Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

Ivo Vrkoč, Praha: *Remark about the relation between measurable and continuous functions.* (Poznámka o vztahu mezi měřitenými a spojitými funkcemi.)

V článku je konstruována měřitelná funkce $f(x)$ definovaná na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ taková, že interval $\langle 0, 1\rangle$ nelze rozbít na spočetně mnoho množin A_n, $\bigcup A_n = \langle 0, 1\rangle$, na kterých by $f(x)$ byla spojitá.

Jaroslav Kurzweil, Praha: *On solutions of nonautonomic linear delayed differential equations, which are defined and exponentially bounded for $t \to -\infty$.* (O řešení neautomní lineární diferenciální rovnice se zpožděním, která je definovaná a exponenciálně omezená pro $t \to -\infty$.)

Pro $\gamma \geqq 0$ buď $\mathscr{X}(\gamma)$ množina takových řešení rovnice (1) $dx/dt = A(t)\,x(t) + B(t)\,x(t-1)$, že $\limsup_{t\to-\infty} e^{\gamma t}|x(t)| < \infty$ ($x(t) \in R^m$, $A(t)$, $B(t)$ jsou matice typu $m \times m$, $|x(t)|$, $|A(t)|$ značí normy $x(t)$, $A(t)$). V článku se dokazuje, že $\mathscr{X}(\gamma)$ je konečně dimensionální lineární prostor pro každé $\gamma \geqq 0$ za předpokladu, že A, B, $|B|^2$ jsou lokálně integrovatelné a $\sup_{t\leqq 0} \int_{t-1}^{t} |A(\tau)|\,d\tau < \infty$, $\sup_{t\leqq 0} \int_{t-1}^{t} |B(\tau)|^2\,d\tau < \infty$ a odhaduje se dim $\mathscr{X}(\gamma)$. Důkaz je založen na větě o podtřídě úplně spojitých operátorů Hilbertova prostoru, která je aplikovaná na operátory posunu rovnice (1).

Ivo Marek, Praha: *A note on $\mathscr{K}$-stochastic operators.* (Poznámka o $\mathscr{K}$-stochastických operátorech.)

V článku je zaveden pojem $\mathscr{K}$-stochastického operátoru v Banachově prostoru s kuželem $\mathscr{K}$ a jsou vyšetřovány některé jeho vlastnosti. Zejména je dána charakterizace třídy $\mathscr{K}$-stochastických operátorů v Hilbertově prostoru mající symetrické projekce odpovídající hlavní vlastní hodnotě 1. Tato charakterizace vede k dvojnásobně $\mathscr{K}$-stochastickým operátorům.

Břetislav Novák, Praha: *Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre* II. (Věty o střední hodnotě teorie mřížových bodů II.)

Označíme-li $P_\varrho(x) = (1/\Gamma(\varrho)) \int_0^x P(t)\,(x-t)^{\varrho-1}\,dt$, $\varrho > 0$, kde $P(t) = P_0(t)$ je známý „mřížový zbytek" je v práci studována funkce $M_\varrho(x) = \int_0^x |P_\varrho(t)|^2\,dt$.

David Preiss, Praha: *A note on symmetrically continuous functions.* (Poznámka o symetricky spojitých funkcích.)

V článku se dokazuje, že každá symetricky spojitá funkce na reálné ose (tj. pro každé x je $\lim_{h\to 0} (f(x+h) - f(x-h)) = 0$) je spojitá skoro všude.

MAXWELL O. READE, Ann Arbor, TOSHIO UMEZAWA, Urawa: *An inequality for univalent functions due to Dvořák.* (O Dvořákově nerovnosti pro prosté funkce.)

Autoři rozřešili problém položený O. Dvořákem v jeho práci „Über schlichte Funktionen I, II" (Čas. pěst. mat. *92* (1967), 162—189, *94* (1969), 146—167): Jest určiti přesnou hodnotu poloměru největšího kruhu se středem v počátku, v němž každá prostá funkce tvaru $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots$, $|z| < 1$, splňuje nerovnost Re $\sqrt{(f(z)/z)} > \frac{1}{2}$. Tento výsledek ukazuje, že některé výsledky publikované O. Dvořákem neplatí. Analogické výsledky se dostanou i pro liché funkce.

REINER KÜHNAU, Halle/Saale: *Eine Bemerkung zu zwei Arbeiten von Herrn O. Dvořák.* (Poznámka k dvěma pracím pana O. Dvořáka.)

Autor v článku ukazuje, že některé výsledky publikované v článcích O. Dvořáka: Über schlichte Funktionen I, II (Čas. pěst. mat. *92* (1967), 162—189, *94* (1969), 146—167) neplatí.

MILAN GERA, Bratislava: *Nichtoszillatorische und oszillatorische Differentialgleichungen dritter Ordnung.* (Neoscilatorické a oscilatorické rovnice třetího řádu.)

Řekneme, že diferenciální rovnice n-tého řádu je v intervalu J neoscilatorická, když každé její netriviální řešení má v tomto intervalu nejvýše $n - 1$ nulových bodů včetně násobností. V opačném případě řekneme, že rovnice je v intervalu J oscilatorická. V této práci se odvozují nutné a postačující podmínky pro neoscilatoričnost a postačující podmínky pro oscilatoričnost lineární homogenní diferenciální rovnice třetího řádu.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

RECENSE

J. C. Burkill, H. Burkill: A SECOND COURSE IN MATHEMATICAL ANALYSIS. Cambridge University Press 1970. 526 stran.

Kniha je pokračováním knihy *A First Course in Mathematical Analysis* od prvního z autorů. Prvních devět kapitol je věnováno obecné analýze a reálným funkcím, zbývajících pět potom komplexním funkcím. Jednotlivé kapitoly se zabývají následujícími tématy: Úzce spolu souvisí kapitoly 1, 2 a 3, které tvoří jakýsi úvod do abstraktního pojetí moderní analýzy. Pojednávají o množinách a funkcích, metrických prostorech a spojitých funkcích na metrických prostorech. Čtvrtá kapitola se zabývá limitami na reálné přímce a v komplexní rovině. Důležitému pojmu stejnoměrné konvergence je věnována celá pátá kapitola. Tato obsahuje mimo jiné konstrukci spojité funkce, která nemá derivaci a Weierstrassovu větu o aproximaci spolu s jejím zobecněním (tzv. Stone-Weierstrassova věta). Kapitola šestá obsahuje teorii Riemann-Stieltjesova integrálu včetně věty o reprezentaci spojitého lineárního funkcionálu. V sedmé kapitole se vyšetřují zobrazení z R^m do R^n a diferencovatelnost těchto zobrazení, osmá se zabývá integrály v R^n (křivkovými, přes interval v R^n, přes omezenou množinu v R^n) a funkcemi definovanými pomocí integrálu (integrály závisícími na parametrech). K obsahu tří naposledy jmenovaných kapitol je třeba poznamenat, že zde není žádná zmínka o Lebesgueově integrálu a tento není nikde dále v knize vykládán. Z hlediska učebních plánů našich universit je to jistě nedostatek. Teorii Fourierových řad je věnována devátá kapitola, kde je také mimo jiné zmínka o Fourierových integrálech. V kapitolách 10, 11 a 12 jsou vyloženy základní pojmy a výsledky z teorie funkcí jedné komplexní proměnné a to značně stručně. V třinácté kapitole se zavádí pojem analytické funkce. Konečně v závěrečné, čtrnácté kapitole jsou uvedeny některé aplikace teorie, vyložené v předchozích čtyřech kapitolách, na speciální funkce včetně krátké zmínky o gamma funkci a beta funkci. Na konci jednotlivých kapitol je nejprve vyložen stručný nástin historického vývoje právě vyložené látky a potom některé vysvětlující nebo rozšiřující poznámky. Vykládanou látku vhodně doplňují a rozšiřují také příklady, uvedené na závěr každého paragrafu. Řešení, resp. u složitějších příkladů návod k řešení, je uvedeno na konci knihy. Kniha je doplněna rejstříkem.

Kniha, nebo spíše učebnice, je určena studentům, kteří jsou seznámeni s pojmem limity a nekonečné řady a se základy diferenciálního a integrálního počtu. Výklad je všude přesný a jasný, o grafické úpravě knihy, která usnadňuje její čtení, není snad třeba u tohoto nakladatelství mluvit. Přes uvedený nedostatek, že v knize není vyložen Lebesgueův integrál, může tato sloužit našim studentům jako vhodná učební pomůcka.

Oldřich Horáček, Praha

Herbert Federer: GEOMETRIC MEASURE THEORY, Die Grundlehren d. Math. Wissenschaften Bd. 153, Springer Verlag 1969; 676 str.

Monografie podává v pěti kapitolách bohatý materiál z geometrické teorie míry. První kapitola má pomocný ráz a je věnována Grassmanově algebře. Pojednává o tensorových součinech, alternujících formách a dualitě, vnějších i vnitřních součinech a normách vektorů a kovektorů a o symetrických formách. Druhá kapitola podává výklad obecné teorie míry. Od čtenáře se zde nepožadují žádné předběžné znalosti o míře a integrálu. Je vyložena Carathéodoryova teorie vnějších měr a měřitelnosti a jsou odvozena základní fakta o borelovských a Suslinových (analytických) množinách. Následují Lebesgueova teorie integrace, funkcionální přístup k integrálu (s Radon-Nikodymovou větou), Radonův integrál na lokálně kompaktních prostorech, Fubiniova věta, invariantní míry na lokálně kompaktních grupách, pokrývací věty Vitaliova typu a teorie diferenciace, a konečně rozličné konstrukce (spojované se jmény Hausdorff, Favard, Gillespie aj.) měr kladných kodimensí v euklidovských prostorech. Třetí kapitola je nadepsána „rektifikovatelnost" a studuje integraci podle m-rozměrných měr v n-rozměrných prostorech, tečné vlastnosti množin v euklidovských prostorech a transformace integrálů při lipschitzovských zobrazeních. Začíná obecnými větami o diferenciaci funkcí (jako Stěpanovova věta nebo Rademacherova věta o diferencovatelnosti skoro všude funkcí splňujících Lipschitzovu podmínku) a větami Whitneyova typu o rozšiřování funkcí s uzavřených množin na celý prostor se zachováním diferenciálních vlastností. Pak je odvozena věta o výpočtu (s pomocí jakobiánů) Hausdorffových měr množin definovaných lipschitzovskými zobrazeními a teorie transformací integrálů při takových zobrazeních. Kapitola zahrnuje rovněž obecné věty Sardova typu o obrazu množiny těch bodů, kde zobrazení z k-rozměrného prostoru do m-rozměrného prostoru má diferenciál hodnosti h. Čtvrtá kapitola pojednává o homologické teorii integrace. Jejím hlavním předmětem je studium tzv. normálních, rektifikovatelných a integrálních proudů. Proudy G. De Rhama (s kompaktním nosičem) jsou, zhruba řečeno, spojité lineární funkcionály nad příslušně topologisovaným prostorem nekonečně hladkých diferenciálních forem; zobecňují pojem distribuce L. Schwartze. Má-li proud konečnou normu (tzv. masu) jakožto funkcionál na vhodně onormovaném prostoru diferenciálních forem, pak se nazývá normálním proudem. Každý orientovaný simplex lze přirozeně ztotožnit s normálním proudem. Ty proudy, které je možno v jistém smyslu libovolně přesně aproximovat kombinacemi (s celočíselnými koeficienty) těchto jednoduchých proudů, se nazývají rektifikovatelnými. Dualitou k operátoru vnějšího diferenciálu na prostoru forem je v prostoru proudů zaveden pojem hranice. Integrální proudy jsou pak ty rektifikovatelné proudy, jejichž hranicí je opět rektifikovatelný proud. Osou celé kapitoly jsou výsledky, které autor s W. H. Flemingem publikovali v práci „*Normal and integral currents*" otištěné v Annals of Mathematics *72* (1960), 458—520. Ukazuje se, že integrální proudy mají řadu výhodných vlastností (souvisejících s kompaktností, aproximovatelností a isoperimetrickým nerovnostmi), které z nich tvoří tvárný nástroj pro studium obecných úloh variačního počtu. To je ilustrováno v poslední, páté kapitole knihy. V termínech integrálních proudů lze např. velmi přirozeně formulovat Plateaův problém. K danému integrálnímu cyklu (což je integrální proud s nulovou hranicí) najít integrální proud minimální masy, jehož hranicí je předepsaný cykl. Existence příslušného minimálního proudu se odvodí snadno, zatím co dokázat jeho regularitu nebo vyšetřit možné typy jeho singularit je velmi obtížný úkol. Některé moderní hluboké výsledky tohoto typu týkající se obecných variačních úloh tvoří závěr monografie.

Kniha je psána neobyčejně hutně a formálně precisně. Autorovi se podařilo shrnout obdivuhodný materiál. Samotná druhá kapitola (případně doplněna o kap. 3) by stačila na obsažnou monografii o teorii míry a integrálu.

Josef Král, Praha

Wolfgang Haack, Wolfgang Wendland: VORLESUNGEN ÜBER PARTIELLE UND PFAFFSCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN. Basel—Stuttgart, Birkhäuser 1969, 555 str.

Kniha je rozdělena do tří částí:

Část I. Parciální diferenciální rovnice druhého řádu ve dvou proměnných.

První kapitola pojednává o existenční větě Cauchy-Kowalevské. Ve druhé kapitole zavádějí autoři Pfaffovy formy a Pfaffovu derivaci, vnější součin a vnější derivaci a operátor d_n, objasňují význam symbolu $[d, d_n u]$ a převádějí standartní zápis parciálních diferenciálních rovnic na zápis v zavedené symbolice. Dále je uveden princip maxima a věty o jednoznačnosti řešení pro eliptické a parabolické rovnice. Třetí kapitola je věnována hyperbolickým rovnicím (Cauchyův i smíšený problém, charakteristiky, Riemannova metoda atd.). Čtvrtá kapitola pojednává o eliptických rovnicích a o příslušných okrajových úlohách, zejména o první a druhé okrajové úloze. Pátá kapitola je věnována Beltramiho rovnici, šestá kapitola pak problémům smíšeným (v tom smyslu, že daná rovnice je různého typu (eliptického apod.) v různých částech vyšetřovaného oboru).

