ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

4

96

ACADEMIA
PRAHA

ČAS. PRO PĚST. MAT. · SV. 96 · Č. 4 · STR. 339—440 · PRAHA 12. 11. 1971

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(*Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky“*)

SVAZEK 96 (1971)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd v Praze

Redakce:

Matematický ústav Československé akademie věd v Praze
Praha 1, Žitná 25

Časopis pro pěstování matematiky. Ročník *96* (1971). — Vydává Československá akademie věd v Academii, nakladatelství Československé akademie věd, Vodičkova 40, Praha 1 - Nové Město, dod. pú 1. — Redakce: Matematický ústav ČSAV v Praze, Žitná 25, Praha 1, dod. pú 1, telefon 226601-03. — Vychází čtvrtletně. — Roční předplatné Kčs 56,—, cena jednotlivého sešitu 14,— Kčs (cena pro Československo); \$ 8,—; £ 3.35; (cena v devisách). — Tiskne Státní tiskárna 5, nositel Řádu práce, tř. Rudé armády 171, Praha 8 — Libeň-Kobylisy, dod. pú 8. — Rozšiřuje Poštovní novinová služba, objednávky a předplatné přijímá PNS — Ústřední expedice tisku, administrace odborného tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Lze také objednat u každé pošty nebo doručovatele. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — Ústřední expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1.

Toto číslo vyšlo v listopadu 1971

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 96 * PRAHA 12. XI. 1971 * ČÍSLO 4

r-ROZMĚRNÉ KONFIGURACE

JAROMÍR KRYS, Hradec Králové

(Došlo dne 10. prosince 1969)

1. Úvod. V této práci odvodíme dva typy konfigurací v r-rozměrném projektivním prostoru S_r nad tělesem komplexních čísel.

r-rozměrná konfigurace je množina, jejíž prvky jsou vlastní podprostory projektivního prostoru S_r nad tělesem komplexních čísel a pro něž platí tato podmínka: Každý s-rozměrný podprostor je incidentní vždy s týmž počtem k-rozměrných podprostorů.

Konfigurace se pro $r \geqq 3$ obvykle zadává maticí:

$$\begin{pmatrix} a_{00}, & a_{01}, & \ldots, & a_{0,r-1} \\ a_{10}, & a_{11}, & \ldots, & a_{1,r-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r-1,0}, & a_{r-1,1}, & \ldots, & a_{r-1,r-1} \end{pmatrix}$$

kde a_{ij} je přirozené číslo o kterém platí:

1) $i = j$, potom číslo a_{ii} označuje počet i-rozměrných prostorů dané konfigurace.
2) $i \neq j$, potom číslo a_{ij} udává počet j-rozměrných prostorů S_j dané konfigurace, které jsou incidentní s i-rozměrným projektivním prostorem S_i dané konfigurace.

Dále platí: $a_{ii}a_{ie} = a_{ei}a_{ee}$.

2. r-rozměrné konfigurace s body U_{ij}. Zavedeme nyní body U_{ij}. Nechť S_r je r-rozměrný projektivní prostor nad tělesem komplexníc hčísel. V tomto S_r je dána projektivní soustava souřadnic. Bod U_{ij} je bod tohoto S_r jehož i-tá souřadnice je rovna 1, j-tá souřadnice je rovna -1 a ostatní souřadnice tohoto bodu jsou nulové. Je zřejmě $U_{ij} = U_{ji}$ a dále zřejmě platí, že v daném S_r je právě $\binom{r+1}{2}$ vesměs různých bodů U_{ij}.

Označme ω nadrovinu tohoto S_r, která má v dané soustavě souřadnic rovnici: $x_1 + x_2 + \ldots + x_r + x_{r+1} = 0$. Zřejmě každý bod U_{ij} leží v nadrovině ω.

Věta 1. *Každým bodem U_{ij} prochází $\binom{r-1}{s}$ vesměs navzájem různých podprostorů S_s nadroviny ω takových, že v každém z nich leží právě $\binom{s+2}{2}$ různých bodů U_{ij}.*

Důkaz. Prostor S_s je určen těmito rovnicemi:

$$x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3} + \ldots + x_{i_{s+1}} + x_{i_{s+2}} = 0\,, \quad x_{i_{s+3}} = 0\,, \tag{1}$$
$$x_{i_{s+4}} = 0, \ldots, x_{i_{r+1}} = 0\,.$$

Protože U_{ij} leží v S_s, musí být i, j některé z čísel $i_{i_1}, i_{i_2}, \ldots, i_{i_{s+2}}$. Proměnných v prvé rovnici rovnic (1) je $s + 2$ a vybíráme je z $r + 1$ proměnných. Protože však mezi nimi musí být x_i a x_j vybíráme tedy jenom z $r - 1$ čísel s čísel. Zřejmě na pořadí nezáleží a jsou to tedy kombinace s-té třídy z $r - 1$ prvků a podle známého vzorce platí, že počet prostorů S_s je $\binom{r-1}{s}$. Snadno nahlédneme, že všechny tyto prostory jsou navzájem různé, neboť jinak by musela prvá rovnice z rovnic (1) být pro dvě různé kombinace stejná, to však nemůže nastat. Určíme nyní počet bodů U_{ij} ležících v S_s. Mohou to být jedině body U_{ij}, jejichž souřadnice anulují prvou rovnici z rovnic (1). Těch je však $\binom{s+2}{2}$.

Zavedeme nyní úmluvu, že místo k-rozměrný podprostor ve kterém leží právě $\binom{k+2}{2}$ vesměs různých bodů U_{ij}, budeme říkat „přípustný" k-rozměrný podprostor S_k.

Dokažme nyní, že každý „přípustný" S_k se dá vyjádřit rovnicemi (1). Z $\binom{k+2}{2}$ bodů U_{ij}, které leží v S_k zvolme $k + 1$ bodů lineárně nezávislých tj. takových, že daný S_k určují. Nyní utvoříme podmnožiny $M_1, M_2, \ldots, M_n$ této množiny bodů. Nechť $U_{ij} \in M_1$. Do této množiny dáme všechny body U_{ij}, které mají právě jeden index rovný j nebo i tj. body U_{kj} a U_{ki}. Tak dostaneme $h_1 + 1$ těchto bodů, jejichž indexy vybíráme nejvýše z $h_1 + 2$ přirozených čísel. Obdobně vytvoříme $M_2, \ldots, M_n$. Číslem $h_i + 1$ budeme označovat počet bodů U_{ij} v M_i. Z předcházejícího je zřejmé, že množiny $M_1, \ldots, M_n$ jsou po dvou navzájem disjunktní a platí $\sum_{i=1}^{n} h_i + n = k + 1$. Hledejme nyní všechny lineární kombinace zvolených $k + 1$ bodů U_{ij}. Je zřejmé, že takový bod U_{ij}, jehož aspoň jeden index nepatří do žádné množiny indexů množin $M_1, M_2, \ldots, M_n$, nemůžeme touto lineární kombinací dostat. Všechny uvažované body mají totiž tuto souřadnici nulovou. Můžeme tedy dostat nejvýše: $\binom{h_1+2}{2} + \binom{h_2+2}{2} + \ldots + \binom{h_n+2}{2}$ bodů U_{ij}. Toto číslo je jedině pro $n = 1$ rovno číslu

$\binom{k+2}{2}$. V ostatních případech, jak čtenář snadno spočítá, je toto číslo menší než $\binom{k+2}{2}$. V prvém případě se však jedná o prostor, který se dá vyjádřit rovnicemi (1). Ostatní případy tedy nemohou nastat. Z toho vyplývá zpřesnění věty 1:

Každým bodem U_{ij} prochází právě $\binom{r-1}{s}$ vesměs navzájem různých „přípustných" podprostorů S_s nadroviny ω.

Věta 2. *Nechť $s > k$. Každým „přípustným" podprostorem S_k prostoru ω prochází právě $\binom{r-k-1}{s-k}$ různých „přípustných" podprostorů S_s.*

Důkaz. Podle předcházejícího se dá každý „přípustný" S_k vyjádřit rovnicemi:

(2) $x_{j_1} + x_{j_2} + \ldots + x_{j_{k+2}} = 0\,, \quad x_{j_m} = 0\,, \quad m = k+3\,, \quad k+4, \ldots, r+1$

a S_s je dán rovnicemi (1). Zřejmě musí platit, že množina $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{k+2}}\}$ je podmnožinou množiny $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{s+2}}\}$. Protože $k+2$ proměnných bylo již zvoleno, můžeme měnit pouze $s + 2 - (k+2) = s - k$ proměnných. Těchto $s - k$ proměnných budeme vybírat z $r + 1 - (k+2) = r - k - 1$ proměnných. Jde opět o kombinace, takže počet prostorů S_s je dán číslem $\binom{r-k-1}{s-k}$.

Věta 3. *V prostoru ω existuje právě $\binom{r+1}{s+2}$ s-rozměrných „přípustných" pod-podprostorů S_s.*

Důkaz. Bodů U_{ij} je celkem $\binom{r+1}{2}$. Podle věty 1 každým tímto bodem prochází právě $\binom{r-1}{s}$ různých „přípustných" S_s. Je tedy těchto S_s v ω:

$$\frac{\binom{r+1}{2}\cdot\binom{r-1}{s}}{\binom{s+2}{2}} = \binom{r+1}{s+2}.$$

Věta 4. *Nechť $s > k$. V „přípustném" podprostoru S_s prostoru ω leží právě $\binom{s+2}{k+2}$ k-rozměrných „přípustných" podprostorů S_k prostoru S_s.*

Důkaz. S_s je dán rovnicemi (1) a S_k rovnicemi (2). S_k je podprostorem S_s, když první rovnice z rovnic (2) obsahuje jenom proměnné obsažené v prvé rovnici z rovnic (1). Jedná se tedy zřejmě o kombinace $k+2$ třídy z $s+2$ prvků a podle známého vzorce platí, že počet S_k je $\binom{s+2}{k+2}$.

Věta 5. *Nechť K je množina, která jako své prvky obsahuje všechny „přípustné" podprostory $S_s \subset \omega$. ($0 \leqq s \leqq r - 2$.) Potom množina K je $r - 1$-rozměrnou konfigurací typu:*

$$
(3) \qquad \begin{pmatrix} \binom{r+1}{2}, & \binom{r-1}{1}, & \binom{r-1}{2}, & \ldots, & \binom{r-1}{r-2} \\ 3, & \binom{r+1}{3}, & \binom{r-2}{1}, & \ldots, & \binom{r-2}{r-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \binom{r}{2}, & \binom{r}{3}, & \binom{r}{4}, & \ldots, & \binom{r+1}{r} \end{pmatrix}.
$$

Důkaz této věty bezprostředně plyne z předcházejících vět a proto ho nebudeme provádět. Popišme však konstrukci matice této konfigurace. Na hlavní diagonále jsou podle věty 3 čísla $\binom{r+1}{2}, \binom{r+1}{3}, \ldots, \binom{r+1}{r}$. Čísla pod hlavní diagonálou dostaneme užitím věty 2 (resp. 1) a čísla nad hlavní diagonálou dostaneme užitím věty 4 (resp. 3).

Poznámka 1. Nechť $r = 4$, potom dostáváme konfiguraci v trojrozměrném prostoru typu:

$$
(4) \qquad \begin{pmatrix} 10, & 3, & 3 \\ 3, & 10, & 2 \\ 6, & 4, & 5 \end{pmatrix}
$$

Matice (4) však obsahuje jedno číslo 2. Uvažme, že toto číslo bude v matici (3) vždy. V rovině takové konfigurace, kde jedno z čísel charakterizující danou konfiguraci je menší než tři, nepřipouštíme. V prostorech vyšší dimense však můžeme takové konfigurace uvažovat.

3. r-rozměrné konfigurace s body U_{ij} a J_i. Označme J_i bod jehož i-tá souřadnice je rovna $-r$ a ostatní jsou rovny jedné. Tedy $x_j = 1, j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots$ $\ldots, r+1$, $x_i = -r$ pro $i \neq j$. Zřejmě existuje v daném S_r právě $r + 1$ navzájem vesměs různých bodů J_i. Dále platí, že všechny J_i leží v ω.

Věta 6. *Každá skupina $s + 1$ vesměs různých bodů J_i, kde $s \leqq r - 1$ je lineárně nezávislá tj. určuje s-rozměrný prostor S_s.*

Důkaz. Označme tyto body J_i, $i = 1, 2, \ldots, s + 1$. Předpokládejme, že neplatí tvrzení věty. Potom musí platit např. pro J_1:

$$
J_1 = \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \ldots + \lambda_{s+1} J_{s+1} .
$$

Tato symbolická rovnice se dá zapsat rovnicemi mezi jednotlivými souřadnicemi. Napíšeme je jenom pro x_1 a x_{s+2}. Dostáváme:

$$-kr = \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_{s+1}$$

$$k = \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_{s+1}$$

Protože k musí být různé od nuly, jsou tyto rovnice splněny jen pro $r = -1$. Tedy docházíme ke sporu s předpokladem.

Věta 7. *Nechť množina L obsahuje jako své prvky všechny s-rozměrné prostory S_s, kde $S_s \subset \omega$, $s = 0, 1, 2, \ldots, r - 2$, které jsou určeny $s + 1$ vesměs různými body J_i. Potom množina $M = K \cup L$, kde K je množina z věty 5, je $r - 1$-rozměrnou konfigurací typu:*

$$\begin{pmatrix} \binom{r+2}{2}, & \binom{r}{1}, & \binom{r}{2}, & \ldots, & \binom{r}{r-2} \\ 3, & \binom{r+2}{3}, & \binom{r-1}{1}, & \ldots, & \binom{r-1}{r-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{r}{2}, & \binom{r}{3}, & \binom{r}{4}, & \ldots, & \binom{r+2}{r} \end{pmatrix}.$$

Tuto větu dokážeme pomocí následujících vět.

Věta 8. *Každý s-rozměrný prostor $S_s \in L$ obsahuje jediný $s - 1$ rozměrný prostor $S_{s-1} \in K$.*

Důkaz. Zřejmě platí, že na každé spojnici dvou různých bodů J_i a $J_{i'}$ leží právě jeden bod U_{ij} a je to zřejmě ten bod U_{ij}, kde $i = i$, $j = i'$. Protože v $S_s \in L$ je právě $\binom{s+1}{2}$ těchto přímek, leží tedy v S_s právě $\binom{s+1}{2}$ bodů U_{ij} a pro indexy i, j máme jenom $s + 1$ možností a tedy tyto body U_{ij} v počtu $\binom{s+1}{2}$ určují jediný $S_{s-1} \in K$.

Věta 9. *Pro každý $S_s \in K$ platí $J_i \notin S_s$.*

Důkaz. Nechť S_s je dán rovnicemi (1). Protože $s \leqq r - 2$ je vždy v těchto rovnicích aspoň jedna rovnice $x_i = 0$. Tuto rovnici nemůže J_i anulovat.

Věta 10. *Každý S_s konfigurace M obsahuje právě $\binom{s+2}{k+2}$ k-rozměrných podprostorů $S_k \in M$.*

Důkaz. Nechť $S_s \in K$, potom toto platí podle věty 4. Nechť $S_s \in L$. Protože každý S_s je určen $s + 1$ vesměs různými body J_i a S_k je určen $k + 1$ vesměs různými body J_i, dostáváme $\binom{s+1}{k+1}$ různých $S_k \subset S_s$. Podle věty 8 však každý $k + 1$ rozměrný $S_{k+1} \in L$ obsahuje k-rozměrný prostor $S_k \in K$. $S_s \in M$ obsahuje $\binom{s+1}{k+2}$ $S_{k+1} \in L$ a tedy $S_s \in M$ obsahuje celkem $\binom{s+1}{k+1} + \binom{s+1}{k+2} = \binom{s+2}{k+2}$ podprostorů S_k.

Věta 11. *Nechť $s > k$. Každým $S_k \in M$ prochází právě $\binom{r-k}{s-k}$ vesměs různých $S_s \in M$.*

Důkaz. Nechť $S_k \in L$. Potom S_k je určen $k + 1$ vesměs různými body J_i a S_s je určen $s + 1$ vesměs různými body J_i. Z těchto $s + 1$ bodů je však již pevně určeno $k + 1$. Můžeme měnit pouze $s - k$ bodů, které budeme vybírat z $r - k$ bodů. Jde zřejmě o kombinace a tedy existuje celkem $\binom{r-k}{s-k}$ vesměs různých $S_s \in L$ a procházejících S_k. Podle věty 9 však $S_s \in K$ neobsahuje žádný bod J_i a tedy také ne $S_k \in L$. Tím je věta pro $S_k \in L$ dokázaná. Nechť $S_k \in K$. Podle věty 2 tímto $S_k \in K$ prochází právě $\binom{r-k-1}{s-k}$ $S_s \in K$. Hledejme nyní počet $S_s \in L$, které procházejí $S_k \in K$. Podle věty 8 platí, že v každém $S_{k+1} \in L$ leží jediný $S_k \in K$. Podle věty 6 existuje v L právě $\binom{r+1}{k+2}$ navzájem různých S_{k+1} a podle věty 3 existuje v K právě $\binom{r+1}{k+2}$ vesměs různých S_k a tedy každý $S_k \in K$ leží v jediném $S_{k+1} \in L$. Tímto $S_{k+1} \in L$ prochází, jak jsme dokázali v prvé části důkazu této věty, právě $\binom{r-k-1}{s-k-1}$ vesměs různých $S_s \in L$. Tedy $\binom{r-k-1}{s-k-1} + \binom{r-k-1}{s-k} = \binom{r-k}{s-k}$ je počet vesměs různých $S_s \in M$, které procházejí daným $S_k \in K$.

Věta 12. *V ω existuje právě $\binom{r+2}{k+2}$ vesměs různých $S_k \in M$.*

Důkaz této věty je zcela obdobný důkazu věty 10 a proto ho nebudeme provádět.

Pomocí vět 8 – 12 je dokázána věta 7. Čísla na hlavní diagonále matice konfigurace z věty 7 dostáváme podle věty 12. Čísla pod hlavní diagonálou podle věty 10 a čísla nad hlavní diagonálou podle věty 11.

Poznámka 2. Nechť $r = 4$, potom dostáváme konfiguraci v trojrozměrném prostoru typu:

$$\begin{pmatrix} 15, & 4, & 6 \\ 3, & 20, & 3 \\ 6, & 4, & 15 \end{pmatrix}$$

Poznámka 3. Nechť $r = 3$, potom dostáváme známou rovinnou konfiguraci $(10_3, 10_3)$.

Adresa autora: Hradec Králové (Pedagogická fakulta).

Zusammenfassung

r-DIMENSIONALE KONFIGURATIONEN

Jaromír Krys, Hradec Králové

In der Arbeit werden zwei Konfigurationstype im r-dimensionalen projektive Raum über dem Körper der komplexen Zahlen hergeleitet.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

ALTERNATING CONNECTIVITY OF TOURNAMENTS

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Received February 2, 1970)

This paper continues to investigate the concepts introduced in [2] in the case of tournaments. A tournament is a digraph in which any two different vertices u, v are joined exactly by one directed edge (either $\overrightarrow{uv}$, or $\overrightarrow{vu}$) and no loops exist. The concepts of $(+\,-)$-path, $(-\,+)$-path, $(+\,-)$-connectivity, $(-\,+)$-connectivity and alternating connectivity were defined in [2].

Theorem 1. *Let a tournament T with the vertex set V have a source u and no sink. Then T is $(+\,-)$-connected, but not $(-\,+)$-connected. The equivalence classes of the relation of being $(-\,+)$-connected are $\{u\}$ and $V \dot{-} \{u\}$.*

Remark. A tournament can have at most one source and at most one sink.

Proof. Let v, w be two vertices of T. As T has no sink, there exist vertices v', w' so that $\overrightarrow{vv'}, \overrightarrow{ww'}$ are edges of T. As u is a source, there exist edges $\overrightarrow{uv'}, \overrightarrow{uw'}$. Thus $P = [v, \overrightarrow{vv'}, v', \overleftarrow{v'u}, u, \overrightarrow{uw'}, w', \overleftarrow{w'w}, w]$ is a $(+\,-)$-path between v and w. As the vertices v, w were chosen arbitrarily, the tournament T is $(+\,-)$ connected. The source u forms an equivalence class of the relation of being $(-\,+)$-connected, because it cannot be joined by a $(-\,+)$-path with any other vertex; the first edge of such a path would be incoming into u which is impossible. If v, w are two vertices of T both different from u, then there exist edges $\overrightarrow{uv}, \overrightarrow{uw}$ and $P' = [v, \overleftarrow{vu}, u, \overrightarrow{uw}, w]$ is a $(-\,+)$-path between v and w. Thus $V \dot{-} \{u\}$ is an equivalence class of the relation of being $(-\,+)$-connected.

Theorem 1'. *Let a tournament T with the vertex set V have a sink u and no source. Then T is $(-\,+)$-connected, but not $(+\,-)$-connected. The equivalence classes of the relation of being $(+\,-)$-connected are $\{u\}$ and $V \dot{-} \{u\}$.*

Proof is dual to that of Theorem 1.

Theorem 2. *Let a tournament T with the vertex set V have a source u and a sink v. Then the equivalence classes of the relation of being $(+\,-)$-connected are $\{v\}$ and*

$V \dot{-} \{v\}$ *and the equivalence classes of the relation of being* $(-+)$*-connected are* $\{u\}$ *and* $V \dot{-} \{u\}$.

Proof is analogous to the proof of Theorem 1.

Theorem 3. *Let* T *be a tournament without a sink which is not strongly connected. Then* T *is* $(+-)$*-connected.*

Proof. The reduced graph R [1] of the tournament T is evidently an acyclic tournament. An acyclic tournament is evidently also transitive. Thus the vertices of R, i.e. the quasicomponents of T, are totally ordered so that for two quasicomponents Q_1, Q_2 we have $Q_1 \prec Q_2$ if and only if $Q_1 \neq Q_2$ and there exists and edge in T outgoing from a vertex of Q_1 and incoming into a vertex of Q_2. (As T is a tournament, from any vertex of Q_1 an edge goes into any vertex of Q_2.) Assume that there exists no greatest element in this ordering and consider two vertices u and v of T. Let Q_1 and Q_2 be the quasicomponent of T containing u and v respectively. There exists a quasicomponent Q_3 such that $Q_1 \prec Q_3$, $Q_2 \prec Q_3$. Choose a vertex w of Q_3. There exist edges $\overrightarrow{uw}$, $\overrightarrow{vw}$ and $P = [v, \overrightarrow{vw}, w, \overleftarrow{wu}, u]$ is a $(+-)$-path between u and v. Now assume that the above defined order has the greatest element; let this quasicomponent be Q_0. Consider again two vertices u and v. If none of them is in Q_0, the proof is the same as in the preceding case. Let u be in Q_0 and v in some $Q_1 \neq Q_0$. If Q_0 consists of a single vertex, this vertex is a sink; this is excluded by the assumption. Thus Q_0 is a strongly connected subtournament of T with more than one vertex; therefore there exists an edge $\overrightarrow{uw}$ such that w is contained also in Q_0. As $Q_1 \neq Q_0$, we have $Q_1 \prec Q_0$ and there exists also the edge $\overrightarrow{vw}$. Then $P = [u, \overrightarrow{uw}, w, \overleftarrow{wv}, v]$ is a $(+-)$-path between u and v. Now let both u and v be in Q_0. As Q_0 is a strongly connected subtournament of T, there exist vertices w, x in Q_0 such that $\overrightarrow{uw}$, $\overrightarrow{vx}$ are edges of T. If $w = x$, the proof is finished. If $w \neq x$, we choose a vertex y not belonging to Q_0. There exist edges $\overrightarrow{yw}$, $\overrightarrow{yx}$ in T and $P = [u, \overrightarrow{uw}, w, \overleftarrow{wy}, y, \overrightarrow{yx}, x, \overleftarrow{xv}, v]$ is a $(+-)$-path between u and v.

Theorem 3'. *Let* T *be a tournament without a source which is not strongly connected. Then* T *is* $(-+)$*-connected.*

Proof is dual to that of Theorem 3.

Before presenting the last theorem we shall prove some lemmas.

Lemma 1. *Let* T *be a tournament which is not acyclic. Then* T *contains at least one cycle of the length three.*

Proof. As T is not acyclic, we may choose a cycle C_1 in it. If the length of C_1 is three, the proof is finished. Assume that this length is $l_1 > 3$. Let $u_1, \ldots, u_{l_1}$ be the vertices of C_1 and $\overrightarrow{u_i u_{i+1}}$ for $i = 1, \ldots, l_1 - 1$ and $\overrightarrow{u_{l_1} u_1}$ be the edges of C_1. Consider the vertices u_1 and u_3. As T is a tournament, it contains either the edge $\overrightarrow{u_1u_3}$, or the edge $\overrightarrow{u_3u_1}$. In the second case the vertices u_1, u_2, u_3 with the edges $\overrightarrow{u_1u_2}, \overrightarrow{u_2u_3}, \overrightarrow{u_3u_1}$ form a cycle of the length three. In the first case there exists a cycle C_2 of the length $l_2 = l_1 - 1$ with the vertices $u_1, u_3, \ldots, u_{l_1}$. If $l_2 = 3$, the proof is finished; if not, we repeat the procedure with C_2 instead of C_1. In this manner we proceed until we obtain a cycle of the length three, which occurs after at most $l_1 - 3$ steps.

Lemma 2. *Let T be a tournament with the vertex set V without sources and sinks. Let $u \in V$ be such a vertex that $\{u\}, V \dot{-} \{u\}$ are equivalence classes of the relation of being $(+-)$-connected. Then the outdegree of u in T is 1 and the indegree of the vertex v such that $\overrightarrow{uv}$ is in T is also 1. The equivalence classes of the relation of being $(-+)$-connected are $\{v\}, V \dot{-} \{v\}$.*

Proof. The outdegree of u cannot be zero, because T does not contain sinks. Assume that there exist two vertices v_1, v_2 such that $v_1 \neq v_2$ and $\overrightarrow{uv_1}$ and $\overrightarrow{uv_2}$ are edges of T. As T is a tournament, the vertices v_1 and v_2 must be joined by an edge. Without any loss of generality let this edge be $\overrightarrow{v_1v_2}$. Let w be an arbitrary vertex of $V \dot{-} \{u\}$. As the set $V \dot{-} \{u\}$ is an equivalence class of the relation of being $(+-)$-connected, the vertices v_1 and w are $(+-)$-connected. There exists a $(+-)$-path $P = [v_1, \ldots, w]$ between v_1 and w. The path $P_2 = [u, \overrightarrow{uv_2}, v_2, \overleftarrow{v_2v_1}, v_1, \ldots, w]$ is a $(+-)$-path between u and w and the vertices u and w are $(+-)$-connected, which is a contradiction with the assumption that $\{u\}$ and $V \dot{-} \{u\}$ are the equivalence classes of the relation of being $(+-)$-connected. We have proved that the outdegree of u must be one. Let v be the terminal vertex of the unique edge outgoing from u. Assume that there exists a vertex $x \in V \dot{-} \{u\}$ such that $\overrightarrow{xv}$ is in T. Then $P_3 = [u, \overrightarrow{uv}, v, \overleftarrow{vx}, x]$ is a $(+-)$-path between u and x and x is $(+-)$-connected with u, which is again a contradiction. Thus also the indegree of v must be one. The vertex v is $(-+)$-connected with no vertex except itself, because any $(-+)$-path from v can only have the form $[v, \overleftarrow{vu}, u, \overrightarrow{uv}, v, \ldots, v]$. Thus $\{v\}$ is an equivalence class of the relation of being $(+-)$-connected. Now let a, b be two vertices of $V \dot{-} \{v\}$. As T is without sinks, there exist vertices a', b' of V such that $\overrightarrow{a'a}, \overrightarrow{b'b}$ are edges of T. If $a' = u$ or $b' = v$, then according to the above proved $a = v$ or $b = v$ respectively, which was excluded. Thus $a' \in V \dot{-} \{u\}$, $b' \in V \dot{-} \{u\}$ and these two vertices are $(+-)$-connected. Let $P_4 = [a', \ldots, b']$ be a $(+-)$-path between a' and b'. Then $P_5 = [a, \overleftarrow{aa'}, a', \ldots, b', \overrightarrow{b'b}, b]$ is a $(-+)$-path between a and b and these two vertices are $(-+)$-connected. As a, b were chosen arbitrarily from $V \dot{-} \{u\}$, this set is an equivalence class of the relation of being $(-+)$-connected in T.

Lemma 2'. *Let T be a tournament with the vertex set V without sources and sinks. Let $v \in V$ be such a vertex that $\{v\}, V \dot{-} \{v\}$ are equivalence classes of the relation of being $(-+)$-connected. Then the indegree of u in T is 1 and the outdegree of the vertex u such that $\overrightarrow{uv}$ is in T is also 1. The equivalence classes of the relation of being $(+-)$-connected are $\{u\}, V \dot{-} \{u\}$.*

Lemma 3. *Let T be a tournament with the vertex set V with at least four vertices without sources and sinks. Let u, v be two of its vertices such that $\{u\}$, $V \dot{-} \{u\}$ are equivalence classes of the relation of being $(+\,-)$-connected and $\{v\}$, $V \dot{-} \{v\}$ are equivalence classes of the relation of being $(-\,+)$-connected in T. Let T_1 a be tournament obtained from T by adding a new vertex w and joining it by exactly one directed edge with any vertex of V so that w is neither a source nor a sink in T_1. Then either T_1 is alternatingly connected or $\{u\}$, $(V \cup \{w\}) \dot{-} \{u\}$ are equivalence classes of the relation of being $(+\,-)$-connected and $\{v\}$, $(V \cup \{w\}) \dot{-} \{v\}$ are equivalence classes of the relation of being $(-\,+)$-connected in T_1.*

Proof. According to Lemmas 2 and 2' the outdegree of u and the indegree of v are equal to 1 and $\overrightarrow{uv}$ is an edge of T. At first assume that $\overrightarrow{wu}$ and $\overrightarrow{vw}$ are edges of T_1. Then the outdegree of u and the indegree of v also in T_1 are equal to one. Analogously as in the preceding lemmas we can prove that $\{u\}$ is an equivalence class of the relation of being $(+\,-)$-connected and $\{v\}$ is an equivalence class of the relation of being $(-\,+)$-connected also in T_1. Any two vertices of $V \dot{-} \{u\}$ remain $(+\,-)$-connected also in T_1. Now let $x \in V \dot{-} \{u\}$. If $x \neq v$, then $\overrightarrow{xu}$ is in T and also in T_1. The path $P_1 = [x, \overrightarrow{xu}, u, \overleftarrow{uw}, w]$ is a $(+\,-)$-path in T_1 and therefore x and w are $(+\,-)$-connected in T_1. If $x = r$, then for any $x' \in V \dot{-} \{u\}$ the edge $\overrightarrow{xx'}$ is in T. We have $x' \neq v$, thus $x' \in V \dot{-} \{u\}$. The vertex u is also in $V \dot{-} \{v\}$ and the edge $\overrightarrow{wu}$ is in T_1. The vertices x' and u are therefore $(-\,+)$-connected and there exists a $(-\,+)$-path $P_2 = [x', \ldots, u]$ in T and also in T_1. The path $P_3 = [v, \overrightarrow{vx'}, x', \ldots, u, \overleftarrow{uw}, w]$ is a $(+\,-)$-path in T_1 and therefore v and w are $(+\,-)$-connected in T_1. We have proved that $(V \cup \{w\}) \dot{-} \{u\}$ is an equivalence class of the relation of being $(+\,-)$-connected in T_1. Dually we prove that $(V \cup \{w\}) \dot{-} \{v\}$ is an equivalence class of the relation of being $(-\,+)$-connected in T_1. Now assume that $\overrightarrow{uw}$ is an edge of T_1. If $\overrightarrow{vw}$ is also in T_1, then $P_4 = [u, \overrightarrow{uw}, w, \overrightarrow{vw}, v]$ is a $(+\,-)$-path in T_1 and the vertices u, v are $(+\,-)$-connected. Now let x be a vertex of V such that $\overrightarrow{wx}$ is in T_1; such a vertex must exist because w is not a sink. We have $x \neq u$, $x \neq v$. The edge $\overrightarrow{vx}$ is also in T_1, thus $P_5 = [w, \overrightarrow{wx}, x, \overleftarrow{xv}, v]$ is a $(+\,-)$-path in T_1 and the vertices v and w are also $(+\,-)$-connected. As $V \dot{-} \{u\}$ is an equivalence class of the relation of being $(+\,-)$-connected in T and the vertices u and w are both $(+\,-)$-connected with the vertex $v \in V \dot{-} \{u\}$, the set $V \cup \{w\}$ is an equivalence class of the relation of being $(+\,-)$-connected in T_1 and the tournament T_1 is $(+\,-)$-connected. According to [2] it is also $(-\,+)$-connected and thus it is alternatingly connected. If $\overrightarrow{wv}$ is in T_1, the path $P_6 = [u, \overrightarrow{uv}, v, \overleftarrow{vw}, w]$ is a $(+\,-)$-path in T_1 and therefore u and w are $(+\,-)$-connected in T_1. Let $x \in V \dot{-} \{u; v\}$; there exists the edge $\overrightarrow{vx}$. If $\overrightarrow{wx}$ is in T_1, then $P_7 = [v, \overrightarrow{vx}, x, \overleftarrow{xw}, w]$ is a $(+\,-)$-path in T_1 between v and w and these vertices are $(+\,-)$-connected. If $\overrightarrow{xw}$ is in T_1, then $P_8 = [u, \overrightarrow{uw}, w, \overleftarrow{wx}, x]$ is a $(+\,-)$-path between u and x and these vertices are $(+\,-)$-connected. This means that either u or w is $(+\,-)$-connected with some vertex of $V \dot{-} \{u\}$. As $V \dot{-} \{u\}$ is an equivalence class of the relation of being $(+\,-)$-connected, we see that one of the vertices u, w is $(+\,-)$-

connected with all vertices of $V \dot{-} \{u\}$ and so is the other, because u and w are $(+-)$-connected. Thus the tournament T_1 is $(+-)$-connected and also alternatingly connected.

Lemma 4. *Let T be an alternatingly connected tournament with the vertex set V. Let T_1 be a tournament obtained from T by adding a new vertex w and joining it by exactly one directed edge with any vertex of V so that w is neither a source nor a sink in T_1. Then T_1 is also alternatingly connected.*

Proof. It suffices to prove that w is $(+-)$-connected in T_1 with an arbitrary vertex u of T. Both u and w are not sinks; thus there exist vertices u', w' in V such that $\overrightarrow{uu'}$, $\overrightarrow{ww'}$ are edges of T_1. The vertices u' and w' are $(-+)$-connected in T and also in T_1. Thus there exists a path $P_1 = [u', \ldots, w']$. The path $P_2 = [u, \overrightarrow{uu'}, u', \ldots \ldots, w', \overleftarrow{w'w}, w]$ is a $(+-)$-path between u and w in T_1.

Lemma 5. *Let $\{T_\iota\}_{\iota<\alpha}$ be a transfinite sequence of alternatingly connected tournaments of the limit ordinal number α such that for $\iota < \varkappa < \alpha$ the tournament T_ι is a proper subtournament of $T_\varkappa$. Then the tournament $T_\alpha = \bigcup_{\iota<\alpha} T_\iota$ is alternatingly connected.*

Proof. Let u, v be two vertices of T_α. According to the definition there exist ordinal numbers ι, $\varkappa$ less than α such that u is in T_ι and v is in $T_\varkappa$. Let $\lambda = \max(\iota, \varkappa)$. The vertices u, v are both contained in T_λ and are $(+-)$-connected in it. Therefore they are $(+-)$-connected also in T_α whose subtournament T_λ is.

Lemma 6. *Let $\{T_\iota\}_{\iota<\alpha}$ be a transfinite sequence of tournaments without sources and sinks of the limit ordinal number α such that for $\iota < \varkappa < \alpha$ the tournament T_ι is a proper subtournament of $T_\varkappa$. Let u, v be such vertices of T_0 that for any $\iota < \alpha$ the equivalence classes of the relation of being $(+-)$-connected in T_ι are $\{u\}$, $V_\iota \dot{-} \{u\}$ and the equivalence classes of the relation of being $(-+)$-connected in T_ι are $\{v\}$, $V_\iota \dot{-} \{v\}$ where V_ι is the vertex set of T_ι. Then in the tournament $T_\alpha = \bigcup_{\iota<\alpha} T_\iota$ the equivalence classes of the relation of being $(+-)$-connected are $\{u\}$, $V_\alpha \dot{-} \{u\}$ and the equivalence classes of the relation of being $(-+)$-connected are $\{v\}$, $V_\alpha \dot{-} \{v\}$ where V_α is the vertex set of T_α.*

Proof. If x, y are two vertices of $V_\alpha \dot{-} \{u\}$, we prove analogously to the proof of Lemma 5 that they are $(+-)$-connected. Now assume that u and some vertex $x \in V_\alpha$ are $(+-)$-connected in T_α. There exists a $(+-)$-path P between u and x in T_α. Let $V(P)$ be the set of vertices of P and for a given $y \in V_\alpha$ let $\beta(y)$ be the least ordinal number such that $y \in V_{\beta(y)}$; such a number must exist because of the well-ordering of the set of ordinal numbers less than α. Let $\beta(P) = \max_{y \in V(P)} \beta(y)$. As $V(P)$ is a finite set, this maximum exists. The path P is contained in $T_{\beta(P)}$ and therefore $T_{\beta(P)}$ is $(+-)$-connected, which is a contradiction. The rest of the assertion can be proved dually.

Theorem 4. *Let T be a tournament with three vertices. Then only two cases can occur*:

(1) *T is a cycle of the length 3 (Fig. 1a). Then any equivalence class of the relation of being $(+-)$-connected, as well as of the relation of being $(-+)$-connected, consists only of one vertex.*

(2) *T is acyclic (Fig. 1b). Then if u, v, w are vertices of T and $u \prec v \prec w$, then the equivalence classes of the relation of being $(+-)$-connected are $\{u\}$, $\{v, w\}$ and the equivalence classes of the relation of being $(-+)$-connected are $\{u, v\}$, $\{w\}$.*

The assertion is evident.

