ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 96 * PRAHA 12. XI. 1971 * ČÍSLO 4

r-ROZMĚRNÉ KONFIGURACE

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

(Došlo dne 10. prosince 1969)

1. Úvod. V této práci odvodíme dva typy konfigurací v r-rozměrném projektivním prostoru S_r nad tělesem komplexních čísel.

r-rozměrná konfigurace je množina, jejíž prvky jsou vlastní podprostory projektivního prostoru S_r nad tělesem komplexních čísel a pro něž platí tato podmínka: Každý s-rozměrný podprostor je incidentní vždy s týmž počtem k-rozměrných podprostorů.

Konfigurace se pro $r \geqq 3$ obvykle zadává maticí:

$$\begin{pmatrix} a_{00}, & a_{01}, & \ldots, & a_{0,r-1} \\ a_{10}, & a_{11}, & \ldots, & a_{1,r-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r-1,0}, & a_{r-1,1}, & \ldots, & a_{r-1,r-1} \end{pmatrix}$$

kde a_{ij} je přirozené číslo o kterém platí:

1) $i = j$, potom číslo a_{ii} označuje počet i-rozměrných prostorů dané konfigurace.
2) $i \neq j$, potom číslo a_{ij} udává počet j-rozměrných prostorů S_j dané konfigurace, které jsou incidentní s i-rozměrným projektivním prostorem S_i dané konfigurace.

Dále platí: $a_{ii}a_{ie} = a_{ei}a_{ee}$.

2. r-rozměrné konfigurace s body U_{ij}. Zavedeme nyní body U_{ij}. Nechť S_r je r-rozměrný projektivní prostor nad tělesem komplexníc hčísel. V tomto S_r je dána projektivní soustava souřadnic. Bod U_{ij} je bod tohoto S_r jehož i-tá souřadnice je rovna 1, j-tá souřadnice je rovna -1 a ostatní souřadnice tohoto bodu jsou nulové. Je zřejmě $U_{ij} = U_{ji}$ a dále zřejmě platí, že v daném S_r je právě $\binom{r+1}{2}$ vesměs různých bodů U_{ij}.

Označme ω nadrovinu tohoto S_r, která má v dané soustavě souřadnic rovnici: $x_1 + x_2 + \ldots + x_r + x_{r+1} = 0$. Zřejmě každý bod U_{ij} leží v nadrovině ω.

Věta 1. *Každým bodem U_{ij} prochází $\binom{r-1}{s}$ vesměs navzájem různých podprostorů S_s nadroviny ω takových, že v každém z nich leží právě $\binom{s+2}{2}$ různých bodů U_{ij}.*

Důkaz. Prostor S_s je určen těmito rovnicemi:

$$x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3} + \ldots + x_{i_{s+1}} + x_{i_{s+2}} = 0\,, \quad x_{i_{s+3}} = 0\,, \tag{1}$$
$$x_{i_{s+4}} = 0, \ldots, x_{i_{r+1}} = 0\,.$$

Protože U_{ij} leží v S_s, musí být i, j některé z čísel $i_{i_1}, i_{i_2}, \ldots, i_{i_{s+2}}$. Proměnných v prvé rovnici rovnic (1) je $s + 2$ a vybíráme je z $r + 1$ proměnných. Protože však mezi nimi musí být x_i a x_j vybíráme tedy jenom z $r - 1$ čísel s čísel. Zřejmě na pořadí nezáleží a jsou to tedy kombinace s-té třídy z $r - 1$ prvků a podle známého vzorce platí, že počet prostorů S_s je $\binom{r-1}{s}$. Snadno nahlédneme, že všechny tyto prostory jsou navzájem různé, neboť jinak by musela prvá rovnice z rovnic (1) být pro dvě různé kombinace stejná, to však nemůže nastat. Určíme nyní počet bodů U_{ij} ležících v S_s. Mohou to být jedině body U_{ij}, jejichž souřadnice anulují prvou rovnici z rovnic (1). Těch je však $\binom{s+2}{2}$.

Zavedeme nyní úmluvu, že místo k-rozměrný podprostor ve kterém leží právě $\binom{k+2}{2}$ vesměs různých bodů U_{ij}, budeme říkat „přípustný" k-rozměrný podprostor S_k.