Část II. Systémy prvního řádu ve dvou proměnných.

V úvodní sedmé kapitole zavádějí autoři základní pojmy týkající se systémů rovnic (normální tvar a typy lineárních systémů apod.). Osmá kapitola pojednává poměrně obsáhle o hyperbolických systémech. Devátá kapitola je věnována první okrajové úloze pro eliptické systémy a jejímu vyšetřování užitím Greenovy funkce a integrálních rovnic. V desáté kapitole je zaveden pojem indexu čili charakteristiky pro obecný případ okrajových úloh a ukázáno jeho použití. Jedenáctá kapitola řeší okrajové úlohy pro případ „vyšších indexů" („vyšších charakteristik", zejména okrajové problémy s negativní charakteristikou). Dvanáctá kapitola je věnována převážně problémům s pozitivní charakteristikou. Třináctá kapitola se zabývá existenčními větami „v celém" (tedy globálními existenčními větami), čtrnáctá kapitola pak užitečnými poznámkami týkajícími se problematiky numerického řešení eliptických systémů. Poměrně stručná patnáctá kapitola je věnována systémům smíšeného typu.

Část III. Systémy Pfaffových forem v R_n a parciální diferenciální rovnice.

Tato část obsahuje rozšíření předcházejících výsledků na n-rozměrný případ a některá doplnění. V kapitole šestnácté jsou uvedeny některé příklady pro třírozměrný případ. Sedmnáctá kapitola pojednává o integrálních varietách v R_n a Pfaffových formách, osmnáctá kapitola o integrálních varietách Pfaffovy rovnice, resp. Pfaffova systému, devatenáctá o konstrukci integrálních variet. Dvacátá kapitola uvažuje parciální diferenciální rovnice jako systémy Pfaffových rovnic. V jednadvacaté kapitole uvádějí autoři integrální věty pro Pfaffovy formy, zejména užití věty Gaussovy-Stokesovy-Cartanovy k řešení rovnic druhého řádu v n proměnných. Dvaadvacátá, resp. třiadvacátá kapitola je věnována eliptickým, resp. hyperbolickým rovnicím v R_n.

Monografie W. Haacka a W. Wendlanda jistě zaujme čtenáře svým pojetím. I když kniha používá klasických metod (nikoli metod funkciální analýzy), zpracování celé problematiky je zcela netradiční a celá kniha je svou koncepcí skutečně pozoruhodná. Autoři věnovali péči i detailnímu zpracování jednotlivých kapitol, takže předložili veřejnosti dobře promyšlené a pečlivě zpracované dílo.

Karel Rektorys, Praha

František Zítek: ZTRACENÝ ČAS (Elementy teorie hromadné obsluhy). Academia, nakladatelství ČSAV, Praha 1969. 180 stran, 6 obrázků. Cena Kčs 12,—.

Tato knížka je dalším svazkem edice Cesta k vědění; v duchu této edice snažil se autor o takový způsob výkladu, který by byl srozumitelný i čtenářům bez vysokoškolské přípravy v matematice. Kromě středoškolské matematiky se autor odvolává pouze na jiný svazek Cesty k vědění (Dupač-Hájek, Pravděpodobnost ve vědě a technice). Některé další pravděpodobnostní pojmy, bez nichž nebylo možné se obejít, vyložil autor v Dodatcích; potřebné elementy teorie stochastických procesů pak v samostatné kapitole II.

Velmi výstižný nematematický úvod do problematiky hromadné obsluhy představuje kap. I. Matematická teorie hromadné obsluhy začíná tedy až v kap. III, jejíž obsah je vymezen klasickým předpokladem exponenciálního rozdělení dob obsluhy i dob mezi příchody.

Systémy založené na jiných předpokladech (zejména systémy M/D/1, $M/E_K/1$, M/G/1 a GI/M/1 v Kendallově klasifikaci) se studují v kap. IV. Některé doplňky (jako jsou uzavřené systémy, obsluhové sítě, simulace systémů obsluhy aj.) jsou zařazeny do kap. V.

Praktického uživatele zajímá teorie hromadné obsluhy především jako výčet modelů pro jednotlivé situace a souhrn vzorců popisujících vlastnosti těchto modelů. Ke spolehlivému porozumění výsledkům je však nezbytná i určitá znalost metod jejich odvození. Tím spíše budou matematické metody zajímat čtenáře, kteří knihu nečtou z profesionálního zájmu o teorii hromadné obsluhy, ale ze zájmu o matematiku a o její aplikace. Autor se proto soustředil na výklad základních metod a základních myšlenkových postupů teorie hromadné obsluhy; jim, jak se zdá, podřídil i výběr detailních výsledků. Vznikla tak knížka, která působí uceleným dojmem, velmi dobře se čte, a která přitom na nevelkém počtu stran obsahuje mnoho zajímavých poznatků.

Kromě tiskových chyb uvedených na opravence jsem nalezl ještě dvě nebo tři další, které si však pozorný čtenář sám snadno opraví. Určité nedorozumění může způsobit text na str. 126, kde se symbol p_j zavede pro limitní pravděpodobnosti procesu $X(t)$, ale o několik řádek níže se jím už zřejmě míní pravděpodobnosti procesu $X_1(t)$. Závěrečná poznámka Dodatku 1 (str. 161) je formulována chybně, neboť náhrada dané funkce funkcí ekvivalentní zaručuje sice konvergenci relativní chyby k nule, nikoli však konvergenci chyby absolutní. Konečně neshoda mezi výsledky odstavce IV.2 Zítkovy knížky a odst. 6.3 Saatyho monografie je způsobena jen rozdílným významem konstant μ a ϱ u obou autorů a nikoli chybnou interpretací výsledků u Saatyho, jak tvrdí Zítek v poznámce pod čarou na str. 125. (Saatymu lze nejvýše vytknout použití symbolu ϱ v nezvyklém významu.)

Těmito několika výtkami však nechci snižovat cenu knížky, která svým srozumitelným výkladem i aktuálním tématem může zaujmout široký okruh čtenářů, poskytnout jim dobrou představu o předmětu i o metodách teorie hromadné obsluhy i vzbudit zájem o další studium teorie i konkrétních aplikací.

Václav Dupač, Praha

Eduard Čech: POINT SETS. Z českého originálu Bodové množiny přeložil Aleš Pultr. Academia Praha 1969. 271 stran. Váz. Kčs 63,—.

V tomto časopise nebylo české vydání recenzováno, zmíníme se proto také o něm. V roce 1936 vyšla Čechova kniha Bodové množiny I, jež si získala význačné postavení v naší matematické literatuře. Mnoho let byla proslulým, ale ojedinělým dílem, žádaným, ale nedostupným, protože nebyla znovu vydávána a ani druhý díl nevyšel. Po autorově smrti v roce 1960 se v jeho pozůstalosti našel úplný rukopis druhého dílu. V roce 1965 byl vydán knižně pod názvem Bodové množiny spolu s prvními třemi kapitolami původní knihy. Byla vynechána čtvrtá kapitola, věnovaná teorii míry a integrace, a Dodatek od prof. Jarníka. Uveďme nyní obsah recenzované knihy a tedy i českého originálu.

Kapitola I. *Úvod.* Zavádějí se množiny (v intuitivním pojetí) a množinové operace, zobrazení, spočetné množiny. Podrobněji se zkoumá uspořádání (tj. lineární uspořádání), různá uspořádání spočetných množin, řezy v uspořádané množině; uspořádaná množina se doplňuje tak, aby neměla mezery. Závěr kapitoly je věnován cyklickému uspořádání.

Kapitola II. *Obecné metrické prostory.* Začíná se definicemi vzdálenosti, metrického prostoru, euklidovského a Hilbertova prostoru, bodové množiny, kartézského součinu a isometrie, pokračuje se rozborem základních topologických pojmů a vlastností v metrických prostorech, tj. konvergence posloupností, uzávěru, spojitých zobrazení a funkcí, atd. až k množinám typu F_σ a G_δ. Zkoumají se hustě a řídce rozložené prostory, množiny husté a řídké v daném prostoru, oddělování množin. Velká pozornost se věnuje funkcím první třídy.

Kapitola III. *Speciální metrické prostory.* Obsahuje tři paragrafy, které pojednávají postupně o prostorech úplných, separabilních, kompaktních. Vedle obvyklých věcí se probírají také absolutní G_δ a topologicky úplné prostory, vnořování separabilních prostorů a na nich funkce první třídy, totálně omezené prostory, Hausdorffův nadprostor, prostory spojitých zobrazení, lokálně kompaktní prostory, dokazuje se, že kompaktní prostory jsou spojitými obrazy Cantorova diskontinua.

Kapitola IV. *Souvislost.* Nejprve se probírají základní pojmy, komponenty, quasikomponenty, kontinua, semikontinua. Dále se studují jednoduché oblouky a jednoduché smyčky (termín simple loop v anglickém vydání se mi zdá vhodnější než jednoduchá křivka v českém originálu), hlavními výsledky jsou věty o jejich orientaci a topologické charakteristice.

Kapitola V. *Lokální souvislost.* Kromě základních pojmů a vlastností se zkoumá lokální souvislost úplných souvislých prostorů a kontinuí. Dokazuje se, že lokálně souvislé kontinuum je spojitým obrazem úsečky.

Kapitola VI. *Zobrazení prostoru na kružnici.* Probírají se podstatná a nepodstatná zobrazení prostoru do kružnice, zavádí se stupeň zobrazení. Dokazuje se věta o monodromii, věta o nepodstatném zobrazení součinu, z níž snadno vyplyne, že zobrazení je nepodstatné, právě když je homotopní s konstantním. Dále se definuje unikoherence prostoru a charakterisuje se pomocí nepodstatných zobrazení.

Kapitola VII. *Topologie roviny.* Nejprve se zavádí stereografická projekce, převádějící rovinu na sféru (tj. kulovou plochu) bez jednoho bodu, jež umožní dále pracovat se sférou místo roviny. Dokazují se různé věty o roztínání roviny nebo sféry, věty o vlastnostech komponent doplňku dané množiny, zvláště o jejich počtu, mezi nimi též Jordanova věta. Závěr je věnován důkazu věty o topologické charakterisaci sféry, jemuž předchází řada pomocných vět. Pak se však mohou dokázat ještě další věty o podmnožinách sféry, např., že dvě otevřené souvislé množiny jsou homeomorfní, právě když jejich doplňky mají týž počet komponent.

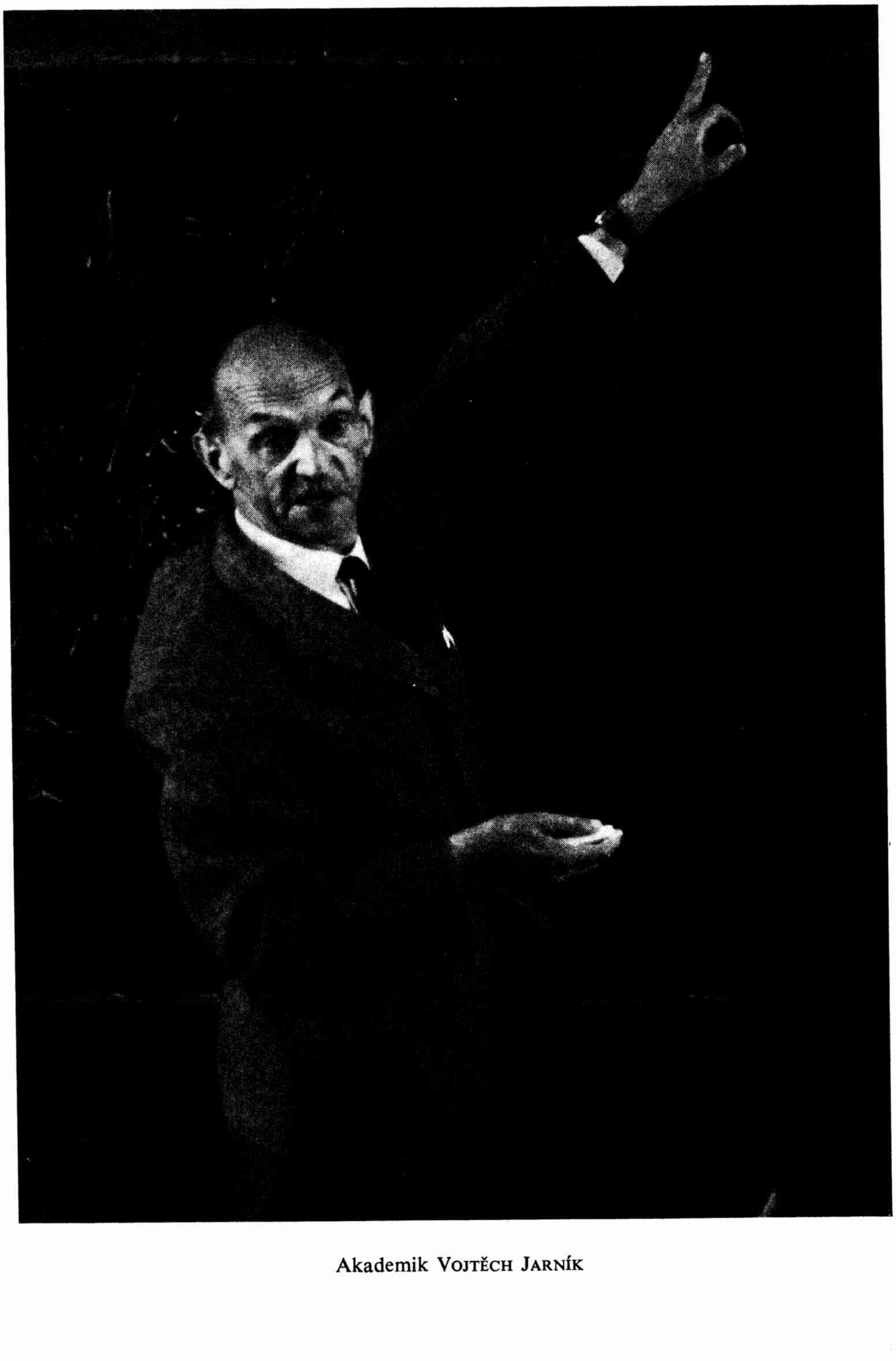
V každé kapitole je zařazena řada cvičení, lehkých i obtížnějších.