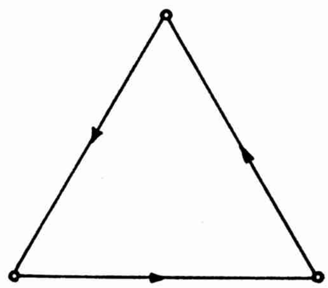


Fig. 1a.

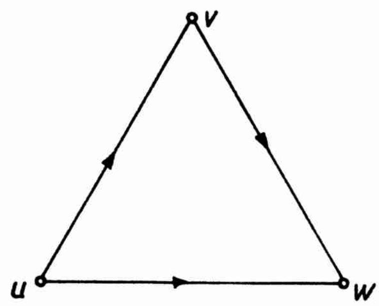


Fig. 1b.

Theorem 5. *Let T be a strongly connected tournament with at least four vertices Then either T is alternatingly connected, or there exist two vertices u, v in T such that the equivalence classes of the relation of being $(+-)$-connected are $\{u\}$, $V \dot{-} \{u\}$ and the equivalence classes of the relation of being $(-+)$-connected are $\{v\}$, $V \dot{-} \{v\}$ where V is the vertex set of T.*

Proof. We shall carry out the proof by the method of transfinite induction. At first we shall investigate tournaments with four vertices. Let T be such a tournament. If a tournament is strongly connected, it is not acyclic. Therefore according to Lemma 1 it contains a cycle of the length 3. Consider the vertex of T not belonging to this cycle. It is neither a source nor a sink, because of the strong connectivity of T. Thus either its indegree is 1 and its outdegree is 2, or its indegree is 2 and its outdegree is 1. We see that in both these cases we obtain a tournament isomorphic to the tournament on Fig. 2. In this tournament the equivalence classes of the relation of being $(+-)$-connected are $\{u\}$, $V \dot{-} \{u\}$ and the equivalence classes of the relation of being $(-+)$-connected are $\{v\}$, $V \dot{-} \{v\}$ which can be easily verified. Now let T be a strongly connected tournament with more than four vertices. It contains a cycle C of the length three; let a, b, c be its vertices, $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{bc}$, $\overrightarrow{ca}$ its edges. If C does not belong to any subgraph of T isomorphic to the graph on Fig. 2, then for any vertex x of T

not belonging to C either the edges $\overrightarrow{ax}, \overrightarrow{bx}, \overrightarrow{cx}$ or the edges $\overrightarrow{xa}, \overrightarrow{xb}, \overrightarrow{xc}$ exist. If for each vertex x not belonging to C the edges $\overrightarrow{ax}, \overrightarrow{bx}, \overrightarrow{cx}$ exist, the circuit C is a quasi-component of T, which is a contradiction with the assumption that T is strongly connected. The same holds if for each vertex x not belonging to C the edges $\overrightarrow{xa}, \overrightarrow{xb}, \overrightarrow{xc}$

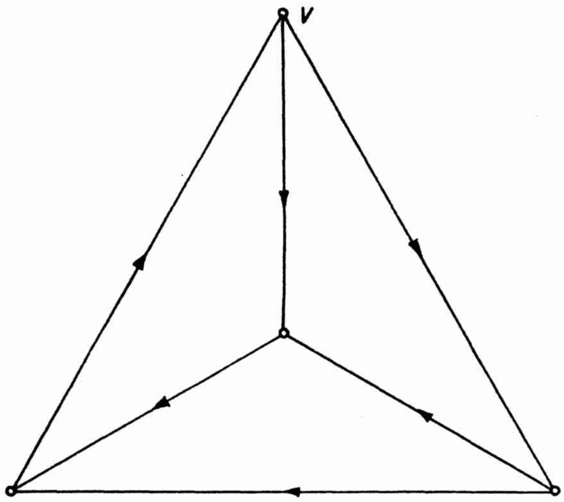


Fig. 2.

exist. Therefore, if X is the set of all vertices x of T not belonging to C such that the edges $\overrightarrow{ax}, \overrightarrow{bx}, \overrightarrow{cx}$ exist and Y is the set of all vertices y of T not belonging to C such that the edges $\overrightarrow{ya}, \overrightarrow{yb}, \overrightarrow{yc}$ exist, then both X and Y are non-empty. As T is strongly connected, there exists at least one $x \in X$ and $y \in Y$ such that $\overrightarrow{xy}$ is in T. Thus a, x, y form a cycle in T and the edges $\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{bx}, \overrightarrow{yb}$ exist. The subgraph of T induced by the vertices a, b, x, y is isomorphic to the graph on Fig. 2. We have proved that such a graph is a subgraph of every strongly connected tournament with more than four vertices. Thus we use the transfinite induction according to the number of vertices; this proof follows from Lemmas 3, 4, 5, 6. Obviously if we consider infinite tournaments, the Axiom of Choice is used.

References

[1] *J. Sedláček:* Kombinatorika v teorii a praxi. Úvod do teorie grafů. Praha 1964. (German translation: Einführung in die Graphentheorie. Leipzig 1968.)

[2] *B. Zelinka:* Alternating connectivity of digraphs. Čas. pěst. mat. (to appear).

Author's address: Liberec, Studentská 5 (Vysoká škola strojní a textilní).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

O AUTOMORFISMECH DEFINOVANÝCH NA OKRUHU ENDOMORFISMŮ HOMOGENNÍHO TOTÁLNĚ ROZLOŽITELNÉHO MODULU

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Došlo dne 13. února 1970)

Nechť je M unitární levý modul nad libovolným asociativním okruhem R s jednotkovým prvkem. Monogenní podmodul modulu M generovaný prvkem $x \in M$ označíme Rx, $U + V$ součet podmodulů U, V a $U \oplus V$ jejich direktní součet. Množina všech podmodulů modulu M je vzhledem k inklusi, kterou označíme $\leqq$, částečně uspořádaná. Vzhledem k operaci průniku $\cap$ a součtu dvou podmodulů vytváří svaz $\overline{M}$.

Označme Φ okruh endomorfismů modulu M. Jednotkový prvek ι tohoto okruhu je identický automorfismus. Obraz podmodulu $U \leqq M$ v endomorfismu $\varphi \in \Phi$ označíme $U\varphi$ a jádro tohoto endomorfismu Ker (φ). Levý (pravý) hlavní ideál okruhu Φ generovaný prvkem φ označíme $\Phi\varphi(\varphi\Phi)$. Součet dvou levých (pravých) ideálů I_1, I_2 okruhu Φ označíme $I_1 + I_2$ a direktní součet $I_1 \oplus I_2$. Množina všech levých (pravých) ideálů okruhu Φ je vzhledem k inklusi $\leqq$ částečně uspořádaná a vzhledem k operaci průniku a součtu levých (pravých) ideálů vytváří úplný svaz Φ_L, Φ_P, ([4], str. 25). Jestliže je π libovolný automorfismus svazu Φ_L a $I \in \Phi_L$, $I = \sum_{\nu \in J} I_\nu$, $I_\nu \in \Phi_L$, kde J je jistá množina indexů, pak $I^\pi = (\sum_{\nu \in J} I_\nu)^\pi = \sum_{\nu \in J} I_\nu^\pi$. Stejně pro libovolný automorfismus svazu Φ_P. ([4], str. 27.) Jestliže na množinách všech automorfismů svazů Φ_L, Φ_P definujeme obvyklým způsobem skládání automorfismů, obdržíme grupy $P(\Phi_L)$, $P(\Phi_P)$.

Prvek $x \in M$ se nazývá volný, jestliže ze vztahu $rx = o$, $r \in R$ plyne vždy $r = o$. Označme $L(M)$ množinu těch podmodulů modulu M, které jsou generovány konečným počtem prvků. Automorfismus ω svazu $\overline{M}$ se nazývá projektivní zobrazení modulu M, jestliže platí:

P_1: $(L(M))^\omega = L(M)$.
P_2: Pro libovolný $m \in M$ existuje $n \in M$ takový, že $(Rm)^\omega = Rn$.
P_3: Pro libovolný $n \in M$ existuje $m \in M$ takový, že $(Rm)^\omega = Rn$.
P_4: Existuje volný element $u \in M$ takový, že $(Ru)^\omega = Rv$, kde v je opět volný element (lit. [5]).

Automorfismus μ aditivní grupy modulu M, pro který platí $(rx)\mu = r^{\mu'}(x\mu)$, $r \in R$, $x \in M$, kde μ' je automorfismus okruhu R, se nazývá pololineární zobrazení modulu M.

Modul M se nazývá přípustný, jestliže jsou splněny následující dva požadavky:

1. Ke každým $x, y, z \in M$ existuje volný $w \in M$ takový, že $(Rx + Ry + Rz) \cap \cap Rw = o$.

2. Mějme libovolný $t \in M$, volné $x, y, u \in M$ a předpokládejme, že $Rx \cap Ry \neq o$, $Ru \cap Rt \neq o$. Pak existuje volný $w \in M$ takový, že $Rw \cap Rt = Rw \cap Ry = Rw \cap \cap Rx = Rw \cap Ru = o$.

V dalším se budou vyskytovat okruhy R s jednotkovým prvkem 1 následující vlastnosti:

$$\text{(V) Jestliže } ab = 1 \text{ pro } a, b \in R, \text{ pak existuje } c \in R \text{ takový, že } ca = 1 .$$

Podle [5] platí: Mějme okruh R vlastnosti (V). Každé projektivní zobrazení přípustného R-modulu M je indukováno pololineárním zobrazením tohoto modulu.

Modul M, který je direktním součtem svých jednoduchých podmodulů, se nazývá totálně rozložitelný. Součet všech navzájem isomorfních jednoduchých podmodulů modulu M se nazývá homogenní komponenta. Totálně rozložitelný modul, který má právě jednu homogenní komponentu, budeme nazývat homogenní totálně rozložitelný modul. Zvláštním případem tohoto modulu je např. vektorový prostor libovolné dimense nad libovolným tělesem. V dalším budeme vždy pod modulem M rozumět levý unitární homogenní totálně rozložitelný modul nad okruhem R, aniž to budeme zdůrazňovat. Pokud nebude výslovně nic řečeno, budeme předpokládat, že okruh R je obecný okruh s jednotkovým prvkem. Všechny pojmy a označení, které jsme zavedli pro obecný modul, zachováme i v našem speciálním případě.

Ke každému podmodulu U modulu M existuje podmodul V takový, že $M = U \oplus V$. ([3], teorém 2, str. 96.) Každý levý (pravý) hlavní ideál okruhu Φ endomorfismů modulu M je generován idempotentním prvkem (lit. [6]). Množina všech levých (pravých) hlavních ideálů okruhu Φ je inklusí částečně uspořádaná a vytváří vzhledem k tomuto uspořádání svaz $\Omega_L(\Omega_P)$. Označme $\cap$, $\cup$ příslušné svazové operace. Podle [6] a [1] platí pro libovolné $\Phi\varphi$, $\Phi\varrho$ rovnost $\Phi\varphi \cup \Phi\varrho = \Phi\varphi + \Phi\varrho$ a pro libovolné $\varphi\Phi$, $\varrho\Phi$ rovnost $\varphi\Phi \cup \varrho\Phi = \varphi\Phi + \varrho\Phi$. Svaz $\Omega_L(\Omega_P)$ je proto podsvazem svazu Φ_L, (Φ_P). Grupy automorfismů svazů Ω_L, Ω_P označíme $P(\Omega_L)$, $P(\Omega_P)$. Libovolný automorfismus σ okruhu Φ indukuje automorfismus π_σ svazu Φ_L předpisem $I^\sigma = I^{\pi_\sigma}$, $I \in \Phi_L$. Protože platí $(\Phi\varphi)^\sigma = \Phi\varphi^\sigma$, je $(\Phi\varphi)^\sigma \in \Omega_L$. Automorfismus σ indukuje také automorfismus π'_σ svazu Ω_L. Totéž platí také pro svazy Φ_P, Ω_P.

Zobrazení f, definované předpisem $(\Phi\varphi)^f = M\varphi$ je isomorfismem svazů Ω_L, $\overline{M}$. Zobrazení g definované předpisem $(\psi\Phi)^g = \operatorname{Ker}(\psi)$, je duální isomorfismus svazů Ω_P, $\overline{M}$. ([6], [1], hlava 5.)

Lemma 1. *Každý monogenní podmodul modulu M je generován konečným počtem jednoduchých modulů.*

Důkaz. Monogenní podmodul Rx je totálně rozložitelný a proto $Rx = \sum_{\nu \in J} Ru_\nu$, kde Ru_ν jsou jednoduché podmoduly. Existují $v_i \in Ru_{j_i}$, $i = 1, \ldots, n$; $j_i \in J$, $v_i \neq o$ takové, že $x = \sum_{i=1}^{n} v_i$. Protože $Rv_i = Ru_{j_i}$ pro všechna i, je $\sum_{i=1}^{n} Rv_i \leqq Rx$. Pro každé $r \in R$ je $rx = \sum_{i=1}^{n} rv_i$, čili $Rx \leqq \sum_{i=1}^{n} Rv_i$ a $Rx = \sum_{i=1}^{n} Rv_i$.

Lemma 2. *Nechť modul M obsahuje volný prvek. Každý automorfismus ω svazu $\overline{M}$ je projektivní zobrazení modulu M.*

Důkaz. Dokážeme, že ω splňuje požadavky $P_1 - P_4$.

P_1: Obrazem jednoduchého podmodulu Ru v automorfismu ω je jednoduchý podmodul $(Ru)^\omega$. Předpokládejme, že podmodul $U \leqq M$ je generován konečným počtem prvků $u_1, \ldots, u_n$, čili $U \in L(M)$. Pak $U = \sum_{i=1}^{n} Ru_i$. Podle lemmy 1 můžeme psát $Ru_i = \sum_{k=1}^{l_i} Rv_k^i$, $i = 1, \ldots, n$, kde Rv_k^i jsou jednoduché moduly. Pak $U^\omega = \sum_{i,k} (Rv_k^i)^\omega$, kde $(Rv_k^i)^\omega$ jsou jednoduché podmoduly. Podmodul U^ω je generován konečným počtem prvků, čili $U^\omega \in L(M)$. Z toho, že ω je automorfismus svazu $\overline{M}$, plyne $(L(M))^\omega = L(M)$.

P_2: Zvolme si libovolný $m \in M$. Pak můžeme psát $Rm = Ru_1 \oplus \ldots \oplus Ru_n$, kde Ru_i jsou jednoduché podmoduly a $(Rm)^\omega = (Ru_1)^\omega \oplus \ldots \oplus (Ru_n)^\omega$, kde $(Ru_i)^\omega$ jsou jednoduché podmoduly. Podle [2], str. 154, věta 12, jsou moduly Rm, $(Rm)^\omega$ isomorfní. Jestliže je α jejich isomorfismus, pak $(Rm)\,\alpha = R(m\alpha) = (Rm)^\omega$.

P_3: Zvolme libovolný $x \in M$. Podle P_2 je modul $(Rx)^{\omega^{-1}}$ monogenní, čili existuje $m \in M$ takový, že $Rm = (Rx)^{\omega^{-1}}$ a $(Rm)^\omega = Rx$.

P_4: Podle předpokladu existuje volný $u \in M$. Podle P_2 je $(Ru)^\omega = Rv$ a Ru, Rv jsou isomorfní. To znamená, že Rv je volný element.

Poznámka. Lemma 2 platí pro přípustný modul M, neboť pak existuje volný $u \in M$.

Lemma 3. *Buď σ automorfismus okruhu Φ endomorfismů modulu M. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

a) *Všechny levé hlavní ideály okruhu Φ jsou σ-přípustné.*

b) *Všechny pravé hlavní ideály okruhu Φ jsou σ-přípustné.*

c) *Pro každý idempotentní prvek $\omega \in \Phi$ je $\omega^\sigma = \omega$.*

Důkaz. a $\rightarrow$ b. Podle předpokladu platí $(\Phi\varphi)^\sigma \leqq \Phi\varphi$ pro každý $\varphi \in \Phi$. Jestliže zvolíme automorfismus σ^{-1}, pak dostáváme $\Phi\varphi = ((\Phi\varphi)^\sigma)^{\sigma^{-1}} \leqq (\Phi\varphi)^\sigma$, $(\Phi\varphi)^\sigma \geqq \Phi\varphi$.

Z toho plyne, že $(\Phi\varphi)^\sigma = \Phi\varphi$ pro každý $\varphi \in \Phi$, čili také $\Phi\varphi^\sigma = \Phi\varphi$. Z definice zobrazení f dostáváme

(1) $$(\Phi\varphi)^f = (\Phi\varphi^\sigma)^f = M\varphi = M\varphi^\sigma .$$

Zvolme si libovolný pravý hlavní ideál $\psi\Phi$. Existuje idempotentní prvek $\omega \in \Phi$ takový, že $\psi\Phi = \omega\Phi$. Pak také $\iota - \omega, \omega^\sigma, (\iota - \omega)^\sigma = \iota - \omega^\sigma$ jsou idempotentní endomorfismy a platí $M(\iota - \omega) = \mathrm{Ker}\,(\omega)$, $M(\iota - \omega^\sigma) = \mathrm{Ker}\,(\omega^\sigma) = M(\iota - \omega)^\sigma$. ([2], věta 1, str. 119.) Podle (1) je $M(\iota - \omega) = M(\iota - \omega)^\sigma$ a proto $\mathrm{Ker}\,(\omega) = \mathrm{Ker}\,(\omega^\sigma)$. Pak $(\mathrm{Ker}\,(\omega))^{g^{-1}} = (\mathrm{Ker}\,(\omega^\sigma))^{g^{-1}} = \omega\Phi = \omega^\sigma\Phi = (\omega\Phi)^\sigma$ a každý pravý hlavní ideál okruhu Φ je σ-přípustný.

b → a. Protože je σ automorfismus okruhu Φ, platí $(\varphi\Phi)^\sigma = \varphi\Phi$ pro každý prvek $\varphi \in \Phi$. Pak

(2) $$(\varphi\Phi)^g = (\varphi^\sigma\Phi)^g = \mathrm{Ker}\,(\varphi) = \mathrm{Ker}\,(\varphi^\sigma) .$$

Zvolme si libovolný levý hlavní ideál a předpokládejme, že je generovaný idempotentním prvkem ω. Platí $\mathrm{Ker}\,(\iota - \omega) = M\omega$ a $\mathrm{Ker}\,(\iota - \omega)^\sigma = M\omega^\sigma$. Podle (2) je $M\omega = M\omega^\sigma$ a proto $(M\omega)^{f^{-1}} = (M\omega^\sigma)^{f^{-1}} = \Phi\omega = (\Phi\omega)^\sigma = \Phi\omega^\sigma$. Každý levý hlavní ideál je σ-přípustný.

a → c. Každý idempotentní endomorfismus ω je jednoznačně určen dvojicí podmodulů $P = M\omega$, $Q = \mathrm{Ker}\,(\omega)$, $P \oplus Q = M$. Protože platí a → b, dostáváme podle (1), (2): $P = M\omega = M\omega^\sigma$, $Q = \mathrm{Ker}\,(\omega) = \mathrm{Ker}\,(\omega^\sigma)$ a z toho $\omega^\sigma = \omega$.

c → a. Jestliže $\omega^\sigma = \omega$ pro každý idempotentní $\omega \in \Phi$, pak také $\Phi\omega = \Phi\omega^\sigma = (\Phi\omega)^\sigma$. Každý levý hlavní ideál je σ-přípustný, protože je generován idempotentním prvkem.

Lemma 4. *Nechť modul M není jednoduchý. Jestliže automorfismus σ okruhu Φ splňuje ekvivalentní požadavky a), b), c) z lemmy 3, pak je identický.*

Důkaz. Nechť má automorfismus σ požadované vlastnosti. Zvolme si libovolný $\alpha \in \Phi$.

1. Nechť je $x \in M$ libovolný prvek takový, že podmodul Rx je jednoduchý. Pak je buď $R(x\alpha) \cap Rx = o$ nebo $R(x\alpha) = Rx$.

a) Předpokládejme, že $R(x\alpha) \cap Rx = o$. Zvolme libovolný $u \in R(x - x\alpha) \cap R(x\alpha)$. Pak existují $r, r_1 \in R$ takové, že $u = r(x - x\alpha) = r_1 x\alpha$, čili $rx = r_1 x\alpha + r x\alpha$. Podle předpokladu $R(x\alpha) \cap Rx = o$ je $rx = o$. Pak také $rx\alpha = o$ a $u = o$. Platí tedy $R(x - x\alpha) \cap R(x\alpha) = o$. Existuje podmodul $Q \leqq M$ takový, že $M = R(x\alpha) \oplus R(x - x\alpha) \oplus Q$. Zvolme idempotentní endomorfismus $\omega : M\omega = R(x\alpha)$, $\mathrm{Ker}\,(\omega) = R(x - x\alpha) \oplus Q$. Pak $x - x\alpha \in \mathrm{Ker}\,(\omega)$ a $s\omega = s$ pro každý $s \in R(x\alpha)$. Dostáváme tedy $(x - x\alpha)\,\omega = x\omega - x\alpha = o$, čili $x \in \mathrm{Ker}\,(\omega - \alpha)$. Podle (2) v důkazu lemmy 3 je $\mathrm{Ker}\,(\omega - \alpha) = \mathrm{Ker}\,((\omega - \alpha)^\sigma)$ a podle c) v lemmě 3 $\mathrm{Ker}\,((\omega - \alpha)^\sigma) = \mathrm{Ker}\,(\omega - \alpha^\sigma)$. To znamená, že platí $x(\omega - \alpha) = x(\omega - \alpha^\sigma) = o$ a z toho $x\alpha = x\alpha^\sigma$.

b) Předpokládejme, že $Rx = R(x\alpha)$. Protože M není jednoduchý, existuje jednoduchý podmodul $Ry' \leqq M$ takový, že $Ry' \cap Rx = o$. Protože je M homogenní totálně rozložitelný modul, jsou Rx, Ry' isomorfní. Nechť je γ' isomorfismus modulů Rx, Ry' a nechť $x\gamma' = y$. Pak $Ry = Ry'$. Podle [3], věta 1, str. 185 je možno isomorfismus γ' prodloužit do automorfismu γ modulu M. Pak $x\gamma = y$. Stejně jako v případě a) ukážeme, že $R(x - y) \cap Ry = o$ a že je možno zvolit idempotentní endomorfismus ω takový, že $M\omega = Ry$, $x - y \in \operatorname{Ker}(\omega)$, čili $x\omega = y\omega = y$. Zvolme libovolný $u \in Rx \cap Rx(\alpha + \omega)$. Pak existují $r, r_1 \in R$ takové, že $u = rx = r_1x\alpha + r_1x\omega$, čili $rx - r_1x\alpha = r_1y$. Protože $r_1x\alpha \in Rx$, platí podle předpokladu $Rx \cap Ry = o$, že $r_1y = r_1x\gamma = o$. Protože je γ automorfismus modulu M, je $r_1x = o$ a také $r_1x\alpha = o$, čili $u = o$. Platí tedy $Rx \cap Rx(\alpha + \omega) = o$. Pro endomorfismus $\alpha + \omega$ můžeme použít výsledku části a) a dostáváme $x\alpha + x\omega = x\alpha^\sigma + x\omega^\sigma$. Protože je ω idempotentní prvek, je $x\omega^\sigma = x\omega$ a $x\alpha = x\alpha^\sigma$.

2. Zvolme libovolný $x \in M$. Protože je M direktní součet jednoduchých podmodulů, existuje konečný počet prvků $x_1, \ldots, x_n$ takových, že Rx_i jsou jednoduché podmoduly pro všechna $i = 1, \ldots, n$ a $x = x_1 + \ldots + x_n$. Podle části 1 platí $x\alpha^\sigma = (x_1 + \ldots + x_n)\alpha^\sigma = x_1\alpha^\sigma + \ldots + x_n\alpha^\sigma = x_1\alpha + \ldots + x_n\alpha = x\alpha$.

Pro libovolný $x \in M$ platí tedy $x\alpha^\sigma = x\alpha$, čili $\alpha^\sigma = \alpha$. Automorfismus σ okruhu Φ je identický.

Poznámka. Jestliže je M jednoduchý, pak je Φ těleso a lemma 4 neplatí. Přípustný modul M není jednoduchý a proto splňuje podmínky lemmy 4.

Věta 1. *Budiž dán přípustný homogenní totálně rozložitelný modul M nad okruhem R vlastnosti (V). Každý automorfismus svazu Ω_L je indukován automorfismem okruhu Φ. Grupa $P(\Omega_L)$ je isomorfní s grupou $A(\Phi)$ automorfismů okruhu Φ.*

Důkaz. Protože je pololineární zobrazení μ automorfismus aditivní grupy modulu M, platí pro libovolný $\varphi \in \Phi$ vztah $M\varphi\mu = M\mu^{-1}\varphi\mu$. Snadno zjistíme, že $\mu^{-1}\varphi\mu \in \Phi$. Podle definice isomorfismu f svazů Ω_L, $\overline{M}$ dostáváme

$$(1) \qquad (\Phi\varphi)^f \mu = M\varphi\mu = M\mu^{-1}\varphi\mu = (\Phi\mu^{-1}\varphi\mu)^f .$$

Uvažujme zobrazení $\sigma_\mu : \varphi^{\sigma_\mu} = \mu^{-1}\varphi\mu$, $\varphi \in \Phi$. Jestliže zvolíme libovolný $\gamma \in \Phi$, pak $\mu\gamma\mu^{-1} \in \Phi$ a $(\mu\gamma\mu^{-1})^{\sigma_\mu} = \gamma$. Zobrazení σ_μ je zobrazením na Φ. Platí $(\varphi + \varrho)^{\sigma_\mu} = \mu^{-1}(\varphi + \varrho)\mu = \mu^{-1}\varphi\mu + \mu^{-1}\varrho\mu = \varphi^{\sigma_\mu} + \varrho^{\sigma_\mu}$, $(\varphi\varrho)^{\sigma_\mu} = \mu^{-1}\varphi\varrho\mu = \mu^{-1}\varphi\mu\mu^{-1}\varrho\mu = \varphi^{\sigma_\mu}\varrho^{\sigma_\mu}$. Zobrazení σ_μ je tedy automorfismus okruhu Φ. Automorfismus σ_μ okruhu Φ indukuje automorfismus π' svazu Ω_L předpisem

$$(2) \qquad (\Phi\varphi)^{\sigma_\mu} = \Phi\varphi^{\sigma_\mu} = \Phi\mu^{-1}\varphi\mu = (\Phi\varphi)^{\pi'} .$$

Jestliže je π libovolný automorfismus svazu Ω_L, pak je zřejmě $f^{-1}\pi f$ automorfismem svazu $\overline{M}$. Podle lemmy 2 je $f^{-1}\pi f$ projektivní zobrazení modulu M. Platí tedy podle [5] $U^{f^{-1}\pi f} = U_\mu$ pro každý podmodul U modulu M, kde μ je pololineární zobrazení modulu M. Protože pro libovolný $\Phi\varphi$ je $(\Phi\varphi)^f \leqq M$, dostáváme $(\Phi\varphi)^\pi = (\Phi\varphi)^{ff^{-1}\pi f f^{-1}} = ((\Phi\varphi)^f \mu)^{f^{-1}}$. Podle (1), (2) pak dostáváme $(\Phi\varphi)^\pi = (\Phi\mu^{-1}\varphi\mu)^{ff^{-1}} = (\Phi\varphi)^{\sigma_\mu}$. Automorfismus π svazu Ω_L je indukován automorfismem σ_μ okruhu Φ.

Jestliže označíme π_σ automorfismus svazu Ω_L indukovaný automorfismem σ okruhu Φ, pak zobrazení $\sigma \to \pi_\sigma$ je podle předchozí části důkazu homomorfismem grupy $A(\Phi)$ na grupu $P(\Omega_L)$. Předpokládejme, že π_σ je identický automorfismus svazu Ω_L. Pak $(\Phi\varphi)^{\pi_\sigma} = (\Phi\varphi)^\sigma = \Phi\varphi$ pro každý $\varphi \in \Phi$. Protože modul M splňuje podmínku lemmy 4, je σ identický automorfismus okruhu Φ. Zobrazení $\sigma \to \pi_\sigma$ je isomorfismus grup $A(\Phi)$, $P(\Omega_L)$.

Poznámka. V následujících větách předpokládáme, že modul M má stejné vlastnosti jako ve větě 1.

Věta 2. *Každý automorfismus svazu Ω_P je indukován automorfismem okruhu Φ. Grupa $P(\Omega_P)$ je isomorfní s grupou $A(\Phi)$.*

Důkaz. Zvolme pololineární zobrazení μ modulu M a $\varrho \in \Phi$. Pak $\mu^{-1}\varrho\mu \in \Phi$ a následující tvrzení jsou ekvivalentní: $x \in (\text{Ker}(\varrho))\,\mu$, $x = y\mu$ a současně $y\varrho = o$, $x\mu^{-1}\varrho\mu = o$, $x \in \text{Ker}(\mu^{-1}\varrho\mu)$. To znamená, že $(\text{Ker}(\varrho))\,\mu = \text{Ker}(\mu^{-1}\varrho\mu)$. Podle definice zobrazení g dostáváme

$$(\varrho\Phi)^g\,\mu = (\mu^{-1}\varrho\mu\Phi)^g\,. \tag{1}$$

Automorfismus σ_μ okruhu Φ, uvažovaný ve větě 1 indukuje automorfismus π' svazu Ω_P předpisem

$$(\varphi\Phi)^{\sigma_\mu} = \varphi^{\sigma_\mu}\Phi = \mu^{-1}\varphi\mu\Phi = (\varphi\Phi)^{\pi'}\,. \tag{2}$$

Jestliže je π automorfismus svazu Ω_P, pak je zřejmě $g^{-1}\pi g$ automorfismus svazu $\overline{M}$. Podle lemmy 2 je $g^{-1}\pi g$ projektivní zobrazení modulu M a podle [5] je indukováno pololineárním zobrazením μ modulu M, čili

$$U^{g^{-1}\pi g} = U\mu \quad \text{pro každý podmodul} \quad U \leqq M\,. \tag{3}$$

Podle (3), (1), (2) dostáváme pro libovolný $\varphi\Phi \in \Omega_P : (\varphi\Phi)^\pi = (\varphi\Phi)^{gg^{-1}\pi g g^{-1}} = ((\varphi\Phi)^g\,\mu)^{g^{-1}} = (\mu^{-1}\varphi\mu\Phi)^{gg^{-1}} = (\varphi\Phi)^{\sigma_\mu}$. Automorfismus π svazu Ω_P je indukován automorfismem σ_μ okruhu Φ.

Jestliže označíme π_σ automorfismus svazu Ω_P indukovaný automorfismem σ okruhu Φ, pak je podle lemmy 4 zobrazení $\sigma \to \pi_\sigma$ isomorfismem grup $A(\Phi)$, $P(\Omega_P)$.

Věta 3. *Každý automorfismus svazu Φ_L je indukován automorfismem okruhu Φ. Grupy $P(\Phi_L)$, $A(\Phi)$ jsou isomorfní.*

Důkaz. Protože je každý levý hlavní ideál okruhu Φ generován idempotentním prvkem, platí podle [3], hlava III, § 7: K levému ideálu I_1 okruhu Φ existuje levý ideál I_2 takový, že $I_1 \oplus I_2 = \Phi$, právě když je I_1 hlavní ideál.

Zvolme libovolný automorfismus ω svazu Φ_L a libovolný $\Phi\psi \in \Omega_L$. Existuje $\Phi\gamma$ takový, že $\Phi\psi \oplus \Phi\gamma = \Phi$. Zřejmě také $(\Phi\psi)^\omega \oplus (\Phi\gamma)^\omega = \Phi$. To však znamená, že $(\Phi\psi)^\omega$ je hlavní ideál, čili $(\Phi\psi)^\omega \in \Omega_L$. Proto $\Omega_L^\omega \subset \Omega_L$. Z toho, že ω je automorfismus svazu Φ_L, plyne $\Omega_L^\omega = \Omega_L$ a ω indukuje automorfismus ω' svazu Ω_L. Automorfismus ω' je podle věty 1 indukován automorfismem σ okruhu Φ předpisem $(\Phi\psi)^\sigma = (\Phi\psi)^{\omega'} = (\Phi\psi)^\omega$ pro každý $\Phi\psi \in \Omega_L$. Každý levý ideál I okruhu Φ můžeme zapsat jako součet hlavních levých ideálů: $I = \sum_{\nu \in J} \Phi\psi_\nu$. Protože je Φ_L úplný svaz, platí $I^\omega = \sum_{\nu \in J} (\Phi\psi_\nu)^\omega = \sum_{\nu \in J} (\Phi\psi_\nu)^\sigma = I^\sigma$. Automorfismus ω svazu Φ_L je indukován automorfismem σ okruhu Φ.

Zobrazení $\sigma \to \pi_\sigma$, kde π_σ je automorfismus svazu Φ_L indukovaný automorfismem σ okruhu Φ, je homomorfismem grupy $A(\Phi)$ na grupu $P(\Phi_L)$. Jestliže je π_σ identický automorfismus svazu Ω_L, pak určitě $(\Phi\psi)^{\pi_\sigma} = (\Phi\psi)^\sigma = \Phi\psi$ pro všechny levé hlavní ideály okruhu Φ. To podle lemmy 4 znamená, že σ je identický automorfismus okruhu Φ. Zobrazení $\sigma \to \pi_\sigma$ je isomorfismus grup $P(\Phi_L)$, $A(\Phi)$.

Věta 4. *Každý automorfismus svazu Φ_P je indukován automorfismem okruhu Φ. Grupy $P(\Phi_P)$, $A(\Phi)$ jsou isomorfní.*

Důkaz. Provedeme podobně jako důkaz věty 3.

Literatura

[1] *Р. Бер:* Линейная алгебра и проективная геометрия. Москва 1955.

[2] *Н. Бурбаки:* Алгебра II, Модули, кольца, формы. Москва 1966.

[3] *Н. Джекобсон:* Строение колец. Москва 1961.

[4] *H. Hermes:* Einführung in die Verbandstheorie. 2. Auflage. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1967.

[5] *Л. А. Скорняков:* Проективное отображение модулей. Известия АН 1960, *24*, № 4, 511—520.

[6] *K. G. Wolfson:* Baer rings of endomorfisms. Math. Ann., 1961, *143*, No 1, 19—28.

Adresa autora: Olomouc, Leninova 26.

Zusammenfassung

ÜBER AUTOMORPHISMEN, DIE AM ENDOMORPHISMENRING DES HOMOGENEN VOLLSTÄNDIG REDUZIBLEN MODULS DEFINIERT SIND

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

Unter einem homogenen vollständig reduziblen Modul verstehen wir einen vollständig reduziblen Modul mit einer einzigen homogenen Komponente. Definieren wir nach der Arbeit [5] einen zulässigen Modul und betrachten einen Ring R mit Einselement folgender Eigenschaft: Ist $ab = 1$ für $a, b \in R$, so besteht $c \in R$ derart, dass $ca = 1$. Bezeichnen wir mit Φ_L bzw. Φ_P einen Verband, der von den Links- bzw. Rechtsidealen des Endomorphismenringes Φ eines zulässigen homogenen vollständig reduziblen Moduls über dem Ring R erzeugt ist.

In der Arbeit ist bewiesen, dass jeder Automorphismus der Verbände Φ_L, Φ_P durch einen Automorphismus des Ringes Φ induziert ist. Die Automorphismengruppen der Verbände Φ_L, Φ_P und des Ringes Φ sind isomorph.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

ZOVŠEOBECNENÉ EULEROVE LINEÁRNE DIFERENCIÁLNE ROVNICE DRUHÉHO RÁDU

JAROSLAV KRBIĽA, Žilina

(Došlo dňa 18. marca 1970)

Majme lineárnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu, Jacobiho typu:

$$(q) \qquad y'' = q(t)\, y\,,$$

ktorej nosič $q(t) \in C_0(j)$, kde $j = (a, \infty)$, pričom môže byť aj $a = -\infty$.

Funkcia $\alpha(t)$, ktorá má vlastnosti:

$$\alpha(t) \in C_3(j)\,, \quad \alpha'(t) \neq 0 \quad \text{pre všetky} \quad t \in j\,,$$

$$\lim_{t \to a+} \alpha(t) = -\operatorname{sgn} \alpha' \infty\,, \quad \lim_{t \to \infty} \alpha(t) = \operatorname{sgn} \alpha' \infty\,,$$

ako to vyplýva z vlastnosti kruhových fáz, teóriu ktorých vybudoval O. BORŮVKA v knihe [1] str. 31 – 100, resp. z vlastnosti hyperbolických fáz, viď napr. [4] veta 3, je kruhovou fázou oscilatorickej diferenciálnej rovnice (q) s nosičom:

$$(q, -1) \qquad q(t) = -\{\alpha, t\} - \alpha'^2\,,$$

resp. hlavnou hyperbolickou fázou neoscilatorickej diferenciálnej rovnice (q) s nosičom:

$$(q, 1) \qquad q(t) = -\{\alpha, t\} + \alpha'^2\,,$$

kde symbol $\{\alpha, t\}$ znamená Schwarzovu deriváciu funkcie α v bode t, definovanú nasledovne:

$$\{\alpha, t\} = (\alpha''/2\alpha')' - (\alpha''/2\alpha')^2\,.$$

Uvedené skutočnosti umožňujú konštruovanie lineárnych diferenciálnych rovníc (q) oscilatorických s bázou riešení:

$$(1) \qquad y_1(t) = |\alpha'(t)|^{-1/2} \sin \alpha(t)\,, \quad y_2(t) = |\alpha'(t)|^{-1/2} \cos \alpha(t)\,,$$

resp. neoscilatorických s bázou riešení:

(2) $$y_1(t) = |\alpha'(t)|^{-1/2} \exp[\alpha(t)], \quad y_2(t) = |\alpha'(t)|^{-1/2} \exp[-\alpha(t)].$$

V tomto článku budeme konštruovať diferenciálne rovnice (q), keď fázy $\alpha(t)$ budú iterovanými logaritmickými funkciami. Kvôli zjednodušeniu zápisu označíme:

$$\begin{aligned} l_0(t) &= t, & l_{n+1}(t) &= \log[l_n(t)], \\ M_0(t) &= 1, & M_{n+1}(t) &= M_n(t)\, l_n(t), \\ K_{-1}(t) &= -1, & K_n(t) &= [K_{n-1}(t) + 1]\, l_n^2(t), \\ L_{-1}(t) &= -1, & L_n(t) &= [L_{n-1}(t) + 1]\, l_n(t), \quad \text{pre} \quad n \geqq 0, \quad \text{celé}. \end{aligned}$$

Ďalej označme symbolom $e^{-2} = -\infty$, $e^{-1} = 0$, $e^n = \exp[e^{n-1}]$, $n \geqq 0$.