Dokažme nyní, že každý „přípustný" S_k se dá vyjádřit rovnicemi (1). Z $\binom{k+2}{2}$ bodů U_{ij}, které leží v S_k zvolme $k + 1$ bodů lineárně nezávislých tj. takových, že daný S_k určují. Nyní utvoříme podmnožiny $M_1, M_2, \ldots, M_n$ této množiny bodů. Nechť $U_{ij} \in M_1$. Do této množiny dáme všechny body U_{ij}, které mají právě jeden index rovný j nebo i tj. body U_{kj} a U_{ki}. Tak dostaneme $h_1 + 1$ těchto bodů, jejichž indexy vybíráme nejvýše z $h_1 + 2$ přirozených čísel. Obdobně vytvoříme $M_2, \ldots, M_n$. Číslem $h_i + 1$ budeme označovat počet bodů U_{ij} v M_i. Z předcházejícího je zřejmé, že množiny $M_1, \ldots, M_n$ jsou po dvou navzájem disjunktní a platí $\sum_{i=1}^{n} h_i + n = k + 1$. Hledejme nyní všechny lineární kombinace zvolených $k + 1$ bodů U_{ij}. Je zřejmé, že takový bod U_{ij}, jehož aspoň jeden index nepatří do žádné množiny indexů množin $M_1, M_2, \ldots, M_n$, nemůžeme touto lineární kombinací dostat. Všechny uvažované body mají totiž tuto souřadnici nulovou. Můžeme tedy dostat nejvýše: $\binom{h_1+2}{2} + \binom{h_2+2}{2} + \ldots + \binom{h_n+2}{2}$ bodů U_{ij}. Toto číslo je jedině pro $n = 1$ rovno číslu

$\binom{k+2}{2}$. V ostatních případech, jak čtenář snadno spočítá, je toto číslo menší než $\binom{k+2}{2}$. V prvém případě se však jedná o prostor, který se dá vyjádřit rovnicemi (1). Ostatní případy tedy nemohou nastat. Z toho vyplývá zpřesnění věty 1:

Každým bodem U_{ij} prochází právě $\binom{r-1}{s}$ vesměs navzájem různých „přípustných" podprostorů S_s nadroviny ω.

Věta 2. *Nechť $s > k$. Každým „přípustným" podprostorem S_k prostoru ω prochází právě $\binom{r-k-1}{s-k}$ různých „přípustných" podprostorů S_s.*

Důkaz. Podle předcházejícího se dá každý „přípustný" S_k vyjádřit rovnicemi:

$$(2)\quad x_{j_1} + x_{j_2} + \ldots + x_{j_{k+2}} = 0\,, \quad x_{j_m} = 0\,, \quad m = k+3\,, \quad k+4, \ldots, r+1$$

a S_s je dán rovnicemi (1). Zřejmě musí platit, že množina $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{k+2}}\}$ je podmnožinou množiny $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{s+2}}\}$. Protože $k+2$ proměnných bylo již zvoleno, můžeme měnit pouze $s+2-(k+2) = s-k$ proměnných. Těchto $s-k$ proměnných budeme vybírat z $r+1-(k+2) = r-k-1$ proměnných. Jde opět o kombinace, takže počet prostorů S_s je dán číslem $\binom{r-k-1}{s-k}$.

Věta 3. *V prostoru ω existuje právě $\binom{r+1}{s+2}$ s-rozměrných „přípustných" pod-podprostorů S_s.*

Důkaz. Bodů U_{ij} je celkem $\binom{r+1}{2}$. Podle věty 1 každým tímto bodem prochází právě $\binom{r-1}{s}$ různých „přípustných" S_s. Je tedy těchto S_s v ω:

$$\frac{\binom{r+1}{2}\cdot\binom{r-1}{s}}{\binom{s+2}{2}} = \binom{r+1}{s+2}.$$

Věta 4. *Nechť $s > k$. V „přípustném" podprostoru S_s prostoru ω leží právě $\binom{s+2}{k+2}$ k-rozměrných „přípustných" podprostorů S_k prostoru S_s.*

Důkaz. S_s je dán rovnicemi (1) a S_k rovnicemi (2). S_k je podprostorem S_s, když první rovnice z rovnic (2) obsahuje jenom proměnné obsažené v prvé rovnici z rovnic (1). Jedná se tedy zřejmě o kombinace $k+2$ třídy z $s+2$ prvků a podle známého vzorce platí, že počet S_k je $\binom{s+2}{k+2}$.