V českém vydání byl připojen ještě dodatek od A. Pultra pojednávající o hlavních směrech současné topologie obsahující též seznam doporučené literatury. V anglickém překladu byl tento dodatek vypuštěn, byl však zařazen jistý kratší seznam literatury, bohužel bez jakýchkoliv poznámek, což se mi nezdá dobré, protože uvedené knihy zdaleka nejsou ekvivalentní po stránce formální ani obsahové.

V knize se občas, avšak velmi málo, vyskytují drobné chyby, které si zkušenější čtenář snadno sám opraví. Téměř všechny jsem však nalezl jen v anglickém překladu. Protože předpokládám, že nezkušený čtenář, který by si přečetl tuto česky psanou recensi, bude studovat knihu v českém originálu, nebudu se o nich podrobněji zmiňovat.

Kniha může velmi dobře pomoci k získání základních znalostí z topologie, i pro potřebu jiných odvětví matematiky, zejména analysy. Výklad je pečlivý a podrobný, může jej sledovat každý, kdo začal podrobněji matematiku studovat, předběžných faktických znalostí je potřeba málo. Topologie se probírá pouze na metrických prostorech. To je pro účely knihy vhodné a zcela postačující, vychází se z názorných pojmů, z malého počtu axiomů. Přes jednoduchost pojmů a prostředků se však v každé kapitole dochází k výsledkům zajímavým a nikterak triviálním. Autor výstižně ukazuje, že krása matematiky je ve velkých větách, nikoliv v množství neprůhledných definic následovaných triviálními důsledky. Poslední dvě kapitoly jsou jako celek obtížnější, obsahují však řadu výsledků, jež jsou málokde vyloženy. Zkušenějšího čtenáře mohou zaujmout i neobvyklé, ale vhodné postupy, uvedu jeden velmi jednoduchý příklad. To, že množina všech reálných čísel v intervalu není spočetná, se nedokazuje obvyklým způsobem pomocí desetinných rozvojů a diagonálního principu, ale jinak, přímo pomocí věty o limitě monotonní posloupnosti. Kniha pochopitelně nedává představu o současném stavu topologie. To, myslím, nevadí, protože čtenář, který se bude chtít zabývat topologií důkladněji, bude studovat ještě další knihy, zde však získá solidní úvod a patrně i zájem.

Jan Hejcman, Praha



Akademik Vojtěch Jarník

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

ZPRÁVY

ZEMŘEL PROFESOR VOJTĚCH JARNÍK

JAROSLAV KURZWEIL, BŘETISLAV NOVÁK, Praha

V úterý, dne 22. září 1970 utrpěla československá věda a světová matematika nenahraditelnou ztrátu. Ve večerních hodinách zemřel v Praze po delší těžké nemoci profesor Karlovy university RNDr. VOJTĚCH JARNÍK, řádný člen Československé akademie věd. Na prosté smuteční slavnosti konané v pondělí 28. září 1970 ve velké obřadní síni strašnického krematoria se s profesorem Jarníkem rozloučili akademik J. Bačkovský a akademik J. Novák za Československou akademii věd, za Karlovu universitu a její matematicko-fyzikální fakultu její děkan prof. Dr. A. Švec DrSc. Památku prof. Jarníka uctila svou přítomností skoro celá pražská matematická obec a mnozí pracovníci z mimopražských matematických ústavů a vysokých škol.

Chtěli bychom v tomto článku připomenout nejvýznamnější rysy života, díla i osobnosti prof. Jarníka. Vzhledem k jeho bohaté a dlouholeté práci v různých oblastech matematiky, vědeckého i vysokoškolského dění u nás nemůže být tento článek vyčerpávající; je to jen malý příspěvek k poznání života i díla prof. Jarníka[1]).

Profesor Jarník se narodil 22. prosince 1897 v Praze, kde byl jeho otec, Jan Urban Jarník, profesorem románské filologie na filosofické fakultě Karlovy university. Po maturitě v r. 1915 na 1. české reálce v Ječné ulici v Praze se zapisuje jako řádný posluchač tehdejší filosofické fakulty české university, kde se tehdy matematika a fyzika přednášela. Svá vysokoškolská studia ukončil (v r. 1921 již na přírodovědecké fakultě Karlovy university) doktorátem přírodních věd (jako disertaci podával Jarník v podstatě práci [1]).

Počátky učitelské činnosti prof. Jarníka spadají do Brna, kde působil v letech 1919–1921 jako asistent prof. J. Vojtěcha na tamní vysoké škole technické. V roce 1921 přešel do Prahy, kde byl až do r. 1929 asistentem matematického semináře přírodovědecké fakulty university Karlovy. Zde pracoval pod přímým vlivem profesora K. Petra. Během tohoto období strávil Jarník skoro tři roky v Göttingen (období 1923–1925 a 1927–1928), kde byl žákem především prof. E. Landaua, jedné

[1]) Upozorněme v této souvislosti na statě V. Knichala a Š. Schwarze (Časopis pro pěst. matematiky *82* (1957), 463–492), V. Kořínka (Pokroky mat.-fyz. a astronomie *III* (1958), 1–8), J. Kurzweila (Časopis pro pěst. matematiky *92* (1967), 486–489) věnované životním jubileím prof. Jarníka a na nekrolog Š. Schwarze a B. Nováka (Acta Arithmetica *19* (1971)).

z vedoucích postav tehdejší matematiky. Landauova osobnost a jeho vědecké zaměření velmi podstatně ovlivnily další práci prof. Jarníka. Landau ho sám považoval za jednoho ze svých nejlepších žáků a spolupracovníků. Po návratu z prvého pobytu v Göttingen se v r. 1925 Jarník habilitoval (jako habilitační práci předložil práci [7]).

V roce 1929 byl jmenován mimořádným profesorem matematiky Karlovy university a od r. 1935 jen s přestávkou vynucenou okupací pracuje až do odchodu do důchodu v létě r. 1968 jako řádný profesor matematiky na fakultě přírodovědecké později na fakultě matematicko-fyzikální.

Jarníkova činnost se ovšem neredukuje pouze na vlastní vědeckou práci a na přednášení na Karlově universitě. Záhy intensivně pracuje i na poli vědecko-organizačním. Byl dlouholetým členem Jednoty československých matematiků a fyziků (od r. 1916), několik desítiletí členem jejího hlavního výboru. Snad nejvýznamnější je jeho skoro patnáctiletá činnost ve funkci vedoucího redaktora matematické části Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky. Prof. Jarníkovi se podařilo tehdejší spíše jen národní časopis přetvořit tak, že se stal časopisem mezinárodně uznávaným a vyhledávaným. Připomeňme v této souvislosti, že v posledních dvaceti letech byl členem redakční rady časopisu Czechoslovak Math. Journal a i redakční rady časopisu Acta Arithmetica, do nedávna jediného specializovaného časopisu pro teorii čísel a to po celou dobu, kdy byl vydáván.

Značnou energii věnoval prof. Jarník vědecko-organizační činnosti zejména v posledním čtvrtstoletí svého života. Pro svůj široký vědecký a společenský rozhled, osobní takt a všeobecně uznávanou autoritu byl pověřován celou řadou významných a náročných funkcí. Na Karlově universitě byl několik let děkanem přírodovědecké (1947–8), matematicko-fyzikální fakulty (1958–60), řadu let byl na obou těchto fakultách proděkanem a v období 1950–53 byl prorektorem Karlovy university. Významně se též podílel na zřízení i činnosti Československé akademie věd. Byl členem vládní komise pro její ustavení a také prvým předsedou její matematicko-fyzikální sekce; tuto náročnou funkci zastával celé období 1952–55. Od zřízení vědeckého kolegia matematiky byl jeho členem, v letech 1964–66 jeho předsedou.

Ve všech funkcích pracoval vždy nevšedně poctivě, s maximální objektivností a přehledem, většinou na úkor své vědecké práce, osobního pohodlí a v posledních letech i zdraví.

Mezi výčtem tak významných a odpovědných funkcí se zdánlivě skoro ztrácí skutečnost, že téměř celé poslední čtvrtstoletí byl prof. Jarník současně také vždy vedoucím katedry. Pro prof. Jarníka je příznačné, že tuto práci vykonával stejně pečlivě, jako by ani jiné organizační zatížení neměl. V průběhu posledních let vedl vzhledem k rozvoji matematicko-fyzikální fakulty věkově i odborně různorodé kolektivy učitelů. Charakteristické ale bylo, že pod vedením prof. Jarníka byl vždy stmelen dobrý kolektiv učitelů, že se prof. Jarník dokázal vždy zasvěceně starat jak o pedagogickou tak i vědeckou práci každého člena své katedry.

Je pochopitelné, že za svou vynikající vědeckou, pedagogickou i vědecko organizátorskou činnost obdržel prof. Jarník celou řadu poct a vyznamenání. Již od r. 1926 je členem Královské české společnosti nauk, od r. 1934 tehdejší České akademie věd a umění. Ihned po zřízení Československé akademie věd v r. 1952 je jmenován jejím řádným členem – akademikem. Jako vynikající a mezinárodně uznávaný matematik byl také členem zahraničních matematických společností. Netřeba ani zdůrazňovat že o svých výsledcích referoval na řadě mezinárodních konferencí i na matematických sjezdech a že byl často zván k přednáškám na zahraniční pracoviště.

Jeho významná vědecká práce byla v r. 1952 oceněna udělením titulu laureáta státní ceny, jeho celoživotní dílo pak udělením Řádu práce (1957) a Řádu republiky (1967). V r. 1962 se stal čestným členem Jednoty československých matematiků a fyziků, Karlova universita ocenila v r. 1968 jeho zásluhy udělením čestného doktorátu a Československá akademie věd pak udělením stříbrné medaile za zásluhy o vědu a lidstvo.

Přejděme nyní k alespoň stručné charakteristice vědecké a pedagogické práce prof. Jarníka.

Jeho vědecká práce byla neobyčejně mnohostranná. Svědčí o tom devadesát původních vědeckých prací, které jsou věnovány rozličným odvětvím matematiky (teorie čísel, teorie reálných funkcí ale i teorie řad, grafů, topologie atp.). Charakteristické je, že prakticky každá práce přináší celou řadu originálních výsledků a mnohdy nový, překvapující pohled na problematiku. Podstatným rysem většiny Jarníkových prací je velká ostrost výsledků. Jarník prostě nepublikoval své výsledky, dokud byla sebemenší naděje na jejich zlepšení. Proto také věnuje většinou velkou pozornost ostrosti výsledků a ukazuje jejich nezlepšitelnost.

Hlavním oborem vědecké práce prof. Jarníka byla teorie čísel a to zejména teorie mřížových bodů, diofantických aproximací a geometrie čísel. Druhým jeho pracovním oborem byla matematická analýza, zvláště teorie funkcí reálné proměnné.

Všimněme si nejprve časové posloupnosti prací. V pracích vždy převažuje teorie čísel; práce z teorie funkcí se významněji objevují jednak v počátečním období (1920–27), kdy Jarník publikuje i zajímavou skupinu prací z teorie řad, a zejména v letech 1933–36 (zřejmý vliv tzv. „polské školy"). V samotné teorii čísel převládá výrazně teorie mřížových bodů, které se prof. Jarník věnoval prakticky od počátku své vědecké práce až do konce života bez viditelných přestávek. Podobné platí i o teorii diofantických aproximací, která upoutala Jarníkovu pozornost o něco později a v níž publikoval o něco méně prací. V krátkém období let 1939–49 přistupuje série publikací z geometrie čísel.

Soustavnost vědecké práce prof. Jarníka vyplývá ze zjištění, že prakticky každý rok publikoval alespoň dvě práce (mnohdy značně obsažné); dvě význačnější vyjímky odpovídají okolí r. 1945 a období po r. 1950.

Mezi nejúspěšnější období patří zejména léta 1928–31 (věnovaná skoro výhradně více než dvaceti pracím z teorie mřížových bodů ve vícerozměrných elipsoidech) a období 1934–35 (převažuje teorie reálných funkcí, zejména tzv. metoda kategorií).

Přejděme nyní k rozboru Jarníkových prací z teorie mřížových bodů. Vzhledem k jejich počtu a rozsahu (27 prací na více než pěti stech stranách) se omezíme jen na kusý výběr nejdůležitějších a nejsnáze popsatelných výsledků a na vymezení základních souvislostí.