Veta 1. *Diferenciálna rovnica*

(E) $$y'' = [(4k^2 - 1 - K_{n-1}(t))/4M_n^2(t)]\, y,$$

kde k je ľubovoľné reálne číslo, $n \geqq 0$, *celé číslo, s nosičom spojitým na intervale* (e^{n-2}, ∞) *má v prípade* $k \neq 0$ *bázu riešení:*

(3) $$y_1(t) = M_n^{1/2}(t) \exp[kl_n(t)], \quad y_2(t) = M_n^{1/2}(t) \exp[-kl_n(t)],$$

v prípade $k = 0$ *bázu riešení:*

(4) $$y_1(t) = [M_n(t)\, l_n^{1+\varepsilon}(t)]^{1/2}, \quad y_2(t) = [M_n(t)\, l_n^{1-\varepsilon}(t)]^{1/2},$$

kde $\varepsilon = \pm 1$.

Dôkaz. *a)* Pre $k \neq 0$ dostaneme zo vzťahu (q, 1) a z hlavnej hyperbolickej fázy $\alpha(t) = kl_n(t)$ pre $n \geqq 0$, celé, nosič:

(5) $$q(t) = (2M_n''M_n - M_n'^2 + 4k^2)/4M_n^2,$$

o ktorom ukážeme, že je totožný s nosičom diferenciálnej rovnice (E). Stačí dokázať, že pre všetky $n \geqq 0$, celé čísla, platí rovnosť:

(6) $$2M_n''M_n - M_n'^2 = -1 - K_{n-1}.$$

Pre $n = 0, 1$ je to evidentné a za predpokladu že platí vzťah (6) dostávame na základe vzorcov $l_n' = M_n^{-1}$, $l_n'' = -M_n'/M_n^2$ pre prirodzené číslo $n + 1$ rovnosti:

(7) $$2M_{n+1}''M_{n+1} - M_{n+1}'^2 = (-1 - K_{n-1})\, l_n^2 - 1 = -K_n - 1,$$

čím je platnosť vzťahu (6) dokázaná pre ľubovoľné celé číslo $n \geqq 0$. Bázu riešení (3) diferenciálnej rovnice (E) dostaneme z fázy $\alpha(t) = kl_n(t)$ zo vzťahov (2).

b) Ak vezmeme hlavnú hyperbolickú fázu $\alpha(t) = (\varepsilon/2)\, l_{n+1}(t)$, kde $\varepsilon = \pm 1$, dostávame podľa časti *a*) nosič:

$$q(t) = (2M''_{n+1}M_{n+1} - M'^2_{n+1} + 1)/4M^2_{n+1},$$

odkiaľ, keď zoberieme do úvahy úpravu v (7), dostaneme nosič diferenciálnej rovnice (E) v prípade keď $k = 0$. Bázu jej riešení (4) dostaneme zo vzorcov (2) z fázy $\alpha(t) = (\varepsilon/2)\, l_{n+1}(t)$. Tým je dôkaz vety ukončený.

Diferenciálna rovnica (E) je v prípade $n = 0$ diferenciálnou rovnicou s konštantným koeficientom $y'' = k^2 y$, v prípade $n = 1$ Eulerovou diferenciálnou rovnicou $y'' = [(4k^2 - 1)/4t^2]\, y$.

Na základe uvedeného je prirodzené nazvať diferenciálnu rovnicu (E) *zovšeobecnenou neoscilatorickou Eulerovou diferenciálnou rovnicou n-tého druhu,* $n \geqq 0$ *celé číslo.*

Ak je $0 < |k| < 1/2$, *resp.* $|k| > 1/2$, *nazývame neoscilatorickú Eulerovu diferenciálnu rovnicu* (E) *rovnicou prvého, resp. druhého rodu.*

Ak je $|k| = 1/2$, *resp.* $k = 0$, $n \geqq 0$, *n celé číslo, tak nazývame neoscilatorickú Eulerovú diferenciálnu rovnicu* (E) *n-tou hornou, resp. n-tou dolnou hraničnou diferenciálnou rovnicou.*

Z platnosti vzťahu $K_n M_n^2 = M_{n+1}^2(K_{n-1} + 1)$ pre $n \geqq 0$, n celé, dostávame tvrdenie: n-tá dolná hraničná diferenciálna rovnica je na intervale (e^{n-1}, ∞) totožná s $n + 1$-vou hornou hraničnou diferenciálnou rovnicou.

Ľahko sa vidí, že o priebehu nosičov diferenciálnych rovníc (E) platia nasledujúce tvrdenia:

Každý nosič neoscilatorickej Eulerovej diferenciálnej rovnice (E) $n + 1$-ho druhu, druhého rodu, je pre všetky $t \in (e^{n-1}, \infty)$ (od istého $t \in (e^{n-1}, \infty)$ počnúc) väčší (menší) ako nosič n-tej dolnej (hornej) hraničnej diferenciálnej rovnice.

Každý nosič neoscilatorickej Eulerovej diferenciálnej rovnice n-tého druhu, prvého rodu, je pre všetky $t \in (e^{n-2}, \infty)$ menší (väčší) ako nosič n-tej hornej (dolnej) hraničnej diferenciálnej rovnice.

Z vlastnosti hlavných hyperbolických fáz vyplýva ([5], veta 6) že báza riešení diferenciálnej rovnice (E) daná vzťahom (3) je hlavnou bázou. Pripomíname, že je to taká báza, ktorej jedno riešenie je hlavným, t.j. že pre všetky t väčšie ako nejaké číslo platí $y(t) \neq 0$ a integrál $\int^\infty y^{-2}(t)\, dt$ diverguje.

Ak je $k > 0$ (<0), je hlavným riešením v (3) riešenie $y_2(t)$ $(y_1(t))$. V prípade keď $k = 0$ a $\varepsilon = 1$ (-1), je hlavným riešením v (4) $y_2(t)$ $(y_1(t))$.

V ďalšom sa obmedzíme na prípad pozitívnej hlavnej bázy (y_1, y_2) diferenciálnej rovnice (E), v ktorej je hlavným riešením riešenie y_2, t.j. fáza $\alpha(t)$ má deriváciu $\alpha'(t) > 0$. Derivovaním z (2) v tomto prípade dostávame:

$$(8) \qquad y_1' = \exp[\alpha]\, \alpha'^{1/2}[1 + (1/2\alpha')'], \quad y_2' = -\exp[-\alpha]\, \alpha'^{1/2}[1 - (1/2\alpha')'],$$

odkiaľ vidieť, že funkcia $h(t) = (1/2\alpha')'$ má pri vyšetrovaní monotonnosti bázy (y_1, y_2) dôležitú roľu. V prípade diferenciálnej rovnice (E), ak $k \neq 0$, resp. $k = 0$, tak platí: $h(t) = (L_{n-1}(t) + 1)/2k$, resp. $h(t) = L_n(t) + 1$, odkiaľ dostávame tvrdenia:

a) V prípade diferenciálnej rovnice (E) nultého a prvého druhu, okrem prvej dolnej hraničnej diferenciálnej rovnice, je funkcia $h(t)$ konštantnou a to:

1. ak je diferenciálna rovnica (E) nultého druhu a $k > 0$, tak je $h = 0$,
2. ak je diferenciálna rovnica (E) prvého druhu, druhého rodu, tak platí: $0 < h < 1$,
3. ak je diferenciálna rovnica (E) prvá horná hraničná diferenciálna rovnica, tak $h = 1$,
4. ak je diferenciálna rovnica (E) prvého druhu, prvého rodu, tak je $h > 1$.

b) Keď je diferenciálna rovnica (E) n-tého druhu, $n \geqq 2$, prvého, resp. druhého rodu, alebo n-tá dolná hraničná diferenciálna rovnica, $n \geqq 1$, má funkcia $h(t)$ limitu: $\lim_{t \to \infty} h(t) = \infty$.

Z uvedených vlastností funkcie $h(t)$ a vzorcov (8) vzhľadom na monotónnosť hlavnej bázy (y_1, y_2) dostávame tri prípady: 1° *a*) 1, a) 2; 2° *a*) 3; 3° *a*) 4, *b*) podľa ktorých máme klasifikáciu zovšeobecnených neoscilatorických rovníc (E) pri $t \to \infty$:

Veta 2. *Ak je diferenciálna rovnica* (E) *buď* 1° *diferenciálnou rovnicou nultého druhu, okrem nultej dolnej hraničnej diferenciálnej rovnice, resp. diferenciálnou rovnicou prvého druhu, druhého rodu, alebo* 2° *prvou hornou hraničnou rovnicou, alebo* 3° *diferenciálnou rovnicou n-tého druhu, n prirodzené, okrem prvej hornej hraničnej diferenciálnej rovnice, potom má pozitívnu hlavnú bázu* (y_1, y_2) *pričom* y_2 *je hlavným riešením a v jednotlivých prípadoch pri* $t \to \infty$ *platí:*

1° $\qquad y_1 \uparrow \infty, \quad y_2 \downarrow 0,$

2° $\qquad y_1 \uparrow \infty, \quad y_2 = c > 0, \quad$ *c je konštanta*,

3° $\qquad y_1 \uparrow \infty, \quad y_2 \uparrow \infty.$

Poznamenávame, že zápis $y_1 \uparrow \infty$ znamená, že funkcia $y_1(t)$ je rastúca a že $\lim_{t \to \infty} y_1(t) = \infty$. Analogicky význam majú aj ostatné zápisy v tvrdení vety 2, ktoré sa zhoduje s výsledkami klasifikácie v práci [7], ktorá je však prevedená iným spôsobom.

Podobne, ako sme dokázali vetu 1 sa použitím vzťahov (q, -1), (1) a fázy $\alpha(t) = kl_n(t)$, kde $k \neq 0$ dokáže:

Veta 3. *Diferenciálna rovnica*:

$$(E_0) \qquad y'' = [-(4k^2 + 1 + K_{n-1}(t))/4M_n^2(t)]\, y\,,$$

kde $k \neq 0$ je ľubovoľné reálne číslo, $n \geqq 0$, celé číslo, s nosičom spojitým na intervale (e^{n-2}, ∞), má bázu riešení:

$$y_1(t) = M_n^{1/2}(t) \sin\left[kl_n(t)\right], \quad y_2(t) = M_n^{1/2}(t) \cos\left[kl_n(t)\right].$$

Diferenciálna rovnica (E_0) je v prípade $n = 0$ diferenciálnou rovnicou s konštantným nosičom: $y'' = -k^2 y$ a v prípade $n = 1$ Eulerovou diferenciálnou rovnicou: $y'' = \left[-(4k^2 + 1)/4t^2\right] y$.

Diferenciálnu rovnicu (E_0) nazývame zovšeobecnenou oscilatorickou Eulerovou diferenciálnou rovnicou n-tého druhu.

Zovšeobecnené Eulerove neoscilatorické aj oscilatorické diferenciálne rovnice nazývame zovšeobecnenými Eulerovými diferenciálnymi rovnicami n-tého druhu.

Vidíme, že nosiče zovšeobecnených Eulerových diferenciálnych rovníc n-tého druhu sú vzhľadom na parameter k spojité a ak k konverguje k nule, tak ich limitou je nosič n-tej dolnej hraničnej diferenciálnej rovnice.

Použitím porovnávacej vety, podobne ako Kneser v práci [3], ktorý použil prvú dolnú hraničnú diferenciálnu rovnicu, dostávame zovšeobecnenie Kneserovej vety keď za porovnávaciu rovnicu zoberieme n-tú dolnú hraniční diferenciálnu rovnicu, n prirodzené číslo:

Veta 4. *Ak počínajúc niektorým $t \in j$ stále platí pre nosič diferenciálnej rovnice (q) nerovnosť:*

$$-\left(1 + K_{n-1}(t)\right)/4M_n^2(t) \leqq q(t),$$

kde n je prirodzené číslo, tak je diferenciálna rovnica (q) neoscilatorická, ak platí nerovnosť:

$$q(t) \leqq -\left(\delta + 1 + K_{n-1}(t)\right)/4M_n^2(t),$$

kde n je prirodzené číslo a $\delta > 0$ je ľubovoľné reálne číslo, tak je diferenciálna rovnica (q) oscilatorická.

Poznamenávame, že podobná problematika ako v tomto článku, ale z iného hľadiska je študovaná v práci [2], [6] a [8].

Literatúra

[1] *O. Borůvka:* Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

[2] *E. Hille:* Non oscillation theorems. Trans. Amer. Math. Soc. *64* (1948), 234—252.

[3] *A. Kneser:* Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen. Math. Annalen *42* (1893) 409—435.

[4] *J. Krbiľa:* Algebraická štruktúra množiny hlavných hyperbolických fáz diferenciálnych rovníc $y'' = q(t)\,y$ v intervale $(-\infty, \infty)$. Matem. časopis SAV *20* (1970) No 3, 195—204.

[5] *J. Krbiľa:* Existencia a neohraničenosť prvej hyperbolickej fázy neoscilatorickej diferenciálnej rovnice $y'' = q(t)\,y$. Sborník prací VŠD a VÚD, NADAS, Praha *25* (1969), 5—13.
[6] *M. Laitoch:* Sur une théorie des critères comparatifs sur l'oscillation des intégrales de l'équation differentielle $u'' = P(x)\,u$. Spisy Přír. fak. MU Brno *365* (1955), 1—12.
[7] *А. Й. Левин:* Поведение решенний уравнения $x'' + p(t)\,x' + q(t)\,x = 0$ в неколебательном случае. Матем. сборник Т. *75* (117) No 1 (1968), 39—63.
[8] *M. Ráb:* Poznámka k otázce o oscilačných vlastnostech řešení diferenciální rovnice $y'' + A(x)\,y = 0$. Čas. Pěst. Mat. *82* (1957), 342—348.

Adresa autora: Žilina Marxa-Engelsa 25, (Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie fakulty SET VŠD),

Zusammenfassung

VERALLGEMEINERTE LINEARE EULERSCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG

JAROSLAV KRBIĽA, Žilina

Im Artikel werden mit Hilfe der Haupthyperbolischen Phasen bzw. der Kreisphasen, welche iterierte logarithmische Funktionen sind, die verallgemeinerte Eulersche Differentialgleichungen

$$\text{(E)} \qquad y'' = \left[(4k^2 - 1 - K_{n-1}(t))/4M_n^2(t)\right] y\,,$$

bzw.

$$\text{(E}_0\text{)} \qquad y'' = -\left[(4k^2 + 1 + K_{n-1}(t))/4M_n^2(t)\right] y$$

und deren Lösungsbassisen konstruiert, wobei $n \geqq 0$ eine ganze Zahl ist (Satz 1 bzw. Satz 3).

Spezialfälle der angeführten Gleichungen sind Differentialgleichungen mit konstanten Trägern: $y'' = \pm k^2 y$ und auch die Eulerschen Differentialgleichungen: $y'' = -\left[(1 \mp 4k^2)/4k^2\right] y$. Es wird das Verhalten der Gleichungen (E) mit Rücksicht auf den Parameter k untersucht und es wird deren Klassifikation für den Fall $t \to \infty$ durchgeführt (Satz 2). Wenn in der Differentialgleichung (E) und auch (E$_0$), wo n eine natürliche Zahl ist, $k \to 0$ sein wird, dann bekommt man eine Differentialgleichung, welche einer Verallgemeinerung des bekannten Kneserschen Satzes (der Fall $n = 1$) zum Grunde liegt (Satz 4).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

O RIEŠENÍ ROVNICE
$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n]$
A ROVNICE
$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = yx_1x_2 \ldots x_n$
V PRIRODZENÝCH ČÍSLACH

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 20. marca 1970)

V tomto článku bude reč o riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n], \quad n \geqq 2, \tag{1}$$

v prirodzených číslach $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$, pričom $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ značí najmenší spoločný násobok čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Výsledok úvahy použijeme aj na riešenie rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = yx_1x_2 \ldots x_n, \quad n \geqq 2, \tag{2}$$

v prirodzených číslach $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$.[1])

V ďalšom riešenia všetkých rovníc sa rozumejú v obore prirodzených čísel.

Veta 1. *Všetky riešenia $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ rovnice (1) dostaneme nasledovne:*

Ak čísla $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ tvoria riešenie tzv. optickej rovnice

$$1/\xi_1 + 1/\xi_2 + \ldots + 1/\xi_n = 1 \tag{3}$$

potom

$$x_i = \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_i} t, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

kde t je ľubovoľné prirodzené číslo a

$$y = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) : [x_1, x_2, \ldots, x_n]. \tag{4'}$$

[1]) O rovnici (2) vo zvláštnom prípade $y = 1$ pojednáva sa v knižke [1], str. 171–4.

Dôkaz. Ak čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ splňujú rovnicu (1), potom $x_i \mid x_1 + x_2 + \ldots$ $\ldots + x_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Teda existujú prirodzené čísla $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ také, že

$$(5) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \xi_i x_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Obrátene, ak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyhovujú rovniciam (5), pričom ξ_i sú čísla prirodzené, potom platí $x_i \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, a teda $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, kde y je prirodzené číslo. Čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n, y = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ tvoria teda riešenie rovnice (1).

Riešením sústavy rovníc (5) v číslach $x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sa zaoberá článok [2], z ktorého vyplýva, že jej všetky riešenia dostaneme tak, že vezmeme ľubovolné riešenie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ rovnice (3) a potom (4) a (4′) dávajú riešenie sústavy rovníc (5), a tým aj rovnice (1). Tým je veta dokázaná.

Poznámka. Zo (4) a (4′) vyplýva, že ku každému riešeniu $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ rovnice (1) existuje nekonečne mnoho riešení tejto rovnice, a to $tx_1, tx_2, \ldots, tx_n, y$, kde t je ľubovoľné prirodzené číslo. Obrátene, ak rovnica (1) má riešenie $tx_1, tx_2, \ldots, tx_n, y$, má aj riešenie $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$. V ďaľšom sa preto obmedzíme na tzv. primitívne riešenia, pre ktoré platí

$$(6) \qquad (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 1\,, \quad x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \ldots \leqq x_n\,.$$

Zrejme je počet primitívnych riešení rovnice (1) konečný (väčší než nula), zhodný s počtom všetkých riešení $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ optickej rovnice (3), majúcich vlastnosť $\xi_1 \geqq \xi_2 \geqq \ldots \geqq \xi_n$.

Príklad. Hľadajme všetky riešenia rovnice

$$(7) \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y[x_1, x_2, x_3, x_4]$$

v prirodzených číslach x_1, x_2, x_3, x_4, y.

Riešenie. Najprv treba riešiť rovnicu

$$(8) \qquad 1/\xi_1 + 1/\xi_2 + 1/\xi_3 + 1/\xi_4 = 1\,.$$

Voliac $\xi_1 \geqq \xi_2 \geqq \xi_3 \geqq \xi_4$, je $2 \leqq \xi_4 \leqq 4$. Treba teda riešiť

1) pre $\xi_4 = 2$ rovnicu $1/\xi_1 + 1/\xi_2 + 1/\xi_3 = \frac{1}{2}$

a

2) pre $\xi_4 = 3$ rovnicu $1/\xi_1 + 1/\xi_2 + 1/\xi_3 = \frac{2}{3}$.

Pre $\zeta_4 = 4$ máme jediné riešenie $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 4$.

V prípade 1) máme riešenia uvedené v knižke [3] str. 74 a v prípade 2) v článku [4]. V prípade 2) dostaneme niektoré riešenia ktoré nespĺňajú podmienku $\xi_1 \geqq \xi_2 \geqq \xi_3 \geqq \xi_4$. Tieto vo výpočte neuvádzame, lebo sa so správným poradím dostali v prípade 1). Z riešení rovnice (8) dostaneme potom všetky primitívne riešenia rovnice (7). Výpočet obsahuje tabuľka č. 1.

Tabuľka 1

ξ_1	42	18	12	12	10	24	15	20	8	6	4	6	6	4
ξ_2	7	9	12	6	5	8	10	5	8	6	4	6	4	4
ξ_3	3	3	3	4	5	3	3	4	4	6	3	3	4	4
ξ_4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4
$M = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4]$	42	18	12	12	10	24	30	20	8	6	12	6	12	4
$x_1 = M/\xi_1$	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	2	1
$x_2 = M/\xi_2$	6	2	1	2	2	3	3	4	1	1	3	1	3	1
$x_3 = M/\xi_3$	14	6	4	3	2	8	10	5	2	1	4	2	3	1
$x_4 = M/\xi_4$	21	9	6	6	5	12	15	10	4	3	4	2	4	1
$y = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{[x_1, x_2, x_3, x_4]}$	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1	3	1	4

Veta 2. *Pre všetky primitívne riešenia $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y rovnice* (1) *platí $y \leqq n$ a $y = n$ práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.*

Dôkaz. Hodnota y bude pri určitom $x_j = \text{Max}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ najväčšia práve vtedy, keď bude mať $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ najmenšiu a súčasne pri tej istej podmienke $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ najväčšiu hodnotu. Keďže $x_1, x_2, \ldots, x_n \leqq x_j$ je $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ najmenšie práve vtedy, keď $x_1, x_2, \ldots, x_n \mid x_j$ a $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ najväčšiu hodnotu práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_j$. Táto podmienka zahrňuje v sebe predošlú, teda extrémny prípad v prípade $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ skutočne nastane a inokedy nie. Keďže vtedy $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = x_j$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = nx_j$, je $y = nx_j / x_j = n$ pri každom x_j. Tým je veta dokázaná.

Poznámka. Otvorenou zostáva otázka, kedy je $y = 1$ a či pre každé y, $1 \leqq y \leqq n$ skutočne existuje n-tica čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ktoré s ním spolu tvoria riešenie rovnice (1).

Na základe predošlých výsledkov možno tiež nájsť všetky riešenia rovnice (2). Je totiž

$$x_1 x_2 \ldots x_n = k[x_1, x_2, \ldots, x_n] \tag{9}$$

kde k je prirodzené číslo, takže rovnica (2) je ekvivalentná s rovnicou

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = ky[x_1, x_2, \ldots, x_n] \tag{10}$$

kde k závisí od $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ktorá je tvaru (1). Zrejme platí veta:

Veta 3. *Množinu všetkých riešení rovnice* (2) *tvoria práve tie riešenia rovnice* (1) *v ktorých platí*

$$x_1 x_2 \ldots x_n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n .$$

Z výsledkov príkladu teda poznávame, že rovnica

$$(11) \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = yx_1x_2x_3x_4$$

má prave tieto riešenia (riešenia rovnice (1), v ktorých $y = 1$ si treba všimnút len v tom prípade, ak x_1, x_2, x_3, x_4 sú po dvoch nesúdelné čísla)

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, y) = (1, 1, 2, 4, 1), (1, 1, 1, 3, 2), (1, 1, 1, 1, 4).$$

Veta 4. *Všetky riešenia rovnice* (2) *sú pre* $n > 2$ *primitívne* (*t. j. platí* $(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n) = 1$).

Dôkaz. Predpokladajme, že $tx_1, tx_2, \ldots, tx_n, y$ je riešením rovnice (2), takže — po delení číslom t —

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = yt^{n-1}x_1 x_2 \ldots x_n .$$

Podľa (9) je potom

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = kyt^{n-1}[x_1 x_2, \ldots x_n]$$

a podľa vety 2 platí $kyt^{n-1} \leqq n$, teda aj $t^{n-1} \leqq n$, čo však v prípade $n > 2$ platí práve vtedy, keď $t = 1$. Tým je veta dokázaná.

Literatúra

[1] *Sierpiński, W.*: Teoria liczb II, Warszawa 1956.

[2] *Bartoš, P.*: O istej sústave diofantických rovníc, Časopis pro pěstování matematiky *93* (1968), 484—5.

[3] *Sedláček, J.*: Keine Angst vor Mathematik, VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1965.

[4] *Bartoš, P.*: O prolongabilných riešeniach optickej rovnice. Časopis pro pěstování matematiky *95* (1970), 278—289.

Adresa autora: Bratislava, Sibírska 9.

Zusammenfassung

ÜBER DIE LÖSUNG DER GLEICHUNG $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ UND DER GLEICHUNG $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = yx_1x_2 \ldots x_n$ IN NATÜRLICHEN ZAHLEN

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

Im Artikel wird die Lösung der Gleichungen (1) und (2) im Gebiet der natürlichen Zahlen behandelt. Deren Lösung wird zu der Lösung des optischen Gleichung (3) in demselben Gebiet überführt.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

FREDHOLM ALTERNATIVE FOR NONLINEAR OPERATORS IN BANACH SPACES AND ITS APPLICATIONS TO DIFFERENTIAL AND INTEGRAL EQUATIONS

SVATOPLUK FUČÍK, Praha

(Received March 23, 1970)

1. INTRODUCTION

This paper deals with the solution of nonlinear operator equations in Banach spaces and with the nonlinear generalization of the Fredholm alternative. Theorems of the following type are obtained: If T is an operator (generally nonlinear) defined on a real Banach space X with values in a real Banach space Y, then $T(X) = Y$ provided that the equation $Tx = \theta_Y$ has the solution $x = \theta_X$ only and X, Y, T satisfy some additional conditions.

Similar results were obtained by S. I. POCHOŽAJEV [15] for real Banach spaces and for homogeneous operators and, by J. NEČAS [11], for complex Banach spaces and for operators which are "near to homogeneous" ones. M. KUČERA [20] proved a result similar to that in [11] for the real space, his conditions concerning "being near to homogeneity" being stronger than those in [11]. Preceding papers discourse only on the operators the domain of which is a Banach space X, the range being in its dual space X^*. Hence, the integral operators defined on $L_p(\Omega)$ $(p \neq 2)$ with values in $L_p(\Omega)$ are not included in the abstract theory established in [11], [15], [20]. Such a problem is solved in Section 7 on the base of Section 3.

We generalize the preceding results for the case of the operators "near to homogeneous", acting from a real Banach space to another real Banach space. The main result is obtained in the third section of the paper. In Sections 4 and 5 we investigate the notion of the approximation scheme and the A-operator, given in Section 3. These notions are a slight modification of those introduced by W. V. PETRYSHYN [12, 13, 14], S. I. POCHOŽAJEV [15], D. G. DE FIGUEIREDO [5, 6, 7] and F. E. BROWDER - W. V. PETRYSHYN [2].

Section 6 deals with the set of eigenvalues of homogeneous operators. The hypotheses of Theorem 6.1 are very difficult to verify in infinite dimensional Banach space. Theorem 6.2 can be used to "near to linear" operators only.

Finally, in the last section, we apply the abstract Fredholm alternative to the Dirichlet problem for partial differential equations and to some integral equations. In these applications it is necessary to know that the corresponding Banach spaces have a Schauder basis. This concerns particularly the space $\mathring{W}_p^{(k)}(\Omega)$ $(p \neq 2)$. This fact is proved in Section 4 for $\Omega \subset E_1$. Unfortunately, we do not know the corresponding proof in the case of E_n $(n \geqq 2)$. But if this is true, then our main result can be directly applied to more general partial differential equations, such as in [11].

2. TERMINOLOGY, NOTATION AND DEFINITIONS

Let X be a real Banach space with the norm $\|.\|_X$, θ_X its zero element; then X^* denotes the adjoint (dual) space of all bounded linear functionals on X. The pairing between $x^* \in X^*$ and $x \in X$ is denoted by (x^*, x). We shall use the symbols "$\rightarrow$", "$\rhd$" to denote respectively the strong and the weak convergences in X. For a finite dimensional space X, $\dim X$ denotes the dimension of X.

Let M be a subset of X, $\overline{M}$ its closure in X, ∂M its boundary in X. M is said to be compact (weakly compact) if for any sequence $\{x_n\}$, $x_n \in M$ there exists a subsequence $\{x_{n_k}\}$ and an element $x_0 \in X$ such that $x_{n_k} \rightarrow x_0$ $(x_{n_k} \rhd x_0)$ with $k \rightarrow \infty$.

The following assertion will be referred to as Eberlein-Šmuljan Theorem: *A Banach space X is reflexive if and only if every bounded subset of X is weakly compact.*

Let T be a mapping (nonlinear, in general) with the domain $M \subset X$ and the range in the Banach space Y (we write $T: M \rightarrow Y$). Then

(1) T is said to be *continuous on M* if $x_n \rightarrow x_0$ in X implies $Tx_n \rightarrow Tx_0$ in Y for all $x_n, x_0 \in M$.

(2) T is said to be *demicontinuous on M* if $x_n \rightarrow x_0$ in X implies $Tx_n \rhd Tx_0$ in Y for $x_n, x_0 \in M$.

(3) T is said to be *strongly continuous on M* if $x_n \rhd x_0$ in X implies $Tx_n \rightarrow Tx_0$ in Y for $x_n, x_0 \in M$.

(4) T is said to be *weakly continuous on M* if $x_n \rhd x_0$ in X implies $Tx_n \rhd Tx_0$ in Y for $x_n, x_0 \in M$.

(5) T is said to be *strongly closed on M* if $x_n \rhd x_0$ in X and $Tx_n \rightarrow y$ in Y implies $Tx_0 = y$.

(6) T is said to be *completely continuous on M* if T is continuous on M and for each bounded subset $D \subset M$, $T(D)$ is a compact set in Y.

(7) T is said to be *contractive with the constant $\alpha \in \langle 0, 1)$ on M*, if $\|Tx - Ty\|_Y \leqq \leqq \alpha \|x - y\|_X$ for all $x, y \in M$.

(8) $T: X \rightarrow Y$ is said to be *regularly surjective from X onto Y* if $T(X) = Y$ and for any $R > 0$ there exists $r > 0$ such that $\|x\|_X \leqq r$ for all $x \in X$ with $\|Tx\|_Y \leqq R$.

Definition 3.1. Let $K > 0$ be a real number, X and Y Banach spaces, $\{X_n\}$ and $\{Y_n\}$ two sequences of finite dimensional subspaces such that $X_n \subset X$, $Y_n \subset Y$. For each positive integer n let $Q_n : Y \to Y$ be a bounded linear operator from Y onto Y_n, $Q_n^2 = Q_n$ (i.e. linear projection).

We shall say that *the couple $\langle X, Y \rangle$ has an approximation scheme $[\{X_n\}, \{Y_n\}, \{Q_n\}]_K$ for the operators from X into Y* (briefly speaking, $\langle X, Y \rangle$ has an approximation scheme $[\{X_n\}, \{Y_n\}, \{Q_n\}]_K$) if the following conditions are satisfied:

(1) $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \ldots$,

(2) $Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots \subset Y_n \subset Y_{n+1} \subset \ldots$,

(3) $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n} = X$,

(4) $\dim X_n = \dim Y_n$,

(5) $\|Q_n\|_{(Y \to Y)} \leqq K$, where $(Y \to Y)$ is the space of all bounded linear operators from Y into Y,

(6) $Q_n y \to y$ in Y for each $y \in Y$.

Definition 3.2. Let X and Y be two Banach spaces, let $\langle X, Y \rangle$ have an approximation scheme $[\{X_n\}, \{Y_n\}, \{Q_n\}]_K$ and $T : X \to Y$.

(a) *T is said to be an A-operator with respect to a given approximation scheme* $[\{X_n\}, \{Y_n\}, \{Q_n\}]_K$ (briefly speaking, T is an A-operator) if for any sequence $\{n_j\}$ of positive integers satisfying $n_j \to \infty$ and a bounded sequence $\{x_{n_j}\}$, $x_{n_j} \in X_{n_j}$ such that $Q_{n_j} T x_{n_j} \to y \in Y$ in Y for some $y \in Y$, there exists an infinite subsequence $\{n_{j(k)}\}$ and $x_0 \in X$ such that $x_{n_{j(k)}} \to x_0$ in X and $Tx_0 = y$.

(b) Let T be an A-operator. T is said to be *an A^*-operator* if the following condition is satisfied: Let $R > 0$, $h \in Y$. If for some $\alpha > 0$ and a sequence $\{k_j\}$ of positive integers satisfying $k_j \to \infty$, $\|Q_{k_j} Tu - t Q_{k_j} h\|_Y \geqq \alpha$ holds for $u \in X_{k_j}$, $\|u\|_X = R$ and any $t \in \langle 0, 1 \rangle$, then there exists $x_0 \in X$, $\|x_0\|_X \leqq R$ such that $Tx_0 = h$.

Lemma 3.1. *Let X and Y be two Banach spaces such that X is a reflexive space and $\langle X, Y \rangle$ has an approximation scheme $[\{X_n\}, \{Y_n\}, \{Q_n\}]_K$. Let $T : X \to Y$ be an A-operator, $h \in Y$, $R > 0$. Suppose that for all $u \in X$, $\|u\|_X = R$ and any $t \in \langle 0, 1 \rangle$ there is $\|Tu - th\|_Y > 0$.*

Then there exist $\alpha > 0$ and a sequence $\{k_j\}$ of positive integers, $k_j \to \infty$ such that $\|Q_{k_j} Tu - t\, Q_{k_j} h\|_Y \geqq \alpha$ for any k_j, all $u \in X_{k_j}$, $\|u\|_X = R$ and $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Proof. To prove the assertion, let us suppose the contrary. Then $u_{n_j} \in X_{n_j}$, $\|u_{n_j}\|_X = R$ and $t_{n_j} \in \langle 0, 1 \rangle$ with $\|Q_{n_j} Tu_{n_j} - t_{n_j} Q_{n_j} h\|_Y \to 0$ (as $n_j \to \infty$) exist. According to the compactness of $\langle 0, 1 \rangle$ and to Eberlein-Šmuljan Theorem the subsequences $\{t_{n_{j(k)}}\} \subset \{t_{n_j}\}$ and $\{u_{n_{j(k)}}\} \subset \{u_{n_j}\}$ such that $t_{n_{j(k)}} \to t_0$, $u_{n_{j(k)}} \rightharpoonup u_0 \in X$ in X can be chosen. Since $Q_{n_{j(k)}} h \to h$ by Definition 3.2.a) there is $\{u_{n_{j(k')}}\} \subset \{u_{n_{j(k)}}\}$ such that $u_{n_{j(k')}} \to u_0$ in X and $Tu_0 = h$. Thus $\|u_0\|_X = R$, $\|Tu_0 - t_0 h\|_Y = 0$. This is a contradiction with our assumptions.

Theorem 3.1. *Let X and Y be two Banach spaces, let X be a reflexive space and let $\langle X, Y \rangle$ have an approximation scheme. Let $T: X \to Y$ be an A^*-operator satisfying*

$$\lim_{\|u\|_X \to \infty} \|Tu\|_Y = +\infty .$$

Then T is regularly surjective from X onto Y.

Proof. For $h \in Y$ there exists $R > 0$ such that $\|Tu\|_Y > \|h\|_X$ for all $u \in X$, $\|u\|_X = R$. Thus for any $t \in \langle 0, 1 \rangle$ and all $u \in X$ it is $\|Tu - th\|_Y \geqq \|Tu\|_Y - t\|h\|_Y > 0$. By Lemma 3.1 and Definition 3.2b there is $x_0 \in X$, $\|x_0\|_X \leqq R$ such that $Tx_0 = h$, hence $T(X) = Y$.

It can be easily shown that T is regularly surjective.

Proposition 3.1. *Let X be a reflexive Banach space, Y a Banach space, let $\langle X, Y \rangle$ have an approximation scheme. Let $T: X \to Y$ be an A-operator and let $S: X \to Y$ be completely continuous.*

Then $T + S$ is an A-operator.

Proof. Let $\{n_j\}$ be a sequence of positive integers, $n_j \to \infty$, $\{x_{n_j}\}$ a bounded sequence with $x_{n_j} \in X_{n_j}$ such that $Q_{n_j}(T + S)\, x_{n_j} \to y \in Y$ in Y. Eberlein-Šmuljan Theorem and the complete continuity of the operator S imply that there is a subsequence $\{x_{n_{j(k)}}\} \subset \{x_{n_j}\}$ such that $x_{n_{j(k)}} \rightharpoonup x_0 \in X$ in X and $Sx_{n_{j(k)}} \to w \in Y$ in Y. The uniform boundedness of $\{Q_n\}$ implies $Q_{n_{j(k)}} Sx_{n_{j(k)}}$ in Y since $\|Q_{n_{j(k)}} Sx_{n_{j(k)}} - w\|_Y \leqq K\|Sx_{n_{j(k)}} - w\|_Y + \|Q_{n_{j(k)}} w - w\|_Y$. Thus $Q_{n_{j(k)}} Tx_{n_{j(k)}} \to y - w$ in Y and by Definition 3.2a there is a subsequence of $\{x_{n_{j(k)}}\}$ (we denote it by $\{x_{n_{j(k)}}\}$ again) such that $x_{n_{j(k)}} \to x_0$ in X, $Tx_0 = y - w$ and $Sx_{n_{j(k)}} \to Sx_0$. This implies $Tx_0 + Sx_0 = y$, and the proof is complete.

Proposition 3.2. *Let X and Y be two Banach spaces, let $\langle X, Y \rangle$ have an approximation scheme. Let $\lambda \neq 0$ be a real number and $T: X \to Y$ an A-operator.*

Then λT is an A-operator.

The proof follows immediately from Definition 3.2.

Lemma 3.2. *Let X and Y be two finite dimensional spaces,* $\dim X = \dim Y$. *Denote $K_R = \{x; x \in X, \|x\|_X < R\}$, $S_R = \partial K_R$.*

Let $h \in Y$ and $f: \bar{K}_R \to Y$ be a continuous mapping such that $f(-x) = -f(x)$ for arbitrary $x \in \bar{K}_R$ and $\|f(x) - th\|_Y > 0$ for each $t \in \langle 0, 1 \rangle$ and all $x \in S_R$.

Then there exists $x_0 \in K_R$ such that $f(x_0) = h$.