Věta 5. *Nechť K je množina, která jako své prvky obsahuje všechny „přípustné" podprostory $S_s \subset \omega$. ($0 \leqq s \leqq r - 2$.) Potom množina K je $r - 1$-rozměrnou konfigurací typu:*

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} \binom{r+1}{2}, & \binom{r-1}{1}, & \binom{r-1}{2}, & \ldots, & \binom{r-1}{r-2} \\ 3\;, & \binom{r+1}{3}, & \binom{r-2}{1}, & \ldots, & \binom{r-2}{r-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{r}{2}\;, & \binom{r}{3}\;, & \binom{r}{4}\;, & \ldots, & \binom{r+1}{r} \end{pmatrix}.$$

Důkaz této věty bezprostředně plyne z předcházejících vět a proto ho nebudeme provádět. Popišme však konstrukci matice této konfigurace. Na hlavní diagonále jsou podle věty 3 čísla $\binom{r+1}{2}, \binom{r+1}{3}, \ldots, \binom{r+1}{r}$. Čísla pod hlavní diagonálou dostaneme užitím věty 2 (resp. 1) a čísla nad hlavní diagonálou dostaneme užitím věty 4 (resp. 3).

Poznámka 1. Nechť $r = 4$, potom dostáváme konfiguraci v trojrozměrném prostoru typu:

$$(4) \qquad \begin{pmatrix} 10, & 3, & 3 \\ 3, & 10, & 2 \\ 6, & 4, & 5 \end{pmatrix}$$

Matice (4) však obsahuje jedno číslo 2. Uvažme, že toto číslo bude v matici (3) vždy. V rovině takové konfigurace, kde jedno z čísel charakterizující danou konfiguraci je menší než tři, nepřipouštíme. V prostorech vyšší dimense však můžeme takové konfigurace uvažovat.

3. r-rozměrné konfigurace s body U_{ij} a J_i. Označme J_i bod jehož i-tá souřadnice je rovna $-r$ a ostatní jsou rovny jedné. Tedy $x_j = 1, j = 1, 2, \ldots, i - 1, i + 1, \ldots \ldots, r + 1$, $x_i = -r$ pro $i \neq j$. Zřejmě existuje v daném S_r právě $r + 1$ navzájem vesměs různých bodů J_i. Dále platí, že všechny J_i leží v ω.

Věta 6. *Každá skupina $s + 1$ vesměs různých bodů J_i, kde $s \leqq r - 1$ je lineárně nezávislá tj. určuje s-rozměrný prostor S_s.*

Důkaz. Označme tyto body J_i, $i = 1, 2, \ldots, s + 1$. Předpokládejme, že neplatí tvrzení věty. Potom musí platit např. pro J_1:

$$J_1 = \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \ldots + \lambda_{s+1} J_{s+1} .$$

Tato symbolická rovnice se dá zapsat rovnicemi mezi jednotlivými souřadnicemi. Napíšeme je jenom pro x_1 a x_{s+2}. Dostáváme:

$$-kr = \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_{s+1}$$

$$k = \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_{s+1}$$

Protože k musí být různé od nuly, jsou tyto rovnice splněny jen pro $r = -1$. Tedy docházíme ke sporu s předpokladem.

Věta 7. *Nechť množina L obsahuje jako své prvky všechny s-rozměrné prostory S_s, kde $S_s \subset \omega$, $s = 0, 1, 2, \ldots, r - 2$, které jsou určeny $s + 1$ vesměs různými body J_i. Potom množina $M = K \cup L$, kde K je množina z věty 5, je $r - 1$-rozměrnou konfigurací typu:*

$$\begin{pmatrix} \binom{r+2}{2}, & \binom{r}{1}, & \binom{r}{2}, & \ldots, & \binom{r}{r-2} \\ 3, & \binom{r+2}{3}, & \binom{r-1}{1}, & \ldots, & \binom{r-1}{r-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{r}{2}, & \binom{r}{3}, & \binom{r}{4}, & \ldots, & \binom{r+2}{r} \end{pmatrix}.$$

Tuto větu dokážeme pomocí následujících vět.