Nejstarší a také nejznámější je Gaussův „kruhový“ problém. Pro $x > 0$ buď $A(x)$ počet dvojic celých čísel u a v, pro něž platí $u^2 + v^2 \leqq x$. $A(x)$ pro $x > 0$ tedy udává počet mřížových bodů, ležících v (uzavřeném) kruhu o středu v počátku a o poloměru $\sqrt{x}$. Budeme se tedy zcela přirozeně snažit aproximovat funkci $A(x)$ plochou $V(x)$ tohoto kruhu, tj. výrazem πx. „Kruhový“ problém spočívá nyní v nalezení co nejlepších odhadů velikosti rozdílu $P(x) = A(x) - V(x)$ v následujícím smyslu:

Elementární úvahy ukazují, že $P(x) = O(\sqrt{x})$ [2]. V r. 1906 dokázal polský matematik Sierpiński, že $P(x) = O(x^{1/3})$. K důležitému výsledku dospěli v r. 1915 Hardy s Landauem, kteří dokázali vztah $P(x) = \Omega(x^{1/4})$ [3]. Odtudy plyne, že pro „pravý“ exponent odhadů funkce $P(x)$, tj. pro hodnotu

$$f = \limsup_{x \to +\infty} \frac{\lg |P(x)|}{\lg x}, \tag{1}$$

platí nerovnost $\frac{1}{4} \leqq f \leqq \frac{1}{3}$. (Poznamenejme, že vztah (1) znamená přesně totéž jako platnost vztahů $P(x) = O(x^{f+\varepsilon})$, $P(x) = \Omega(x^{f-\varepsilon})$ pro každé $\varepsilon > 0$.) „Kruhový“ problém tedy v základě spočívá v určení hodnoty (1).

Určitý přelom znamenaly práce van der Corputa, který v r. 1923 ukázal, že $f \leqq \frac{37}{112}$. Poznamenejme, že přes velké úsilí řady vynikajících matematiků v uplynulých skoro padesáti letech se uvedený problém nepodařilo rozřešit (je např. známo, že $f \leqq \frac{13}{40}$, ale nerovnost $f \geqq \frac{1}{4}$ se zlepšit nepodařilo). Uvádíme tyto výsledky proto, aby bylo vidět, jakého dlouhého úsilí bylo třeba k celkem „nepatrnému“ zmenšení exponentu; tím snad více vynikne významnost a obtížnost Jarníkových prací v tomto oboru.

Středem zájmu matematiků v té době byla různá zobecnění „kruhového problému“. Zmiňme se pouze o dvou směrech, které se staly předmětem intensivního zájmu prof. Jarníka.

Prvé zobecnění je následující. Zůstaňme v rovině, ale místo kruhu $u^2 + v^2 \leqq x$ uvažujme konvexní kompaktní množinu, která je omezena křivkou o délce nejvýše $\sqrt{x}$, která má spojitě se měnící tečnu a poloměr křivosti, který je nenulový a nepřesáhne hodnotu $c\sqrt{x}$, kde c je kladná konstanta. Pro tuto třídu množin dokázal van der Corput v r. 1919 odhad $P(x) = O(x^{1/3})$, kde $P(x)$ má analogický význam jako výše pro kruh.

Zdálo se nyní, že i pro toto zobecnění lze očekávat podobná zlepšení jako u „kruhového“ problému. Velmi překvapující a nečekaný byl proto Jarníkův výsledek z práce [9], v níž (kromě dalších jemnějších výsledků) konstruuje množinu uvedených vlastností, pro niž platí $P(x) = \Omega(x^{1/3})$. Skvělost výsledku dokumentuje i jeho ohlas

[2]) Vztah $f(x) = O(g(x))$ znamená, že pro dostatečně velká x je $g(x) > 0$ a $\limsup_{x \to +\infty} |f(x)|/g(x) < +\infty$.

[3]) Vztah $f(x) = \Omega(g(x))$ znamená, že neplatí $f(x) = o(g(x))$ tj. g je pro dostatečně velká x kladná a $\limsup_{x \to +\infty} |f(x)|/g(x) > 0$.

v literatuře: E. Landau věnuje této konstrukci celou kapitolu svého díla „Vorlesungen über Zahlentheorie", výsledek je citován i v jiných monografiích, např. v poslední době v knize Gel'fonda a Linnika.

Do „rovinné" problematiky spadají ještě další Jarníkovy práce. V [7] zobecňuje Jarník výše citovaný Ω-odhad Landaua a Hardyho na dosti obecnou třídu rovinných oborů (charakterizovanou poněkud jinak než výše). Práce [12] se týká této problematiky z poněkud jiného hlediska. Uvažujeme v úhlu $0 \leqq u \leqq y/x \leqq v \leqq 1$, $x > 0$ dosti „rozumnou" křivku L omezující jistou výseč a buď $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ posloupnost všech kladných čísel λ, pro něž při stejnolehlosti se středem v počátku a koeficientu λ obraz křivky L obsahuje alespoň jeden mřížový bod. Jarník nyní studuje zajímavou otázku chování rozdílu $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ pro velká n, zvláště podrobně studuje případ, kdy L je část kvadratické křivky. „Rovinné" problematiky se ještě dotýkají práce [8], [33] a [71], o nichž se zmíníme na jiném, příhodnějším místě.

Druhý směr zobecnění můžeme charakterisovat takto: z „kruhového" problému zachovejme pouze tu skutečnost, že $u^2 + v^2$ je positivně definitní kvadratická forma. Problém je tedy následující: je-li $r \geqq 2$ přirozené číslo, $Q(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ positivně definitní kvadratická forma se symetrickou maticí koeficientů, buď $A(x)$ pro $x \geqq 0$ počet mřížových bodů oborů $Q(u_1, u_2, \ldots, u_r) \leqq x$. Označme $V(x)$ objem tohoto elipsoidu, tj. $V(x) = \pi^{r/2} x^{r/2} / \sqrt{(D)}\, \Gamma(\frac{1}{2}r + 1)$, kde D je determinant formy Q a buď $P(x) = A(x) - V(x)$. Hledejme nyní – analogicky jako u „kruhového" problému – co nejlepší O a Ω odhady.

Již Minkowski ukázal v r. 1905 elementárně odhad

$$P(x) = O(x^{r/2 - 1/2})$$

V letech 1915–1924 vyšetřoval tento (a ještě mnohem obecněji formulovaný) problém E. Landau a dokázal, že

$$P(x) = O(x^{r/2 - r/(r+1)}), \quad P(x) = \Omega(x^{(r-1)/4}). \tag{2}$$

Všimněme si, že pro případ kruhu dostáváme odtud výše uváděné výsledky Sierpińského, Landaua a Hardyho. Mezera mezi oběma odhady je – zvláště pro velká r – velmi značná a máme tedy problém např. nalezení hodnoty $f_Q = f$, definované dle (1).

Prvý pokrok znamenaly výsledky A. Walfisze a E. Landaua z let 1924–5. Jejich výsledek zněl

$$P(x) = O(x^{r/2 - 1}) \tag{3}$$

pro $r \geqq 5$, pokud Q je tzv. racionální forma (tj. její koeficienty jsou celistvými násobky jednoho a téhož reálného čísla). Pro $r = 4$ a racionální Q ukázal Landau platnost odhadu

$$P(x) = O(x \lg^2 x). \tag{4}$$

Poznamenejme na tomto místě, že problémy pro „malé" dimense ($r = 2, 3, 4$) mají odlišný charakter a vyžadují i jinou metodiku než pro dimense „velké" ($r \geqq 5$), přičemž případ $r = 4$ je jaksi „přechodný".[4]) Vyplývá to např. zhruba z té skutečnosti, že každé přirozené číslo lze vyjádřit jako součet čtyř kvadrátů celých čísel, ale tento počet nelze obecně zmenšit.

Metoda, kterou Walfisz a Landau použili k odvození svých O-odhadů, spočívá na následující myšlence (pro jednoduchost nechť Q má celé koeficienty). Funkce

$$f(z) = \sum z^{Q(m_1, m_2, \ldots, m_r)}$$

(sčítáme přes všechna celá $m_1, m_2, \ldots, m_r$) je zřejmě holomorfní v kruhu $|z| < 1$ a koeficienty a_m jejího Taylorova rozvoje

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$$

udávají zřejmě počet vyjádření čísla m formou Q. Zřejmě máme

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} f(z)\, z^{-m-1}\, dz\,.$$

kde φ je kladně orientovaná kružnice o středu v počátku a poloměru $r < 1$. Využijeme-li nyní jistých transformačních vlastností funkce f, které nám umožňují nalézt její přibližné vyjádření v okolí bodu $re^{2\pi ih/k}$(h, k celá), $r = 1 - 1/m$, dostaneme vztah

$$(5) \qquad a_m = \frac{\pi^{r/2} m^{r/2-1}}{\sqrt{(D)}\, \Gamma(\frac{1}{2}r)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{h=0 \\ (h,k)=1}}^{k} \frac{S_{h,k}}{k^r} e^{-(2\pi imh)/k} + O(m^{r/4})$$

(pro $m \to +\infty$), kde $S_{h,k}$ jsou jisté součty (tzv. zobecněné Gaussovy součty), pro něž platí $|S_{h,k}| \leqq ck^{r/2}$ [5]). Protože $A(x) = \sum_{m \leqq x} a_m$, dostaneme odtud snadno (3) pro $r \geqq 8$. Jednoduchou modifikací tohoto postupu lze dokázat (3) i pro $r \geqq 5$ a i odhad (4). Nebylo ovšem jasné, jsou-li tyto odhady definitivní a nebyla k disposici ani jediná účinná Ω-metoda (s vyjímkou metody Landauovy, která vede k odhadu (2)). V této situaci upozornil Jarník na překvapující skutečnost, která všem unikla, že pro racionální elipsoidy lze celkem elementárně dokázat odhad

$$(6) \qquad P(x) = \Omega(x^{r/2-1})\,.$$

Tím byl dosažen prvý definitivní výsledek v této teorii.

Jarníkův výsledek dal podnět k celé řadě vyšetřování (Landau, Müntz, Petersson, Walfisz, Jarník), které byly vedeny různými metodami. Zmiňme se krátce o Jarníkově

---

[4]) Jak ukázal A. Walfisz, máme pro racionální formy a $r = 4$, $P(x) = O(x \lg^{2/3} x)$ a $P(x) = \Omega(x(\lg \lg x)^{\tau})$, kde τ závisí jen na Q.

[5]) Zde i dále znamená písmeno c (obecně různé) kladné konstanty, závislé jen na Q.

přínosu v tomto směru (místo racionálních elipsoidů uvažujeme pro jednoduchost elipsoidy s celočíselnými koeficienty, $r \geqq 5$).

V pracích [20] a [21] je ukázána existence konstanty c takové, že každá z nerovností

$$P(n) > (M + c)\, n^{r/2-1}\,, \quad P(n) < (M - c)\, n^{r/2-1}\,, \quad M = \frac{\pi^{r/2}}{2\Gamma(\frac{1}{2}r)\sqrt{D}}$$

platí pro nekonečně mnoho přirozených n, dokonce pro všechny členy jisté aritmetické posloupnosti. Označíme-li tedy

$$\varrho_Q(n) = \frac{P(n)}{n^{r/2-1}}\,,$$

dostaneme ihned, že

$$\liminf_{n \to +\infty} \varrho_Q(n) < M - c\,, \quad \limsup_{n \to +\infty} \varrho_Q(n) > M + c\,.$$

Je-li $Q(u) = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_r^2$ (případ r – rozměrné koule), lze posloupnost $\varrho_Q(n) = \varrho_r(n)$ vyšetřit mnohem podrobněji. Např. (viz [16]) asymptoticky (vzhledem k r) vyjádřit její lim sup a lim inf, dokázat, že tato posloupnost má nekonečně mnoho hromadných bodů ([31]) neb (pro $r \geqq 8$ sudé) vyšetřovat její hromadné body, probíhá-li n jisté nekonečné množiny přirozených čísel (viz [24]). O důležitosti těchto a dalších Jarníkových výsledků v tomto směru svědčí ta skutečnost, že ve známé Walfiszově monografii „Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln" je prakticky pouze z těchto výsledků sestavena celá třetí kapitola.

Výchozím bodem pro většinu právě citovaných výsledků byl vztah (5). Zmiňme se proto již na tomto místě o práci [32], i když je to „diskrétní" tvar věty o střední hodnotě, o nichž bude pojednáno dále. Jarník ukazuje, že pro každou konstantu E existuje kladná konstanta C_E tak, že platí

$$\sum_{n \leqq x} (P(n) - En^{r/2-1})^2 = C_E x^{r-1} + g(x)\,,$$

kde $g(x) = O(x^{r-2})$ pro $r > 8$, $O(x^{r/2-1} \lg x)$ pro $r = 8$, $O(x^{3r/4} \lg x)$ pro $r = 5, 6, 7$ a $g(x) = \Omega(x^{r-2})$ pro $E = 0$, $r \geqq 5$. Odtud znovu dostaneme odhad (6) a navíc vidíme, že ani v „průměru" nemohou být hodnoty $P(n)$ asymptoticky aproximovány výrazem $En^{r/2-1}$ s konstantním E.