Proof. Let E be a linear homeomorphism $Y \to X$. Then for the Brouwer degree d of mappings $Ef - Eh$ and Ef on the set K_R with respect to the point θ_X the relation

$$d[Ef - Eh;\ K_R, \theta_X] = d[Ef; K_R, \theta_X] \neq 0$$

holds. (See [3], [8].) This property of the degree of the mapping $Ef - Eh$ implies the existence of $x_0 \in K_R$ such that $Ef(x_0) = Eh$ and thus $f(x_0) = h$.

Proposition 3.3. *Let X and Y be two Banach spaces, X reflexive, $T: X \to Y$ such that $T(-x) = -T(x)$ for arbitrary $x \in X$ (the so called odd mapping). Let $\langle X, Y\rangle$ have an approximation scheme and let T be a demicontinuous A-operator.*

Then T is an A^*-operator.

Proof. Let $R > 0$ and $h \in Y$. Let for some $\alpha > 0$ and some sequence $\{k_j\}$ of positive integers, $k_j \to \infty$

$$\|Q_{k_j} Tu - t\, Q_{k_j}h\|_Y \geqq \alpha$$

hold for each $t \in \langle 0, 1\rangle$ and all $u \in X_{k_j}$, $\|u\|_X = R$.

Lemma 3.2 implies that there is a sequence $\{u_{k_j}\}$, $u_{k_j} \in X_{k_j}$, $\|u_{k_j}\|_X \leqq R$ with $Q_{k_j} Tu_{k_j} = Q_{k_j}h$. According to Eberlein-Šmuljan Theorem we can suppose $u_{k_j} \rightharpoonup u_0 \in$ $\in X$ in X. Since $Q_{k_j}h \to h$ in Y we have $Q_{k_j} Tu_{k_j} \to h$ in Y. By Definition 3.2a there is a subsequence $\{u_{k_{j(n)}}\} \subset \{u_{k_j}\}$ such that $u_{k_{j(n)}} \to u_0$ in X, $Tu_0 = h$ and thus T is an A^*-operator.

Corollary 3.1. *Let X and Y be two Banach spaces, X reflexive and let $\langle X, Y\rangle$ have an approximation scheme. Suppose that $T: X \to Y$ is an odd demicontinuous A-operator with*

$$\lim_{\|u\|_X \to \infty} \|Tu\|_Y = +\infty\,.$$

Then T is regularly surjective from X onto Y.

Definition 3.3. Let X and Y be two Banach spaces, $T: X \to Y$, $T_0 : X \to Y$ and $a > 0$ a real number.

(a) T_0 is said to be *a-homogeneous* if $T_0(tu) = t^a\, T_0(u)$ holds for each $t \geqq 0$ and all $u \in X$.

(b) Let T_0 be an a-homogeneous operator. T is said to be *a-quasihomogeneous with respect to T_0* if $t_n \searrow 0$ (i.e. $t_1 \geqq t_2 \geqq \ldots \geqq t_n > 0$ are real numbers and $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$), $u_n \rightharpoonup u_0$ in X, $t_n^a\, T(u_n/t_n) \to g \in Y$ in Y, then $T_0 u_0 = g$.

(c) T is said to be *a-strongly quasihomogeneous with respect to T_0*, if $t_n \searrow 0$, $u_n \rightharpoonup u_0$ in X imply $t_n^a\, T(u_n/t_n) \to T_0 u_0$ in Y.

Proposition 3.4. *Let X and Y be two Banach spaces, $T : X \to Y$, $T_0 : X \to Y$.*

(a) *If T is a-homogeneous and strongly closed, then T is a-quasihomogeneous with respect to T.*

(b) *If T is a-homogeneous and strongly continuous, then T is a-strongly quasihomogeneous with respect to T.*

(c) *If T is a-strongly homogeneous with respect to T_0, then T_0 is a-homogeneous.*

Proposition 3.5. *Let X and Y be two Banach spaces, $S : X \to Y$, $S_0 : X \to Y$. Let S be an a-strongly quasihomogeneous operator with respect to S_0.*

Then S_0 is strongly continuous.

Proof. For $u \in X$ it is $\lim\limits_{t \searrow 0} t^a S(u/t) = S_0 u$ in Y. Suppose that there exists a sequence $\{u_n\}$, $u_n \in X$ and $\varepsilon > 0$ such that $u_n \rhd u_0$ in X and $\|S_0 u_n - S_0 u_0\|_Y \geqq \varepsilon$. For each n there exists t_n, $0 < t_n \leqq 1/n$ such that

$$\left\| S_0 u_n - t_n^a S\left(\frac{u_n}{t_n}\right)\right\|_Y \leqq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Then

$$\varepsilon \leqq \|S_0 u_n - S_0 u_0\|_Y \leqq \left\| S_0 u_n - t_n^a S\left(\frac{u_n}{t_n}\right)\right\|_Y + \left\| t_n^a S\left(\frac{u_n}{t_n}\right) - S_0 u_0\right\|_Y \leqq$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{4} + \left\| S_0 u_0 - t_n^a S\left(\frac{u_n}{t_n}\right)\right\|_Y.$$

Letting n tend to infinity we obtain $\varepsilon \leqq \frac{1}{4}\varepsilon$. This is a contradiction proving the proposition.

Definition 3.4. Let X and Y be two Banach spaces, $T_0 : X \to Y$, $S_0 : X \to Y$ a-homogeneous operators and $\lambda \neq 0$ a real number.

λ is said to be *an eigenvalue for the couple* (T_0, S_0) if there exists $u_0 \in X$, $u_0 \neq \theta_X$ such that $\lambda T_0 u_0 - S_0 u_0 = \theta_Y$.

Lemma 3.3. *Let X and Y be two reflexive Banach spaces $T : X \to Y$, $T_0 : X \to Y$ an a-homogeneous operator, $S : X \to Y$ and $S_0 : X \to Y$. Let T be an a-quasihomogeneous operator with respect to T_0 and let S be an a-strongly quasihomogeneous operator with respect to S_0. Suppose that there exists a constant $c > 0$ such that*

$$\|Tu\|_Y \geqq c\|u\|_X^a$$

holds for each $u \in X$.

Let $\lambda \neq 0$ be a real number. If λ is not an eigenvalue for the couple (T_0, S_0), then

$$\lim_{\|u\|_X \to \infty} \|\lambda Tu - Su\|_Y = \infty .$$

Proof. Let us assume the contrary. Then there exist a sequence $\{u_n\}$, $u_n \in X$ and a real number $K > 0$ so that $\|u_n\|_X \to \infty$ and $\|\lambda T u_n - S u_n\|_Y < K$. Set $v_n = u_n / \|u_n\|_X$. By Eberlein-Šmuljan Theorem we can suppose that $\lambda T u_n - S u_n \rightharpoonup g \in Y$ in Y and $v_n \rightharpoonup v_0 \in X$ in X. We have

$$\lambda T(\|u_n\|_X v_n) - S(\|u_n\|_X v_n) \rightharpoonup g$$

and

$$\lambda \frac{1}{\|u_n\|_X^a} T(\|u_n\|_X v_n) - \frac{1}{\|u_n\|_X^a} S(\|u_n\|_X v_n) \to \theta_Y \quad \text{in} \quad Y.$$

Hence

$$\frac{1}{\|u_n\|_X^a} S(\|u_n\|_X v_n) \to S_0 v_0 \quad \text{in} \quad Y$$

and

$$\lambda \frac{1}{\|u_n\|_X^a} T(\|u_n\|_X v_n) \to S_0 v_0 \quad \text{in} \quad Y.$$

Definition 3.3b implies $\lambda T_0 v_0 = S_0 v_0$ and the proof will be complete if $v_0 \neq \theta_X$. It is clear that

$$\left\| \lambda \frac{1}{\|u_n\|_X^a} T(\|u_n\|_X v_n) \right\|_Y = |\lambda| \frac{1}{\|u_n\|_X^a} \|T u_n\|_Y \geqq c|\lambda| > 0 .$$

Hence $S_0 v_0 \neq \theta_Y$ and $v_0 \neq \theta_X$.

Theorem 3.2. *Let X and Y be two reflexive Banach spaces, let $\langle X, Y \rangle$ have an approximation scheme, $T : X \to Y$ let be an odd operator, $T_0 : X \to Y$ an a-homogeneous operator, $S : X \to Y$ an odd completely continuous operator, $S_0 : X \to Y$. Suppose that T is demicontinuous and a-quasihomogeneous with respect to T_0 A-operator, and S is a-strongly quasihomogeneous operator with respect to S_0.*

Suppose that there exists a constant $c > 0$ such that $\|Tu\|_Y \geqq c\|u\|_X^a$ holds for all $u \in X$.

Let $\lambda \neq 0$ be a real number which is not an eigenvalue for the couple (T_0, S_0).

Then the operator $\lambda T - S$ is regularly surjective from X onto Y.

Proof. See Lemma 3.3, Propositions 3.1 and 3.2 and Corollary 3.1.

Theorem 3.3. (This theorem is a generalization of the results in [15] for the case $Y \neq X^*$. The proof is analogous to that in [15].) *Let X and Y be two reflexive Banach spaces, let $\langle X, Y \rangle$ have an approximation scheme $[\{X_n\}, \{Y_n\}, \{Q_n\}]_K$. Let $T : X \to Y$ be an odd a-homogeneous and continuous A-operator. Let $S : X \to Y$ be an odd completely continuous a-homogeneous operator. Let $\lambda \neq 0$ be a real number such that λ is not an eigenvalue for the couple (T, S). Then the operator $\lambda T - S$ is regularly surjective from X onto Y.*

Proof. It is $\|\lambda Tu - Su\|_Y > 0$ for each $u \in X$, $\|u\|_X = 1$. By Lemma 3.1 there exist $\alpha > 0$ and a sequence $\{k_j\}$ of positive integers, $k_j \to \infty$ such that

$$\|\lambda\, Q_{k_j} Tu - Q_{k_j} Su\|_Y \geqq \alpha$$

holds for each k_j and all $u \in X_{k_j}$, $\|u\|_X = 1$. Let $u_0 \in X$, $\|u_0\|_X = 1$. Then there exist $u_{k_j} \in X_{k_j}$, $u_{k_j} \to u_0$ in X and we have

$$\alpha \leqq \left\|\lambda\, Q_{k_j} T\left(\frac{u_{k_j}}{\|u_{k_j}\|_X}\right) - Q_{k_j} S\left(\frac{u_{k_j}}{\|u_{k_j}\|_X}\right)\right\|_Y \leqq |\lambda| \left\|Q_{k_j} T\left(\frac{u_{k_j}}{\|u_{k_j}\|_X}\right) - Q_{k_j} T u_0\right\|_Y +$$

$$+ \|\lambda\, Q_{k_j} Tu_0 - Q_{k_j} Su_0\|_Y + \left\|Q_{k_j} S\left(\frac{u_{k_j}}{\|u_{k_j}\|_X}\right) - Q_{k_j} Su_0\right\|_Y \leqq$$

$$\leqq K|\lambda| \left\|T\left(\frac{u_{k_j}}{\|u_{k_j}\|_X}\right) - Tu_0\right\|_Y + K \left\|S\left(\frac{u_{k_j}}{\|u_{k_j}\|_X}\right) - Su_0\right\|_Y + K\|\lambda\, Tu_0 - Su_0\|_Y \to$$

$$\to K\|\lambda\, Tu_0 - Su_0\|_Y$$

for $k_j \to \infty$. Hence $\|\lambda\, Tu_0 - Su_0\|_Y \geqq \alpha/K$ holds for each $u_0 \in X$, $\|u_0\|_X = 1$, and thus, for arbitrary $u \in X$ there is

$$\|\lambda\, Tu - Su\|_Y \geqq \|u\|_X^a \frac{\alpha}{K}\,.$$

By the previous statement it is $\lim\limits_{\|u\|_X \to \infty} \|\lambda\, Tu - Su\|_Y = \infty$ and according to Corollary 3.1, the proof is complete.

4. APPROXIMATION SCHEME

Proposition 4.1. *Let X be a reflexive Banach space and let $\langle X, X\rangle$ have an approximation scheme $[\{X_n\}, \{X_n\}, \{Q_n\}]_K$ and $Q_{n+1}Q_n = Q_nQ_{n+1}$.*

Then $\langle X, X^*\rangle$ has an approximation scheme.

Proof. For each integer n let $Q_n^* : X^* \to X^*$ be the operator adjoint to Q_n and set $Y_n = Q_n^*(X^*)$. Then $\dim X_n = \dim Y_n$,

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \ldots,$$

$$Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots \subset Y_n \subset Y_{n+1} \subset \ldots,$$

and $\|Q_n^*\|_{(X^* \to X^*)} = \|Q_n\|_{(X \to X)} \leqq K$. To show that $[\{X_n\}, \{Y_n\}, \{Q_n^*\}]_K$ is an approximation scheme for $\langle X, X^*\rangle$ we must prove that for each $x^* \in X^*$ it is $Q_n^* x^* \to x^*$ in X^*. It is easy to show that $Q_n^* x^* \rhd x^*$ in X^* (i.e. $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n}$ is weakly dense in X^*)

and $Q_n^* x^* \in \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n}$. The set $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n}$ is a convex one and by the well-known theorem $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n}$ is weakly closed. Hence $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n} = X^*$. For each $x^* \in \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ there is an integer n_0 such that $x^* \in Y_n$ for $n \geqq n_0$ and $x^* = Q_{n_0}^* x^* = Q_n^* x^*$. Thus $Q_n^* x^* \to x^*$ in X^* for all $x^* \in \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n} = X^*$ and $\|Q_n^*\|_{(X^* \to X^*)} \leqq K$ and according to Uniform Boundedness Theorem (see [4]) the proof is complete.

Proposition 4.2. *Let X and Y be two infinite dimensional Banach spaces. Suppose that X is a separable space and $\langle Y, Y \rangle$ has an approximation scheme $[\{Y_n\}, \{Y_n\}, \{Q_n\}]_K$.*

Then $\langle X, Y \rangle$ has an approximation scheme.

(This Proposition shows that whether the couple $\langle X, Y \rangle$ has an approximation scheme depends only on the space Y.)

Proof. Let $x_1, x_2, \ldots$ be a dense sequence in X. Let X_n be the linear hull of $\{x_1, \ldots \ldots, x_n\}$. Then there exists a subsequence $\{X_{k(n)}\}$ such that $[\{X_{k(n)}\}, \{Y_n\}, \{Q_n\}]_K$ is an approximation scheme for the couple $\langle X, Y \rangle$.

Definition 4.1 ([1], [5], [6], [7]). Let $K \geqq 1$. A separable Banach space X is said *to have Property* (π_K) if there exists a sequence of finite dimensional subspaces $X_n \subset X$ such that

(a) $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \ldots$,

(b) $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n} = X$,

(c) each X_n is the range of continuous linear projection $Q_n : X \to X$ with the norm $\leqq K$.

Definition 4.2 ([4]). A separable Banach space X is said *to have Schauder basis* $\{e_n\}$, $e_n \in X$ if for each $x \in X$ there exists a unique sequence $\{a_1, a_2, \ldots\}$ of real numbers such that $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \to x$ in X (with $n \to \infty$).

Proposition 4.3. *A Banach space with a Schauder basis has Property (π_K) for some K.*

Proof. See [7].

Proposition 4.4. *Let X be a Banach space with Property (π_K).*

Then $\langle X, X \rangle$ has an approximation scheme.

Proposition 4.5. *Let X be an infinite dimensional Banach space with a Schauder basis. Then the couple $\langle X, X\rangle$ has an approximation scheme.*

Moreover, if Y is a separable infinite dimensional Banach space, then $\langle Y, X\rangle$ has an approximation scheme.

If X is a reflexive Banach space with a Schauder basis, then $\langle X, X^*\rangle$ has an approximation scheme.

Proposition 4.6. *Let X be a Banach space with Property (π_1), such that* $\dim X_n = n$. *Then X has a Schauder basis.*

Proof. See [10].

Remark 4.1. A separable Hilbert space, $C[0, 1]$, $L_p[0, 1]$, $C^k([0, 1])$, $C^1([0, 1]^N)$ (see [17]) all have an approximation scheme (they have a Schauder basis).

Remark 4.2. Let Ω be a bounded open subset of the Euclidean N-space E_N. Then $L_p(\Omega)$ is linearly homeomorphic to $L_p[0, \operatorname{meas} \Omega]$, where $\operatorname{meas} \Omega$ is the N-dimensional Lebesgue measure of Ω (see [9, Chapter II, § 12]). Hence $L_p(\Omega)$ has a Schauder basis.

Remark 4.3. Let X be a Banach space with Schauder basis $\{e_1, e_2, \ldots\}$. For $x \in X$ there exists a unique sequence $\{a_n\}$ of real numbers such that $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$. Set $a_i = \alpha_i(x)$. Then $\alpha_i \in X^*$.

Definition 4.3. Let $I = (0, 1)$, $k \geqq 1$ integer and $p \geqq 1$ real number. *By Sobolev space* $W_p^{(k)}(I)$ we mean the set of all functions f such that f and its derivatives $f^{(i)}$ up to the order $k - 1$ are absolutely continuous functions in I and the derivative of the order k (which exists almost everywhere) belongs to $L_p(I)$. The norm in $W_p^{(k)}(I)$ is

$$\|f\|_{W_p^{(k)}(I)} = \Big(\sum_{i=0}^{k} \|f^{(i)}\|^p_{L_p(I)}\Big)^{1/p}.$$

We set

$$\mathring{W}_p^{(k)}(I) =$$
$$= \{f; f \in W_p^{(k)}(I), f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = f(1) = \ldots = f^{(k-1)}(1) = 0\}.$$

Proposition 4.7. $W_p^{(k)}(I)$ *has a Schauder basis.*

Proof. We prove the proposition by induction with respect to k. Suppose that $\{f_n^k\}$ is a Schauder basis in $W_p^{(k)}(I)$ and $\{\alpha_n^k\}$ is a sequence of continuous linear functionals such that for each $f \in W_p^{(k)}(I)$ there is $f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^k(f) f_n^k$ (see Remark 4.3). Set

$$f_1^{k+1}(x) \equiv 1\,, \qquad \alpha_1^{k+1}(f) = f(0)$$

$$f_n^{k+1}(x) = \int_0^x f_{n-1}^k(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \alpha_n^{k+1}(f) = \alpha_{n-1}^k(f')$$

for $n \geqq 2$, $x \in I$, $f \in W_p^{(k+1)}(I)$. Then $f_n^{k+1} \in W_p^{(k+1)}(I)$. For arbitrary $f \in W_p^{(k+1)}(I)$, $l \geqq 1$ we have

$$\|f - \sum_{n=1}^{l} \alpha_n^{k+1}(f) f_n^{k+1}\|_{W_p^{(k+1)}(I)}^p = \int_0^1 \left| f(x) - f(0) - \sum_{n=1}^{l-1} \alpha_n^k(f') \int_0^x f_n^k(t) \, dt \right|^p dx +$$

$$+ \|f' - \sum_{n=1}^{l-1} \alpha_n^k(f') f_n^k\|_{W_p^{(k)}(I)}^p \leqq 2\|f' - \sum_{n=1}^{l-1} \alpha_n^k(f') f_n^k\|_{W_p^{(k)}(I)}^p$$

and hence

$$\lim_{l\to\infty} \|f - \sum_{n=1}^{l} \alpha_n^{k+1}(f) f_n^{k+1}\|_{W_p^{(k+1)}(I)} = 0 .$$

Let

$$\lim_{l\to\infty} \|\sum_{n=1}^{l} c_n f_n^{k+1}\|_{W_p^{(k+1)}(I)} = 0$$

for some sequence $\{c_n\}$ of real numbers, i.e.

$$0 = \lim_{l\to\infty} \int_0^1 \left| c_1 + \sum_{n=2}^{l} c_n \int_0^x f_{n-1}^k(t) \, dt \right|^p dx$$

and

$$0 = \lim_{l\to\infty} \|\sum_{n=2}^{l} c_n f_{n-1}^k\|_{W_p^{(k)}(I)} .$$

Since $\{f_n^k\}$ is a Schauder basis in $W_p^{(k)}(I)$ we have $c_n = 0$ for $n \geqq 2$ and $\lim_{l\to\infty} \int_0^1 |c_1|^p \, dx = 0$, i.e. $c_n = 0$ for each positive integer n. We obtain that the sequence $\{f_n^{k+1}\}$ is a Schauder basis in $W_p^{(k+1)}(I)$ and, since for $k = 0$ the space $L_p(I) = W_p^{(0)}(I)$ has a Schauder basis (see Remark 4.1), we proved our assertion.

Proposition 4.8. *$\mathring{W}_p^{(1)}(I)$ has a Schauder basis.*

Proof. Let us construct the basis $\{f_n^1\}$ in $W_p^{(1)}(I)$ from the basis $\{f_n^0\}$ in $L_p(I)$ as in Proposition 4.7 where $\{f_n^0\}$ is a Haar orthogonal system in $L_p(I)$. Set $\mathring{f}_n^1 = f_{n+1}^1$, $\mathring{\alpha}_n^1(f) = \alpha_{n+1}^1(f)$ for each positive integer n and all $f \in \mathring{W}_p^{(1)}(I)$. Then $\mathring{f}_n^1 \in \mathring{W}_p^{(1)}(I)$, $\{\mathring{f}_n^1\}$ is a Schauder basis in $\mathring{W}_p^{(1)}(I)$ and $\{\mathring{\alpha}_n^1\}$ are functionals coresponding to $\{\mathring{f}_n^1\}$.

5. *A*-OPERATORS

Definition 5.1. A Banach space X is said to be *strictly convex* if for each $x, y \in X$, $x \neq y$, $\|x\|_X = \|y\|_X = 1$ and all $t \in (0, 1)$ there is $\|tx + (1 - t) y\|_X < 1$.

Definition 5.2. A Banach space X is said to have *Property* (H) if X is strictly convex and if $x_n \rightharpoonup x_0$ in X and $\|x_n\|_X \to \|x_0\|_X$ implies $x_n \to x_0$ in X.

Remark 5.1. $L_p(\Omega)$, $l_p(p > 1)$, Hilbert spaces all have Property (H).

Proposition 5.1. *Let X be a reflexive Banach space, Y a Banach space, $T: X \to Y$, $S: X \to Y$, $f: X \to E_1$, $\Phi: X \to Y^*$. Let $\langle X, Y\rangle$ have an approximation scheme $[\{X_n\}, \{Y_n\}, \{Q_n\}]_K$. Let S be a completely continuous operator, let f be a weakly upper semi-continuous functional (i.e. $x_n \rhd x_0$ in X implies $\limsup f(x_n) \leqq f(x_0)$), $f(\theta_X) = 0$ and let Φ be a weakly continuous operator, $\Phi(\theta_X) = \theta_{Y^*}$.*

Suppose that γ, φ are continuous real valued strictly increasing functions on $\langle 0, \infty)$ such that $\gamma(0) = 0$.

Let $\mu: (0, \infty) \times X \to (0, \infty)$ and suppose that $Q_n^* \Phi(x) = \Phi(x)$ for each positive integer n and all $x \in X_n$.

Then T is an A-operator provided that one of the following conditions is satisfied:

(5.1) *T is continuous and*

$$(\Phi(x - y), Tx - Ty) + f(x - y) \geqq \gamma(\|x - y\|_X)$$

for each $x, y \in X$.

(5.2) *T is continuous and*

$$(\Phi(x - y), Tx - Ty) + (\Phi(x - y), Sx - Sy) + f(x - y) \geqq \gamma(\|x - y\|_X)$$

for each $x, y \in X$.

(5.3) *T is demicontinuous, $\overline{\Phi(X)} = Y^*$, $\Phi(tw) = \mu(t, w)\,\Phi(w)$ for $t > 0$ and all $w \in X$ and*

$$(\Phi(x - y), Tx - Ty) \geqq \gamma(\|x - y\|_X)$$

for each $x, y \in X$.

(5.4) *T is demicontinuous, Φ is the same as in (5.3) and*

$$(\Phi(x - y), Tx - Ty) + (\Phi(x - y), Sx - Sy) \geqq \gamma(\|x - y\|_X)$$

for each $x, y \in X$.

(5.5) *X has Property (H), T is demicontinuous, Φ is the same as in (5.3) and*

$$(\Phi(x - y), Tx - Ty) \geqq (\varphi(\|x\|_X) - \varphi(\|y\|_X))\,(\|x\|_X - \|y\|_X)$$

for each $x, y \in X$.

(5.6) *X has Property (H), T is demicontinuous, Φ is the same as in (5.3) and*

$$(\Phi(x - y), Tx - Ty) + (\Phi(x - y), Sx - Sy) \geqq$$
$$\geqq (\varphi(\|x\|_X) - \varphi(\|y\|_X))\,(\|x\|_X - \|y\|_X)$$

for each $x, y \in X$.

Proof. Let $x_{n_j} \in X_{n_j}$, $x_{n_j} \rhd x_0$ in X, $Q_{n_j}Tx_{n_j} \to y$ in Y. Then for $x \in X_{n_j}$ we have

$$(\Phi(x_{n_j} - x), Q_{n_j}Tx_{n_j} - Q_{n_j}Tx) = (\Phi(x_{n_j} - x), Tx_{n_j} - Tx).$$

Let condition (5.1) be satisfied. Then for $x \in X_e$, $n_j \geqq l$ there is

$$\gamma(\|x_{n_j} - x\|_X) \leqq (\Phi(x_{n_j} - x), Q_{n_j}Tx_{n_j} - Q_{n_j}Tx) + f(x_{n_j} - x)$$

and

$$\limsup_{n_j \to \infty} \gamma(\|x_{n_j} - x\|_X) \leqq (\Phi(x_0 - x), y - Tx) + f(x_0 - x).$$

The last inequality holds for each $x \in X$. Set $x = x_0$. We obtain $0 \leqq \limsup_{n_j \to \infty} \gamma(\|x_{n_j} - x_0\|_X) \leqq 0$ and

$$\|Q_{n_j}Tx_{n_j} - Tx_0\|_Y \leqq K\|Tx_{n_j} - Tx_0\|_Y + \|Q_{n_j}Tx_0 - Tx_0\|_Y.$$

Thus $Tx_0 = y$ and $x_{n_j} \to x_0$ in X.

Let condition (5.3) be satisfied. We obtain $x_{n_j} \to x_0$ in X and $0 \leqq (\Phi(x_0 - x), y - Tx)$ for each $x \in X$. Set $x_t = x_0 - tw$ for $t > 0$ and $w \in X$. Then

$$0 \leqq (\Phi(tw), y - T(x_0 - tw)) = \mu(t, w))(\Phi(w), y - T(x_0 - tw)),$$

$$0 \leqq (\Phi(w), y - T(x_0 - tw)).$$

Letting t tend to zero we obtain

$$0 \leqq (\Phi(w), y - Tx_0)$$

for each $w \in X$ and $\overline{\Phi(X)} = Y^*$ implies $y = Tx_0$.

Let condition (5.5) be satisfied. Then $\|x_{n_j}\|_X \to \|x_0\|_X$ and $x_{n_j} \rhd x_0$ in X. Hence $x_{n_j} \to x_0$ in X and $0 \leqq (\Phi(x_0 - x), y - Tx)$ for each $x \in X$ and similarly as in the previous part one obtains $y = Tx_0$.

Let condition (5.2) or (5.4) or (5.6) be satisfied. Then the assertion is a consequence of Proposition 3.1 and condition (5.1) or (5.3) or (5.5) respectively.

Remark 5.2. Let X be a reflexive Banach space and let the couple $\langle X, X^* \rangle$ have an approximation scheme. We identify X with X^{**} and set $Y = X^*$ and Φ the identity operator on X. Then Φ satisfies the assumptions of Proposition 5.1.

Definition 5.3. a) *A gauge function* is a real-valued continuous function μ defined on the interval $\langle 0, \infty)$ such that

(1) $\mu(0) = 0$,

(2) $\lim_{t \to \infty} \mu(t) = \infty$,

(3) μ is strictly increasing.

b) *The duality mapping in X with a gauge function μ* is a mapping J from X into the set 2^{X^*} of all subsets of X^* such that

$$Jx = \begin{cases} \{\theta_{X^*}\}, & x = \theta_X, \\ \{x^*, x^* \in X^*, (x^*, x) = \|x\|_X \|x^*\|_{X^*}, \|x^*\|_{X^*} = \mu(\|x\|_X)\}, & x \neq \theta_X. \end{cases}$$

For next two remarks see [1], [5], [6] and [7].

Remark 5.3. a) The set Jx is non-empty.

b) Let X be a Banach space with a strictly convex dual space X^*. Let J be the duality mapping in X with the gauge function μ. Then the set Jx consists of precisely one point.

c) Let X be a Banach space with a strictly convex dual space X^*. Let $J : X \to X^*$ be the duality mapping with the gauge function μ and $t > 0$.Then $J(tw) = \beta(t, w) . Jw$ where β is a positive function on $(0, \infty) \times X$.

d) Let X^* be a strictly convex Banach space, $J : X \to X^*$ the duality mapping in X with the gauge function μ and $[\{X_n\}, \{X_n\}, \{Q_n\}]_K$ an approximation scheme for $\langle X, X\rangle$. Then $Q_n^* Jx = Jx$ for each $x \in X_n$ and all positive integers n.

Remark 5.4. Let X be a Banach space with a strictly convex dual space X^*, $J : X \to \to X^*$ the weakly continuous duality mapping in X with the gauge function μ (for example, there exist a gauge function μ and the duality mapping J which is weakly continuous in the spaces l_p, $1 < p < \infty$). Set $Y = X$ and $\Phi = J$. Then Φ satisfies the assumptions of Proposition 5.1.

Proposition 5.2. *Let X be a Banach space, $[\{X_n\}, \{X_n\}, \{Q_n\}]_K$ an approximation scheme of $\langle X, X\rangle$, $T: X \to X$, $T = I - S$ where I is the identity operator and S is a contraction mapping with the constant $\alpha \in \langle 0, 1)$. Let $\alpha K < 1$.*

Then T is an A-operator.

Proof. According to Banach Contraction Mapping Fixed Point Theorem there exists one and only one $x_0 \in X$ for each $y \in Y$ such that $Tx_0 = y$.

Let $R > 0$, $x_{n_j} \in X_{n_j}$, $\|x_{n_j}\|_X \leqq R$, $Q_{n_j} Tx_{n_j} \to y = Tx_0$ in X. Then

$$(1 - \alpha K) \|x_{n_j} - Q_{n_j}x_0\|_X \leqq \|x_{n_j} - Q_{n_j}x_0\|_X - \|Q_{n_j}Sx_{n_j} - Q_{n_j}SQ_{n_j}x_0\|_X \leqq$$
$$\leqq \|Q_{n_j}Tx_{n_j} - Q_{n_j}TQ_{n_j}x_0\|_X \leqq$$
$$\leqq \|Q_{n_j}Tx_{n_j} - y\|_X + \|Tx_0 - Q_{n_j}TQ_{n_j}x_0\|_X \leqq$$
$$\leqq \|Q_{n_j}Tx_{n_j} - y\|_X + K\|Tx_0 - TQ_{n_j}x_0\|_X + \|Q_{n_j}Tx_0 - Tx_0\|_X \to 0 .$$

Thus $x_{n_j} - Q_{n_j}x_0 \to \theta_X$ in X and $x_{n_j} \to x_0$ in X.

Corollary 5.1. *Let X, S, K, α satisfy the assumptions of Proposition 5.2. If X is a reflexive Banach space and $U : X \to X$ is a completely continuous operator, then $T = I - S - U$ is an A-operator.*

Proof. See Propositions 5.1 and 3.1.

6. THE SET OF EIGENVALUES

Definition 6.1. Let X be a Banach space, $T_0 : X \to X^*$, $S_0 : X \to X^*$ two potential operators (i.e. there exist functionals f, g such that $T_0 = \operatorname{grad} f$, $S_0 = \operatorname{grad} g$ in the Gâteaux sense – see [18]). Let $f(x) = 0$ iff $x = \theta_X$ and set $\varphi(x) = g(x)/f(x)$ for $x \neq \theta_X$.

$u_0 \in X$, $u_0 \neq \theta_X$ is said to be *an R-eigenvector of* (T_0, S_0) if $D\varphi(u_0, h) = 0$ for each $h \in X$. ($D\varphi(u_0, h)$ is the linear differential Gâteaux at the point u_0). $\lambda_0 = \varphi(u_0)$ is said to be *an R-eigenvalue.*

Proposition 6.1. *Let X be a Banach space, $T_0 : X \to X^*$ and $S_0 : X \to X^*$ two a-homogeneous potential operators. Suppose that there exists a constant $c > 0$ such that*

$$(T_0x, x) \geqq c\|x\|_X^{a+1}$$

for each $x \in X$.

Then every eigenvalue of the couple (T_0, S_0) is an R-eigenvalue.

Proof. There is

$$f(x) = (T_0x, x) \cdot \frac{1}{a+1}, \quad g(x) = (S_0x, x) \cdot \frac{1}{a+1}.$$

Let $\lambda_0 \neq 0$ be an eigenvalue of (T_0, S_0), i.e. there exists $u_0 \neq \theta_X$ such that $\lambda_0 T_0 u_0 - S_0 u_0 = \theta_{X^*}$.

Thus

$$\lambda_0(T_0u_0, h) = (S_0u_0, h)$$

for each $h \in X$ so that

$$\lambda_0 = \frac{(S_0u_0, u_0)}{(T_0u_0, u_0)}.$$

Hence

$$\frac{(S_0u_0, u_0)(T_0u_0, h) - (T_0u_0, u_0)(S_0u_0, h)}{(T_0u_0, u_0)^2} = 0$$

for each $h \in X$, i.e. $D\,\varphi(u_0, h) = 0$ where

$$\varphi(u) = \frac{(S_0u, u)}{(T_0u, u)} = \frac{g(u)}{f(u)}.$$

Lemma 6.1. *Let X be a separable and reflexive Banach space, $G \subset X$ an open subset, $f : G \to E_1$ a functional of the class C^m (i.e. there exists the Fréchet derivative $D^j f(x)$ up to the order m which is continuous* — see [18]). *Let the following conditions be satisfied:*

(6.1) $\sup_{x \in G} \dim \operatorname{Ker} D^2 f(x) = l < \infty$

where $\operatorname{Ker} D^2 f(x) = \{h;\ h \in X, (D^2 f(x)\, h, w) = 0 \text{ for each } w \in X\}$,

(6.2) $$m \geqq \max(l, 2)\,,$$

(6.3) $D^2 f(x)(X)$ *is closed subset of the space $(X \to X^*)$ for each $x \in G$.*

Set $M = \{x;\ x \in G,\ D f(x, h) = 0$ *for each* $h \in X\}$.

Then $\operatorname{meas} f(M) = 0$. (For proof see [16)].

Proposition 6.2. *Let X be a reflexive and separable Banach space, $T_0 : X \to X^*$, $S_0 : X \to X^*$ be two potential operators. Let the functional φ (see Definition 6.1) satisfy the assumptions of Lemma 6.1.*

Then the set of R-eigenvalues of the couple (T_0, S_0) has the Lebesgue measure zero.

Theorem 6.1. *Let X be a reflexive Banach space such that $\langle X, X^* \rangle$ has an approximation scheme. Let $T : X \to X^*$ be an odd A-operator, $T_0 : X \to X^*$ an a-homogeneous operator, $S : X \to X^*$ an odd completely continuous operator and $S_0 : X \to X^*$. Suppose that T is an a-quasihomogeneous operator with respect to T_0 and S is an a-strongly quasihomogeneous operator with respect to S_0. Suppose that there exists a constant $c > 0$ such that*

$$\|Tu\|_{X^*} \geqq c\|u\|_X^a$$

and

$$(T_0 u, u) \geqq c\|u\|_X^{a+1}$$

for each $u \in X$.

Let $T_0 = \operatorname{grad} f$, $S_0 = \operatorname{grad} g$ *and set* $\varphi(u) = g(u)/f(u)$ *for* $u \neq \theta_X$. *Suppose that the functional φ satisfies the assumptions of Lemma 6.1 on some neighborhood of the unit sphere in X.*

Then there exists a set $N \subset E_1$, $\operatorname{meas} N = 0$ *such that* $(\lambda T - S) X = X^*$ *for each* $\lambda \in E_1 - N$.

Lemma 6.2. *Let X and Y be two Banach spaces, $T_0 : X \to Y$, $S_0 : X \to Y$ be linear operators such that T_0 is continuous, S_0 is completely continuous, $T_0 X = Y$. Suppose* *that there exists a constant $c > 0$ such that*

$$\|T_0 x\|_Y \geqq c\|x\|_X$$

for each $x \in X$.

Then the set of eigenvalues for the couple (T_0, S_0) is at most denumerable and if it has a limit point λ, then $\lambda = 0$.

Proof. For the problem $\lambda I - T_0^{-1}S_0$ we have well-known theorems (see [4]) about the set of eigenvalues. λ is an eigenvalue for (T_0, S_0) iff λ is an eigenvalue for $(I, T_0^{-1}S_0)$ (I is the identity operator in X).

Theorem 6.2. *Let X and Y be two reflexive Banach spaces such that $\langle X, Y\rangle$ has an approximation scheme. Let $T : X \to Y$ be a demicontinuous and odd A-operator, $S : X \to Y$ be a completely continuous and odd operator, $S_0 : X \to Y$ and $T_0 : X \to Y$ linear operators. Suppose that T is an 1-quasihomogeneous operator with respect to T_0 and S is an 1-strongly quasihomogeneous operator with respect to S_0. Suppose that there exists a constant $c > 0$ such that*

$$\|Tu\|_Y \geqq c\|u\|_X$$

and

$$\|T_0 u\|_Y \geqq c\|u\|_X$$

for each $u \in X$.

Let $T_0 X = Y$.

Then there exists a set $N \subset E_1$, N is at most denumerable and if N has a limit point λ, then $\lambda = 0$ and N is such that $(\lambda T - S)X = Y$ for each $\lambda \in E_1 - N$.