Věta 8. *Každý s-rozměrný prostor $S_s \in L$ obsahuje jediný $s - 1$ rozměrný prostor $S_{s-1} \in K$.*

Důkaz. Zřejmě platí, že na každé spojnici dvou různých bodů J_i a $J_{i'}$ leží právě jeden bod U_{ij} a je to zřejmě ten bod U_{ij}, kde $i = i$, $j = i'$. Protože v $S_s \in L$ je právě $\binom{s+1}{2}$ těchto přímek, leží tedy v S_s právě $\binom{s+1}{2}$ bodů U_{ij} a pro indexy i, j máme jenom $s + 1$ možností a tedy tyto body U_{ij} v počtu $\binom{s+1}{2}$ určují jediný $S_{s-1} \in K$.

Věta 9. *Pro každý $S_s \in K$ platí $J_i \notin S_s$.*

Důkaz. Nechť S_s je dán rovnicemi (1). Protože $s \leqq r - 2$ je vždy v těchto rovnicích aspoň jedna rovnice $x_i = 0$. Tuto rovnici nemůže J_i anulovat.

Věta 10. *Každý S_s konfigurace M obsahuje právě $\binom{s+2}{k+2}$ k-rozměrných podprostorů $S_k \in M$.*

Důkaz. Nechť $S_s \in K$, potom toto platí podle věty 4. Nechť $S_s \in L$. Protože každý S_s je určen $s + 1$ vesměs různými body J_i a S_k je určen $k + 1$ vesměs různými body J_i, dostáváme $\binom{s+1}{k+1}$ různých $S_k \subset S_s$. Podle věty 8 však každý $k + 1$ rozměrný $S_{k+1} \in L$ obsahuje k-rozměrný prostor $S_k \in K$. $S_s \in M$ obsahuje $\binom{s+1}{k+2}$ $S_{k+1} \in L$ a tedy $S_s \in M$ obsahuje celkem $\binom{s+1}{k+1} + \binom{s+1}{k+2} = \binom{s+2}{k+2}$ podprostorů S_k.

Věta 11. *Nechť $s > k$. Každým $S_k \in M$ prochází právě $\binom{r-k}{s-k}$ vesměs různých $S_s \in M$.*

Důkaz. Nechť $S_k \in L$. Potom S_k je určen $k + 1$ vesměs různými body J_i a S_s je určen $s + 1$ vesměs různými body J_i. Z těchto $s + 1$ bodů je však již pevně určeno $k + 1$. Můžeme měnit pouze $s - k$ bodů, které budeme vybírat z $r - k$ bodů. Jde zřejmě o kombinace a tedy existuje celkem $\binom{r-k}{s-k}$ vesměs různých $S_s \in L$ a procházejících S_k. Podle věty 9 však $S_s \in K$ neobsahuje žádný bod J_i a tedy také ne $S_k \in L$. Tím je věta pro $S_k \in L$ dokázaná. Nechť $S_k \in K$. Podle věty 2 tímto $S_k \in K$ prochází právě $\binom{r-k-1}{s-k}$ $S_s \in K$. Hledejme nyní počet $S_s \in L$, které procházejí $S_k \in K$. Podle věty 8 platí, že v každém $S_{k+1} \in L$ leží jediný $S_k \in K$. Podle věty 6 existuje v L právě $\binom{r+1}{k+2}$ navzájem různých S_{k+1} a podle věty 3 existuje v K právě $\binom{r+1}{k+2}$ vesměs různých S_k a tedy každý $S_k \in K$ leží v jediném $S_{k+1} \in L$. Tímto $S_{k+1} \in L$ prochází, jak jsme dokázali v prvé části důkazu této věty, právě $\binom{r-k-1}{s-k-1}$ vesměs různých $S_s \in L$. Tedy $\binom{r-k-1}{s-k-1} + \binom{r-k-1}{s-k} = \binom{r-k}{s-k}$ je počet vesměs různých $S_s \in M$, které procházejí daným $S_k \in K$.

Věta 12. *V ω existuje právě $\binom{r+2}{k+2}$ vesměs různých $S_k \in M$.*

Důkaz této věty je zcela obdobný důkazu věty 10 a proto ho nebudeme provádět.

Pomocí vět 8 – 12 je dokázána věta 7. Čísla na hlavní diagonále matice konfigurace z věty 7 dostáváme podle věty 12. Čísla pod hlavní diagonálou podle věty 10 a čísla nad hlavní diagonálou podle věty 11.