Je pochopitelné, že jakmile byl vztahy (3) a (6) rozřešen problém pro racionální elipsoidy (i když jen pro $r \geqq 5$), byla veškerá pozornost soustředěna na elipsoidy iracionální. Jediná existující účinná metoda vycházela ze vztahu (5). S velkým úsilím se Walfiszovi podařilo tuto metodu využít a dokázat pro formy tvaru

$$\alpha u_1^2 + Q_1(u_2, u_3, \ldots, u_r)$$

($\alpha > 0$ iracionální, Q_1 racionální forma) pro $r \geqq 10$ odhad

$$P(x) = o(x^{r/2-1}) \tag{7}$$

a současně dokázat jeho obecnou nezlepšitelnost. Současně ale ukázal, že pro skoro všechna $\alpha > 0$ [6]), $r \geqq 10$ je dokonce

$$P(x) = O(x^{r/2-6/5} \lg^{1/4} x) . \tag{8}$$

Z Walfiszovy práce vyplývaly dvě skutečnosti: iracionální elipsoidy se chovají zřejmě úplně jinak než elipsoidy racionální a za druhé, že další účinné využití výše uvedené metody nemůže přinést podstatně nové výsledky. Nechme však lépe hovořit odborníka nad jiné povolaného — A. Walfisze, který 26. září 1929 na prvém sjezdu slovanských matematiků řekl: „Ačkoliv tedy odhady (7) a (8) přinesly jistý průhled do teorie mřížových bodů v iracionálních elipsoidech, bylo přece jen od začátku zřejmo, že myšlenkový pochod k nim vedoucí tvořil jen jakýsi orientační prostředek z nedostatku lepších. Bylo tedy nutno hodit singulární řadu[7]) přes palubu a nalézti něco docela jiného. Myslil jsme, že to nějakou dobu potrvá. Tím více mě překvapily — a jistě ne mne samotného — objevy Jarníkovy. V řadě pojednání, jejichž publikace se datuje od středu minulého roku a které originalitou, hloubkou myšlenek a technickým provedením se čítají k nejpozoruhodnějším pracím moderního bádání, ujal se Jarník s velmi vydatnými prostředky problému a obdržel tak celou řadu výsledků překvapující přesnosti.“[8])

Přínos prací prof. Jarníka v teorii mřížových bodů v elipsoidech spočívá tedy ve vypracování nových, vysoce účinných O- i Ω-metod, s nimiž se mu podařilo dokázat celou řadu definitivních výsledků — jev, který je v teorii čísel a zejména v teorii mřížových bodů ojedinělý. Možno dokonce říci, že všechny definitivní výsledky v této oblasti jsou buď z jeho pera, nebo jsou jeho pracemi podmíněny.

Pojednejme nyní alespoň v krátkosti o základních myšlenkách Jarníkových metod pro studium O- a Ω-odhadů funkce $P(x)$. V základě velmi jednoduchá je Jarníkova Ω-metoda. Funkce $A(x)$ je po částech konstantní; změna funkce $P(x)$ je tedy „většinou“ dána změnou funkce $V(x) = cx^{r/2}$. Řečeno podrobně: nechť $A(x)$ je konstantní v intervalech $\langle \lambda_n, \lambda_n + h_n \rangle$, kde $0 < h_n < \lambda_n$, $\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty$. Je tedy

$$|P(\lambda_n + h_n) - P(\lambda_n)| = c((\lambda_n + h_n)^{r/2} - \lambda^{r/2}) \geqq \tfrac{1}{2} c r h_n \lambda^{r/2-1} .$$

Víme-li nyní, že pro jisté $\beta \geqq 0$ je $h_n \lambda_n^\beta \geqq c$, dostaneme odtud

$$|P(\lambda_n + h_n) - P(\lambda_n)| \geqq c\lambda_n^{r/2-1-\beta} .$$

Je tedy buď

$$|P(\lambda_n)| \geqq c\lambda_n^{r/2-1-\beta} \quad \text{neb} \quad |P(\lambda_n + h_n)| \geqq c\lambda_n^{r/2-1-\beta} \geqq c(\lambda_n + h_n)^{r/2-1-\beta}$$

tj.

$$P(x) = \Omega(x^{r/2-1-\beta}) .$$

---

[6]) Skoro všechna — ve smyslu Lebesgueovy míry (podobně v dalších formulacích).

[7]) Singulární řada — rozuměj řada v (5).

[8]) Viz Časopis pro pěst. mat. 59 (1929), 200—223.

Je-li např. Q celočíselná forma, lze volit $\lambda_n = n$, $h_n = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ a dostaneme odhad (6). Jak lze tuto myšlenku aplikovat na iracionální elipsoidy? Omezme se (jako Jarník) v následujícím pouze na formy následujícího „skoro diagonálního" tvaru

$$Q(u) = a_1 Q_1(u_1, u_2, \ldots, u_{r_1}) + a_2 Q_2(u_{r_1+1}, \ldots, u_{r_1+r_2}) + \ldots \tag{9}$$
$$\ldots + a_\sigma Q_\sigma(u_{r_1+r_2+\ldots+r_{\sigma-1}+1}, \ldots, u_r)$$

kde $\sigma, r_1, r_2, \ldots, r_\sigma$ jsou přirozená čísla, $r = r_1 + \ldots + r_\sigma$, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\sigma$ jsou positivně definitní kvadratické formy s celočíselnými koeficienty, $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ kladná reálná čísla. Lze nyní ukázat, že jestliže nerovnosti

$$\left|\frac{a_j}{a_1} q - p_j\right| \leqq q^{-\gamma}, \quad j = 2, \ldots, \sigma$$

mají nekonečně mnoho řešení v celých kladných číslech $p_2, p_3, \ldots, p_\sigma, q$, lze zvolit λ_n a h_n s výše uvedenými vlastnostmi pro $\beta = 1/\gamma$. Odtud ihned plyne tedy odhad

$$P(x) = \Omega(x^{r/2-1-1/\gamma}).$$

Jarník ovšem tuto metodu několikráte modifikoval. Výsledky současně ukazují, že hodnota (1) bude pravděpodobně velmi úzce souviset se simultánní aproximací čísel $a_2/a_1, a_3/a_1, \ldots, a_\sigma/a_1$.

Nepoměrně obtížnější je Jarníkova O-metoda. Výše naznačená metoda, vycházející z mocninné řady je zřejmě pro iracionální elipsoidy nepoužitelná. Proto Jarník uvažuje Dirichletovu řadu

$$\Theta_Q(s) = \sum_{m_1,\ldots,m_r} e^{-sQ(m_1,m_2,\ldots,m_r)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s}, \tag{10}$$

která definuje holomorfní funkci v oboru $\operatorname{Re} s > 0$. Čísla λ_m jsou hodnoty formy Q v mřížových bodech, číslo a_m udává počet mřížových bodů na ploše $Q(u) = \lambda_m$. Jak známo, lze nyní psát (zanedbejme pro jednoduchost, že rovnost platí pouze $x \neq \lambda_m$ $m = 0, 1, 2, \ldots$)

$$A(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xs}\,\Theta(s)}{s}\,\mathrm{d}s, \tag{11}$$

pro libovolné kladné a, kde integrujeme přes polopřímku $\operatorname{Re} s = a$. Pomiňme v následujícím také tu skutečnost, že tento integrál není absolutně konvergentní a přímé odhady nelze provádět.[9] Z (11) dostaneme ihned ihned vyjádření

$$P(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xs}\,F(s)}{s}\,\mathrm{d}s, \tag{12}$$

[9]) Tuto nesnáz lze odstranit vyšetřováním integrálu $\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t$.

kde $F(s) = \Theta(s) - \pi^{r/2}/\sqrt{(D)}\, s^{r/2}$. Vzhledem k členu e^{xs} bude asi výhodné klásti $a = 1/x$. Pomocí transformačních vlastností funkce (10) lze nyní snadno ukázat, že integrál přes „malou" část dráhy v okolí reálné osy je relativně malý. Zmíněné transformační vlastnosti funkce (10) nám také dovolují nalézt – pro racionální Q – odhad tvaru

$$|\Theta_Q(s)| \leqq c\left(\frac{x}{k(1 + x|t - 2\pi h/k|)}\right)^{r/2}, \tag{13}$$

který platí pokud rozdíl $|t - 2\pi h/k|$ je dosti malý a kde $h \neq 0$ a k jsou celá nesoudělná čísla, $0 < k \leqq \sqrt{x}$. Pro formy tvaru (9) lze však psát

$$\Theta_Q(s) = \Theta_{Q_1}(a_1 s)\, \Theta_{Q_2}(a_2 s) \ldots \Theta_{Q_\sigma}(a_\sigma s)$$

a odtud snadno dostaneme odhad

$$|F(s)| \leqq c \prod_{j=1}^{\sigma}\left(\frac{x}{k_j(1 + x|t - 2\pi h_j/a_j k_j|)}\right)^{r_j/2}, \tag{14}$$

pokud $|t - 2\pi h_j/a_j k_j|$ je dosti malé a kde h_j, k_j jsou celá čísla, $(h_j, k_j) = 1$, $h_j \neq 0$, $0 < k_j \leqq \sqrt{x}$, $j = 1, 2, \ldots, \sigma$. Z odhadu (14) je patrné, že výraz vpravo bude velký, pokud rozdíly $|t - 2\pi h_j/a_j k_j|$ budou velmi malé. Velmi malé budou ovšem potom i rozdíly $|h_j/a_j k_j - h_1/a_1 k_1|$ a tedy čísla $a_2/a_1, a_3/a_1, \ldots, a_\sigma/a_1$ se dají velmi dobře simultánně aproximovat pomocí racionálních čísel. Začíná se tedy rýsovat podobná souvislost jako u Ω-odhadů.

Nyní je ovšem potřeba tuto hrubě naznačenou myšlenku precisovat. Jarník velmi důmyslným způsobem dělí integrační dráhu na jisté části, v nichž má přesně popsánu velikost rozdílů $|t - 2\pi h_j/a_j k_j|$ a tedy i nalezen dobrý odhad dle vztahu (14). Nyní je potřeba odhadnout míru každé takovéto množiny, provést jejich velmi jemnou klasifikaci a celý naznačený postup dovést ke konečnému výsledku (v tomto místě Jarník používá a většinou odvozuje nové a velmi jemné věty z teorie diofantických aproximací). Snad je z tohoto kusého náčrtku patrné, že Jarník musel překonat obtíže takového charakteru, které by asi odradily mnohého vynikajícího matematika. Odtud je také patrný jeden rys, který je příznačný pro řadu jeho prací: důmyslná kombinace různých, do té doby zdánlivě nesouvisejících odvětví matematiky.

Přistupme nyní k alespoň stručnému přehledu nejdůležitějších výsledků Jarníkových prací o mřížových bodech v elipsoidech. Budeme muset bohužel skoro pominout nejjemnější výsledky, protože jsou formulovány značně složitě, jak je to také v podstatě věci.

V pracích [19] a [27] je ukázáno, že pro $r \geqq 5$ a iracionální formu Q je

$$P(x) = o(x^{r/2-1}). \tag{15}$$

Otázku nezlepšitelnosti tohoto odhadu řeší Jarník v práci [67] velmi originálním způsobem pomocí metody kategorií, kterou (jak bude vidět z přehledu jeho prací v teorii reálných funkcí) mistrně ovládal: je-li $\varphi(x)$ kladná a nerostoucí funkce, $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$, $r \geqq 5$ platí pro každý systém kladných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ až na množinu prvé kategorie pro příslušnou formu (9) odhad (15) a

$$P(x) = \Omega(x^{r/2-1}\, \varphi(x))\,.$$

V práci [17] je ukázáno, že pro skoro všechny systémy $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ je

$$P(x) = O(x^{r/2-\lambda+\varepsilon})$$

pro každé $\varepsilon > 0$, kde $\lambda = \sum_{j=1}^{\sigma} \min(1, \frac{1}{4}r_j)$. Je-li tedy $r_1 = r_2 = \ldots = r_\sigma = 1$, je pro skoro všechna $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ $f \leqq \frac{1}{4}r$, je-li $r_1 \geqq 4, \ldots, r_\sigma \geqq 4$ je pro skoro všechna $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ $f \leqq \frac{1}{2}r - \sigma$ a tento odhad nelze zlepšit, neboť vždy je (viz [18])

$$P(x) = \Omega(x^{r/2-\sigma})\,.$$

Je-li tedy $r_1 \geqq 4, \ldots, r_\sigma \geqq 4$ je pro skoro všechna $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$

$$f = \frac{r}{2} - \sigma\,,$$

je-li $r_1 = r_2 = \ldots = r_\sigma = 1$ je pro skoro všechna $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ (viz (2))

$$\frac{r-1}{4} \leqq f \leqq \frac{r}{4}\,.$$

Tento výsledek tedy „rehabilituje" Landauův Ω odhad (2), který se zdál být příliš hrubý.

Je-li tedy $r_1 \geqq 4, \ldots, r_\sigma \geqq 4$ máme pro hodnotu (1) nerovnost

$$\frac{r}{2} - \sigma \leqq f \leqq \frac{r}{2} - 1\,, \tag{16}$$

která je ostrá. Vzniká pochopitelně otázka, zdali ke každé hodnotě f splňující (16) existuje forma Q tvaru (9), pro niž je $f_Q = f$. V případě $\sigma = 2$, $r_1, r_2 \geqq 4$ ukazuje Jarník v [22], že platí

$$f = \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\gamma}\,, \tag{17}$$

kde $\gamma = \gamma(a_1, a_2)$ je supremum těch $\beta > 0$, pro něž nerovnost

$$\left|q \frac{a_2}{a_1} - p\right| \leqq q^{-\beta}$$

má nekonečně mnoho řešení v přirozených p, q. V případě $\sigma > 2$ řeší Jarník položenou otázku „nekonstruktivním" způsobem pomocí Hausdorffovy míry. V práci [30] totiž ukazuje, že Hausdorffova dimense[10]) množiny těch $a_2/a_1, \ldots, a_\sigma/a_1$ takových, že pro příslušnou formu (9) je $f = f_Q$ dána výrazem

$$\left(1 - \frac{2}{r - 2f}\right)\sigma$$

(platí i pro $\sigma = 2$). Poznamenejme v této souvislosti, že rozšíření platnosti vztahu (17) i na případ $\sigma > 2$ ($\gamma = \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_\sigma)$ je podobně definováno jako výše) se za jistých předpokladů ($r_j \geqq 2(\gamma + 1)/\gamma$) podařilo v r. 1968 žáku prof. Jarníka B. Divišovi.[11])

V práci [70] je velmi podrobně vyšetřován případ $\sigma = 2$; jsou studovány např. ty hodnoty β, pro něž platí

$$\liminf_{x \to +\infty} \frac{|P(x)|}{x^\beta} < +\infty,$$

znaménkové změny funkce $P(x)$ atp. Tato práce snad patří k nejjemnějším v tomto oboru. Práce [88] je věnována zajímavé otázce, jakých hodnot může nabývat f, volíme-li některá a_j pevně. Jarník ukazuje, že pro $\sigma > 3$, a_1, a_2 pevná, $\gamma(a_1, a_2) = 1$, platí pro skoro všechna $a_3, a_4, \ldots, a_\sigma$ a pro každé $\varepsilon > 0$ odhad

$$P(x) = O(x^{r/2 - \lambda + \varepsilon})$$

(za předpokladu $r_j \geqq 2(\gamma + 1)/\gamma$ zobecňuje tento výsledek B. Diviš[11])).