7. APPLICATIONS

a) Let Ω be a bounded domain in E_N and $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ the Sobolev space (for definition see [19, Chapter 1]). The space $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ is a Hilbert separable space. Denote Δ the Laplace operator. We seek the weak solution of the Dirichlet problem

$$-\lambda \Delta u - u \frac{|u|^s}{1 + |u|^s} = f \quad (s > 0)$$

$$u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

for $f \in (\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega))^*$, i.e. we seek $u \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ such that for each $v \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ the identity

$$\lambda \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \,dx - \int_\Omega \frac{|u|^s}{1 + |u|^s} uv \,dx = \int fv \,dx$$

holds. This equation has a solution for each $f \in (\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega))^*$ if the equation

$$\lambda \int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx - \int_\Omega uv \, dx = 0$$

(for all $v \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$) has zero solution only (see Theorem 3.2), i.e. for $\lambda \neq 1/\lambda_k$ where $\{\lambda_k\}$ is the spectrum of the Dirichlet problem for the equation

$$-\Delta u - \lambda u = 0 .$$

b) Let Ω be an open bounded subset of E_N. It is known (see [7]) that $\langle L_p(\Omega), L_p(\Omega)\rangle$ has an approximation scheme with $K = 1$.

Let $p > 1$ and let hu be Němyckij's operator (for the definition and properties see [18]) generated by the function $f(x)\,(u^3/(1 + u^2))$ where $f \in L_\infty(\Omega)$. Let $A \in (L_p(\Omega) \to L_p(\Omega))$ with the norm $\|A\|_{(L_p \to L_p)}$. Suppose that there exists a constant m such that $|f(x)| \leqq m$ almost everywhere in Ω and

$$\alpha = \|A\|_{(L_p \to L_p)} \, . \, m \, . \, \tfrac{9}{8} < 1 \, .$$

Then the operator $U = Ahu$ is a contraction with a constant $\alpha < 1$ and moreover, U is 1-quasihomogeneous with respect to $U_0 u = Ah_0 u$ where $h_0 u$ is Němyckij's operator generated by the function $f(x)\, u$. By Propositions 5.2, 3.2 and 3.3 the operator $T = I - U$ is an A^*-operator which is 1-quasihomogeneous with respect to the operator $T_0 = I - U_0$.

Let $K(x, y)$, $L(x, y)$ be continuous functions on $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ and $s \geqq 0$. Set

$$Su = \frac{\left| \int_\Omega L(x, y)\, u(y) \, dy \right|^s}{1 + \left| \int_\Omega L(x, y)\, u(y) \, dy \right|^s} \int_\Omega K(x, y)\, u(y) \, dy \, .$$

The operator S is strongly continuous and 1-strongly quasihomogeneous with respect to the operator

$$S_0 u = \int_\Omega K(x, y)\, u(y) \, dy \, .$$

By Theorem 3.2 the equation

(1) $$\lambda(u(x) - Ahu) - Su = F(x)$$

has a solution $u \in L_p(\Omega)$ for arbitrary $F \in L_p(\Omega)$ provided the equation

(2) $$\lambda(u(x) - Ah_0 u) - S_0 u = 0$$

has the trivial solution only.

According to Theorem 6.2 there exists a set $N \subset E_1$, N being at most denumerable and if λ is a limit point of N, then $\lambda = 0$ and N is such that (1) has a solution $u \in \in L_p(\Omega)$ for each $F \in L_p(\Omega)$ and all $\lambda \in E_1 - N$.

REMARKS

1. Preliminary communication was published in Comment. Math. Univ. Carolinae *11*, 1970, 271–284.

2. W. V. Petryshyn (Arch. Rat. Mech. Anal. *30*, 1968, 270–284 and same Arch. *33*, 1969, 331–338) solved this problem for the linear operators using similar methods.

3. When the preliminary communication had been published the author obtained a reprint of the paper by W. V. Petryshyn: Nonlinear Equations involving Noncompact Operators, Proc. Symp. Pure Math., Nonlinear Functional Analysis, Vol. XVIII, Part 1, 1970, Providence, Rhode Island, pp. 206–233. W. V. Petryshyn dealt with the same problem and his Theorem 1.4 on the p. 216 is essentially the same as Theorem 3.3 in this paper.

4. Author is very much indebted to the reviewer for his advice and comments.

References

[1] *F. E. Browder - D. G. de Figueredo:* J-monotone Nonlinear Operators in Banach Spaces, Konkl. Nederl. Acad. Wetensch. *69*, 1966, 412–420.

[2] *F. E. Browder - W. V. Petryshyn:* The Topological Degree and Galerkin Approximations for Noncompact Operators in Banach Spaces, Bull. Amer. Math. Soc. *74*, 1968, 641–646.

[3] *J. Cronin:* Fixed Point and Topological Degree in Nonlinear Analysis, Amer. Math. Soc. 1964, Providence, Rhode Island.

[4] *N. Dunford - J. T. Schwartz:* Линейные операторы I, Moscow 1962.

[5] *D. G. de Figueiredo:* Fixed-Point Theorems for Nonlinear Operators and Galerkin Approximations, Jour. Diff. Eq. *3*, 1967, 271–281.

[6] *D. G. de Figueiredo:* Some Remarks on Fixed Point Theorems for Nonlinear Operators in Banach Spaces, Lecture Series, University of Maryland, 1967.

[7] *D. G. de Figueiredo:* Topics in Nonlinear Analysis, Lecture Series, University of Maryland, 1967.

[8] *М. А. Красноселский:* Топологическийе методы в теории нелинейных интергальных уравнений, Москва 1956.

[9] *М. А. Красноселский - Я. Б. Рутиский:* Выпуклые функции и пространства Орлича, Москва 1958.

[10] *E. A. Michael - A. Pelczynski:* Separable Banach Spaces which admit l_n^∞-approximations, Israel Math. Jour. 1966, 189–198.

[11] *J. Nečas:* Sur l'alternative de Fredholm pour les opérateurs non-linéaires avec applications aux problèmes aux limites, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa *XXIII*, 1969, 331–345.

[12] *W. V. Petryshyn:* On a Fixed Point Theorem for Nonlinear P-compact Operators in Banach space, Bull. Amer. Math. Soc. *72*, 1966, 329–334.

[13] *W. V. Petryshyn:* Remarks on the Approximation-Solvability of Nonlinear Functional Equations, Archive Rat. Mech. Anal. *26*, 1967, 43—49.

[14] *W. V. Petryshyn:* On the Approximation-Solvability of Nonlinear Equations, Math. Annalen *177*, 1968, 156—164.

[15] *С. И. Похожаев:* Решение нелинейных уравнений с четными операторами, Функц. анализ и его приложения *1*, 1967, 66—73.

[16] *С. И. Похожаев:* О множестве критических значений функционалов, Мат. Сборник *75*, 1968, 106—111.

[17] *S. Schonefeld:* Schauder Bases in Spaces of Differentiable Functions, Bull. Amer. Math. Soc. *75*, 1969, 586—590.

[18] *М. М. Вайнберг:* Вариационные методы исследования нелинейных операторов, Москва 1956.

[19] *J. Nečas:* Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Praha 1967.

[20] *M. Kučera:* Fredholm Alternative for Nonlinear Operators, Comment. Math. Univ. Carolinae *11*, 2, 1970, 337—363.

Author's address: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

REMARKS ON DENJOY PROPERTY AND $\mathscr{M}'_2$ PROPERTY OF REAL FUNCTIONS

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

(Received March 31, 1970)

In the whole paper the interval means a normal non-degenerate interval on the real line E_1 and the measure means the Lebesgue measure on the real line. In what follows $|M|$ denotes the measure of the set M.

The real function $f : \langle 0, 1\rangle \to E_1$ is said to have the property $\mathscr{M}'_2$ if for each $a \in E_1$ and each closed interval $I \subset \langle 0, 1\rangle$ each of sets $I \cap E_a(f)$, $I \cap E^a(f)$,

$$E_a(f) = \{x \in \langle 0, 1\rangle;\ f(x) > a\}\,, \quad E^a(f) = \{x \in \langle 0, 1\rangle;\ f(x) < a\}$$

is either void or it has a positive measure (cf. [6]).

Further, the function $f : \langle 0, 1\rangle \to E_1$ is said to have the Denjoy property if for each two numbers $a, b \in E_1$ and each closed interval $I \subset \langle 0, 1\rangle$ the set $I \cap E_a^b(f)$, $E_a^b(f) = \{x \in \langle 0, 1\rangle;\ a < f(x) < b\}$ is either void or it has a positive measure (cf. [1]).

It is obvious from the previous definitions that each function $f : \langle 0, 1\rangle \to E_1$ with the $\mathscr{M}'_2$ or Denjoy property is Lebesgue measurable.

It is easy to see that each function with the Denjoy property has the $\mathscr{M}'_2$ property, too. L. MIŠÍK has shown the equivalence of these two properties for functions of the first Baire class (cf. [2]).

The function $f : \langle 0, 1\rangle \to E_1$ is said to have the Darboux property if f maps each interval $I \subset \langle 0, 1\rangle$ onto an interval or a one-point set.

Denote by F the set of all functions $f : \langle 0, 1\rangle \to E_1$. For $S \subset F$ we put $CS = F - S$. Denote by M'_2, D^*, D the set of all $f \in F$ with the $\mathscr{M}'_2$, Denjoy, Darboux property, respectively. Further B_α ($\alpha \geqq 0$) denotes the set of all functions $f \in F$ of the Baire class α.

We have already remarked that $D^* \subset M'_2$ and $D^* \cap B_1 = M'_2 \cap B_1$. L. Mišík has shown (cf. [2]) that the set

$$S_2 = B_2 \cap [M'_2 - (D \cup D^*)] = B_2 \cap M'_2 \cap CD \cap CD^*$$

is non-void and he asked whether the set $T_2 = B_2 \cap M'_2 \cap D \cap CD^*$ is non-void, too. J. Lipiński has given an affirmative answer to this question (cf. [1]). He showed by using some properties of Köpcke derivatives that each of the sets S_2, T_2 is non-void.

In this paper we shall give new proofs for the non-voidness of each of the sets S_2, T_2, the proof of the non-voidness of T_2 being based on some properties of certain functions which were defined in the paper [5] by means of subseries of divergent series. Further we shall study some properties of the sets S_2, T_2 as subsets of the metric space $M(0, 1)$ of all bounded functions $f \in F$ (see Theorem 7 below).

At first we show a simple construction of functions $f \in S_2$. Let $A \subset \langle 0, 1\rangle$ be an F_σ set with the following property: For each interval $I \subset \langle 0, 1\rangle$ each of the sets $A \cap I$, $A' \cap I$ ($A' = \langle 0, 1\rangle - A$) has a positive measure (cf. [3], p. 244). R denotes the set of all rational numbers $r \in \langle 0, 1\rangle$. Put $B = A - R$, $B' = A' - R$. Let t be an arbitrary positive real number. Put $g_t(x) = t$ for $x \in B$, $g_t(x) = -t$ for $x \in B'$ and $g_t(x) = 0$ for $x \in R$.

Theorem 1. *The function g_t belongs to S_2.*

Proof. 1. We shall show at first that $g_t \in B_2$. Let $a \in E_1$, $E^a(g_t) = \{x \in \langle 0, 1\rangle;\ g_t(x) < a\}$. Then we have

$$E^a(g_t) = \begin{cases} \emptyset & \text{for} \quad a \leqq -t\,, \\ B' & \text{for} \quad -t < a \leqq 0\,, \\ B' \cup R & \text{for} \quad 0 < a \leqq t\,, \\ \langle 0, 1\rangle & \text{for} \quad t < a\,. \end{cases}$$

Since A is an F_σ set, B' is a $G_{\delta\sigma}$ set and we see at once that the set $E^a(g_t)$ is a $G_{\delta\sigma}$ set for each a. It can be shown analogously that for each $a \in E_1$ the set $E_a(g_t) = \{x \in \langle 0, 1\rangle;\ g_t(x) > a\}$ is a $G_{\delta\sigma}$ set.

2. The function g_t has not the Darboux property since $g_t(\langle 0, 1\rangle) = \{0, t, -t\}$.

3. The function g_t has not the Denjoy property since the set $E^t_{-t}(g_t) = \{x \in \langle 0, 1\rangle;\ -t < g_t(x) < t\}$ is non-void and its measure is 0.

4. The function g_t has the $\mathcal{M}'_2$ property. Indeed, let $a \in E_1$ and let $I \subset \langle 0, 1\rangle$ be a closed interval. If $I \cap E^a(g_t) \neq \emptyset$, then $a > -t$ and therefore the set $I \cap B'$ is contained in the set $I \cap E^a(g_t)$. In view of the properties of the set A we have $|I \cap B'| > 0$ and so $|I \cap E^a(g_t)| > 0$. It can be shown analogously that if $I \cap E_a(g_t) \neq \emptyset$ then $|I \cap E_a(g_t)| > 0$. This completes the proof.

Remark. From the previous theorem we obtain a set of the power c (c is the power of the continuum) of functions from S_2. Since $S_2 \subset B_2$ and the power of the set B_2 is c, we see that the set S_2 has the power c.

In what follows we shall use some functions defined in [5] by subseries of divergent series. Let $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = +\infty$, $x \in (0, 1\rangle$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x) \cdot 2^{-k}$ (non-terminating dyadic expansion of x, $\varepsilon_k(x) = 0$ or 1 and for an infinite number of k's we have $\varepsilon_k(x) = 1$). Denote by $f = f(\sum_1^\infty a_n)$ the function defined on $(0, 1\rangle$ in the following way: If the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x)\, a_k \tag{1}$$

converges and has the sum $S(x)$, then we put $f(x) = S(x)/(1 + |S(x)|)$. If $\sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k(x)\, a_k = +\infty$ ($\sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k(x)\, a_k = -\infty$), then we put $f(x) = 1$ ($f(x) = -1$). If (1) oscillates, then $f(x) = 0$.

It is well-known (cf. [6] Theorem 1, p. 6) that each function $f \in F$ of the first Baire class with the $\mathcal{M}_2'$ property has the Darboux property. So the inclusion $B_1 \cap M_2' \subset B_1 \cap D$ holds. In the connection with this fact we shall show that for the functions of the second Baire class the inclusion $B_2 \cap D \subset B_2 \cap M_2'$ is not true.

Theorem 2. *Let $a_k \to 0$ and let the series $\sum_{k=1}^\infty a_k$ fulfil one of the following conditions:*

1) $\sum_{k;a_k \geqq 0} a_k = +\infty, \quad \sum_{k;a_k<0} |a_k| < +\infty;$
2) $\sum_{k;a_k<0} a_k = -\infty, \quad \sum_{k;a_k \geqq 0} a_k < +\infty.$

Define the function $g : \langle 0, 1\rangle \to E_1$ in the following way: $g(0) = 1$ in the case 1) and $g(0) = -1$ in the case 2). Further we put $g(x) = f(\sum_1^\infty a_n)(x)$ for $x \in (0, 1\rangle$ (in both cases).

Then $g \in B_2 \cap (D - M_2')$.

Proof. Let $\sum_{k=1}^\infty a_k$ fulfil the condition 1) (in the case 2) the theorem can be proved in an analogous way). We know that $f(\sum_1^\infty a_n)$ is a function from the second Baire class (see [5], Theorem 2,6). From this it follows easily that $g \in B_2$.

Further it is known that $f(\sum_1^\infty a_n)$ has the Darboux property and the set $\{x \in (0, 1\rangle;$ $f(\sum_1^\infty a_n)(x) = 1\}$ is dense in $(0, 1\rangle$ (see [5], Theorem 2,4 and 1,10). From this it can be easily deduced that $g \in D$.

Since $a_k \to 0$ there exists a sequence $k_1 < k_2 < \ldots$ of natural numbers such that $\sum_{n=1}^\infty |a_{k_n}| < +\infty$. Put $x_0 = \sum_{n=1}^\infty 2^{-k_n} = \sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k(x_0)\, 2^{-k}$ ($\varepsilon_k(x_0) = 0$ for $k \neq k_n$ and $\varepsilon_{k_n}(x_0) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$). Then it follows from the definition of g that $g(x_0) < 1$ and so $E^1(g) = \{x \in \langle 0, 1\rangle; g(x) < 1\} \neq \emptyset$. From the theorem 1,10 of the paper [5] we get $|\{x \in (0, 1\rangle; \sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k(x)\, a_k = +\infty\}| = 1$ and so we have $|E^1(g)| = 0$. Hence $g \notin M_2'$ and so finally $g \in B_2 \cap (D - M_2')$. This completes the proof.

Remark. In view of Theorem 2 there exists a function $f_1 \in U_2$, $U_2 = B_2 \cap \cap (D - M_2')$. It is easy to check that each of the functions $f_1 + a$ $(a \in E_1)$ belongs to U_2, too. From this we see at once that the set U_2 has the power c.

We shall prove now the non-voidness of the set T_2. The proof of this fact will be based on some properties of functions $f(\sum_1^\infty a_n)$.

Theorem 3. $T_2 = B_2 \cap M_2' \cap D \cap CD^* \neq \emptyset$.

Proof. Let C_0 denote the Cantor set in $\langle 0, 1\rangle$. In the closure of the longest component interval J_1 of the set $\langle 0, 1\rangle - C_0$ we construct again a Cantor-like set C_1. Thus the only common points of C_1, C_0 are the end-points of the interval J_1. In the closure of the longest component interval J_2 of the set $\langle 0, 1\rangle - (C_0 \cup C_1)$ we construct again a Cantor-like set C_2. Thus the only common points of C_2, $C_0 \cup C_1$ are the end-points of the interval J_2. We continue this construction by induction. Hence we obtain the set $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$. Obviously $|C| = 0$ and the sets $C_n (n > 0)$, $C_0 \cup C_1 \cup \ldots \ldots \cup C_{n-1}$ have only two common points ($\inf C_n$ and $\sup C_n$). If $I \subset \langle 0, 1\rangle$ is an arbitrary interval, then there exists an m such that $C_m \subset I$. Let $\varphi_n : C_n \to \langle -1, 1\rangle$ denote the function which maps C_n onto $\langle -1, 1\rangle$, φ_n being continuous and non-decreasing on C_n (this function is analogous to the well-known Cantor function - see [3] p. 410).

Further we construct an F_σ set $A \subset \langle 0, 1\rangle$ such that for each interval $P \subset \langle 0, 1\rangle$ we have

$$(*) \qquad |A \cap P| > 0\,, \quad |A' \cap P| > 0 \;\; (A' = \langle 0, 1\rangle - A)$$

(cf. [3], p. 244). Put $G = \langle 0, 1\rangle - C$. Then $\langle 0, 1\rangle = C \cup GA \cup GA'$, the summands on the right-hand side being pairwise disjoint. Let

$$a_k > 0\,, \quad a_k \to 0\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty\,; \quad b_k < 0\,, \quad b_k \to 0\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = -\infty\,.$$

Define the function g in the following way: $g(x) = \varphi_0(x)$ for $x \in C_0 = C_0^*$, $g(x) = \varphi_1(x)$ for $x \in C_1 - C_0 = C_1^*, \ldots, g(x) = \varphi_n(x)$ for $x \in C_n - (C_0 \cup C_1 \cup \ldots \ldots \cup C_{n-1}) = C_n^*, \ldots$ Further we put $g(x) = f(\sum_1^\infty a_n)(x)$ for $x \in GA$ and $g(x) = f(\sum_1^\infty b_n)(x)$ for $x \in GA'$.

1) We show that $g \in B_2$. For $a \in E_1$ we have $E^a(g) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, where

$$M_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x \in C_n^*;\ \varphi_n(x) < a\}\,, \quad M_2 = \{x \in GA;\ f(\sum_1^\infty a_n)(x) < a\}\,,$$

$$M_3 = \{x \in GA';\ f(\sum_1^\infty b_n)(x) < a\}\,.$$

Owing to the continuity of φ_n on C_n^* the set $\{x \in C_n^*;\ \varphi_n(x) < a\}$ is open in C_n^* and therefore it is a $G_{\delta\sigma}$ set. So the set M_1 is a $G_{\delta\sigma}$ set, too. Further $M_2 = GA \cap \{x \in \in (0, 1\rangle;\ f(\sum_1^\infty a_n)(x) < a\}$. Since GA is a $G_{\delta\sigma}$ set and $\{x \in (0, 1\rangle;\ f(\sum_1^\infty a_n)(x) < a\}$ is a $G_{\delta\sigma}$ set, too (see [5], Theorem 2,6), the set M_2 is a $G_{\delta\sigma}$ set. In an analogous way we can verify that M_3 is also a $G_{\delta\sigma}$ set. So $E^a(g)$ is a $G_{\delta\sigma}$ set. Analogously it can be shown that $E_a(g)$ is a $G_{\delta\sigma}$ set.

2) We shall show that g has the property $\mathscr{M}_2'$. Let $a \in E_1$ and let $I \subset \langle 0, 1\rangle$ be a closed interval. If

$$I \cap E^a(g) \neq \emptyset\,, \tag{2}$$

then $a > -1$ and the set $I \cap E^a(g)$ contains the set $I \cap \{x \in \langle 0, 1\rangle;\ g(x) = -1\}$. According to the theorem 1,10 from [5] we have $g(x) = -1$ for almost all $x \in GA'$ and so owing to the property (*) of the set A we obtain $|I \cap E^a(g)| > 0$. In an analogous way we can show that also the set $I \cap E_a(g)$ is either void or it has a positive measure.

3) We shall show that g has the Darboux property. If $I \subset \langle 0, 1\rangle$ is an interval then there exists an m such that $C_m \subset I$ and so

$$g(I) \supset g(C_m) \supset \varphi_m(C_m^*) = (-1, 1)\,. \tag{3}$$

In view of (*) and $|C| = 0$ we have $|(GA) \cap I| > 0$, $|(GA') \cap I| > 0$. But for almost all $x \in GA(x \in GA')$ we have $g(x) = 1$ $(g(x) = -1)$ (see[5], Theorem 1,10). Owing to this fact there exist two points $x_1, x_2 \in I$ such that $g(x_1) = 1$, $g(x_2) = -1$. This together with (3) gives $g(I) \supset \langle -1, 1\rangle$. But $g(\langle 0, 1\rangle) \subset \langle -1, 1\rangle$, therefore $g(I) = = \langle -1, 1\rangle$.

4) We shall prove that g has not the Denjoy property.

Let us choose $a = -1$, $b = 1$, $I = \langle 0, 1\rangle$. Then $I \cap E_a^b(g) = \{x \in \langle 0, 1\rangle;\ -1 < < g(x) < 1\} \neq \emptyset$ and $I \cap E_a^b(g) \subset C \cup M$ where M denotes the set of all such $x \in GA \cup GA'$ for which at least one of the series $\sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k(x)\, a_k$, $\sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k(x)\, b_k$ converges. It follows from the theorem 1,10 of the paper [5] that $|M| = 0$ and since $|C| = 0$, we have $|I \cap E_a^b(g)| = 0$. This completes the proof.

Remark. It is easy to verify that T_2 has the power c.

It is easy to check that if $f \in M_2'$ or $f \in D^*$, then for each $k \in E_1$ also the function kf belongs to M_2', D^* respectively. In connection with this fact the question arises whether the sum of two functions from M_2' or D^* is again a function belonging to M_2' or D^*, respectively (i.e. whether M_2' or D^* is a linear function space). The following example gives a negative answer to this question.

Example. Let $C \subset \langle 0, 1\rangle$ be the Cantor set, $C' = \langle 0, 1\rangle - C$. Let $A \subset \langle 0, 1\rangle$ be such an F_σ set that for each interval $P \subset \langle 0, 1\rangle$ we have $|A \cap P| > 0$, $|A' \cap P| > 0$ ($A' = \langle 0, 1\rangle - A$). Then $\langle 0, 1\rangle = C \cup C'A \cup C'A'$, the summands on the right-hand side being pairwise disjoint. Put $h_1(x) = 1$ for $x \in C \cup C'A$ and $h_1(x) = -1$ for $x \in C'A'$. Further put $h_2(x) = 1$ for $x \in C \cup C'A'$ and $h_2(x) = -1$ for $x \in C'A$. If we put $h = h_1 + h_2$, then $h(x) = 2$ for $x \in C$ and $h(x) = 0$ for $x \in C'$. It is easy to verify that $h_1, h_2 \in D^*$. Since $\{x \in \langle 0, 1\rangle;\ h(x) > 0\} = C$, the function h does not belong to M_2'.

In what follows we shall study the structure of the space $M(0, 1)$ (with the metric $\varrho(f, g) = \sup\limits_{0 \leqq t \leqq 1} |f(t) - g(t)|$) from the point of view of the Denjoy and Zahorski's property $\mathcal{M}_2'$. Let $D^*(0, 1)$ and $M_2'(0, 1)$ denote the set $D^* \cap M(0, 1)$, $M_2' \cap M(0, 1)$, respectively. Let us remark that if (X, ϱ) is a metric space, then the symbol $S(p, \delta)$ ($p \in X$, $\delta > 0$) denotes the spherical neighbourhood of the point p in the space X, i.e. $S(p, \delta) = \{x \in X;\ \varrho(p, x) < \delta\}$.

Theorem 4. *Each of the sets $D^*(0, 1)$, $M_2'(0, 1)$ is a perfect non-dense set in $M(0, 1)$.*

Proof. We shall prove the theorem for $D^*(0, 1)$ (the proof for $M_2'(0, 1)$ being analogous). It suffices to prove the following assertions:

1) $D^*(0, 1)$ is a closed subset of the space $M(0, 1)$;

2) $D^*(0, 1)$ has no isolated point;

3) $D^*(0, 1)$ is non-dense in $M(0, 1)$.

1) Let $f_n \in D^*(0, 1)$ ($n = 1, 2, \ldots$) and let $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uniformly converge to f. Then it is known that $f \in D^*(0, 1)$ (cf. [7], Theorem 15).

2) Let $f \in D^*(0, 1)$ and $\delta > 0$. It is easy to check that each of the functions $f + t$, $|t| < \delta$ belongs to $S(f, \delta)$ and $f + t \in D^*(0, 1)$.

3) Since each of the functions $f \in D^*(0, 1)$ is measurable, we have $D^*(0, 1) \subset L(0, 1)$, $L(0, 1)$ being the set of all Lebesgue measurable functions from $M(0, 1)$. But $L(0, 1)$ is a non-dense set in $M(0, 1)$ (see [4]) and therefore $D^*(0, 1)$ is non-dense, too. The proof is complete.

In an analogous way we can prove the following

Theorem 5. *Each of the sets $Z \cap M(0, 1)$, $Z = S_2, T_2, U_2$ is a perfect non-dense set in $M(0, 1)$.*

Proof. It follows from the inclusions $S_2 \subset M_2'$, $T_2 \subset M_2'$ that $S_2 \cap M(0, 1)$, $T_2 \cap M(0, 1)$ are non-dense. Further $U_2 \subset D$ and $D \cap M(0, 1)$ is non-dense in $M(0, 1)$ (see [4]), so that $U_2 \cap M(0, 1)$ is non-dense, too. The perfectness of the sets $Z \cap M(0, 1)$, $Z = S_2, T_2, U_2$ can be proved in an analogous way as the perfectness of $D^*(0, 1)$ was proved in Theorem 4.

References

[1] *J. S. Lipiński:* Sur la classe $\mathcal{M}'_2$. Čas. pěst. mat. *93* (1968), 222—226.
[2] *L. Mišík:* Über die Klasse M_2. Čas. pěst. mat. *91* (1966), 389—393.
[3] *R. Sikorski:* Funkczje rzeczywiste I, Warszawa, 1958.
[4] *J. Smítal - T. Neubrunn - T. Šalát:* On the structure of the space $M(0, 1)$. Rev. roum. math. pures et appl. *13* (1968), 377—386.
[5] *T. Šalát:* On subseries of divergent series. Mat. čas. SAV *18* (1968) 312—338.
[6] *Z. Zahorski:* Sur la première dérivée. Trans. Amer. Math. Soc. *69* (1950), 1—54.
[7] *L. Mišík:* Über die Eigenschaft von Darboux und einiger Klassen von Funktionen, Rev. roum. math. pures et appl. *11* (1966), 411—430.

Author's address: Bratislava, Šmeralova 2b (SVŠT).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

O NIEKTORÝCH ĎALŠICH VLASTNOSTIACH KRIVIEK TRIEDY P

JOZEF OBOŇA, NIKOLAJ PODTJAGIN, Bratislava

(Došlo dňa 2. apríla 1970)

V tejto práci sa uvádzajú niektoré ďalšie vlastnosti kriviek triedy P, definované v práci [1]. Tieto vlastnosti sa odvodzujú z rovníc dotyčnic k týmto krivkám.

V práci [1] krivky triedy P boli definované rovnicami

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= \mathrm{a} \,.\, \cos q\omega + b \,.\, \cos (p + q)\, \omega \\ y &= \mathrm{a} \,.\, \sin q\omega + b \,.\, \sin (p + q)\, \omega \end{aligned}$$

kde ω je parameter, meniaci sa v intervale $[0, 2\pi)$, konštanty p, q sú celé nesúdeliteľné čísla, ani jedna z konštant a, b, p, q nie je rovná nule, pritom a, b, q sú čísla kladné.

V spomenutej práci bolo ďalej dokázané, že pre aq + b$(p + q) = 0$ rovnice (1) určujú prostú hypocykloidu a pre aq − b$(p + q) = 0$ prostú epicykloidu; pre a = b a $p + 2q \neq 0$ určujú ružicu; pre a = b, $p + 2q = 0$ úsečku na osi OX, dĺžky 4a so stredom v počiatku súradnicovej sústavy, ktorú nepokladáme za krivku triedy P a teda pre a = b žiadame $p + 2q \neq 0$.

V práci [1] bolo dokázané, že každá krivka triedy P má $|p|$ bodov vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť a + b, ktoré odpovedajú hodnotám parametru

$$(2) \qquad \omega = \frac{2k\pi}{|p|}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, |p| - 1$$

a $|p|$ bodov, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť |a − b|, ktoré odpovedajú hodnotám parametru

$$(3) \qquad \omega = \frac{(2k + 1)\,\pi}{|p|}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, |p| - 1\,.$$

Pre aq − b$(p + q) = 0$, tj. u prostých epicykloid, body vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na |a − b| sú singulárne body (body zvratu).

Pre aq + b$(p + q) = 0$, tj. u prostých hypocykloid, body vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť a + b sú tiež singulárne body (body zvratu).

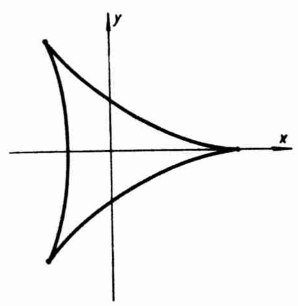
Všetky krivky triedy P sú súmerné vzhľadom na os OX. Ak konštanta $|p|$ je párne číslo, tieto krivky sú súmerné (aj vzhľadom na os OY).

Pre smernicu dotyčnice krivky triedy P v jej ľubovoľnom bode (x, y) máme

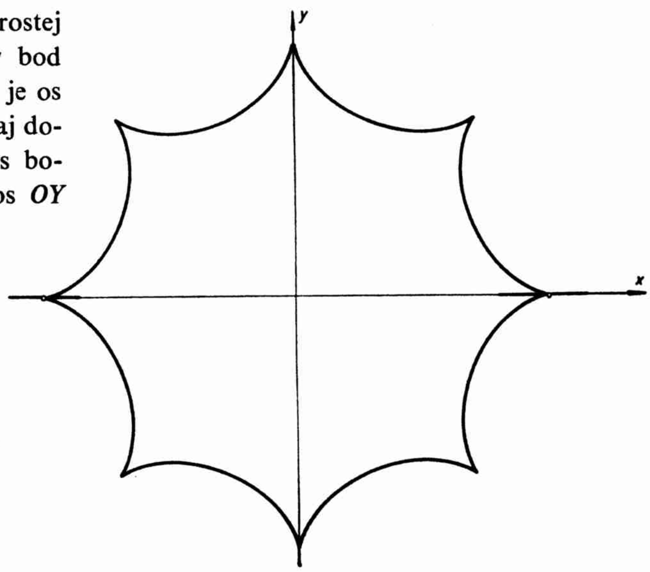
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{aq \, . \cos q\omega + b(p+q)\cos(p+q)\,\omega}{aq \, . \sin q\omega + b(p+q)\sin(p+q)\,\omega}. \tag{4}$$

Smernica dotyčnice v bode $\omega = 0$ môže byť konečná len pre $aq + b(p + q) = 0$. Z toho vyplýva, že dotyčnica ku krivke triedy P v počiatočnom bode $\omega = 0$, okrem prostých hypocykloid je vždy kolmá na os OX.

Počiatočný bod $\omega = 0$ prostej hypocykloidy je singulárny bod zvratu, v ktorom dotyčnica je os OX. Ak $|p|$ je párne číslo, aj dotyčnica v bode súmernom s bodom $\omega = 0$ vzhľadom na os OY je tiež os OX.



Obr. 1.



Obr. 2.

Príklad 1. Na obr. 1 je znázornená prostá hypocykloida, daná rovnicami (1) pre $p = -3$, $q = 2$, $a = 1{,}6$; $b = 3{,}3$. Pretože $|p|$ je nepárne číslo, os OX je dotyčnicou len v bode $\omega = 0$.

Príklad 2. Krivka na obr. 2 je tiež prostá hypocykloida pre $p = -8$, $q = 1$, $a = 8{,}75$, $b = 1{,}25$. Pretože $|p|$ je párne číslo, os OX dotyčnicou nielen v bode $\omega = 0$, ale aj v bode s nim súmernom podľa OY.

Body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť $a + b$ sú dané hodnotami (2) parametra ω, pre ktoré máme $\cos p\omega = 1$. Vzťah (4) pre tieto body bude

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{[aq + b(p+q)]\cos q\omega}{[aq + b(p+q)]\sin q\omega}.$$

Nemá zmysel pre prosté hypocykloidy. Pre všetky ostatné krivky triedy P v spomínaných bodoch máme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos q\omega}{\sin q\omega}.$$

Pre dotýčnice v týchto bodoch dostávame

$$X \cos q \frac{2k\pi}{|p|} + Y \sin q \frac{2k\pi}{|p|} = x \cos q\omega + y \sin q\omega$$

kde X, Y sú premenné súradnice bodov dotýčnice a x, y sú pevné body na krivke triedy P (podobne aj v ďalších úvahách). Po dosadení hodnôt (2) parametra ω, pre dotýčnice v bodoch, vzdia'ených od počiatku súradnicovej sústavy na a + b, pre všetky krivky triedy P, okrem prostých hypocykloid, máme

$$X \cos q \frac{2k\pi}{|p|} + Y \sin q \frac{2k\pi}{|p|} = \mathrm{a} + \mathrm{b}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, |p| - 1\,. \tag{5}$$

Pri $|p|$ nepárnom ani jedna z dotyčníc, okrem dotýčnice v počiatočnom bode $\omega = 0$, nemôže byť kolmá ani na jednu zo súradnicových osí.

Pretože čísla q a $|p|$ nemajú spoločných deliteľov, pri $|p|$ párnom ($|p| = 2k_1$), dotýčnice v spomenutých bodoch sú kolmé na os OX len v tom prípade, keď číslo $t = k/k_1$ je celé. A pretože $k \leqq |p| - 1$, musíme mať

$$t \leqq \frac{2k_1 - 1}{k_1} = 2 - \frac{1}{k_1} < 2$$

a teda t môže mať len dve hodnoty 0 a 1. Z toho plynie, že pri $|p|$ párnom každá krivka triedy P, okrem prostej hypocykloidy, má dva a len dva body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na a + b, v ktorých dotýčnice sú kolmé na os OX. Tieto dotýčnice sú dané rovnicami (5). Pretože potom je q nepárne číslo, sú teda dané rovnicami

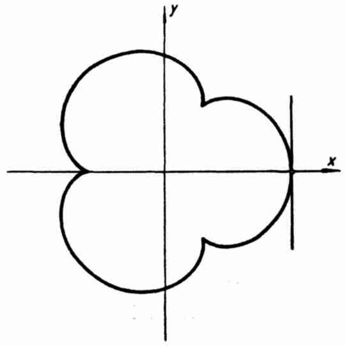
$$X = \pm(\mathrm{a} + \mathrm{b}) \tag{6}$$

Príklad 3. Pre $p = 3$, $q = 1$, a = 4, b = 1 rovnice (1) určujú prostú epicykloidu, znázornenú na obr. 3, vytvorenú rotáciou kruhu o polomere $r = 1$ po obvode pevného kruhu $R = 3$. Pretože p je nepárne číslo, krivka má len jeden bod, vzdialený od počiatku súradnicovej sústavy na a + b = 5 (počiatočný bod $\omega = 0$), v ktorom dotýčnica je kolmá na os OX.

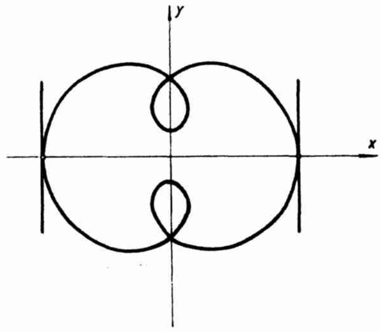
Príklad 4. Krivka na obr. 4 pre $p = -2$, $q = 3$, a = 2, b = 3 podľa (1) je predĺžená hypocykloida. Pretože $|p|$ je párne číslo, krivka má dva body ($x = \pm 5$), vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na a + b = 5, v ktorých dotýčnice ($X = \pm 5$) sú kolmé na os OX.

Ak aj $\frac{1}{2}|p|$ je párne číslo ($|p| = 4k_1$), dotyčnica v bode, vzdialenom od počiatku súradnicovej sústavy na a + b, je kolmá na os OY vtedy a len vtedy, keď $t = k/k_1$ je celé nepárne číslo. Pretože $k \leqq |p| - 1$, musíme mať

$$t \leqq \frac{4k_1 - 1}{k_1} = 4 - \frac{1}{k_1} < 4$$



Obr. 3.



