [5], S. 5.