Z výše uvedeného i když stručného přehledu je patrné, že definitivních výsledků nebylo v mnoha případech dosaženo. Proto již Landau začal v r. 1923 (ještě o rok dříve Cramér) vyšetřovat tzv. střední hodnotu $T(x) = \sqrt{(M(x)/x)}$, kde $M(x) = \int_0^x (P(t))^2 \, dt$ a ukázal, že pro případ kruhu platí

$$M(x) = cx^{3/2} + O(x^{1+\varepsilon})$$

pro každé $\varepsilon > 0$. „Průměrný řád" funkce $P(x)$ je tedy v tomto případě $\frac{1}{4}$. Uvažme, že studium funkce $M(x)$ je relativně lehčí než studium funkce $P(x)$ (nezápornost, monotonie); lze tedy očekávat přesnější O i Ω výsledky. Na druhé straně z dosti dobrých výsledků o funkci $M(x)$ dokážeme odvodit velmi pěkné výsledky o funkci $P(x)$, jinak nedosažitelné. Zhruba z těchto důvodů bylo zkoumání funkce $M(x)$ rozvinuto v samostatnou část teorie mřížových bodů.

---

[10]) Množina M (ležící v eukleidovském prostoru) má Hausdorffovu dimensi α, jestliže α je infimum těch čísel α', pro něž ke každému $\varepsilon > 0$ existuje posloupnost krychlí $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ pokrývajících M o hranách $h(K_n) < \varepsilon$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} h^{\alpha'}(K_n) < \varepsilon$. V označení uvedením na str. 323 to znamená $L(M, x^{\alpha+\varepsilon}) = 0$, $L(M, x^{\alpha-\varepsilon}) = +\infty$ pro každé ε, $0 < \varepsilon < \alpha$.

[11]) Viz Czech. Math. Journal *20* (1970), 130—139, 149—159.

Jarník se této problematice věnoval prakticky od počátku. V práci [8] zobecňuje Landauův právě uvedený výsledek na vztah

$$\int_0^x P((\sqrt{(t)} + \alpha)^2)\, P((\sqrt{(t)} + \beta)^2)\, \mathrm{d}t = \Phi(\alpha - \beta)\, x^{3/2} + O(x^{1+\varepsilon})$$

pro každé $\varepsilon > 0$, kde Φ je jistá kladná funkce. Odtud odvozuje řadu zajímavých vlastností funkce $P(x)$ (analogie skoroperiodičnosti atp.). Výše uváděná práce [32] patří vlastně také do této skupiny.

Hlavní Jarníkův přínos ke studiu funkce $M(x)$ spočívá v tom, že se mu podařilo přizpůsobit své metody studia funkce $P(x)$ do tvaru použitelného i pro funkci $M(x)$. Jarník vychází ze snadno dokazatelného vyjádření

$$M(x) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{(a)}\int_{(a)} \frac{e^{x(s+s)'}\, F(s)\, \overline{F(\bar{s}')}}{ss'(s+s')}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}s',$$

které snadno dostaneme z (12). Uvedený integrál nyní odhaduje podobným postupem, jak bylo výše naznačeno. Je ovšem pochopitelné, že při dvojném integrálu přistupuje celá řada ryze specifických obtíží a úskalí.

Uveďme nyní alespoň základní výsledky. Jarník se – stejně jak výše uvedeno – omezuje na formy tvaru (9). Použitím jedné Landauovy myšlenky, lze ukázat, že vždy je

$$M(x) \geqq cx^{r/2+1/2}$$

a Jarníkova metoda dává pro racionální formy

$$M(x) \geqq cx^{r-1}$$

Pro všechny formy uvažovaného tvaru lze ukázat odhady

$$M(x) = O(x^{r-1})$$

pro $r > 3$, $M(x) = O(x^2 \lg^2 x)$ pro $r = 3$ a $M(x) = O(x^{3/2} \lg^4 x)$ pro $r = 2$ (vše viz [33]).

Pro iracionální formy uvažovaného tvaru a $r \geqq 4$ máme

$$M(x) = o(x^{r-1})$$

a tento odhad nejde obecně zlepšit a to ve stejném smyslu jak bylo výše uvedeno pro funkci $P(x)$ (viz [38], [67]). Pro skoro všechny formy tvaru (9) a $\sigma = r$ dostaneme

$$M(x) = O(x^{(r+1)/2} \lg^{3r+3} x)$$

tj. s výše uvedeným dolním odhadem dostaneme pro skoro všechny tyto formy

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{\lg T(x)}{\lg x} = \frac{r-1}{4},$$

což skoro úplně rehabilituje Landauův Ω-odhad (2). Velmi důležitá je práce [71], v níž jsou pro $r = 2, 3$ zlepšeny výše uvedené O-odhady na

$$M(x) = O(x^{3/2}) \quad \text{pro} \quad r = 2\,, \quad M(x) = O(x^2 \lg x) \quad \text{pro} \quad r = 3\,.$$

Tím je dosažen definitivní výsledek pro $r = 2$. Pro $r = 3$ zbývá jen logaritmický faktor, který nelze odstranit, jak ihned uvidíme.

Snad nejzajímavějším výsledkem práce [69] je vztah

$$M(x) = Kx^2 \lg x + O(x^2 \sqrt{(\lg x)})$$

platný pro $r = 3$ a racionální Q, $K = c$. Odtud plyne, že pro racionální formy máme nečekaný výsledek

$$P(x) = \Omega((x \lg x)^{1/2})$$

V [69] je dále ukázáno, že

$$M(x) = Kx^{r-1} + g(x)\,,$$

kde $g(x) = O(x^{r-2})$ pro $r \geqq 6$, $g(x) = O(x^3 \lg^2 x)$ pro $r = 5$, $g(x) = O(x^{5/2} \lg x)$ pro $r = 4$ a $g(x) = \Omega(x^{r-2})$ pro $r \geqq 4$, kde K je konstanta a Q racionální forma.

Závěrem alespoň stručně upozorněme na vysoce jemné a složité práce [40] a [68]. V nich je velmi podrobně a do velké hloubky vyšetřován případ $\sigma = 2, 3$. Pro $\sigma = 2$ je např. (pomocí rozvoje čísla a_2/a_1 v řetězový zlomek) nalezena poměrně jednoduchá funkce $G(x)$ taková, že $M(x)/G(x)$ leží pro $x > c$ mezi dvěma kladnými konstantami.

Přehled prací prof. Jarníka z teorie mřížových bodů uzavřeme prací [89] z r. 1968, která se svým charakterem poněkud vymyká jednotlivým skupinám výše popisovaným.

Naznačili jsme již výše, že je výhodné vyšetřovat ne přímo funkci $P(x)$, ale její integrál $P_1(x) = \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t$. Landauova metoda, s níž dokázal výsledky (2) se opírá o následující myšlenku. Zavedeme zřejmým způsobem funkce $P_0(t) = P(t)$, $P_1(t), \ldots$ Celkem snadno lze nahlédnouti, že pro $\varrho > \frac{1}{2}r$ celé dostaneme pro každou formu definitivní výsledek

$$P_\varrho(x) = O(x^{(r-1)/4+\varrho/2})\,, \quad P_\varrho(x) = \Omega(x^{(r-1)/4+\varrho/2})\,.$$

Odtud lze (v podstatě tvořením diferencí) dokázat odhady (2).

V práci [89] klade Jarník pro reálné $\varrho \geqq 0$

$$P_\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_0^x P(t)\,(x - t)^{\varrho-1}\,\mathrm{d}t$$

a vyšetřuje nový problém závislosti O- a Ω-odhadů funkce $P_\varrho(x)$ na parametru ϱ. (Poznamenejme, že pro ϱ celé dávají oba způsoby stejné funkce.) Uveďme z výsledků této práce jen výsledky definitivní, které Jarník dokazuje kombinací svých a Landauových metod. Buď forma Q racionální. Potom

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/2-1})\,, \quad P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/2-1})$$

pro $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 2$,

$$P_\varrho(x) = O(x^{(r-1)/4+\varrho/2})\,, \quad P_\varrho(x) = \Omega(x^{(r-1)/4+\varrho/2})$$

pro $\varrho > \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$. Pro $\frac{1}{2}r - 2 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}$, neboli $2\varrho + 1 \leqq r \leqq 2\varrho + 4$ je mezi Jarníkem dosaženými výsledky jistá mezera, která pro $\varrho = 0$ odpovídá klasickým neřešeným problémům $r = 2, 3, 4$. U funkcí $P_\varrho(x)$ dostaneme vlastně jisté „posunutí" klasických problémů do jiné roviny a nalezení definitivních výsledků bude neméně těžké. Uveďme ještě pro zajímavost, že uvedené Ω-odhady platí pro všechna ϱ; pro $\varrho = \frac{1}{2}(r - 3) \geqq 0$ nastává tedy vlastně přechod od jedněch odhadů ke druhým.

Z uvedeného je jistě patrné, že prof. Jarník se svými pracemi způsobem více než důstojným řadí spolu s E. Landauem a A. Walfiszem mezi badatele, kteří teorii mřížových bodů ve vícerozměrných elipsoidech dovedli do velmi uceleného tvaru. Jeho vlastní výsledky jsou prakticky nepřekonatelné a z hlediska této obtížné teorie lze jen litovat, že se jí prof. Jarník nevěnoval více. Bylo by to sice na škodu jiných odvětví matematiky, v nichž pracoval, ale jistě by teorie mřížových bodů byla bohatší o řadu významných a jistě definitivních výsledků.

Obraťme se nyní k pracím z teorie diofantických aproximací.

Nechť $\Theta = (\Theta_{i,j})$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, s$ je reálná matice a nechť φ je nerostoucí funkce, $\varphi(t) \to 0$ pro $t \to \infty$. V teorii diofantických aproximací se vyšetřuje soustava nerovností

$$(18) \qquad \left|\sum_{j=1}^{s} \Theta_{ij}x_j + y_i\right| \leqq \varphi(t)\,, \quad 0 < \max_j |x_j| \leqq t\,, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

kde x_j, y_i jsou celá čísla. Pro dané t nazveme soustavu celých čísel x_j, y_i, $j = 1, \ldots, s$, $i = 1, 2, \ldots, r$, která splňují (1), řešením soustavy (18). Jde o to, rozhodnout, zda matice Θ má jednu z vlastností

(A) Soustava (18) má řešení pro každé dosti velké t.

(B) Existuje posloupnost t_k, $t_k \to \infty$ pro $k \to \infty$ tak, že soustava (18) má řešení pro $t = t_k$, $k = 1, 2, \ldots$

Protože φ je nerostoucí, můžeme v případě, že platí (B) položit $t = \max_j |x_j|$; (B) platí právě tehdy, má-li soustava

$$(19) \qquad \left|\sum_{j=1}^{s} \Theta_{ij}x_j + y_i\right| \leqq \varphi(\max_j |x_j|)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

nekonečně mnoho řešení. Platí-li (B), říkáme, že Θ připouští aproximaci φ. Položme pro $t \geqq 1$

$$\psi_\Theta(t) = \min_{0 < \|x\| \leqq t} \; \max_{i=1,2\ldots r} \; \min_{y_i} \left|\sum_{j=1}^{s} \Theta_{ij}x_j + y_i\right|,$$

kde $\|x\| = \max_{j=1,2,\dots,s} |x_j|$ (a ovšem x_i, y_j jsou celá). Zřejmě (A) platí právě tehdy, existuje-li $T > 0$ tak, že $\psi_\Theta(t) \leqq \varphi(t)$ pro $t \geqq T$ a (B) platí právě tehdy, existuje-li posloupnost t_k, $t_k \to \infty$ pro $k \to \infty$ a $\psi_\Theta(t_k) \leqq \varphi(t_k)$.

Připomeňme některé základní výsledky z teorie diofantických aproximací. Z Dirichlet-Kroneckerovy věty lze odvodit, že

$$\psi_\Theta(t) < [t]^{-s/r} \tag{20}$$

kde $[t]$ je celá část t. Je-li $r = s = 1$ a je-li Θ iracionální číslo, pak

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \leqq \limsup_{t\to\infty} t\,\psi_\Theta(t) \leqq 1\,, \quad 0 \leqq \liminf_{t\to\infty} t\,\psi_\Theta(t) \leqq 5^{-1/2}\,. \tag{21}$$

Při vyšetřování vlastností (A), (B) můžeme se bez ztráty na obecnosti omezit na takové matice Θ, že $|\Theta_{ij}| \leqq \frac{1}{2}$. Buď $E_{r,s}(\varphi)$ množina takových matic Θ typu r, s, $|\Theta_{ij}| \leqq \frac{1}{2}$, které připouštějí approximaci φ. Chinčin dokázal, že

$$m(E_{r,1}(\varphi)) = 0\,, \quad \text{jestliže} \quad \int^\infty \varphi^r(t)\,\mathrm{d}t < \infty\,, \tag{22}$$

$$m(E_{r,1}(\varphi)) = 1\,, \quad \text{jestliže} \quad \int^\infty \varphi^r(t)\,\mathrm{d}t = \infty\,. \tag{23}$$

Přitom m je Lebesgueova míra v prostoru R^r (každá matice typu r, 1 je současně bodem v R^r). Speciálně $m(E_{r,1}(\delta t^{-\varrho/r})) = 0$, jakmile $\varrho > 1$, $\delta > 0$ a $m(E_{r,1}(\delta t^{-1/r})) = 1$ (podle (20) každá matice Θ typu r, 1 připouští aproximaci $t^{-1/r}$ a tak

$$E_{r,1}(t^{-1/r}) = \{\Theta \mid |\Theta_{i,1}| \leqq \tfrac{1}{2},\ i = 1, 2, \dots, r\})\,.$$

Přirozeně je $E_{r,1}(t^{-\varrho/r}) \supset E_{r,1}(t^{-\sigma/r})$, jakmile $1 \leqq \varrho < \sigma$; v případě $r = 1 = s$ dává rozvoj čísla Θ v řetězový zlomek podrobnou informaci o tom, zda Θ připouští či nepřipouští aproximaci φ. Tak lze ukázat, že pro každé ϱ, σ, $1 \leqq \varrho < \sigma$ existují čísla Θ, která připouštějí aproximaci $t^{-\varrho}$ a nepřipouštějí aproximaci $t^{-\sigma}$, tedy $E_{1,1}(t^{-\varrho}) - E_{1,1}(t^{-\sigma}) \neq \emptyset$.