Obr. 4.

odkiaľ teda t môže mať len hodnoty 1 a 3. Z toho plynie, že pre $\frac{1}{2}|p|$ párne, každá krivka triedy P, okrem prostých hypocykloid má aj dva body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na a + b, v ktorých dotyčnice sú kolmé na os OY. Sú dané rovnicami (5) pre $k = k_1$ a $k = 3k_1$, tj. rovnicami

(7) $$Y = \pm(\mathrm{a} + \mathrm{b})$$

Príklad 5. Pre $p = -4$, $q = 1$, $\mathrm{a} = \mathrm{b}$, $\mathrm{b} = 4$ rovnice (1) určujú krivku uvedenú na obr. 5. $\frac{1}{2}|p|$ je číslo párne. Krivka má dva body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = \mathrm{a} + \mathrm{b} = 10$, v ktorých dotyčnice sú kolmé na os OX, a dva body rovnako vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy, v ktorých dotyčnice sú kolmé na os OY. Podľa vzorca (7) sú dané rovnicami $Y = \pm 10$.

Body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b}| > 0$ sú dané vzťahom (3). U nich máme $\cos p\omega = 1$. Vzorce (4) pre tieto body potom nadobudnú tvar

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{[\mathrm{a}q - \mathrm{b}(p + q)] \cos q\omega}{[\mathrm{a}q - \mathrm{b}(p + q)] \sin q\omega}.$$

Nemajú zmysel pre prosté epicykloidy. Pre všetky ostatné krivky triedy P v spomenutých bodoch máme

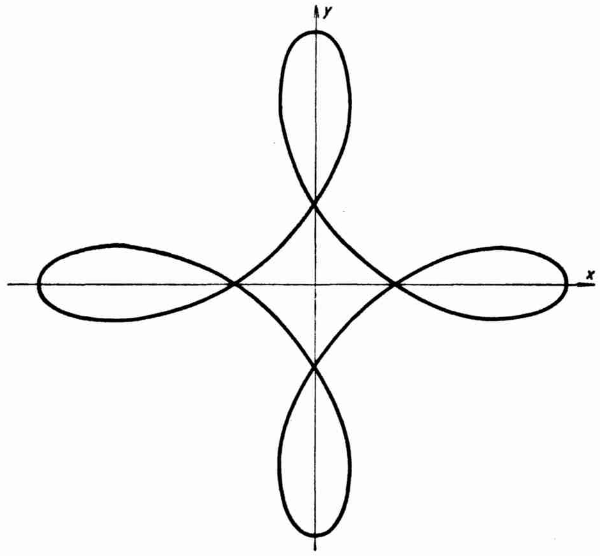
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\cos q\omega}{\sin q\omega}.$$

Pre dotyčnice v nich potom platí rovnica

$$X \cos q\omega + Y \sin q\omega = x \cos q\omega + y \sin q\omega\,.$$

Po dosadení hodnôt (3) parametra ω pre dotýčnice v bodoch, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |a - b| > O$, u všetkých kriviek triedy P, okrem prostých epicykloid, dostaneme potom rovnice

$$(8) \quad X \cos q \frac{(2k+1)\pi}{|p|} + Y \sin q \frac{(2k+1)\pi}{|p|} = a - b\,, \quad k = 0, 1, \ldots, |p| - 1\,.$$



Obr. 5.

Ak $|p|$ je číslo nepárne ($|p| = 2k_1 + 1$), tieto dotýčnice nemôžu byť kolmé na os OY, Sú kolmé na os OX, keď číslo $t = (2k + 1)/(2k_1 + 1)$ je celé. Pretože $k \leqq |p| - 1$. musíme mať

$$t \leqq \frac{4k_1 + 1}{2k_1 + 1} = 2 - \frac{1}{2k_1 + 1} < 2\,.$$

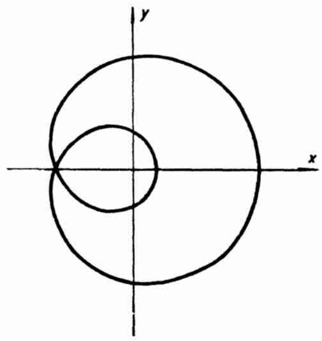
Môže sa teda t rovnať len jednotke. Z toho plynie, že pre $|p|$ nepárne každá krivka triedy P, s výnimkou prostej epicykloidy, má len v jednom bode, vzdialenom od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |a - b| > O$, dotýčnicu kolmú na os OX, danú rovnicami (8) pre $k = k_1$. Pri q párnom dotýčnica bude

$$(9) \qquad X = a - b$$

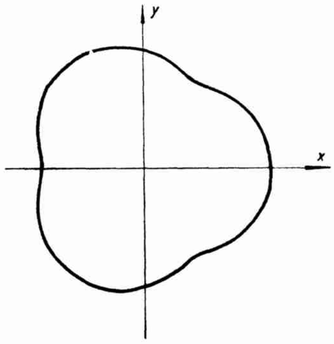
a pri nepárnom

$$(10) \qquad X = b - a$$

Príklad 6. Na obr. 6 je znázornená krivka, daná rovnicami (1) pre $p = -1$, $q = 2$, a $= 3$, b $= 2$; $|p|$ je číslo nepárne, q je číslo párne. Krivka má len jeden bod, vzdialený od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b}| = 1$. Dotyčnica je v ňom kolmá na os OX a je daná rovnicou $X = 1$.



Obr. 6.



Obr. 7.

Príklad 7. Krivka, daná rovnicami (1) pre $p = 3$, $q = 1$, a $= 4{,}5$; b $= 0{,}5$ je uvedená na obr. 7. Obidve čísla p a q sú čísla nepárne. Len v jednom bode, vzdialenom od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b}| = 4$, dotyčnica je kolmá na os OX. Podľa vzorca (10) je daná rovnicou $X = -4$.

Ak $|p|$ je číslo párne, potom z rovníc (8) vyplýva, že dotyčnica ani v jednom bode, vzdialenom od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b}|$ nemôže byť kolmá na os OX. Na os OY je kolmá len v tom prípade, keď $|p|$ je číslo párne, ale $\frac{1}{2}|p|$ je číslo nepárne ($|p| = 2(2k_1 + 1)$). To bude v tom prípade, keď $t = (2k + 1)/(2k_1 + 1)$ je celé nepárne číslo. Pretože $k \leqq |p| - 1$, musíme mať

$$t \leqq 4 - \frac{1}{2k_1 + 1} < 4 .$$

Nevyhovuje teda len $t = 1$ a $t = 3$. Z toho plynie, že pri $|p|$ párnom a súčasne $\frac{1}{2}|p|$ nepárnom, každá krivka triedy P, s výnimkou prostej epicykloidy, má len dva body vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b}|$, v ktorých dotyčnice sú kolmé na os OY. Sú dané rovnicami

$$Y = \pm(\mathrm{a} - \mathrm{b}) . \tag{11}$$

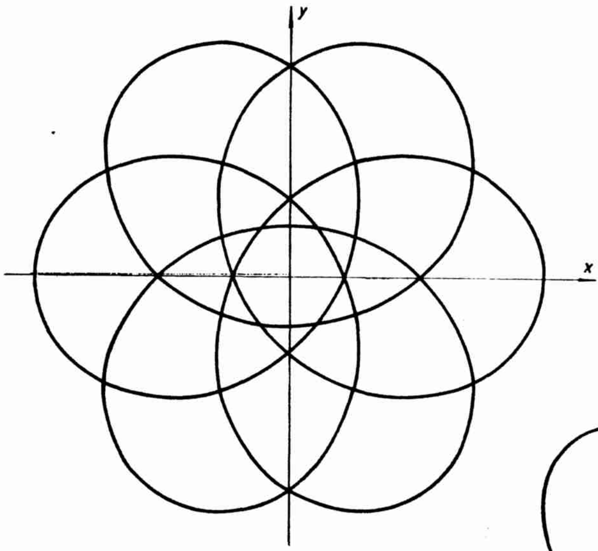
Príklad. 8. Na obr. 8 je znázornená krivka, daná rovnicami (1) pre $p = -6$, $q = 1$, a $= 4$, b $= 6$. Číslo $\frac{1}{2}|p|$ je nepárne. Krivka má dva body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b}| = 2$, v ktorých sú dotyčnice kolmé na os OY. Sú dané rovnicami (11), teda $Y = \pm 2$.

Pre a $-$ b $= O$, každá krivka triedy P, tj. každá ružica prechádza počiatkom súradnicovej sústavy, ktorý je jej $|p|$-násobným bodom. Dotyčnice v ňom sú dané rovnicami

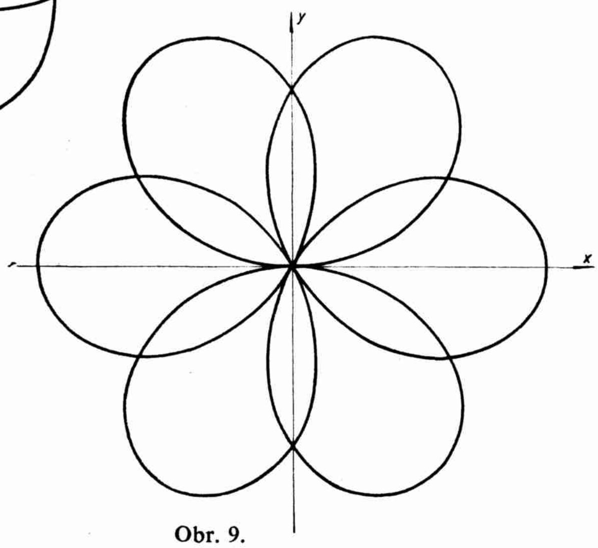
$$X \cos q \frac{(2k+1)\pi}{|p|} + Y \sin q \frac{(2k+1)\pi}{|p|} = 0\,, \quad k = 0, 1, \ldots, |p| - 1\,.$$

Podmienky kolmosti ich dotýčnic v tomto bode sú tie isté ako v prípade $|a - b| > 0$.

Príklad 9. Krivka, znázornená na obr. 9 je daná rovnicami (1) pre tie isté hodnoty p a q ako v príkl. 8, len $a = b = 5$. Táto krivka má dva body, vzdialené od počiatku súradnicovej sústavy na $\varrho = a + b = 10$, v ktorých dotýčnice sú kolmé na os OX. Počiatok súradnicovej sústavy je šesťnásobným bodom, v ktorom dve dotýčnice sú kolmé na os OY. Sú splynuté s osou OX.



Obr. 8.



Obr. 9.

Literatúra

[1] *Podtjagin N.*, O jednej triede racionálnych kriviek, Časopis pro pěstování matematiky, *90* (1965), 181—190.

Adresa autorov: Jozef Oboňa, Gottwaldovo nám. 2, Bratislava (SVŠT).

Résumé

SUR QUELQUES PROPRIETES NOUVELLES DES COURBES DE LA CLASSE P

NIKOLAJ PODTJAGIN, JOZEF OBOŇA, Bratislava

Dans cet article, on étudie des propriétés nouvelles des courbes de la classe P. La définition de ces courbes se trouve dans l'article [1], donnée par les équations

$$x = \mathrm{a} \cos q\omega + \mathrm{b} \cos (p + q)\, \omega\,,$$

$$y = \mathrm{a} \sin q\omega + \mathrm{b} \sin (p + q)\, \omega$$

où ω figure comme paramètre qui varie dans l'intervalle $[0,2\pi)$ a et b sont des constantes positives arbitraires, p et q étant de plus positif.

On trouve les équations des tangentes aux points situés à la distance a + b de l'origine

$$X \cos q \frac{2k\pi}{|p|} + Y \sin q \frac{2k\pi}{|p|} = a + b\,, \quad k = 0, 1, \ldots, |p| - 1\,.$$

Ces équations ont lieu pour toute courbe de la classe P, sauf pour les hypocycloïdes simples. De cela il résulte que, dans le cas où $|p|$ est impair, les tangentes définies par elles, sauf la tangente au point $\omega = 0$, ne peuvent pas être perpendiculaires aux axes de coordonées. Si $|p|$ est pair, toute courbe de la classe P, à l'exception des hypocycloïdes simples, a deux points situés à la distance a + b, de l'origine et ou les tangentes sont perpendiculaires à l'axe OX. Mais si $\frac{1}{2}|p|$ est pair aussi, la courbe en plus deux points situés distance a + b, à la de l'origine ou les tangentes sont perpendiculaires à l'axe OY.

On trouve les équations des tangentes aux points situés à la distance $|\mathrm{a} - \mathrm{b}|$ de l'origine

$$X \cos q \frac{(2k + 1)\, \pi}{|p|} + Y \sin q \frac{(2k + 1)\, \pi}{|p|} = \mathrm{a} - \mathrm{b}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, |p| - 1\,.$$

Ces équations ont lieu pour toutes les courbes de la classe P, sauf pour les épicyckloïdes simples. Il en résulte que pour $|p|$ impair les tangentes aux points situés à la distance $|\mathrm{a} - \mathrm{b}|$ de l'origine ne peuvent pas être perpendiculaires à l'axe OY. La courbe possède un de ces points, ou la tangente est perpendiculaire à l'axe OX. Dans le cas, ou $|p|$ est pair, les tangentes à ces points ne peuvent pas être perpendiculaires à l'axe OX. Mais si $|p|$ est pair, $\frac{1}{2}|p|$ impair, la courbe possède deux points situés à la distance $|\mathrm{a} - \mathrm{b}|$, de l'origine ou les tangentes sont perpendiculaires à l'axe OY.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

PERTURBATION NUMÉRIQUES DES ÉVOLUTIONS PARABOLIQUE ET HYPERBOLIQUE

MIROSLAV SOVA, Praha

(Reçu le 23 avril 1970)

On considère le problème suivant d'évolution abstraite.

Soit donné une solution w de l'équation abstraite:

$$\text{(A)} \qquad w'(t) + A\,w(t) = 0\,, \quad \text{ou}$$

$$\text{(B)} \qquad w''(t) + A\,w(t) = 0$$

où A est un opérateur, en général non-borné, dans un espace de Banach E.

Il s'agit de construire une solution u de l'équation perturbée:

$$\text{(A')} \qquad u'(t) + A\,u(t) + c\,u(t) = 0\,, \quad c \text{ réel}\,,$$

$$\text{(B')} \qquad u''(t) + A\,u(t) \pm c^2\,u(t) = 0\,, \quad c > 0\,,$$

à partir de la solution donnée w de l'équation non-perturbée (A), (B), les valeurs initiales restant les mêmes.

Le problème est trivial pour (A), (A') – cfr. la section 3 – mais assez compliqué pour (B), (B') – cfr. la section 4.

Les sections 1 et 2 sont préparatoires, la section 5 contient des cas spéciaux de la théorie générale qui sont connus de la théorie classique des équations aux dérivées partielles.

1. PRÉLIMINAIRES

1,1. Dans tout l'article, soit

(1) R le corps des nombres réels,

(2) R^+ l'ensemble des nombres positifs,

(3) $E, E_1, E_2, \ldots$ des espaces de Banach quelconques.

1,2. Soit E un espace de Banach. On désignera par

(1) $\mathfrak{L}^+(E)$ l'ensemble des opérateurs linéaires $(A, B, \ldots)$ dont les domaines $(\mathfrak{D}(A), \mathfrak{D}(B), \ldots)$ sont des sous-ensembles non-vides de E et dont les valeurs $(\mathfrak{R}(A), \mathfrak{R}(B), \ldots)$ demeurent dans E,

(2) $\mathfrak{L}(E)$ l'espace de Banach de tous les opérateurs de $\mathfrak{L}^+(E)$, partout définis et continus, avec la norme usuelle.

1,3. On désignera par I l'opérateur identique de $\mathfrak{L}(E)$. Les multiples αI, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, seront appelés opérateurs numériques de $\mathfrak{L}(E)$.

1,4. Si M_1, M_2 sont des ensembles quelconques, on désignera par $M_1 \to M_2$ l'ensemble de toutes les transformations (fonctions) de M_1 dans M_2.

1,5. On utilisera la théorie de l'intégration des fonctions vectorielles au sens de Bochner-Lebesgue.

1,6. Dans ce qui suit, on admet seulement la dérivabilité continue. Donc, le mot dérivable signifie toujours continûment dérivable.

1,7. Proposition. *Soient $a, b \in \boldsymbol{R}$, $a < b$, $g \in (a, b) \times (a, b) \to E$. Si*

(a) *la fonction g est continue sur l'ensemble $\{(t, \tau) : a < \tau \leqq t < b\}$ et $g(t, \tau) = 0$ pour $a < t < \tau < b$,*

(b) *les fonctions $g(t, .)$ sont intégrables sur (a, t) pour tout $a < t < b$,*

(c) *les fonctions $g(., \tau)$ sont continûment dérivables sur (τ, b) pour tout $a < \tau < b$,*

(d) *pour tout $a < t < b$, il existe un $\delta > 0$ et une fonction $\varphi \in (a, b) \to \boldsymbol{R}$, intégrable sur (a, b), tels que*

$$\left\| \frac{\partial}{\partial s} g(s, \tau) \right\| \leqq \varphi(\tau) \tag{1}$$

pour tout $a < s < b$, $|s - t| \leqq \delta$ et $a < \tau < s$,

alors la fonction

$$t \to G(t) = \int_a^t g(t, \tau)\, \mathrm{d}\tau\,, \quad a < t < b\,, \tag{*}$$

est continûment dérivable sur (a, b) et

$$G'(t) = \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} g(t, \tau)\, \mathrm{d}\tau + g(t, t) \tag{2}$$

pour tout $a < t < b$.

La preuve est fondée sur le théorème de Fubini.

Ecrivons $g_1(t, \tau) = (\partial/\partial t)\, g(t, \tau)$ pour $a < \tau < t < b$ et $g_1(t, \tau) = 0$ pour $a < t \leqq \leqq \tau < b$.

Il résulte aisément de (a), (c) que

(3) g_1 est mesurable sur $(a, b) \times (a, b)$.

En outre, on déduit de (c), (d) que

(4) $g_1(., \tau)$ est continue sur (τ, b) pour tout $a < \tau < b$,

(5) $g_1(t, .)$ est intégrable sur (a, t) pour tout $a < t < b$,

(6) $t \to \int_a^t g_1(t, \tau)\, d\tau$, $a < t < b$, est continue sur (a, b).

Maintenant, soient $a < \alpha < \beta < b$. On obtient sans peine de (d) qu'il existe une fonction $\varphi_1 \in R^+ \to R$ intégrable sur (a, b) telle que, pour tout $\alpha < t < \beta$ et $a < \tau < b$,

$$\|g_1(t, \tau)\| \leqq \varphi_1(\tau)\,.$$

Par conséquent, en vertu de (3),

(7) g_1 est intégrable sur $(\alpha, \beta) \times (a, b)$.

Le théorème de Fubini est donc applicable. On en déduit, compte tenu de (4)–(6) et de (b), que

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^t g_1(t, \tau)\, d\tau\right) dt = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b g_1(t, \tau)\, d\tau\right) dt = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta g_1(t, \tau)\, dt\right) d\tau =$$

$$= \int_a^\alpha \left(\int_\alpha^\beta g_1(t, \tau)\, dt\right) d\tau + \int_\alpha^\beta \left(\int_\tau^\beta g_1(t, \tau)\, dt\right) d\tau + \int_a^\alpha [g(\beta, \tau) - g(\alpha, \tau)]\, d\tau +$$

$$+ \int_\alpha^\beta [g(\beta, \tau) - g(\tau, \tau)]\, d\tau = \int_a^\beta g(\beta, \tau)\, d\tau - \int_a^\alpha g(\alpha, \tau)\, d\tau - \int_\alpha^\beta g(\tau, \tau)\, d\tau\,,$$

d'où

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^t \frac{\partial}{\partial t} g(t, \tau)\, d\tau\right) dt = G(\beta) - G(\alpha) - \int_\alpha^\beta g(\tau, \tau)\, d\tau$$

ce qui, avec (6), implique notre énoncé.

1,8. Proposition. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, Λ un intervalle ouvert et $f \in \Lambda \to E$. Si l'opérateur A est fermé, la fonction f est intégrable sur Λ, $f(t) \in \mathfrak{D}(A)$ pour presque* *tout $t \in \Lambda$ et la fonction Af est intégrable sur Λ, alors*

(1) $$\int_\Lambda f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \in \mathfrak{D}(A),$$

(2) $$A\int_\Lambda f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_\Lambda A f(\tau)\,\mathrm{d}\tau .$$

1.9. Proposition. *Soient A, Λ et f comme dans 1,8. Si l'opérateur A est fermé, la fonction f est dérivable sur Λ, $f(t) \in \mathfrak{D}(A)$ pour tout $t \in \Lambda$ et Af est dérivable sur Λ, alors*

(1) $$f'(t) \in \mathfrak{D}(A) \quad \textit{pour tout} \quad t \in \Lambda,$$

(2) $$(Af)'(t) = A f'(t) \quad \textit{pour tout} \quad t \in \Lambda .$$

Pour les preuves de 1,8 et 1,9, voir [1] chap. III.

2. PROBLÈMES DE CAUCHY

2,1. Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $u \in R^+ \to E$. On dit que la fonction u est une propagation de l'évolution parabolique pour l'opérateur A si

(I) u est dérivable sur R^+,

(II) $u(0_+)$ existe,

(III) $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$ pour tout $t \in R^+$,

(IV) $u'(t) + A\,u(t) = 0$ pour tout $t \in R^+$.

La propagation u telle que $u(0_+) = 0$ s'appelle déviation.

2,2. Soit $A \in \mathfrak{L}^+(E)$. L'opérateur A s'appelle paraboliquement exact si toute déviation u de l'évolution parabolique pour A est identiquement nulle.

2,3. Soit $A \in \mathfrak{L}^+(E)$. L'opérateur A s'appelle paraboliquement correct s'il existe un sous-ensemble linéaire $Z \subseteq E$ et deux constantes M, $\omega \in R$ tels que

(I) $\bar{Z} \supseteq \mathfrak{D}(A)$,

(II) pour tout $x \in Z$, il existe une propagation u de l'évolution parabolique pour A telle que

(1) $$u(0_+) = x,$$

(2) $$\|u(t)\| \leqq M e^{\omega t}\|x\|,$$

quel que soit $t \in R^+$.

2,4. Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $u \in R^+ \to E$. On dit que la fonction u est une propagation de l'évolution hyperbolique pour l'opérateur A si

(I) u est deux fois dérivable sur R^+,

(II) $u(0_+)$, $u'(0_+)$ existent,

(III) $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$ pour tout $t \in R^+$,

(IV) $u''(t) + A\,u(t) = 0$ pour tout $t \in R^+$.

La propagation u telle que $u'(0_+) = 0$ $[u(0_+) = 0]$ s'appelle propagation cosinus [desinus].

La propagation telle que $u(0_+) = u'(0_+) = 0$ s'appelle déviation.

2,5. Soit $A \in \mathfrak{L}^+(E)$. L'opérateur A s'appelle hyperboliquement exact si toute déviation u de l'évolution hyperbolique pour A est identiquement nulle.

2,6. Soit $A \in \mathfrak{L}^+(E)$. L'opérateur A s'appelle hyperboliquement cosinus [desinus] correct s'il existe un sous-ensemble linéaire $Z \subseteq E$ et deux constantes M, $\omega \in R$ tels que

(I) $\bar{Z} \supseteq \mathfrak{D}(A)$,

(II) pour tout $x \in \bar{Z}$, il existe une propagation cosinus [desinus] de l'évolution hyperbolique pour A telle que

(1) $$u(0_+) = x \ [u'(0_+) = x]\,,$$

(2) $$\|u(t)\| \leqq Me^{\omega t}\|x\| \ [\|u(t)\| \leqq Mte^{\omega t}\|x\|]\,,$$

quel que soit $t \in R^+$.

2,7. Proposition. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $v \in R^+ \to E$. Si l'opérateur A est fermé et u est une propagation cosinus de l'évolution hyperbolique pour A, alors la fonction*

[*] $$t \to u(t) = \int_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \quad t \in R^+\,,$$

est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour A telle que

(1) $$u'(0_+) = v(0_+)\,.$$

La preuve est simple.

2,8. Proposition. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $v \in R^+ \to E$. Si v est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour A, alors la fonction*

[*] $$t \to u(t) = \frac{1}{2t\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2/4t}\, v(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\,, \quad t \in R^+\,,$$

est une propagation de l'évolution parabolique pour A telle que

$$u(0_+) = v'(0_+)\,. \tag{1}$$

La preuve est un peu difficile et sera publiée ailleurs.

2,9. Théorème. *Soit $A \in \mathfrak{L}^+(E)$. Si l'opérateur A est hyperboliquement cosinus correct, il est aussi desinus correct.*

La preuve s'ensuit de 2,7.

2,10. Proposition. *Il existe un espace de Banach E et un opérateur $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ tels que A est hyperboliquement desinus, mais non cosinus correct.*

Preuve. On prend pour E l'espace $\mathbf{C}(R^3)$ des fonctions bornées, uniformément continues de $R^3 \to R$ avec la norme usuelle – supremum. Soit Δ l'opérateur laplacien au sens des distributions. On prend pour A la restriction de Δ dans $\mathbf{C}(R^3)$.

Maintenant, on démontre aisément notre énoncé en se servant de la formule classique de Kirchhoff.

2,11. Théorème. *Soit $A \in \mathfrak{L}^+(E)$. Si l'opérateur A est hyperboliquement desinus correct, il est aussi paraboliquement correct.*

La preuve est fondée sur 2,8.

2,12. Proposition. *Il existe un espace de Banach E et un opérateur $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ tels que A est paraboliquement, mais non hyperboliquement desinus correct.*

Preuve. On prend $E = \mathbf{C}(R)$, espace analogue à $\mathbf{C}(R^3)$ dans 2,10. Soit $\mathbf{D}$ l'opérateur de dérivation au sens des distributions. On prend pour A la restriction de $\mathbf{D}$ dans $\mathbf{C}(R)$.

3. PERTURBATIONS NUMÉRIQUES DANS LE CAS PARABOLIQUE

3,1. Proposition. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $c \in R$ et $w \in R^+ \to E$. Si la fonction w est une propagation de l'évolution parabolique pour A, alors la fonction*

$$t \to u(t) = e^{-ct}\,w(t)\,, \quad t \in R^+\,, \tag{*}$$

est une propagation de l'évolution parabolique pour $A + cI$ telle que

$$u(0_+) = w(0_+)\,. \tag{1}$$

La preuve est triviale.

3,2. Théorème. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ et $c \in R$. Si l'opérateur A est paraboliquement exact, alors l'opérateur $A + cI$ est aussi paraboliquement exact.*

La preuve résulte sans peine de 3,1.

3,3. Théorème. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ et $c \in R$. Si l'opérateur A est paraboliquement correct, alors $A + cI$ est aussi paraboliquement correct.*

La preuve s'ensuit de 3,1 et 3,2.

4. PERTURBATIONS NUMÉRIQUES DANS LE CAS HYPERBOLIQUE

4,1. Ecrivons pour $\xi \in R^+$:

(1) $$I_1(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+1}}{2^{2k+1}k!\,(k+1)!},$$

(2) $$K_1(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{2^{2k}k!\,(k+1)!},$$

(3) $$M_1(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2)\,\xi^{2k}}{2^{2k}(k+1)!\,(k+2)!}.$$

4,2. Lemme. *Les fonctions I_1, K_1, L_1 sont indéfiniment dérivables sur R^+ et, pour tout $\xi \in R$,*

(1) $$\xi^2 I_1''(\xi) + \xi I_1'(\xi) - (\xi^2 + 1) I_1(\xi) = 0,$$

(2) $$\tfrac{1}{2}\xi K_1(\xi) = I_1(\xi),$$

(3) $$\xi M_1(\xi) = 4K_1'(\xi).$$

4,3. Lemme. *On a*

(1) $$K_1(0) = M_1(0) = 1,$$

(2) $$K_1'(0) = M_1'(0) = 0,$$

(3) $$\frac{K_1'(\xi)}{\xi} \to \frac{1}{4}, \quad \frac{M_1'(\xi)}{\xi} \to \frac{1}{6} \quad (\xi \to 0).$$

4,4. Lemme. *Pour tout $\xi \in R$,*

(1) $$|I_1(\xi)| \leqq e^{|\xi|}, \quad |K_1(\xi)| \leqq e^{|\xi|}, \quad |M_1(\xi)| \leqq e^{|\xi|},$$

(2) $$|K_1'(\xi)| \leqq |\xi|\, e^{|\xi|}, \quad |M_1'(\xi)| \leqq |\xi|\, e^{|\xi|}.$$

4,5. Lemme. *Pour tout $0 < \tau < t$ et $c > 0$*

(1) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \tau K_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)}) = \frac{c^2}{4}\, \tau t\, M_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)}).$$

Preuve. Nous avons d'après 4,2

$$\frac{d}{dt}\tau K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)}) = \frac{c\tau t}{\sqrt{(t^2-\tau^2)}} K_1'(c\sqrt{(t^2-\tau^2)}) = c^2\tau t\,\frac{K_1'(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})}{c\sqrt{(t^2-\tau^2)}} =$$
$$= \tfrac{1}{4}c^2\tau t\,M_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\,.$$

4,6. Lemme. *Pour tout* $0 < \tau < t$ *et* $c > 0$

(1) $$\left|\frac{d}{dt}\tau K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\right| \leqq \frac{c^2}{4}\tau t e^{c\sqrt{(t^2-\tau^2)}},$$

(2) $$\left|\frac{d^2}{dt^2}\tau K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\right| \leqq \frac{c^2\tau}{4}(c^2t^2+1)\,e^{c\sqrt{(t^2-\tau^2)}}.$$

Preuve. Il suffit de se servir de 4,5 et 4,4.

4,7. Lemme. *Pour tout* $0 < \tau < t$ *et* $c > 0$

(1) $$\frac{d}{d\tau}\tau K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)}) = K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)}) - \frac{c^2}{4}\tau^2 M_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\,.$$

Preuve. On utilise 4,2(3).

4,8. Lemme. *Pour tout* $0 < \tau < t$ *et* $c > 0$

(1) $$\left|\frac{d}{d\tau}\tau K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\right| \leqq \left(1+\frac{c^2\tau^2}{4}\right)e^{c\sqrt{(t^2-\tau^2)}},$$

(2) $$\left|\frac{d^2}{d\tau^2}\tau K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\right| \leqq \frac{c^2\tau}{4}(3+c^2\tau^2)\,e^{c\sqrt{(t^2-\tau^2)}}.$$

Preuve. On calcule directment les dérivées en question et on se sert de 4,4.

4,9. Lemme. *Pour tout* $0 < \tau < t$ *et* $c > 0$

(1) $$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\tau}{\sqrt{(t^2-\tau^2)}} I_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)}) =$$
$$= \frac{d^2}{d\tau^2} I_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)}) + c^2\frac{\tau}{\sqrt{(t^2-\tau^2)}} I_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\,,$$

(2) $$\frac{d^2}{dt^2}\tau K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)}) = \frac{d^2}{d\tau^2}\tau K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)}) + c^2\tau K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\,.$$

Preuve. L'identité (1) résulte aisément de 4,2(1) par un calcul direct, l'identité (2) est une conséquence de (1) et 4,2(2).

4,10. Proposition. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $c > 0$ et $w \in R^+ \to E$. Si l'opérateur A est fermé et w est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour A, alors la fonction*

$$[*] \qquad t \to v(t) = w(t) + c \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}} I_1(c \sqrt{(t^2 - c^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,, \quad t \in R^+\,,$$

est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour $A - c^2 I$ telle que

$$(1) \qquad v'(0_+) = w'(0_+)\,.$$

Preuve. Tout d'abord, il résulte de 4,2(2) que, pour tout $t \in R^+$,

$$(3) \qquad v(t) = w(t) + \frac{c^2}{2} \int_0^t \tau K_1(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

En vertu de 4,2–4,5, nous sommes à même d'utiliser la propostion 1,7 et nous en déduisons, pour tout $a \geqq 0$

$$(4) \qquad \int_a^t \tau K_1(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

est deux fois dérivable sur (a, ∞),

$$(5) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^t \tau K_1(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_a^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [\tau K_1(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)})]\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau + t\, w(t) =$$

$$= \frac{c^2}{4} t \int_a^t \tau M_1(c \sqrt{(t^2 - \tau)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau + t\, w(t)\,,$$

$$(6) \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \int_0^t \tau K_1(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_a^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{c^2}{4} t\tau M_1(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)})\right] w(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \frac{c^2}{4} t^2 w(t) + w(t) + t\, w'(t) =$$

$$= \int_a^t \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} [\tau K_1(c \sqrt{(t^2 - c^2)})]\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \frac{c^2}{4} t^2 w(t) + w(t) + t\, w'(t)$$

pour tout $t > a$.

Il s'ensuit de (4)–(6) et de 4,6 que

$$(7) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^t \tau K_1(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau \to 0\,, \quad (t \to 0_+)\,,$$

$$(8) \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \int_0^t \tau K_1(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau \to 0\,, \quad (t \to 0_+)\,,$$

$$(9)\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\alpha}^{t}\tau\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})\,w(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{0}^{t}\tau\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})\,w(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

$$(0<\alpha<t,\ \alpha\to 0_+)\,,$$

$$(10)\quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int_{\alpha}^{t}\tau\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})\,w(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int_{0}^{t}\tau\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})\,w(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

$$(0<\alpha<t,\ \alpha\to 0_+)$$

En outre, on obtient de (4), (6) et 4,9(2), pour tout $0<\alpha<t$,

$$(11)\quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int_{\alpha}^{t}\tau\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})\,w(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\alpha}^{t}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\tau\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})\right]w(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,+$$

$$+\,c^2\int_{\alpha}^{t}\tau\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})\,w(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{c^2}{4}\,t^2\,w(t) + w(t) + t\,w'(t)\,.$$

Maintenant, en intégrant par parties, on obtient en vertu de 4,8, 4,7 et 4,3, pour tout $0<\alpha<t$,

$$(12)\quad \int_{\alpha}^{t}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}\tau\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})\right]w(\tau)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int_{\alpha}^{t}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)}) - \frac{c^2}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\tau^2\,M_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})\right]w(\tau)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= -\int_{\alpha}^{t}\left[K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)}) - \frac{c^2}{4}\tau^2\,M_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})\right]w'(\tau)\,\mathrm{d}\tau + w(t)\,-$$

$$-\,\frac{c^2}{4}\,t^2\,w(t) - K_1(c\,\sqrt{(t^2-\alpha^2)})\,w(\alpha) + \frac{c^2}{4}\,\alpha^2\,M_1(c\,\sqrt{(t^2-\alpha^2)})\,w(\alpha) =$$

$$= -\int_{\alpha}^{t}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\tau\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})\right]w'(\tau)\,\mathrm{d}\tau + w(t) - \frac{c^2}{4}\,t^2\,w(t)\,-$$

$$-\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\alpha^2)})\,w(\alpha) + \frac{c^2}{4}\,\alpha^2\,M_1(c\,\sqrt{(t^2-\alpha^2)})\,w(\alpha) =$$

$$= \int_{\alpha}^{t}\tau\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\tau^2)})\,w''(\tau)\,\mathrm{d}\tau - t\,w'(t) + \alpha\,K_1(c\,\sqrt{(t^2-\alpha^2)})\,w'(\alpha)\,+$$

$$+\,w(t) - \frac{c^2}{4}\,t^2\,w(t) - K_1(c\,\sqrt{(t^2-\alpha^2)})\,w(\alpha) + \frac{c^2}{4}\,\alpha^2\,M_1(c\,\sqrt{(t^2-\alpha^2)})\,w(\alpha)\,.$$

Nous savons que, cfr. 2,4 et 1,5,

(13) w'' est intégrable sur tout intervalle (a, b), $0<a<b$,

(14) $w''(t) = -A\,w(t)$ pour tout $t\in R^+$.

Rappelons encore que l'opérateur A est supposé fermé. Il résulte donc de (13) et (14) à l'aide de 1,8 que, pour tout $0 < \alpha < t$,

$$(15) \qquad \int_\alpha^t \tau K_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau \in \mathfrak{D}(A),$$

$$(16) \qquad A \int_\alpha^t \tau K_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau = \int_\alpha^t \tau K_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, A\, w(\tau)\, d\tau.$$

Il résulte de (11), (12), (14) et (16) que, pour tout $0 < \alpha < t$,

$$(17) \qquad \frac{d^2}{dt^2} \int_\alpha^t \tau K_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau =$$

$$= A \int_\alpha^t \tau K_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau + c^2 \int_\alpha^t \tau K_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau + 2w(t) +$$

$$+ \alpha K_1(c\sqrt{(t^2 - \alpha^2)})\, w'(\alpha) - K_1(c\sqrt{(t^2 - \alpha^2)})\, w(\alpha) +$$

$$+ \frac{c^2}{4} \alpha^2 M_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\alpha).$$

Si l'on fait tendre $\alpha \to 0_+$ dans (10) et (17), on en obtient à l'aide de 4,3 pour tout $t \in R^+$:

$$(18) \qquad \int_0^t \tau K_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau \in \mathfrak{D}(A),$$

$$(19) \qquad \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t \tau K_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau =$$

$$= -A \int_0^t \tau K_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau + c^2 \int_0^t \tau K_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau + 2w(t).$$

Maintenant, nous sommes à même d'achever la preuve.

Il résulte de (3) et (7) que

$$(20) \qquad v(0_+) = 0, \quad v'(0_+) = w'(0_+),$$

En outre, d'après (3) et (4):

(21) v est deux fois dérivable sur R^+,

d'après (3) et (18):

(22) $v(t) \in \mathfrak{D}(A)$ pour tout $t \in R^+$

et d'après (3) et (19):

(23) $v''(t) + A\,v(t) - c^2\,v(t) = 0$ pour tout $t \in R^+$.

Alors, (20)–(23) impliquent l'énoncé de la proposition.

4,11. Ecrivons pour $\xi \in R$

(1) $$I_0(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}.$$

4,12. Lemme. *On a* $I_0(0) = 1$.

4,13. Lemme. *La fonction* I_0 *est indéfiniment dérivable sur* R *et*

(1) $$I_0' = I_1.$$

4,14. Lemme. *Pour tout* $\xi \in R^+$,

(1) $$|I_0(\xi)| \leqq e^{|\xi|}.$$

4,15. Proposition. *Soient* $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $c > 0$ *et* $w \in R^+ \to E$. *Si l'opérateur* A *est fermé et* w *est une propagation cosinus de l'évolution hyperbolique pour* A, *alors la fonction*

[*] $$t \to v(t) = \int_0^t I_0(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\,w(\tau)\,d\tau\,, \quad t \in R^+\,,$$

est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour $A - c^2 I$ *telle que*

(1) $$v'(0_+) = w(0_+).$$

Preuve. Soit, pour $t \in R^+$,

[**] $$v(t) = \int_0^t w(\sigma)\,d\sigma + c\int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}}\,I_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\int_0^\tau w(\sigma)\,d\sigma\,d\tau\,.$$

Il résulte de 4,10 et 2,7 que v est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour $A - c^2 I$ telle que $v'(0_+) = w(0)$.

La formule [*] s'obtient de [**] par intégration par parties en vertu de 4,12–4,14.

4,16. Proposition. *Soient* $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $c > 0$ *et* $w \in R^+ \to E$. *Si l'opérateur* A *est fermé et* w *est une propagation cosinus de l'évolution hyperbolique pour* A, *alors la fonction*

[*] $$t \to u(t) = w(t) + ct\int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}}\,I_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\,w(\tau)\,d\tau\,, \quad t \in R^+\,,$$

est une propagation cosinus de l'évolution hyperbolique pour $A - c^2 I$ telle que

(1) $$u(0_+) = w(0_+).$$

Preuve. Ecrivons, pour $t \in R^+$,

(2) $$v(t) = \int_0^t I_0(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau.$$

D'après 4,15

(3) v est une propagation desinus pour $A - c^2 I$ telle que

(4) $$v'(0_+) = w(0_+).$$

Nous allons démontrer que

(5) v est trois fois dérivable sur R^+,

(6) $$v''(0_+) = 0.$$

Il résulte de 1,7 à l'aide 4,12–4,14 et 4,2–4,4 que (5) est valable et que:

(7) $$v'(t) = ct \int_0^t \frac{I_0'(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}}\, w(\tau)\, d\tau + w(t) = $$
$$= \frac{c^2}{2}\, t \int_0^t K_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau + w(t),$$

(8) $$v''(t) = \frac{c^2}{2} \int_0^t K_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau +$$
$$+ \frac{c^3}{2}\, t^2 \int_0^t \frac{K_1'(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}}\, w(\tau)\, d\tau + \frac{c^2}{2}\, t\, w(t) + w'(t) =$$
$$= \frac{c^2}{2} \int_0^t K_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau +$$
$$+ \frac{c^4}{8}\, t^2 \int_0^t M_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau + \frac{c^2}{2}\, t\, w(t) + w'(t)$$

pour tout $t \in R^+$,

(9) $$w'''(t) = \frac{c^3}{2}\, t \int_0^t \frac{K_1'(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}}\, w(\tau)\, d\tau + \frac{c^2}{2}\, w(t) +$$
$$+ \frac{c^4}{4}\, t \int_0^t M_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau + \frac{c^6}{8}\, t^2 \int_0^t \frac{M_1'(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})}{c\sqrt{(t^2 - \tau^2)}}\, w(\tau)\, d\tau +$$
$$+ \frac{c^4}{8}\, t^2\, w(t) + \frac{c^2}{2}\, w(t) + \frac{c^2}{2}\, t\, w'(t) + w''(t)$$

pour tout $t \in R^+$.

Il est clair que (7)–(9) impliquent (6) en vertu de 4,2–4,4.

Nous avons d'après (3):

(10) $$v(t) \in \mathfrak{D}(A) \quad \text{pour tout} \quad t \in R^+ ,$$

(11) $$v''(t) + A\,v(t) - c^2\,v(t) = 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in R^+ .$$

Alors on obtient aisément de (10), (11), (5) et de 1,9, vu que A est fermé,

(12) $$v'(t) \in \mathfrak{D}(A) \quad \text{pour tout} \quad t \in R^+ ,$$

(13) $$v'''(t) + A\,v'(t) + c^2\,v'(t) = 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in R^+ .$$

En outre, on voit de (7) que

(14) $$v' = u .$$

Ceci étant, notre énoncé s'ensuit de (14), (12), (13) et (4), (6).

4,17. Ecrivons pour $\xi \in R^+$:

(1) $$J_1(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\xi^{2k+1}}{2^{2k+1}k!\,(k+1)!} ,$$

(2) $$L_1(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\xi^{2k}}{2^{2k}k!\,(k+1)} ,$$

(3) $$N_1(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,\xi^{2k}}{2^{2k}(k+1)!\,(k+2)!} .$$

4,18–4,24. Lemmes. *Ces lemmes sont des parallèles des lemmes* 4,2–4,8 *si l'on y remplace* I_1, K_1, M_1 *par* J_1, L_1, N_1 *resp., avec certains changements des signes. Leur formulation précise et leur vérification sera laissée au lecteur.*

4,25. Lemme *analogue à* 4,9, *où l'on écrit* J_1, L_1 *au lieu de* I_1, K_1 *et* $-c^2$ *au lieu de* $+c^2$.

Remarque. On peut trouver des estimations plus fines pour la croissance des fonctions J_1, L_1, N_1 que celles des lemmes 4,4, 4,6 et 4,8.

4,26. Proposition. *Soient* $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $c > 0$ *et* $w \in R^+ \to E$. *Si l'opérateur* A *est fermé et* w *est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour* A, *alors la fonction*

[*] $$t \to v(t) = w(t) - c \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}}\, J_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau , \quad t \in R^+ ,$$

est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour $A + c^2 I$ telle que

(1) $$v'(0_+) = w'(0_+) .$$

4,27. Ecrivons pour $\xi \in R$

(1) $$J_0(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} .$$

4,28.—4,30. Lemmes *analogues à* 4,12—4,14.

4,31. Proposition. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $c > 0$ et $w \in R^+ \to E$. Si l'opérateur A est fermé et w est une propagation cosinus de l'évolution hyperbololique pour A, alors la fonction*

[*] $$t \to v(t) = \int_0^t J_0(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau , \quad t \in R^+ ,$$

est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour $A + c^2 I$ telle que

(1) $$v'(0_+) = w(0_+) .$$

4,32. Proposition. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$, $c > 0$ et $w \in R^+ \to E$. Si l'opérateur A est fermé et w est une propagation cosinus de l'évolution hyperbolique pour A, alors la fonction*

[*] $$t \to u(t) = w(t) - ct \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}} J_1(c \sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, d\tau , \quad t \in R^+ ,$$

est une propagation cosinus de l'évolution hyperbolique pour $A + c^2 I$ telle que

(1) $$u(0_+) = w(0_+) .$$

Les preuves des propositions 4,26, 4,31 et 4,32 peuvent être construites à l'instar des preuves de 4,10, 4,14 et 4,15 sous l'usage des lemmes 4,18—4,25 et 4,28—4,30.

4,33. Lemme. *Soit $\varphi \in R^+ \to R$. Si la fonction φ est non-négative, continue sur R^+, intégrable sur $(0, 1)$ et qu'il existe deux constantes non-négatives K, $\varkappa$ telles que, quel que soit $t \in R^+$,*

(1) $$\varphi(t) \leqq K e^{\varkappa t} \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau ,$$

alors $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in R^+$.

Preuve. Il résulte de (1) que, pour tout $t \in R^+$

$$\frac{d}{dt} K e^{\varkappa t} \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau = K \varkappa e^{\varkappa t} \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau + K e^{\varkappa t} \varphi(t) \leqq (\varkappa + K e^{\varkappa t}) K e^{\varkappa t} \int_0^t \varphi(\tau)\, d\tau$$

ce qui implique, quel que soit $\varepsilon > 0$,

(2) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Ke^{\varkappa t} \int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqq (\varkappa + Ke^{\varkappa t}) \left(\varepsilon + Ke^{\varkappa t} \int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$$

On trouve aisément de (2) que, pour tout $t \in R^+$ et $\varepsilon > 0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\lg\left(\varepsilon + Ke^{\varkappa t} \int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\right] \leqq \varkappa + Ke^{\varkappa t}$$

ce qui entraîne

$$\lg\left(\varepsilon + Ke^{\varkappa t} \int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) - \lg \varepsilon \leqq \varkappa t + K \int_0^t e^{\varkappa \tau}\,\mathrm{d}\tau\,,$$

d'où

(3) $$\varepsilon + Ke^{\varkappa t} \int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqq \varepsilon \exp\left[\varkappa t + K \int_0^t e^{\varkappa \tau}\,\mathrm{d}\tau\right].$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient de (3) pour tout $t \in R^+$

$$Ke^{\varkappa t} \int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqq 0$$

d'où, en vertu de (1),

$$\varphi(t) \leqq 0$$

ce qui, vu la non-négativité de φ implique notre énoncé.

4,34. Théorème de l'exactitude. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ et $c > 0$. Si l'opérateur A est fermé et hyperboliquement exact, alors les opérateurs $A - c^2 I$ et $A + c^2 I$ sont aussi hyperboliquement exacts.*

Preuve. Considérons d'abord l'opérateur $A + c^2 I$.

Soit donc w une déviation de l'évolution hyperbolique pour $A + c^2 I$.

Posons maintenant pour $t \in R^+$

(1) $$v(t) = \int_0^t I_0(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Il résulte sans peine de 3,15 que v est une déviation de l'évolution hyperbolique pour A ce qui entraîne, compte tenu du fait que A est exact, pour tout $t \in R^+$,

(2) $$\int_0^t I_0(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0\,.$$

Il résulte de 4,2–4,4 et de 4,12–4,14 que 1,7 est applicable à (2). On en obtient sans peine que, pour tout $t \in R^+$,

$$\frac{d}{dt}\int_0^t I_0(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\,w(\tau)\,d\tau =$$

$$= ct\int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t^2-\tau^2)}}\,I_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\,w(\tau)\,d\tau + w(t) =$$

$$= \frac{c^2}{2}\,t\int_0^t K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\,w(\tau)\,d\tau + w(t) = 0$$

d'où en vertu de 4,4

$$\|w(t)\| \leqq \frac{c^2}{2}\,t\left\|\int_0^t K_1(c\sqrt{(t^2-\tau^2)})\,w(\tau)\,d\tau\right\| \leqq \frac{c^2}{2}\,te^{ct}\int_0^t\|w(\tau)\|\,d\tau \leqq$$

$$\leqq \frac{c^2}{2}\,e^{(c+1)t}\int_0^t\|w(\tau)\|\,d\tau$$

ce qui entraîne, à l'aide du lemme 4,33, que $\|w(t)\| = 0$ pour tout $t \in R^+$.

La preuve du premier cas est donc complète.

Pour l'opérateur $A - c^2I$, on remplace I_0 par J_0 dans (1) et en utilisant un raisonnement analogue à celui de ci-dessus, on se sert de la propostion 4,31 au lieu de 4,15 et des lemmes correspondants pour J_0, J_1, L_1.

4,35. Théorème de la correction. *Soit $A \in \mathfrak{L}^+(E)$ et $c > 0$. Si l'opérateur A est fermé et cosinus [desinus] correct, alors les opérateurs $A + c^2I$ et $A - c^2I$ sont aussi cosinus [desinus] corrects.*

Preuve. La correction cosinus [desinus] de $A - c^2I$ résulte sans peine de la proposition 4,16 [4,10] et du lemme 4,4. Dans le cas de $A + c^2I$, on se sert de 4,32 [4,26] et du lemme 4,20.

5. EXEMPLES

5,1. Soit $C(R) = C(R^1)$ l'espace des fonctions bornées et uniformément continues $x \in R \to R$ avec la norme $\|x\| = \sup_{\xi\in R}|x(\xi)|$.

Définissons l'opérateur $\Delta_1 \in \mathfrak{L}^+(C(R))$ comme suit: $x \in \mathfrak{D}(\Delta_1)$ si et seulement si $x \in C(R)$ et la seconde dérivée D^2 au sens des distributions appartient aussi à $C(R)$, puis on pose $\Delta_1 x = D^2 x$.

On vérifie aisément que

(1) Δ_1 *est fermé.*

Maintenant, soit $x \in \mathfrak{D}(\Delta_1)$ et posons pour $t \in R^+$, $\xi \in R$

$$w(t)(\xi) = \tfrac{1}{2}[x(\xi + t) + x(\xi - t)]. \tag{2}$$

Il est manifeste que

(3) *w est une propagation cosinus de l'évolution hyperbolique pour* $-\Delta_1$ *telle que* $w(0_+) = x$.

Soit $c > 0$.

Définissons maintenant pour $x \in \mathfrak{D}(\Delta_1)$, $t \in R^+$, $\xi \in R$

$$u(t)(\xi) = \tfrac{1}{2}[x(\xi + t) + x(\xi - t)] + \frac{c}{2}\, t \int_{\xi - t}^{\xi + t} \frac{I_1(c\sqrt{(t^2 - (\xi - \eta)^2)})}{\sqrt{(t^2 - (\xi - \eta)^2)}}\, x(\eta)\, \mathrm{d}\eta \tag{4}$$

$$v(t)(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\xi - t}^{\xi + t} I_0(c\sqrt{(t^2 - (\xi - \eta)^2)})\, x(\eta)\, \mathrm{d}\eta. \tag{5}$$

En vertu de (2), on peur écrire (4) et (5) sous la forme:

$$u(t)(\xi) = w(t)(\xi) + ct \int_0^t \frac{I_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}}\, w(\tau)(\xi)\, \mathrm{d}\tau, \tag{6}$$

$$v(t)(\xi) = \int_0^t I_0(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)(\xi)\, \mathrm{d}\tau, \tag{7}$$

ou sous la forme équivalente:

$$u(t) = w(t) + ct \int_0^t \frac{I_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}}\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \tag{8}$$

$$v(t) = \int_0^t I_0(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau. \tag{9}$$

Les formules (6), (7) se vérifient par substitutions simples.

Donc, les propositions 4,16 et 4,15 impliquent, en vertu de (1), (3), (8) et (9) que

(10) u [v] *est une propagation cosinus [desinus] de l'évolution hyperbolique pour* $-\Delta_1 - c^2 I$ *telle que* $u(0+) = x$ [$v'(0_+) = x$].

Il est simple de démontrer que

(11) l'opérateur $-\Delta_1$ est hyperboliquement cosinus correct.

Par conséquent, le théorème 4,35 entraîne que

(12) *l'opérateur* $-\Delta_1 - c^2 I$ *est aussi hyperboliquement cosinus correct.*

Les résultats analogues s'obtienent aussi pour l'opérateur $-\Delta_1 + c^2 I$.

5,2. Soit $C(R^3)$ l'espace des fonctions bornées et uniformément continues $x \in \in R^3 \to R$, avec la norme $\|x\| = \sup_{\xi \in R^3} |x(\xi)|$.

Définissons l' opérateur $\Delta_3 \in \mathfrak{L}^+(C(R^3))$ comme suit: $x \in \mathfrak{D}(\Delta_3)$ si et seulement si $x \in C(R^3)$ et la distribution $D_1^2 x + D_2^2 x + D_3^2 x$ appartient à $C(R^3)$; puis on pose $\Delta_3 x = D_1^2 x + D_2^2 x + D_3^2 x$.

On vérifie aisément que

(1) *Δ_3 est fermé.*

Maintenant, soit $x \in \mathfrak{D}(\Delta_3)$ et posons pour et $t \in R^+$ et $\xi \in R^3$

(2) $$w(t)(\xi) = \frac{t}{4\pi} \iint_{\|\sigma\| = 1} x(\xi + t\sigma)\, \mathrm{d}\sigma .$$

C'est le fait classique que

(3) *w est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour $-\Delta_3$ telle que $w'(0_+) = x$.*

Soit $c > 0$.

Définissons maintenant pour $x \in \mathfrak{D}(\Delta_3)$, $t \in R^+$ et $\xi \in R^3$

(4) $$v(t)(\xi) = \frac{t}{4\pi} \iint_{\|\sigma\| = 1} x(\xi + t\sigma)\, \mathrm{d}\sigma + \\ + \frac{3c}{4\pi t^2} \iiint_{\|\xi - \eta\| \leq t} \frac{\|\xi - \eta\|^2}{\sqrt{(t^2 - \|\xi - \eta\|^2)}} I_1(c\sqrt{(t^2 - \|\xi - \eta\|^2)})\, x(\eta)\, \mathrm{d}\eta .$$

En vertu de (2), on peut écrire (4) sous la forme:

(5) $$v(t)(\xi) = w(t)(\xi) + c \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}} I_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)(\xi)\, \mathrm{d}\tau$$

ou sous la forme équivalente:

(6) $$v(t) = w(t) + c \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}} I_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)\, \mathrm{d}\tau .$$

Pour vérifier (5), rappelons d'abord que, quel que soit $\varphi \in C(R^3)$ et $r \in R^+$

$$\iiint_{\|\eta\| \leq r} \varphi(\eta)\, \mathrm{d}\eta = \frac{r^2}{3} \int_0^r \iint_{\|\sigma\| = 1} \varphi(\tau\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}\tau .$$

En vertu de cette formule, nous obtenons pour $t \in R^+$:

$$\int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}} I_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)})\, w(\tau)(\xi)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{(t^2 - \tau^2)}} I_1(c\sqrt{(t^2 - \tau^2)}) \frac{\tau}{4\pi} \iint_{\|\sigma\| = 1} x(\xi + \tau\sigma)\, d\sigma\, d\tau =$$

$$= \frac{3}{4\pi t^2} \iiint_{\|\eta - \xi\| \leqq t} \frac{\|\eta - \xi\|^2}{\sqrt{(t^2 - \|\eta - \xi\|^2)}} I_1(c\sqrt{(t^2 - \|\eta - \xi\|^2)})\, x(\eta)\, d\eta$$

car $\tau = \|(\xi + \tau\sigma) - \xi\| = \|\eta - \xi\|$.

Donc, la proposition 4,10 implique en vertu de (1), (3) et (6) que

(7) *v est une propagation desinus de l'évolution hyperbolique pour $-\Delta_3 - c^2 I$ telle que $v'(0_+) = x$.*

Il est possible de démontrer que

(8) l'opérateur $-\Delta_3$ est hyperboliquement desinus correct.

Par conséquent, le théorème 4,35 implique que

(9) *l'opérateur $-\Delta_3 - c^2 I$ est aussi hyperboliquement desinus correct.*

Les résultats analogues s'obtiennent aussi pour l'opérateur $-\Delta_3 + c^2 I$.

Remarque. Les formules 5,1(4), (5) et 5,2(4) sont classiques. On les déduit par diverses méthodes. Dans [2], on utilise systématiquement la méthode, „de descente“ (§ 185 et 188), dans [3] en outre la méthode de l'intégrale de Fourier. Dans le présent article, ce sont des conséquences simples des formules abstraites générales cfr. 4,16 [*], 4,15 [*] et 4,10 [*].

Travaux cités

[1] *E. Hille, R. S. Phillips:* Functional Analysis and Semigroups, Providence 1957.

[2] *В. И. Смирнов:* Курс высшей математики, Том II, Москва 1948.

[3] *Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов:* Сборник задач по математической физике, Москва 1956.

Adresse de l'auteur: Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV v Praze).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

O JEDNÉ EXISTENČNÍ VĚTĚ n-ROZMĚRNÉ CENTRÁLNÍ AXONOMETRIE

VÁCLAV PECINA, Liberec

(Došlo dne 22. května 1970)

Označme E^n n-rozměrný rozšířený eukleidovský prostor a $L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ lineární obal lineárních prostorů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Budeme dále užívat označení a pojmů zavedených v [5]; připomeňme však alespoň následující definici:

Nechť k, n jsou přirozená čísla ($2 \leqq k \leqq n$, $n \geqq 3$). n-ramennou, k-rozměrnou polyedrickou konfigurací $K_n^k \equiv \{O, A_i, B_i\}$ rozumíme konfiguraci navzájem různých bodů $O, A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n$, jestliže:

1) O, A_i, B_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) je trojice kolineárních bodů, body O, A_i jsou vlastní.

2) Pro přímky $x_i = OA_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) platí $L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = E^k$.

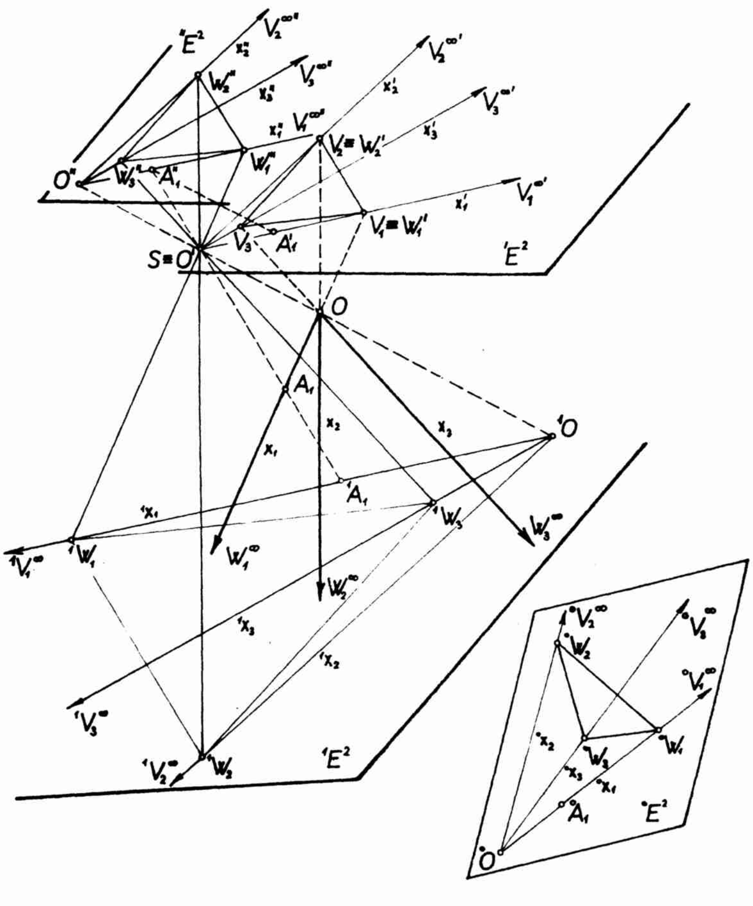
Jsou-li dány konfigurace $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i\} \subset E^n$ a ${}^0K_n^{n-1} \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\} \subset {}^0E^{n-1}$ (přičemž $(OA_iB_i) \neq ({}^0O{}^0A_i{}^0B_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $n \geqq 3$) a jsou-li $S^{n-1}(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ resp. ${}^0S^{n-1}({}^0W_1, {}^0W_2, \ldots, {}^0W_n)$ simplexy tvořené úběžníky $V_i({}^0W_i)$ přímek $x_i({}^0x_i)$ v projektivnostech bodových řad $x_i(O, A_i, B_i, \ldots) \barwedge {}^0x_i({}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i, \ldots)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pak podobnost simplexů S^{n-1} a ${}^0S^{n-1}$ je nutnou a postačující podmínkou pro existenci takové centrální projekce $\mathscr{P}$ (z bodu do nadroviny v E^n), v níž je $\mathscr{P}(K_n^n) \cong {}^0K_n^{n-1}$ (viz [2], [5]).

Jsou-li dány dvě libovolné konfigurace K_n^n a ${}^0K_n^{n-1}$, nemusí být $S^{n-1} \sim {}^0S^{n-1}$, a nelze tedy vždy dosáhnout toho, aby centrální projekcí konfigurace K_n^n byla konfigurace shodná s konfigurací ${}^0K_n^{n-1}$; přiřazením odpovídajících si vrcholů simplexů ${}^0S^{n-1}$ a S^{n-1} je však stanovena jistá afinita $\mathscr{A} : {}^0E^{n-1} \to {}'E^{n-1}$. Budeme se dále zabývat souvislostí této afinity s centrální projekcí konfigurace K_n^n a konfigurací ${}^0K_n^{n-1}$.

Věta 1. *Nechť jsou dány konfigurace* $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i\} \subset E^n$, ${}^0K_n^{n-1} \equiv \{{}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i\} \subset {}^0E^{n-1}$ ($n \geqq 3$) *a nechť* $(OA_iB_i) \neq ({}^0O{}^0A_i{}^0B_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Nechť* $V_i({}^0W_i)$ *je úběžník přímky* $x_i({}^0x_i)$ *v projektivnosti bodových řad* $x_i(O, A_i, B_i, \ldots) \barwedge {}^0x_i({}^0O, {}^0A_i, {}^0B_i, \ldots)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *a* $L({}^0W_1, {}^0W_2, \ldots, {}^0W_n) = {}^0E^{n-1}$. *Označme* ${}'E^{n-1} = L(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ *a* $\mathscr{A}$ *afinitu* ${}^0E^{n-1} \to {}'E^{n-1}$, *stanovenou přiřazením* ${}^0W_i \to V_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Pak existuje vlastní nadrovina ${}^1\mathsf{E}^{n-1} \subset \mathsf{E}^n$ *a vlastní bod* $S \in \mathsf{E}^n$ $(S \notin {}^1\mathsf{E}^{n-1})$, *jež tvoří basi* $[S, {}^1\mathsf{E}^{n-1}]$ *centrální projekce* $\mathscr{P}$ *v* E^n *tak, že* $\mathscr{P}(K_n^n) \cong \mathscr{A}({}^0K_n^{n-1})$.

Důkaz (obr. 1 pro $n = 3$). Sestrojme v nadrovině $'\mathsf{E}^{n-1}$ konfiguraci $\mathscr{A}({}^0K_n^{n-1}) = {}'K_n^{n-1} \equiv \{O', A_i', B_i'\}$ a zvolme $S = \mathscr{A}({}^0O)$ za střed (S je nutně vlastní bod, $S \subset {}'\mathsf{E}^{n-1} \subset \mathsf{E}^n$) a libovolnou (vlastní) nadrovinu ${}^1\mathsf{E}^{n-1}({}^1\mathsf{E}^{n-1} \neq {}'\mathsf{E}^{n-1}, {}^1\mathsf{E}^{n-1} \subset \mathsf{E}^n)$



Obr. 1.

rovnoběžnou s $'\mathsf{E}^{n-1}$ za průmětnu centrální projekce $\mathscr{P}$ v E^n. Sestrojme dále konfiguraci $\mathscr{P}(K_n^n) = {}^1K_n^{n-1} \equiv \{{}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i\}$. Pro $x_i' = O'A_i' = \mathscr{A}({}^0x_i)$, ${}^1x_i = {}^1O\,{}^1A_i = \mathscr{P}(x_i)$ platí $x_i' \parallel {}^1x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (je totiž $\mathscr{A}({}^0V_i^\infty) = \mathscr{P}(V_i) = {}^1V_i^\infty \in {}^1x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$).

Vezměme nyní translaci $\mathscr{T} : \mathsf{E}^n \to \mathsf{E}^n$, určenou vektorem $\overrightarrow{OS}$ a označme $''\mathsf{E}^{n-1} = \mathscr{T}('\mathsf{E}^{n-1})$, $''K_n^{n-1} \equiv \{O'', A_i'', B_i''\} = \mathscr{T}('K_n^{n-1})$. Poněvadž $\mathscr{P}(W_i^\infty) = {}^1W_i \in {}^1x_i$, je zřejmě $\mathscr{T}(x_i) = S\,{}^1W_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a jistě je $''K_n^{n-1} \cong {}'K_n^{n-1}$. Dokážeme dále, že

$\mathscr{P}(K_n^n) = \mathscr{P}({}''K_n^{n-1})$. Poněvadž $W_i'' = \mathscr{T}\mathscr{A}({}^0W_i) \in S^1W_i$, je $\mathscr{P}(W_i'') = {}^1W_i$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$, a vzhledem k $x_i'' = O''W_i''$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a $\mathscr{P}(O'') = {}^1O$, je $\mathscr{P}(x_i'') = {}^1x_i =$ $= \mathscr{P}(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Poněvadž $A_i'' \in x_i''$, $B_i'' \in x_i''$, je $\mathscr{P}(A_i'') = {}^1A_i^* \in {}^1x_i$ a $\mathscr{P}(B_i'') =$ $= {}^1B_i^* \in {}^1x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Projekce $\mathscr{P}$ zachovává dvojpoměr a tedy $(OA_iV_iW_i^\infty) =$ $= ({}^1O{}^1A_i{}^1V_i^{\infty 1}W_i)$. Z projektivnosti bodových řad $x_i(O, A_i, B_i, \ldots) \barwedge {}^0x_i({}^0O, {}^0A_i,$ ${}^0B_i, \ldots)$ plyne $(OA_iV_iW_i^\infty) = ({}^0O{}^0A_i{}^0V_i^{\infty 0}W_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Je tedy

$$({}^0O{}^0A_i{}^0V_i^{\infty 0}W_i) = ({}^1O{}^1A_i{}^1V_i^{\infty 1}W_i)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{1}$$

Poněvadž ${}^1A_i^* = \mathscr{P}\mathscr{T}\mathscr{A}({}^0A_i)$, ${}^1O = \mathscr{P}\mathscr{T}\mathscr{A}({}^0O)$, ${}^1V_i^\infty = \mathscr{P}\mathscr{T}\mathscr{A}({}^0V_i^\infty)$, ${}^1W_i =$ $= \mathscr{P}\mathscr{T}\mathscr{A}({}^0W_i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, platí

$$({}^0O{}^0A_i{}^0V_i^{\infty 0}W_i) = ({}^1O{}^1A_i^{*1}V_i^{\infty 1}W_i) \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{2}$$

Z (1) a (2) plyne $({}^1O{}^1A_i{}^1V_i^{\infty 1}W_i) = ({}^1O{}^1A_i^{*1}V_i^{\infty 1}W_i)$ a odtud ${}^1A_i^* = {}^1A_i = \mathscr{P}(A_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Analogicky ${}^1B_i^* = {}^1B_i = \mathscr{P}(B_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Je tedy $\mathscr{P}(K_n^n) =$ $= \mathscr{P}({}''K_n^{n-1})$.

Poněvadž konfigurace ${}''K_n^{n-1}$ a $\mathscr{P}(K_n^n) = {}^1K_n^{n-1}$ leží v rovnoběžných nadrovinách, jsou podobné. Protože ${}''K_n^{n-1} \cong {}'K_n^{n-1}$, je také ${}'K_n^{n-1} \sim {}^1K_n^{n-1}$. Bude-li při pevném S nadrovina ${}^1\mathsf{E}^{n-1}({}^1\mathsf{E}^{n-1} \nparallel {}'\mathsf{E}^{n-1})$ nabývat všech možných navzájem rovnoběžných poloh, budou konfigurace ${}^1K_n^{n-1} = P(K_n^n)$ homotetické, přičemž koeficient homotetie nabude všech nenulových hodnot. Konfigurace ${}'K_n^{n-1}$ a ${}^1K_n^{n-1}$ pak budou podobné, přičemž koeficient podobnosti nabude všech kladných hodnot. Lze tedy určit polohu ${}^1\mathsf{E}^{n-1}$ tak, že ${}'K_n^{n-1} = \mathscr{A}({}^0K_n^{n-1}) \cong \mathscr{P}(K_n^n)$.

Poznámka 1. Z důkazu věty 1 je zřejmé, že při zachování všech předpokladů věty 1 platí následující tvrzení:

Existuje centrální projekce $\mathscr{P}$ s basí $[S, {}^1\mathsf{E}^{n-1}]$ a podobnost $\mathscr{Q} : {}'\mathsf{E}^{n-1} \to {}^1\mathsf{E}^{n-1}$ s libovolným kladným koeficientem tak, že $\mathscr{P}(K_n^n) = \mathscr{Q}\mathscr{A}({}^0K_n^{n-1})$.

Afinita $\mathscr{Q}\mathscr{A}$ z předchozího tvrzení má zřejmě libovolný kladný modul a z věty 1 tedy plyne (pro $n = 3$) věta Beskinova (až na omezení $(OA_iB_i) \nparallel ({}^0O{}^0A_i{}^0B_i)$).

V případě, že afinita $\mathscr{A}$ z věty 1 je podobností, obdržíme z věty 1 jednoduchou úvahou postačující podmínku pomocné věty z [5].

Zobecníme nyní větu 1 pro případ centrální projekce z $(n - m - 1)$-rozměrného centra do m-rozměrného podprostoru.

Věta 2. *Nechť jsou dány konfigurace $K_n^n \equiv \{O, A_i, B_i\} \subset \mathsf{E}^n$ a ${}^0K_n^m \equiv \{{}^0O, {}^0A_i,$ ${}^0B_i\} \subset {}^0\mathsf{E}^m$ $(m \geqq 2,\ n \geqq m + 1)$. Nechť $(OA_{\alpha+k}B_{\alpha+k}) \nparallel ({}^0O{}^0A_{\alpha+k}{}^0B_{\alpha+k})$, $k =$ $= 0, 1, \ldots, m$; α pevné, $\alpha = 1, 2, \ldots, n - m$ a nechť $V_{\alpha+k}({}^0W_{\alpha+k})$ je úběžník přímky $x_{\alpha+k}({}^0x_{\alpha+k})$ v projektivnosti bodových řad $x_{\alpha+k}(O, A_{\alpha+k}, B_{\alpha+k}, \ldots) \barwedge {}^0x_{\alpha+k}({}^0O,$ ${}^0A_{\alpha+k}, {}^0B_{\alpha+k}, \ldots)$ $k = 0, 1, \ldots, m$; α pevné, $\alpha = 1, 2, \ldots, n - m$. Nechť $\mathsf{L}({}^0W_i,$*

${}^0W_{i+1}, \ldots, {}^0W_{i+m}) = {}^0\mathsf{E}^m$, $L(V_i, V_{i+1}, \ldots, V_{i+m}) = {}'\mathsf{E}^m_i$, $i = \alpha$, a $\mathscr{A}_\alpha : {}^0\mathsf{E}^m \to {}'\mathsf{E}^m_\alpha$ *je afinita stanovená přiřazením* ${}^0W_j \to V_j$ $(j = \alpha, \alpha + 1, \ldots, \alpha + m)$, α *pevné*, $\alpha = 1, 2, \ldots, n - m$.

Pak pro každé $\alpha = 1, 2, \ldots, n - m$ *existují prostory* $\mathsf{E}^{n-m-1}_\alpha \subset \mathsf{E}^n$, ${}^1\mathsf{E}^m_\alpha \subset \mathsf{E}^n$, *jež tvoří basi* $[\mathsf{E}^{n-m-1}_\alpha, {}^1\mathsf{E}^m_\alpha]$ *centrální projekce* $\mathscr{P}_\alpha$ *tak, že* $\mathscr{P}_\alpha(K^n_n) \cong \mathscr{A}_\alpha({}^0K^m_n)$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti stačí zřejmě provést důkaz pro $\alpha = 1$.

a) $n > m + 1$. Uvažujme nejprve částečnou konfiguraci $K^{m+1}_{m+1} \subset K^n_n$, ležící v $\mathsf{E}^{m+1} = L(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}) \subset \mathsf{E}^n$ a částečnou konfiguraci ${}^0K^m_{m+1} \subset {}^0K^m_n$ ležící v ${}^0\mathsf{E}^m$. Poněvadž K^{m+1}_{m+1} a ${}^0K^m_{m+1}$ splňují předpoklady věty 1, existuje vlastní bod $S \in \mathsf{E}^{m+1}$ a vlastní nadrovina ${}^1\mathsf{E}^m_1 \subset \mathsf{E}^{m+1}$, jež tvoří basi $[S, {}^1\mathsf{E}^m_1]$ centrální projekce $\mathscr{P}$ (v prostoru E^{m+1}) tak, že $\mathscr{P}(K^{m+1}_{m+1}) = {}^1K^m_{m+1} \equiv \{{}^1O, {}^1A_i, {}^1B_i\} \cong \mathscr{A}_1({}^0K^m_{m+1})$. Sestrojme v ${}^1\mathsf{E}^m_1$ konfiguraci ${}^1K^m_n \cong \mathscr{A}_1({}^0K^m_n)$ tak, aby ${}^1K^m_{m+1} \subset {}^1K^m_n$. Zvolme nyní ${}^1\mathsf{E}^m_1$ za průmětnu centrální projekce $\mathscr{P}_1$ v E^n a hledejme její střed tak, aby $\mathscr{P}_1(K^n_n) = {}^1K^m_n$. Sestrojme $\mathsf{E}^{n-m-1}_1 = L(q_2, q_3, \ldots, q_{n-m})$, kde q_i je příčka mimoběžek $A_{m+i}{}^1A_{m+i}$, $B_{m+i}{}^1B_{m+i}$ $(i = 2, 3, \ldots, n - m)$ vedená bodem S. Snadno zjistíme, že v centrální projekci $\mathscr{P}_1$ (v E^n) s basí $[\mathsf{E}^{n-m-1}_1, {}^1\mathsf{E}^m_1]$ je $\mathscr{P}_1(K^n_n) = {}^1K^m_n \cong \mathscr{A}_1({}^0K^m_n)$ (příslušná úvaha je obdobná jako v důkazu věty 2 v [5]).

b) $n = m + 1$. Věta je totožná s větou 1.

Poznámka 2. Bude-li průmětna ${}^1\mathsf{E}^m_\alpha$ z věty 2 nabývat při pevném středu $\mathsf{E}^{n-m-1}_\alpha$ všech navzájem rovnoběžných poloh $(\mathsf{E}^{n-m-1}_\alpha \cap {}^1\mathsf{E}^m_\alpha = \emptyset)$, budou konfigurace $\mathscr{P}_\alpha(K^n_n)$ podobné, přičemž koeficient podobnosti nabude všech kladných hodnot. Platí tedy při zachování všech předpokladů věty 2 následující tvrzení:

Pro každé $\alpha = 1, 2, \ldots, n - m$ *existují prostory* $\mathsf{E}^{n-m-1}_\alpha \subset \mathsf{E}^n$, ${}^1\mathsf{E}^m_\alpha \subset \mathsf{E}^n$, *jež tvoří basi* $[\mathsf{E}^{n-m-1}_\alpha, {}^1\mathsf{E}^m_\alpha]$ *centrální projekce* $\mathscr{P}_\alpha$ *a podobnost* $\mathscr{Q}_\alpha : {}'\mathsf{E}^m_\alpha \to {}^1\mathsf{E}^m_\alpha$ *tak, že* $\mathscr{P}_\alpha(K^n_n) = \mathscr{Q}_\alpha\mathscr{A}_\alpha({}^0K^m_n)$, *přičemž koeficient podobnosti je libovolné kladné číslo.*

Literatura

[1] *V. Havel:* O základních větách vícerozměrné centrální axonometrie I, II, III. Matem. fys. čas. SAV, *VII*, 2-1957 a *VIII*, 2-1958.