Z výsledků, které Jarník dokázal v práci [35], bezprostředně plyne, že

$$E_{r,1}(t^{-\varrho/r}) - E_{r,1}(t^{-\sigma/r}) \neq \emptyset\,, \quad \text{jakmile} \quad r \geqq 1\,, \quad 1 \leqq \varrho < \sigma\,. \tag{24}$$

Přitom co do obtížnosti případy $r = 1$ a $r > 1$ jsou nesrovnatelné, neboť pro $r > 1$ není známa metoda, která by dala obdobné informace jako rozvoje v řetězové zlomky v případě $r = 1$.

Nechť $f : \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty)$ je spojitá, neklesající a $f(0) = 0$. Buď $S \subset R^r$. Pro $u \in R^r$, $d > 0$ nechť $Q(u, d)$ je krychle o středu u a hraně d, tj. $Q(u, d) = \{v \in R^r \mid |v_i - u_i| \leqq \frac{1}{2}d\}$. Zvolme $\varrho > 0$ a najděme nejvýše spočetné pokrytí množiny S krychlemi $Q(u_k, d_k)$, $k = 1, 2, \dots$ tak, že $d_k \leqq \varrho$ a tomuto pokrytí přiřaďme číslo $\sum_k f(d_k)$. Infimum množiny čísel takto získaných označme $L_\varrho(S, f)$. Zřejmě $L_\varrho(S, f) \geqq$

$\geqq L_\sigma(S, f)$ pro $\varrho < \sigma$ a tak existuje $L(S, f) = \lim_{\varrho \to 0+} L_\varrho(S, f)$. $L(., f)$ při pevném f je vnější míra; budeme ji nazývat Hansdorffovou mírou (množiny S, pro něž jí budeme užívat, budou vesměs borelovské, tedy měřitelné).

Jestliže $f_1(d)/f_2(d) \to 0$ pro $d \to 0+$, pak z $L(S, f_2) < \infty$ plyne $L(S, f_1) = 0$ a z $L(S, f_1) > 0$ plyne $L(S, f_2) = \infty$. Je-li $f(d) = d^r$, pak ovšem $L(S, f)$ je vnější Lebesgueova míra množiny S a jestliže $f_1(d)/d^r \to 0$ pro $d \to 0+$, pak $L(S, f_1) = 0$ pro každou množinu S. Jestliže $f(d)/d^r \to \infty$ pro $d \to 0+$, pak z $L(S, f) < \infty$ plyne $m(S) = 0$, a může nastat případ, že $m(S) = 0$ a $L(S, f) > 0$; Hausdorffova míra je vhodným nástrojem pro posouzení „velikosti" množiny S, jejíž Lebesgueova míra je nula.

Matici Θ typu r, 1 nazveme vlastní, jestliže platí: jakmile $\sum_{i=1}^{r} \Theta_{i,1} x_i + y = 0$, kde x_i, y jsou celá čísla, pak $x_i = 0 = y$ pro $i = 1, 2, \ldots, r$. $E^{vl}_{r,1}(\varphi)$ nechť je množina vlastních $\Theta \in E_{r,1}(\varphi)$.

Jarník v práci [35] dokázal pro širokou třídu funkcí:

$$L(E_{r,1}(\varphi), f) = 0\,, \quad \text{jestliže} \quad \int^{\infty} f(2\varphi(t)/t)\, t^r \,\mathrm{d}t < \infty\,, \tag{25}$$

$$L(E^{vl}_{r,1}(\varphi), f) = \infty\,, \quad \text{jestliže} \quad \int^{\infty} f(2\varphi(t)/t)\, t^r \,\mathrm{d}t = \infty\,. \tag{26}$$

Důkaz tvrzení (25) je jednoduchý a Jarník pracuje s tak obecnými předpoklady, že tvrzení (22) je speciálním případem tvrzení (25). Zato důkaz (26) je velmi složitý a vyžaduje některé speciálnější předpoklady o φ a f. Z (25) a (26) Jarník odvozuje (za jistých málo omezujících předpokladů o φ tím, že sestrojí vhodnou funkci f): Jestliže $\lambda : \langle 1, \infty) \to \langle 1, \infty)$ má spojitou derivaci, $\lambda(t)/t$ je neklesající a $\lambda(t)/t \to \infty$, pak

$$E^{vl}_{r,1}(\varphi) - E_{r,1}(\varphi \circ \lambda) \neq \emptyset$$

tj. existují taková vlastní Θ, která připouštějí aproximaci φ, ale nepřipouštějí aproximaci $\varphi \circ \lambda$ (a to je značně silnější tvrzení než (24)).

Hausdorffovy míry užil Jarník v pracích [26], [30], [84] k vyšetřování množin, jejichž prvky jsou charakterizovány svými aproximačními vlastnostmi nebo vlastnostmi svých rozvojů v řetězové zlomky. (Např. v práci [30] jde o množiny M_ϱ ($\varrho > 1$) takových čísel, která připouštějí aproximaci $t^{-\varrho}$, ale nepřipouštějí aproximaci $t^{-\sigma}$ pro žádné $\sigma > \varrho$.) Je ukázáno, že Hausdorffova dimense množin M_ϱ je $2/(\varrho + 1)$.

Je-li Θ matice řádu r, s nechť $\xi_{r,s}(\Theta)$ je supremum takových $\varrho \geqq s/r$, že (A) platí pro $\varphi(t) = t^{-\varrho}$ a nechť $\eta_{r,s}(\Theta)$ je supremum takových $\varrho \geqq s/r$, že (B) platí pro $\varphi(t) = t^{-\varrho}$; tedy $\xi_{r,s}(\Theta)$ je supremum takových $\varrho \geqq s/r$, že $\limsup_{t \to \infty} t^\varrho \psi_\Theta(t) = 0$ a $\eta_{r,s}(\Theta)$ je supremum takových $\varrho \geqq s/r$, že $\liminf_{t \to \infty} t^\varrho \psi_\Theta(t) = 0$. Zřejmě $s/r \leqq \xi_{r,s}(\Theta) \leqq \eta_{r,s}(\Theta)$.

V práci [37] odvozuje Jarník jisté nerovnosti, které vyjadřují vzájemnou závislost mezi $\eta_{1,1}(\Theta_1)$, $\eta_{1,1}(\Theta_2)$ a $\eta_{2,1}\left(\begin{pmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\end{pmatrix}\right)$ a zejména dokazuje, že tyto nerovnosti jsou ostré (tj. že je nelze zesílit). V [63] vyšetřuje obdobné závislosti pro $\eta_{1,1}(\Theta_1)$, $\eta_{1,1}(\Theta_2)$ a $\eta_{1,2}((\Theta_1, \Theta_2))$ a opět dokazuje, že nalezené nerovnosti jsou ostré.

Nechť Θ' je matice adjungovaná k Θ. Souvislosti mezi $\eta_{r,1}(\Theta)$ a $\eta_{1,r}(\Theta')$ si všiml Chinčin; v práci z r. 1926 dokázal, že pro každou matici Θ typu r, 1, kde $r \geqq 2$ platí

$$\eta_{1,r} \geqq r\eta_{r,1} + r - 1 \tag{27}$$

$$\eta_{r,1} \geqq \eta_{1,r}((r-1)\,\eta_{1,r} + r)^{-1} \tag{28}$$

(kde píšeme $\eta_{1,r}$, $\eta_{r,1}$ místo $\eta_{1,r}(\Theta)$, $\eta_{r,1}(\Theta')$). Nerovnostmi (27), (28) zabýval se Jarník v pracích [53], [54], [56] a ukázal, že jsou ostré. V práci [62] vyřešil obdobnou problematiku pro $\xi_{1,r}$ a $\xi_{r,1}$. Všimněme si této práce podrobněji. Jarník ukazuje: Pro každou vlastní matici Θ typu 2, 1 platí

$$\xi_{2,1} = 1 - (\xi_{1,2})^{-1}\,. \tag{29}$$

To je něco zcela jiného než (27), (28). Je-li $r > 2$, (27) a (28) platí pro každou vlastní matici Θ typu r, 1, píšeme-li $\xi_{r,1}$, $\xi_{1,r}$ místo $\eta_{r,1}$, $\eta_{1,r}$.

Tato shoda je ovšem do jisté míry formální, neboť ke každému ϱ, $1/r \leqq \varrho \leqq \infty$ existuje matice Θ typu r, 1 taková, že $\eta_{r,1}(\Theta) = \varrho$ (viz [53], Věta 2). Ale pro každou vlastní matici Θ typu r, 1 je $\xi_{r,1}(\Theta) \leqq 1$ (to plyne z první nerovnosti v (21)).

Jarník dokázal: je-li $r \geqq 3$ a Θ vlastní matice typu r, 1, pak

$$\xi_{1,r} \geqq r + \frac{2(\xi_{r,1} - 1/r) - 1}{1 - \xi_{r,1}} \qquad \text{jakmile} \quad 1 - \frac{1}{r} < \xi_{r,1} < 1\,, \tag{30}$$

$$\xi_{r,1} \geqq \frac{1}{r-1} - \frac{1}{(r-1)(\xi_{1,r} - 2r + 4)} \qquad \text{jakmile} \quad \xi_{1,r} \geqq 2r^2 - 3r\,. \tag{31}$$

Dále ukázal, že existuje jak taková vlastní matice Θ typu r, 1, že $\xi_{r,1}(\Theta) = 1$, $\xi_{1,r}(\Theta') = \infty$, tak i taková vlastní matice Θ typu r, 1, že $\xi_{r,1}(\Theta) = 1/r - 1$, $\xi_{1,r}(\Theta') = \infty$. Přitom Jarníkův postup je velmi obecný. K funkci φ_1 splňující jisté předpoklady sestrojil funkci φ_2 a ukázal: jestliže pro vlastní matici Θ typu r, 1 a $\varphi = \varphi_1$ platí (A), pak (A) platí i pro Θ' a $\varphi = \varphi_2$. Odtud jako speciální případ odvodil (31); odvození nerovnosti (30) lze popsat obdobně. Jádrem důkazu je virtuosní využití Minkowského věty o lineárních formách.

Práce [62] přináší také drobný doklad Jarníkovy nesmírné skromnosti. Nese nenápadný název „Zum Khintchinschen Übetragungssatz" a Jarník o ní píše jako o poznámce (Note). Šlo o skromnost, která byla Jarníkovou vnitřní vlastností a která souvisela s jeho zaujatým soustředěním k matematice i s jeho hodnocením vědecké práce a zejména vlastní vědecké práce sub specie aeternitatis.

Je-li Θ iracionální číslo, pak $\liminf_{t\to\infty} t\,\psi_\Theta(t) < \limsup_{t\to\infty} t\,\psi_\Theta(t)$ (srovnej (21)).

V práci [81] dokazuje Jarník: Buď $s \geqq 1$, Θ vlastní matice typu $(1, s)$,

$$\limsup_{t\to+\infty} t^s\,\psi_\Theta(t) = B\,,\quad \liminf_{t\to\infty} t^s\,\psi_\Theta(t) = A > 0\,.$$

Pak $(B/A)^{2^{s+1}} \geqq 2$. V téže práci dokazuje, že

$$\eta_{1,2} \geqq \xi_{1,2}(\xi_{1,2}-1)\,;\quad \text{tedy}\quad \eta_{1,2}(\Theta) > \xi_{1,2}(\Theta),\quad \text{jakmile}\quad 2 < \xi_{1,2}(\Theta) < \infty\,.$$

V práci [83] dokazuje Jarník tři nerovnosti, které platí mezi $\eta_{r,s}$ a $\xi_{r,s}$ pro obecná r, s (rozlišují se případy $r = 1$, $r = 2$, a $r > 2$).

Dyson dokázal, že pro matici typu r, s platí

$$\eta_{r,s} \geqq \frac{s\eta_{s,r} + s - 1}{(r-1)\,\eta_{s,r} + r} \tag{32}$$

((27) a (28) jsou speciální případy nerovnosti (32).) V [86] Jarník dokazuje, že nerovnost (32) je ostrá (kromě jistých výjimečných případů, které zůstávají nerozhodnuty). Také v pracích [87] a [90] jde o matice typu r, s; Jarník dokazuje, že existují matice, které mají jisté aproximační vlastnosti.

Ve srovnání s teorií mřížových bodů neb teorií diofantických aproximací tvoří skupina prací prof. Jarníka z geometrie čísel část početně malou, ale velmi bohatou na výsledky. Jeho práce se zejména týkají tzv. Minkowského postupných minim.