[2] *V. Havel:* Sdružené normalisované desarguesovské konfigurace. Spisy přír. fak. univ. v Brně, 1958.

[3] *L. Drs:* Centrální axonometrie v *n*-rozměrném prostoru. Čas. pro pěst. mat., *85* (1960), 274—290.

[4] *E. A. Мчедлишвили:* Проективные основания начертательной геометрии. Труды Груз. полит. инст., Тбилиси, *19* (1949).

[5] *V. Pecina:* K základní větě *n*-rozměrné centrální axonometrie. Čas. pro pěst. mat. *96* (1971), 81—85.

Adresa autora: Liberec, Hálkova 3 (Vysoká škola strojní a textilní).

Zusammenfassung

ÜBER EIN EXISTENZTHEOREM DER n-DIMENSIONALEN ZENTRALAXONOMETRIE

VÁCLAV PECINA, Liberec

In der Arbeit zeigt man zuerst, dass zwei gegebene Polyederkonfigurationen K_n^n und ${}^0K_n^{n-1}$ eine gewisse Afinität $\mathscr{A}$ und Zentralprojektionen $\mathscr{P}$ (aus einem Punkt nach Hyperebene im n-dimensionalen erweiterten euklidischen Raum) so bestimmen, dass $\mathscr{P}(K_n^n) \cong \mathscr{A}({}^0K_n^{n-1})$ ist. Das Resultat ist dann auf den Fall der Zentralprojektion von einem $(n - m - 1)$-dimensionalen Zentrum in einen m-dimensionalen Unterraum $(2 \leqq m < n)$ verallgemeinert.

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ UVEŘEJNĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

BOHDAN ZELINKA, Liberec: *Alternating connectivity of tournaments.* (Alternující souvislosti pro turnaje.)

Pojmy $(+-)$-souvislosti, $(-+)$-souvislosti a alternující souvislosti orientovaných grafů, které autor zavedl ve svém předchozím článku, se vyšetřují pro případ, kdy daný orientovaný graf je tzv. turnaj.

SVATOPLUK FUČÍK, Praha: *Fredholm alternative for nonlinear opeartors in Banach spaces and its applications to differential and integral equations.* (Fredholmova alternativa pro nelineární operátory v Banachových prostorech a její aplikace na diferenciální a integrální rovnice.)

Práce pojednává o existenci řešení rovnice $\lambda Tx - Sx = f$ v závislosti na reálném parametru λ. Předpokládejme, že T a S jsou nelineární operátory definované na reálném Banachově prostoru X a s oborem hodnot v reálném prostoru Y. Operátor T má vlastnosti „identického operátoru" a S je totálně spojitý. V práci jsou dokázány věty následujícího typu: Za jistých předpokladů na X, Y, T, S je $(\lambda T - S)(X) = Y$, jestliže rovnice $\lambda Tx - Sx = \theta$ má pouze triviální řešení. Tyto abstraktní věty jsou použity k důkazu existence řešení Dirichletova problému pro parciální diferenciální rovnice a jistých integrálních rovnic. V aplikacích je potřebné vědět, že příslušné Banachovy prostory mají Schauderovu basi. Tato vlastnost Sobolevových prostorů $W_p^{(k)}(0,1)$ a $\mathring{W}_p^{(1)}(0,1)$ je dokázána ve čtvrté části práce.

TIBOR ŠALÁT, Bratislava: *Remarks on Denjoy property and $\mathscr{M}'_2$ property of real functions.* (Poznámky k Denjoyovej vlastnosti a k vlastnosti $\mathscr{M}'_2$ reálnych funkcií.)

V práci sa vyšetrujú určité systémy reálnych funkcií z druhej Baireovej triedy, definované pomocou Zahorského vlastnosti $\mathscr{M}'_2$, Denjoyovej a Darbouxovej vlastnosti.

MIROSLAV SOVA, Praha: Perturbation numériques des évolutions parabolique et hyperbolique. (Numerické perturbace parabolických a hyperbolických evolucí.)

Buď dáno nějaké řešení rovnice (A) $w'(t) + A\,w(t) = 0$, (B) $w''(t) + A\,w(t) = 0$. V práci se ukazuje, jak z tohoto řešení zkonstruujeme řešení příslušné rovnice perturbované (A') $u'(t) + A\,u(t) + c\,u(t) = 0$, (B') $u''(t) + A\,u(t) + c\,u(t) = 0$ se stejnými počátečními podmínkami.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

RECENSE

Constance Reid: HILBERT. With an appreciation of Hilbert's mathematical work by Hermann Weyl. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1970, XI + 290 str., portrét a 28 obrázků. Cena 32 DM.

„*Při analyse velkého matematického talentu musíme rozlišovat mezi schopností tvořit nové koncepce a darem odkrýt hluboké souvislosti a zjednodušující základní pojmy. Hilbertova velikost spočívá v jeho mocném hluboko pronikajícím duševním vidění. Všechny jeho práce přinášejí příklady ze vzdálených oblastí, jejichž vnitřní příbuznost a souvislost se studovaným problémem mohl objevit jenom on; z toho všeho vytvořil syntézu, své umělecké dílo. Pokud jde o tvorbu nových věcí, cenil bych výše Minkowského a z velkých klasiků např. Gausse, Galoise, Riemanna. Ale ve smyslu pro odkrývání syntézy jen velmi málo z těch největších se vyrovnalo Hilbertovi.*“. Tak vylíčil a ocenil Hilbertův tvůrčí typ O. Blumenthal v životopisném článku o Hilbertovi uveřejněném v posledním svazku sebraných spisů D. Hilberta v r. 1935. W. Heisenberg napsal „*Nepřímo měl Hilbert velmi silný vliv na rozvoj kvantové mechaniky v Göttingen. Tento vliv může plně postihnout jen ten, kdo v Göttingen studoval ve dvacátých letech. Hilbert a jeho kolegové vytvořili zde zvláštní matematickou atmosféru a mladší matematikové byli tak vytrénováni v myšlenkovém okruhu Hilbertovy teorie integrálních rovnic a lineární algebře, že každý projekt v této oblasti mohl být vykonán v Göttingen lépe než kdekoliv jinde. Byla to mimořádně příznivá shoda okolností, že matematické metody kvantové mechaniky byly přímou aplikací Hilbertovy teorie integrálních rovnic*“. A. Tarski shledává, že D. Hilbert měl silný a velice významný vliv i v některých oblastech matematiky, v nichž sám nedosáhl vyjímečně významných výsledků. Jako příklady takových oblastí uvádí základy geometrie a metamatematiku a soudí, že „*... ačkoliv žádný určitý významný výsledek není spojován s Hilbertovým jménem, přece Hilbert zaslouží býti nazván otcem metamatematiky.*“ Také K. Gödel považoval Hilbertův program pro základy matematiky za „*vysoce zajímavý a důležitý i přes své vlastní negativní výsledky*“ a dodal „*dokázáno je jenom to, že specifický epistemologický cíl, který měl Hilbert na mysli, nemůže být dosažen. Tímto cílem bylo dokázat bezespornost axiomů klasické matematiky na základě tak konkrétním a bezprostředně přesvědčivém jako elementární aritmetika*“.

Těmito několika výroky vynikajících vědců chci naznačit, před jak obtížným úkolem stála autorka, aby postihla nejen Hilbertovu životní dráhu a vědecké dílo, ale také jeho působení, dobu v níž působil a jeho osobnost. Právě na tyto věci se autorka soustřeďuje; na mnoha místech s taktem využívá svědectví Hilbertových současníků, vyvolává tak silný pocit autentičnosti a dosahuje zařazení do širších souvislostí. O vlastních matematických výsledcích Hilbertových píše na úrovni obecné a spíše popularizační; proto je kniha doplněna statí H. Weyla „*David Hilbert and His Mathematical Work*“ přetištěnou z Bulletin of the American Mathematical Society 50, 612—654 (1944), Boletin da Sociedade de Matemática de São Paulo 1, 76—104 (1946) a 2, 37—60 (1947) a na ni odkazuji čtenáře, který se zajímá o odborný výklad a zhodnocení Hilbertových matematických výsledků. Zde jen připomenu některé rysy Hilbertovy osobnosti a některé okolnosti jeho života.

Hilbert byl zcela oddán vědě a jejímu rozvoji. Matematiky rozděloval na ty, kteří dosáhli úspěchu při řešení některého zajímavého, důležitého a obtížného problému a na ty, kteří takového úspěchu nedosáhli. Jakýkoliv předsudek, ať povahy nacionální, rasové nebo sexuální byl mu vždy zcela cizí. Hilbert např. prosadil proti tehdejším předpisům udělení doktorátu některým studentům, kteří sice nesložili maturitní zkoušku, ale předložili vynikající disertační práci. Dnes si snad už nedovedeme představit, co to znamenalo probojovat (koncem druhého desetiletí tohoto století), aby v Göttingen byla jmenována soukromou docentkou žena, i když to byla tak vynikající matematička jako Emmy Noetherová. Na námitku, že jako soukromá docentka mohla by se E. Noetherová stát členkou akademického senátu, odpovídal Hilbert se sarkasmem: „*Pánové, nevidím proč by to, že jde o ženu mohlo být důvodem, aby nebyla jmenována soukromou docentkou. Konečně senát nejsou lázně.*" A dokud se nepodařilo dosáhnout jmenování Emmy Noetherové, Hilbert neváhal obcházet předpisy tím, že ohlásil přednášku a tu pak konala Emmy Noetherová.

15. 10. 1914 německá vláda uveřejnila prohlášení kulturnímu světu. Podepsaní nejslavnější umělci a vědci prohlašovali, že stojí pevně za císařem tak jako celý německý národ, vypočítávali „lži a pomluvy nepřítele" a vyvraceli je řadou tvrzení jako „Není pravda, že Německo vyvolalo tuto válku" nebo dokonce „Není pravda, že Německo porušilo neutralitu Belgie". Na prohlášení byli podepsáni mimo jiné Ehrlich, Fischer, Klein, Nernst, Planck, Roentgen, Wassermann, Wien. Hilbert odmítl podepsat toto prohlášení; podobně je nepodepsal Einstein, který v té době působil v Ústavu císaře Viléma v Berlíně a byl švýcarským státním příslušníkem.

Když se Hilbert v r. 1917 dozvěděl, že ve Francii zemřel G. Darboux, napsal článek o něm, o jeho matematickém díle a o jeho vlivu na matematiku ve Francii pro „Nachrichten". Když byl článek v tisku, před Hilbertovým domem se shromáždil dav rozvášněných studentů, kteří požadovali, aby Hilbert článek stáhl a aby všechny hotové výtisky článku byly zničeny. Hilbert odmítl. Navštívil rektora a pohrozil resignací, pokud se mu nedostane omluvy. Omluva následovala okamžitě a článek o G. Darbouxovi zůstal v tisku.

Po první světové válce němečtí matematici nebyli zváni na mezinárodní konference. V r. 1928 italští matematici pořádali Mezinárodní matematický kongres v Bologni (předcházející se konal v r. 1912) a rozeslali pozvání též na vysoké školy v Německu a německým matematickým organizacím. Ludwig Biberbach poslal dopis německým vysokým školám a gymnasiím, v němž apeloval, aby němečtí matematici bojkotovali bolognský kongres. Na to Hilbert rozeslal dopis, v němž prohlásil, že cesta doporučovaná panem Biberbachem přinese neštěstí německé vědě a že je věcí správného úsudku i elementární zdvořilosti zaujmout ke kongresu v Bologni příznivý postoj. V srpnu 1928, ač nemocen, Hilbert vedl delegaci 67 německých matematiků.

O pět let později bylo matematické i fyzikální středisko v Göttingen těžce postiženo nacistickými rasovými zákony, snad nejvíce ze všech vědeckých pracovišť v Německu. Hilbertovi bylo 71 let a byl vážně nemocen. „*Když jsem byl mladý*" svěřil se Hilbert jednou F. Rellichovi, „*rozhodl jsem se, že nebudu nikdy opakovat, co jsem slýchaval od starých lidí — jak krásné byly staré časy a jak zlé jsou nynější. To jsem nikdy nechtěl říkat, až budu starý. A nyní musím.*"

Na jednom banketu otázal se nový nacistický ministr výchovy Hilberta, jak se rozvíjí matematika v Göttingen, když byla zbavena židovského vlivu. „*Matematika v Göttingen?*" odvětil Hilbert, „*ta už vůbec žádná není.*"

Celý svůj bohatý a plodný život David Hilbert hluboce věřil v poznávací sílu lidského intelektu a v účinnost abstraktních metod. „*Skutečná příčina, podle mého názoru, proč Comte nemohl nalézt neřešitelný problém, je v tom, že nic takového jako neřešitelné problémy neexistuje*" řekl Hilbert na své přednášce v Königsbergu v r. 1930. A již v r. 1914 v době, kdy jedinou známou elementární částicí byl elektron, Hilbert tvrdil, že musí existovat rovnice, z níž plyne existence takové částice. „*Musíme vědět. Budeme vědět.*" Těmito slovy zakončil Hilbert svou přednášku v Königsbergu v r. 1930 a tato slova jsou také vytesána na jeho náhrobku v Göttingen.

Jaroslav Kurzweil, Praha

H. G. Garnir, W. De Wilde, J. Schmets, ANALYSE FONCTIONNELLE (Théorie constructive des espaces linéaires à semi-normes). Tom I: Théorie générale, Birkhäuser Verlag, Bassel und Stuttgart, 1968. X + 562 stran.

Tato kniha je učebnicí obecné funkcionální analýzy, tj. lokálně konvexních prostorů a jejich vlastností. Autoři důsledně užívají pojem seminormy (lokálně konvexním prostorem se rozumí lineární prostor s jistým systémem seminorem na něm definovaných atd.), což vyžaduje menší čtenářovy znalosti z topologie, než je obvyklé. Charakteristickým rysem knihy je konstruktivní přístup k celé látce. Nepoužívá se axiom výběru ani tvrzení s ním ekvivalentní (Zermelo, Zorn), ale jen axiom spočetného výběru (např. lze vybrat po jednom prvku z každé množiny posloupnosti množin). Toto má za následek, že zde není dokázána řada obecných tvrzení včetně tvrzení o existenci Hamelovy base v lineárním prostoru. Avšak to není na závadu, neboť: 1° většina běžných lineárních (lokálně konvexních) prostorů, zejména prostorů aplikované matematiky, spadá do třídy prostorů v této knize uvažovaných, 2° příslušná obecná tvrzení se dají obvykle odvodit použitím obecného axiomu výběru (resp. nějakého tvrzení s ním ekvivalentního) stejně jako jejich zde uvedené „spočetné“ analogy, 3° řada nepěkných vlastností lokálně konvexních prostorů je způsobena právě užitím obecného axiomu výběru při jejich odvození.

Nyní uvedeme přehled knihy. První kapitola (148 stran) se zabývá lineárními prostory se systémy seminorem na nich definovaných. Jednotlivé paragrafy: lineární prostory, seminormy, konvergence (posloupností!), otevřené a uzavřené množiny, ohraničené množiny, prekompaktní, kompaktní a sekvenciálně kompaktní množiny, speciální prostory (Bairovy, bornologické, tonnelé atd.), součinový a podílový prostor.

Ve druhé kapitole (240 stran) se studuje duální prostor k lineárnímu prostoru, na němž je definovaný systém seminorem. Jednotlivé paragrafy: lineární funkcionály, lineární ohraničené funkcionály, slabá topologie, duální prostory, některé speciální duální prostory, nukleární prostory, bilineární funkcionály a tensorový součin, komplexní modulární prostor a multiplikativní funkcionály.

Třetí kapitola (168 stran) se zabývá lineárními operátory. Jednotlivé paragrafy: lineární operátory, prostory ohraničených lineárních operátorů, funkce definované na Euklidově prostoru s hodnotami v lineárním prostoru se systémem seminorem na něm definovaných, spektrální teorie ohraničených lineárních operátorů.

Soupis literatury je omezen pouze na knihy (26 cit.). Na konci knihy je podrobný věcný rejstřík.

Knihu lze doporučit všem, kdo si chtějí osvojit základní znalosti z teorie lokálně konvexních prostorů. Čtenář si může ověřit prostudovanou látku na množství cvičení umístěných nejen na konci téměř každého paragrafu, ale i vhodně v textu.

Josef Daneš, Praha

A. Doneddu, MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURS ET SPÉCIALES. 3. COMPLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUES (Spéciales et MP 2), Dunod, Paris (1968), str. XXIII + 348, cena neuvedena.

Recenzovaná učebnice je třetím svazkem čtyřsvazkového úvodu do moderní matematiky (jsou však ještě ohlášeny dva svazky cvičení a úloh) určeného pro posluchače matematiky a fyziky prvých dvou ročníků matematicko-fyzikálních fakult*). Prvé dva svazky pokrývají program prvého ročníku a přinášejí základy moderní vyšší matematiky. Třetí svazek obsahuje doplňky algebraické geometrie, čtvrtý doplňky analýzy.

Již v prvém svazku se čtenář seznamuje s axiomatickou výstavbou geometrie vycházející z definice: geometrie je studium bodového prostoru, na němž operuje grupa transformací.

Třetí svazek volí jiný přístup k axiomatice geometrie. Čtenář již zná z předchozích svazků základy euklidovské, afinní i projektivní geometrie a seznámil se s různými příklady vektorových prostorů, a tedy nová axiomatická výstavba geometrie založená na struktuře vektorového prostoru nemůže mu činit již žádné zvláštní potíže. Systém axiomů je ryze algebraický (odtud autor

*) Ve Francii je ovšem ve skutečnosti situace poněkud odlišná. Učebnice vyplňuje totiž rovněž maximální program tzv. vyšší matematiky a speciálních kursů matematiky na dvouletých přípravkách pro university (přesněji řečeno pro „les grandes écoles scientifique type A“).

volí název algebraická geometrie). Při tomto přístupu se přirozeně nejprve vybudovává afinní geometrie, potom projektivní geometrie a teprve pak euklidovská geometrie. Třetí etapou by ovšem měly být geometrie bilineárních forem ve vektorových prostorech nad libovolnými tělesy. Autor se však z mnoha důvodů — z nichž pedagogické nejsou na posledním místě — záměrně omezuje nejprve jen na euklidovskou geometrii (bilineární forma euklidovské struktury je jednoduchá a k tomu nad tělesem reálných čísel). Teprve pak přistupuje k prostorům, v nichž vystupují jiné bilineární formy (nad libovolným komutativním tělesem). Závěr tvoří základy teorie kuželoseček a kvadrik v projektivní geometrii, teorie kuželoseček v afinní a euklidovské geometrii a teorie ploch v euklidovské geometrii.

Ze stručného náčrtu základní koncepce a obsahu je patrno, že knížka v podstatě předkládá v moderním pojetí (tedy šířeji) dřívější analytickou geometrii lineárních útvarů, základy algebraické geometrie kvadratických útvarů a základy diferenciální geometrie.

Bližší představu o obsahu a rozsahu knížky může snad poskytnout několik nejvýznamnějších hesel z jednotlivých kapitol.

V 1. kapitole „*Afinní geometrie*" (str. 1—33) se vychází z definice vektorových prostorů, zavádějí se některé elementární pojmy spojené s lineárním zobrazením a studují se lineární variety, afinní zobrazení a afinní grupa.

2. kapitola „*Projektivní geometrie*" (str. 34—62) rozšiřuje afinní geometrii vybudovanou v afinním prostoru nad libovolným komutativním tělesem na příslušnou projektivní geometrii nad týmž tělesem. Nalézají se vlastnosti projektivních lineárních variet, definují se lineární projektivní zobrazení a projektivní grupa.

3. kapitola „*Doplňky k afinní a projektivní geometrii*" (str. 63—92) je věnována dualitě v projektivních prostorech, vztahům mezi afinní a projektivní geometrií a projektivnostem na projektivní přímce.

Ve 4. kapitole „*Euklidovská geometrie*" (str. 93—122) se především definuje bilineární forma (symetrická positivní nedegenerovaná ve vektorovém prostoru nad tělesem reálných čísel), skalární součin, norma, vzdálenost. Zavádí se pojem ortogonálních vektorů a obecněji ortogonálních podprostorů, odvozují se vztahy pro vzdálenosti některých speciálních lineárních podprostorů a definují se izometrie, ortogonální grupa a podobnosti. Speciální pozornost je věnována euklidovským prostorům konečné dimense a v souvislosti s nimi ortogonálním maticím.

5. kapitola „*Bilineární a kvadratické formy*" (str. 123—152) v podstatě jen rozšiřuje tématiku předchozí kapitoly tím, že se systematicky zabývá bilineárními formami ve vektorových prostorech nad libovolnými komutativními tělesy. Vystupují zde pojmy kvadratická forma přidružená symetrické bilineární formě a polární forma kvadratické formy. Některé nové pojmy — jádro, izotropní vektor, izotropní podprostor — přispívají k zachycení podstatného rozdílu mezi nově zavedenými a předchozími bilineárními symetrickými formami.

V 6. kapitole „*Reálné bilineární formy. Komplexní rozšíření*" (str. 153—179) se zobecňují některé věty euklidovské geometrie na případ geometrie symetrických bilineárních forem (reálných positivních), dokazuje se Sylvesterův zákon setrvačnosti a probírá se komplexní rozšíření reálného vektorového prostoru a reálného euklidovského prostoru.

7. kapitola „*Hermitovské formy*" (str. 180—209) vlastně už jen dovršuje předchozí výklady tím, že zavádí zobecněné hermitovské formy (sesquilineární) a hermitovské formy ve vektorových prostorech nad tělesem komplexních čísel. Mnohé předchozí výsledky se rozšiřují pro případ positivních hermitovských forem, zvláště nedegenerovaných (předhilbertovské prostory); studuje se unitární grupa.

8. kapitola „*Kuželosečky a kvadriky v projektivním prostoru*" (str. 210—248) nejprve podává stručný náčrt obecné teorie nadkvadrik v projektivním prostoru (nad tělesem komplexních čísel), která pak je podrobněji rozpracována jednak pro kuželosečky (až včetně Desarguesovy věty) jednak pro kvadriky.

9. kapitola „*Kuželosečky v afinní a euklidovské rovině*" (str. 249—274) pokračuje v podrobnější studii kuželoseček nejen reálných, ale i imaginárních, a to v reálné afinní a euklidovské rovině.

V 10. kapitole „*Plochy v euklidovské geometrii*" (str. 275—317) jsou uvedeny základní pojmy diferenciální geometrie ploch a probrány základní vlastnosti válcových a kuželových ploch, přímkových ploch (speciálně konoidů), rotačních ploch a kvadrik.

Všechny kapitoly jsou doplněny řadou cvičení, v nichž se tématika probíraná v příslušné kapitole nejen procvičuje, ale hlavně doplňuje a rozšiřuje.

Závěr knihy tvoří „*Problémy*" (str. 318—348). Je to 12 vybraných úloh, které v letech 1965—1968 byly dány za písemné práce na některých francouzských vysokých školách.

Text se velmi pěkně čte. Formulace jsou přehledné, jasné a dobře srozumitelné. Domnívám se, že po prostudování knihy čtenář bude opravdu solidně seznámen se základy moderní algebraické geometrie (ve smyslu uvedeném autorem).

Na konec recenze se obvykle uvádí seznam podstatnějších oprav. Myslím, že svědčí o opravdu veliké pečlivosti autora, když přes podrobné čtení jsem našel jen velmi málo chyb, a to pouze typografických; čtenář si je sám snadno opraví.

Alois Urban, Praha

N. Bourbaki: THÉORIE DES ENSEMBLES. Nouvelle édition. Vydalo nakladatelství Hermann, Paříž 1970. Cena neudána.

Není to již třetí nebo bůhvíkolikáté vydání. Je to nové vydání. Nejsou to již brožované sešity, ale sličná, v plátně vázaná kniha. *Mode d'emploi*, kterým kniha začíná, se příliš nezměnil; dozvíme se, že traktát Éléments de Mathématique je rozdělen na knihy, knihy na kapitoly. Každá kniha je z důvodu snadné citace označena symbolem; zatím vyšly, aspoň zčásti: E, A, TG, FVR, EVT, INT, AC, VAR, LIE, TS. Prvních šest knih, tvořících ve starších vydáních první část Les structures fondamentales de l'Analyse, je základem pro další.

Obsahově se kniha příliš neliší od staršího vydání, jehož ruský překlad je u nás dobře přístupný. Hlavní změnou je vytvoření nového, sedmého paragrafu třetí kapitoly o projektivních a induktivních limitách; v souvislosti s tím se počet odstavců prvního paragrafu zmenšil na třináct. Byl vypuštěn dodatek ke čtvrté kapitole. Cvičení jsou přesunuta na konec kapitol.

V knize není průběžné číslování stran; např. E III.5 resp. E.R.5 značí pátou stránku třetí kapitoly resp. sešitu výsledků. Rozkládací listy se seznamem axiomů byly vypuštěny.

Škoda, že noví čtenáři této knihy přijdou o potěšení přemýšlet o důvodech, které vedly k umístění plastiky z Diova chrámu na začátek celého traktátu; tato fotografie byla také vypuštěna.

Karel Karták, Praha

A. Ionescu Tulcea, C. Ionescu Tulcea: TOPICS IN THE THEORY OF LIFTING, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 48, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1969, str. X + 192, cena DM 36, US $ 9.

Buď X lokálně kompaktní prostor a μ kladná míra na X. Buď $M^\infty(X, \mu)$ prostor ohraničených měřitelných funkcí, $N^\infty \subset M^\infty$ množina lokálně μ-nulových funkcí, a $L^\infty = M^\infty/N^\infty$. Buď $\tilde{f}$ obraz funkce f v kanonickém zobrazení $M^\infty \to L^\infty$, a pišme $f \equiv g$ pro $f - g \in N^\infty$.

Uvažujme zobrazení $\varrho : M^\infty \to M^\infty$, které má následující vlastnosti: 1° $\varrho(f) \equiv f$, 2° $f \equiv g \Rightarrow \varrho(f) = \varrho(g)$, 3° $\varrho(1) = 1$, 4° $f \geqq 0 \Rightarrow \varrho(f) \geqq 0$, 5° ϱ je lineární, 6° $\varrho(fg) = \varrho(f)\,\varrho(g)$. Říkáme pak, že ϱ je lift na M^∞ (*lifting on* M^∞; Bourbaki užívá termínu *relèvement*); je-li splněno pouze 1°—5°, mluvíme o lineárním liftu.

Hlavním výsledkem knihy je, že lift na M^∞ existuje (to dokázal J. von Neumann jako odpověď na Haarovu otázku už v roce 1931 pro $X = \mathbf{R}$ a Lebesgueovu míru, zatímco obecná teorie byla vytvořena až kolem roku 1960), kdežto např. zobrazení $\varrho : \mathscr{L}^p \to \mathscr{L}^p$ vyhovující podmínkám 1°, 2°, 4°, 5° neexistuje, je-li míra μ na nějaké části prostoru X neatomická.

Lift je silný (*strong lifting*), jestliže $\varrho(f) = f$ pro každou ohraničenou spojitou funkci f. Je-li X metrizovatelný, pak silný lift na X existuje; obecný případ je zatím nevyjasněn. Podobně není známo, zda lze např. pro $X = [0, 1]$ dosáhnout toho, aby $\varrho(f)$ byla vždy borelovská.

V knize jsou dále ukázány souvislosti teorie liftů s topologií hustoty (*density topology*), integrálním vyjádřením lineárního operátoru z $\mathscr{L}^p$ do nějakého Banachova prostoru (Dunford-Pettisova věta) a desintegrací měr; ukazuje se také, že každý automorfizmus prostoru $L^\infty(X)$ je indukován bodovým zobrazením prostoru X.

Je třeba zdůraznit, že řada výsledků není prezentována v rámci Bourbakiho teorie integrálu, ale že v první kapitole je konspekt zajímavé varianty integrace na abstraktním prostoru, přičemž výchozí pojem je axiomaticky pojatý horní integrál na množině nezáporných funkcí.

Vcelku jde o knihu mimořádně zajímavou, napsanou velmi jasně a přitažlivě.

Karel Karták, Praha

K. Zeller, W. Beekmann: THEORIE DER LIMITERUNGSVERFAHREN (zweite, erweiterte und verbesserte Auflage), Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1970, XII + 314 stran.

První vydání této knihy napsal první z uvedených autorů v roce 1956. Vyšlo jako 15. svazek známé springerovské edice Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete v roce 1958. Toto druhé vydání se liší od prvního dodatky, které obsahují nové poznatky od roku 1956 do roku 1968.

Kniha pojednává o limitovacích a sčítacích metodách pro divergentní posloupnosti resp. řady. Je to velmi pozoruhodné syntetické dílo, týkající se definicí pojmu limity pro obecné posloupnosti čísel a dávající přehled výsledků v tomto oboru. K jednotné charakterizaci a klasifikaci metod je použito pojmu filtru resp. obecné Moore-Smithovy teorie limit.

Pozornost zaslouží seznam literatury připojený ke konci knihy; je seřazen chronologicky od roku 1880 do roku 1968, je obsažen na 108 stranách, ke každé citaci je připojena poznámka o tom, kde bylo o práci referováno (s přesnou citací). Lze se právem domnívat, že tento mimořádně rozsáhlý seznam je téměř úplný v této oblasti.

Pro specialisty bude jistě velmi užitečnou příručkou, nespecialistům dá základní informace o tomto zajímavém oboru, podstatně usnadní orientaci v literatuře. Všem zájemcům je kniha k dispozici v knihovně Matematického ústavu ČSAV v Praze.

Štefan Schwabik, Praha

Gregers Krabbe: OPERATIONAL CALCULUS, Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970, XVI + 349 stran.

Tato kniha profesora G. Krabbeho z Purdue University v Lafayette ve Spojených státech je rozšířená verze jeho přednášek o operátorovém počtu pro pokročilé a graduované studenty.

Přístup, který autor zvolil je založen na vlastnostech komutativní podalgebry perfektních operátorů v algebře všech lineárních operátorů v prostoru schwartzovských testovacích funkcí $\mathscr{D}_+$. Tato podalgebra je izomorfní se Schwartzovou konvoluční algebrou $\mathscr{D}'_+$. Operátor se nazývá perfektní, když je aditivní a když komutuje s každým konvolučním operátorem, určeným nekonečně diferencovatelnou funkcí, která je nulová vlevo od nějakého bodu na reálné ose (testovací funkce).

Cílem tohoto přístupu k operátorovému počtu je, stejně jako je tomu v knize J. Mikusińského (Rachunek operatorów, Warszawa 1957), přímé fundování operátorového počtu, nevyžadující zbytečná omezení. Zejména jde o omezení, která vyplynou z verifikace metod operátorového počtu na základě Laplaceovy transformace. Laplaceovu transformaci nelze např. použít pro určení funkce $y(t)$ z rovnice $t \exp(t^2) = \int_0^t \cos(t - \tau)\, y(\tau)\, d\tau$, neboť funkce $t \exp(t^2)$ roste příliš rychle a příslušný Laplaceův integrál nekonverguje. Operátorový počet odvozený přímo bez užití Laplaceovy transformace, dá jediné řešení této úlohy (totiž $y(t) = \exp(t^2) + 2t^2 \exp(t^2) + (\exp(t^2) - 1)/2$, $-\infty < t < +\infty$). Operátorový počet, o kterém se v knize pojednává, lze aplikovat také na nestandardní problémy, které nemají řešení, když se počáteční hodnoty pro $t = 0$ nahradí hodnotami pro $t = 0+$. (Řešení pak mají obecně nespojitost v bodě $t = 0$.) Stejně tak je možno jej využít v problémech obsahujících distribuce.

Celkem lze říci, že operátorový počet vybudovaný v této knize eliminuje nedostatky operátorového počtu založeného na Laplaceově transformaci. Možnosti jeho využití jsou širší než u Laplaceovy transformace. Autor spojil ideje J. Mikusińského a L. Schwartze; operátorový počet v jeho pojetí je v podstatě ekvivalentní se „symbolickým kalkulem" pro distribuce se zleva omezeným nosičem (L. Schwartz). Výsledkem je nové, přesvědčivé zdůvodnění Heavisideova operátorového počtu a jsou dány další možnosti použití výhod tohoto aparátu s klidným svědomím.

Kniha je určena jak matematikům tak i technikům; mimořádnou pozornost věnuje autor příkladům ilustrujícím užitečnost teorie (např. použití na řešení elektrických obvodů, problém struny, difúzní úlohy, vlnové úlohy atp.). Dostatečná bohatost aplikací v knize by mohla připoutat pozornost těch, kteří jsou skeptičtí k metodám „moderní" matematiky, aby zjistili, že operátorový počet je matematicky fundován v široké míře i bez Laplaceovy transformace, že je v tomto směru dovoleno dost (i když ne vše) bez rizika kritiky matematiků.

Štefan Schwabik, Praha

DÁLE VYŠLO

MATEMATIKA (Geometrie a teorie grafů). Sborník Pedagogické fakulty University Karlovy, uspořádal K. Hruša. Vydala Universita Karlova, Praha 1970. 136 str. Cena 12,— Kčs.

Sborník obsahuje tři práce z geometrie (autoři Z. Dlouhý a J. Kučerová) a devět prací z teorie grafů (autoři: J. Blažek, M. Fiedler, I. Havel, M. Koman, J. Novák, I. Rohlíčková, J. Sedláček, J. Šedivý, B. Zelinka). Práce z teorie grafů vznikly na pražském semináři z teorie grafů, který pracuje při katedře matematiky nynější Pedagogické fakulty University Karlovy již od r. 1960.

A. Doneddu: MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES ET SPÉCIALES. Tome 2: Analyse et géometrie différentielle. Dunod, Paris 1970 (2. vydání), 687 str., cena brož. 58 F.

O prvém vydání této knihy referovali v našem časopise J. Kučerová a J. Sedláček[1]). Druhé vydání vychází bez podstatných změn.

A. Kaufmann, D. Coster: EXERCICES DE COMBINATORIQUE AVEC SOLUTIONS II: Propriétés des graphes et méthodes d'énumération. Dunod, Paris 1970, 220 str., cena brož. 48 F.

Kniha obsahuje 78 příkladů z teorie konečných grafů.

Redakce

---

[1]) Čas. pěst. mat. *93* (1968), 240—241.

ZPRÁVY

LETNÁ ŠKOLA O KOMBINATORICKÝCH METÓDACH

V dňoch 24.—28. mája 1971 usporiadala Prírodovedecká fakulta UPJŠ v spolupráci s košickou pobočkou Jednoty čs. matematikov a fyzikov v Zlatej Idke pri Košiciach Letnú školu o kombinatorických metódach. Zúčastnilo sa jej 43 čs. matematikov a 3 odborníci zo zahraničia. Zo zahraničných predniesli L. LOVÁSZ (Budapest) cyklus prednášok o hypergrafoch a H. WALTHER (Ilmenau, NDR) cyklus prednášok o výsledkoch ilmenauských matematikov z teórie grafov. Okrem toho odznelo 15 prednášok československých účastníkov školy. Dve zasadnutia boli venované nerozriešeným problémom.

Ernest Jucovič, Košice

SJEZD ABSOLVENTŮ MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTY KARLOVY UNIVERSITY

Děkanát Matematicko-fyzikální fakulty University Karlovy připravuje sjezd absolventů fakulty, kteří dokončili studia do r. 1969.

Sjezd bude uspořádán podle oborů (zaměření, specializací) počátkem roku 1972 a bude zaměřen hlavně na tyto otázky:

a) připomínky a návrhy k učebním plánům reformovaného studia (učební plány zájemcům zašleme);

b) zkušenosti z uplatňování absolventů v praxi a možnosti dalšího umísťování absolventů fakulty.

Protože děkanát nemá k dispozici přesné adresy absolventů, obracíme se na všechny absolventy — zájemce o sjezd se žádostí, aby nám co nejdříve sdělili své nynější adresy a obor studia, event. i adresy dalších absolventů na adresu: Děkanát Matematicko-fyzikální fakulty UK, Praha 2, Ke Karlovu 3 s poznámkou „Sjezd absolventů".

Prof. dr. *Alois Švec,* DrSc.,
děkan fakulty

OBSAH

Články:

Recense:

Zprávy:

Ilja Černý

ZÁKLADY ANALYSY V KOMPLEXNÍM OBORU

1967 — 600 str. — 53 obr. — váz. 33,— Kčs

Teorie funkcí komplexní proměnné, jejímž základům je věnována tato kniha, je spolu s diferenciálním a integrálním počtem základem matematické analysy, jedné z nejdůležitějších částí matematiky. Analysa v komplexním oboru je ovšem tak rozsáhlý obor, že do této učebnice bylo možné zařadit jenom malou její část.

Autor podává v uceleném tvaru, zcela od začátku, nejzákladnější poznatky. Měl na mysli dojít ve všech částech knihy, zejména v partiích týkajících se početních metod založených na residuové větě, analytických funkcí a konformního zobrazení, k dobře aplikovatelným výsledkům, tedy k větám, které jsou dost obecné a jejich předpoklady lze dobře ověřovat. Věnoval však také značnou pozornost pojmům a tvrzením z topologie roviny, která má pro analysu v komplexním oboru zásadní význam, a podal zcela přesný a přitom dostatečně obecný výklad, takže čtenář může hlouběji proniknout do analytických metod v komplexním oboru. Základy analysy v komplexním oboru jsou učebnicí a první knihou o teorii funkcí komplexní proměnné, která byla u nás napsána. Látka vyložená v knize je potřebná např. při studiu teorie diferenciálních rovnic v komplexním oboru, teorie tzv. speciálních funkcí, některých otázek z teorie rovinného vektorového pole apod.

Ilja Černý je docentem na Katedře aplikované matematiky na matematicko-fysikální fakultě Karlovy university v Praze. Již řadu let přednáší teorii funkcí komplexní proměnné; odtud plynoucí zkušenosti značně působily na výběr látky, její uspořádání a metodu výkladu.

Kniha je určena posluchačům, kteří studují matematiku nebo fysiku na matematicko-fysikální fakultě Karlovy university nebo na podobných fakultách ostatních vysokých škol universitního zaměření a prošli již základním kursem diferenciálního a integrálního počtu. Dále ji lze využít při školení aspirantů, v postgraduálních kursech apod.