Uvažujeme v r-rozměrném eukleidovském prostoru R_r $(r > 1)$ konvexní těleso K (pro jednoduchost nechť to znamená kompaktní, konvexní množinu symetrickou vzhledem k počátku, obsahující vnitřní bod). Tzv. Minkowského postupná minima $\lambda_j = \lambda_j(K)$, $j = 1, 2, \ldots, r$ definujeme nyní takto: λ_j je infimum všech čísel $\beta > 0$, pro něž množina βK (vzniklá z K stejnolehlostí o středu v počátku a koeficientu β) obsahuje alespoň j lineárně nezávislých mřížových bodů. Zřejmě $0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \ldots \leqq \lambda_r < +\infty$. Označíme-li nyní $m(K)$ Lebesgueovu míru množiny K, říká základní (druhá) Minkowského věta geometrie čísel, že

$$\frac{2^r}{r!} \leqq \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r\, m(K) \leqq 2^r\,. \tag{33}$$

Poznamenejme, že odtud plyne ihned $\lambda_1 \leqq 2/\sqrt[r]{(m(K))}$ a tedy (prvá Minkowského věta) je-li $m(K) \geqq 2^r$ je $\lambda_1 \leqq 1$ tj. K obsahuje alespoň jeden mřížový bod různý od počátku. Odtud je patrná i důležitost geometrie čísel vzhledem k diofantickým aproximacím.

Prof. Jarník se ve svých pracích věnoval jednak velmi jemné otázce ostrosti nerovnosti (33), jednak jejímu zobecnění na obecnější třídy množin. Je ihned patrné, že pro množinu K definovanou nerovností $\sum_{i=1}^{r} |x_i| \leqq 1$ resp. $\max_{i=1,2,\ldots,r} |x_i| \leqq 1$ je $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \ldots = \lambda_r = 1$ a $m(K) = 2^r/r!$ resp. $m(K) = 2^r$. Vzniká nyní přirozená otázka, je-li možno úplně charakterisovat ta konvexní tělesa K pro něž v (33) platí jedna z rovností. Zejména je obtížný případ pravé nerovnosti. Touto otázkou se zabývá práce [78], kde je Estermannova metoda důkazu pravé nerovnosti v (33) upravena tak, aby bylo možno zachytit všechny případy, v nichž nastává rovnost.

Výše uvedené příklady indukují následující problém: nelze pro nějakou dosti rozumnou třídu konvexních těles nerovnost (33) zlepšit? Konkrétněji řečeno: víme-li, že rovnost v (33) nastává pro tělesa, která se „příliš neliší" od polyedrů, nelze tuto nerovnost zlepšit pro tělesa „dosti zaoblená"? Tato otázka je pro $r = 2$ vyšetřována v práci [76] pro množiny omezené křivkou se spojitě se měnícím poloměrem křivosti, který má kladné minimum. Nalezené zlepšení je dosti značné a v jistých mezních případech definitivní.

Obraťme se nyní k zobecnění pravé poloviny (33) pro nekonvexní množiny K. V této obecnosti je nutné nerovnost (33) poněkud jinak interpretovat, neboť zřejmě nalezneme i velmi „rozumné" množiny K pro něž βK neobsahuje pro žádné $\beta > 0$ mřížový bod. Uvažujeme proto množinu $\mathfrak{W}(K)$ všech bodů tvaru $\frac{1}{2}(x - y)$, kde $x, y \in K$. Zřejmě pro každou měřitelnou K je i $\mathfrak{W}(K)$ měřitelná. Dále pro konvexní těleso K je $\mathfrak{W}(K) = K$. Nerovnost (33) můžeme tedy pro konvexní těleso K přepsat ve tvaru

$$\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_r\, m(K) \leqq 2^r\,, \quad \lambda_j = \lambda_j(\mathfrak{W}(K))\,.$$

Platí nyní obdobný vztah i pro nekonvexní množiny K? Zde vystupuje ještě další komplikace, že pro nekonvexní množiny lze postupná minima zavést několika přirozenými způsoby (které pro konvexní tělesa splývají): nechť $\mu_j = \mu_j(M)$ (resp. $\lambda_j = \lambda_j(M)$ resp. $\nu_j = \nu_j(M)$ resp. $\pi_j = \pi_j(M)$) je infimum všech $\beta > 0$, pro něž množina $\bigcup_{0<\alpha\leqq\beta} \alpha M$ (resp. množina βM resp. každá množina αM pro $\alpha > \beta$ resp. množina $\bigcap_{\alpha\geqq\beta} \alpha M$) obsahuje alespoň j lineárně nezávislých mřížových bodů, $j = 1, 2, \dots, r$. Zřejmě $\mu_j \leqq \lambda_j \leqq \nu_j \leqq \pi_j$, $j = 1, 2, \dots, r$, $\mu_j \leqq \mu_{j+1}$, $\lambda_j \leqq \lambda_{j+1}$, $\nu_j \leqq \nu_{j+1}$, $\pi_j \leqq \leqq \pi_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots, r - 1$.

V práci [72] ukázáno, že pro Jordanovsky měřitelné množiny K, $0 < m(K) < +\infty$ je

$$\mu_1\mu_2 \dots \mu_r\, m(K) \leqq 2^{2r-1}\,, \quad \mu_j = \mu_j(\mathfrak{W}(K))\,. \tag{34}$$

Nyní zde vznikají dva druhy problémů. Jednak otázka určení nejlepší možné konstanty vpravo, jednak otázka platnosti podobné nerovnosti pro ostatní zavedená minima. Podobnou nerovnost (s menší konstantou vpravo) pro čísla $\lambda_j = \lambda_j(\mathfrak{W}(K))$ dokázal v r. 1947 anglický matematik Rogers, naproti tomu Knichal v [74] ukázal, že konstantu nelze zmenšit až na 2^r.

V práci [77] ukazuje, že podobné výsledky neplatí, nahradíme-li λ_j čísly ν_j. Přesněji řečeno, Rogers dokázal, že pro každou Lebesgueovsky měřitelnou množinu K, $0 < < \mu(K) < +\infty$ a pro každý index i, $1 \leqq i \leqq r$ je

$$\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_{i-1}\nu_i\lambda_{i+1} \dots \lambda_r(M) \leqq 2^{2r-1}\,, \quad \lambda_j = \lambda_j(\mathfrak{W}(K))\,, \quad \nu_i = \nu_i(\mathfrak{W}(K))$$

Jarník naproti tomu ukazuje, že zvolíme-li dva indexy i, j $1 \leqq i < j \leqq r$ nelze výraz

$$(35) \qquad \mu_1\mu_2 \dots \mu_{i-1}\nu_i\mu_{i+1} \dots \mu_{j-1}\nu_j\mu_{j+1} \dots \mu_r\, m(K),$$

$$\mu_i = \mu_i(\mathfrak{W}(K), \quad \nu_i = \nu_i(\mathfrak{W}(K)), \quad \nu_s = \nu_s(\mathfrak{W}(K)), \quad s \neq i, j$$

ani výraz

$$\mu_1\mu_2 \dots \mu_{i-1}\pi_i\mu_{i+1} \dots \mu_r\, m(K), \quad \pi_i = \pi_i(\mathfrak{W}(K)), \quad \mu_j = \mu_j(\mathfrak{W}(K))$$

omezit hodnotou závislou pouze na r.

Z druhé strany je ale tím spíše překvapující následující výsledek (viz [74]). Označme $\mathfrak{W}^2(K) = \mathfrak{W}(\mathfrak{W}(K))$, $\mathfrak{W}^3(K) = \mathfrak{W}(\mathfrak{W}^2(K))$, ... Z množiny K tvoříme stále „rozumnější“ množiny. Nyní ke každé Lebesgueovsky měřitelné množině K, $0 < m(K) < +\infty$ existuje $p_0 \geqq 1$ tak, že pro všechna $p > p_0$ je

$$\pi_1\pi_2 \dots \pi_r\, m(M) \leqq 2^r, \quad \pi_j = \pi_j(\mathfrak{W}^p(K)).$$

V [77] je jako doplnění ukázáno, že hodnotu p_0 nelze volit nezávisle na K, dokonce ani výraz (35), v němž klademe $\mu_i = \mu_i(\mathfrak{W}^p(K))$, $\nu_i = \nu_i(\mathfrak{W}^p(K))$, $\nu_j = \nu_j(\mathfrak{W}^p(K))$ nelze ani pro všechna dostatečně velká p omezit hodnotou závislou jen na r.

Závěrem tohoto stručného výčtu Jarníkových výsledků z geometrie čísel poznamenejme, že v některých citovaných pracích a i v [64] a [65] jsou výsledky z geometrie čísel aplikovány na teorii diofantických aproximací.

Je nesnadné i v rozsáhlém matematickém díle hledat vlastnosti osobnosti, která je vytvořila; ti, kdo Vojtěcha Jarníka znali, najdou v jeho vědeckém díle řadu rysů, které jim jeho osobnost připomenou. Je to především důkladnost, snaha po přesném a detailním vědění a schopnost vidět problémy a nalézat řešení i tam, kde intelektu méně pronikavému se zdá, že vše již bylo objeveno. To je zřetelně patrné již v práci [2].

Celé generace matematiků vzaly na vědomí, že Bolzano sestrojil funkci jistých vlastností, později po něm nazvanou, a tak vyvrátil starší názory, že spojitá funkce musí mít derivaci alespoň v některém bodě. Jarník ve zmíněné práci z r. 1922 ukazuje: Bolzanova funkce nemá v žádném bodě konečnou derivaci zleva ani zprava ani nevlastní nekonečnou derivaci. Body, v nichž současně existuje nevlastní derivace zprava i nevlastní derivace zleva jsou body lokálních extrémů a je jich spočetně mnoho. V tzv. dělicích bodech existuje nevlastní derivace zprava; derivovaná čísla zleva v těchto bodech jsou různá a stejná co do absolutní hodnoty. Existuje množina mohutnosti kontinua taková, že v každém jejím bodě jsou obě horní derivovaná čísla $+\infty$ a obě dolní derivovaná čísla $-\infty$.

O rok později uveřejňuje V. Jarník práci [4] inspirovanou otázkou: které vlastnosti musí mít každá funkce, která nemá derivaci v žádném bodě. Jarník ukazuje mj.: má-li spojitá funkce f nekonečnou variaci na každém nedegenerovaném intervalu, pak existuje hustá množina a v každém jejím bodě obě horní derivovaná čísla jsou $+\infty$ a obě dolní derivovaná čísla jsou $-\infty$.

V práci [5] vychází Jarník z této zřejmé skutečnosti: má-li spojitá funkce f derivaci f' v každém bodě, pak f' je první Baireovy třídy. V. Jarník ukázal, že tvrzení platí i když f není spojitá; připouští, aby f nabývala hodnot $\pm\infty$ (a přirozeně $|f'(t)| = \infty$, jakmile f není spojitá v t). Uveďme v této souvislosti ještě výsledek z práce [57]: Buď S přímka v R^2. Polorovinami budeme rozumět otevřené poloroviny na něž S rozděluje R^2. Buď $f : R^2 \to R^1$. Potom existuje nejvýše spočetná množina $V \subset S$ a každý bod $x \in S - V$ má tuto vlastnost: nechť P, Q jsou otevřené polopřímky, jejichž společný koncový bod je x a které leží v téže polorovině. Potom existují posloupnosti bodů $p_i \in P$ a $q_j \in Q$ tak, že

$$\lim_{i\to\infty} p_i = x = \lim_{j\to\infty} q_j, \quad \lim_{i\to\infty} f(p_i) = \lim_{j\to\infty} f(q_j).$$

Začátkem třicátých let byly uveřejněny první práce, v nichž bylo pojmu residuální množiny užito ke studiu množin spojitých funkcí, jejichž derivace, resp. derivovaná čísla splňovala jisté podmínky.

V těchto aplikacích kromě poslední základní prostor bude $C = C(\langle 0, 1\rangle \to R^1)$, (se stejnoměrnou topologií), a pro $x \in C$, $t \in (0, 1)$ bude $x^+(t)$, $x^-(t)$ znamenat horní derivovaná čísla zleva a zprava, $x_+(t)$, $x_-(t)$ budou dolní derivovaná čísla, $\bar{x}(t) = \max(x^+(t), x^-(t))$, $\underline{x}(t) = \min(x_+(t), x_-(t))$. Zaveďme tyto podmnožiny prostoru C

$$A_1 = \{x \in C \mid x^+(t) = \infty \quad \text{nebo} \quad x_+(t) = -\infty \quad \text{pro každé} \quad t \in \langle 0, 1)\}$$

$$A_2 = \{x \in C \mid \bar{x}(t) > \underline{x}(t) \quad \text{pro každé} \quad t \in (0, 1)\}$$

$$A_3 = \{x \in C \mid x^+(t) > x_+(t) \quad \text{pro každé} \quad t \in (0, 1)\}$$

Banach a Mazurkiewicz dokázali v r. 1931 (nezávisle na sobě), že A_1 je residuální množina. O rok později ukázal S. Saks, že množina A_2 je residuální a množina A_3 je první kategorie a Besicovitch ukázal, že množina A_3 není prázdná. Nechť A_4 je množina takových $x \in C$, že platí

(i) $\langle x_-(t), x^-(t)\rangle \cup \langle x_+(t), x^+(t)\rangle = \langle -\infty, \infty\rangle$ pro každé $t \in (0, 1)$,

(ii) $x^+(t) = \infty = x^-(t)$, $x_+(t) = -\infty = x_-(t)$ pro skoro všechna t,

(iii) $\max(|x^+(t)|, |x_+(t)|) = \infty$ pro každé $t \in \langle 0, 1)$,
$\max(|x^-(t)|, |x_-(t)|) = \infty$ pro každé $t \in (0, 1\rangle$.

Jarník dokázal v práci [39], že množina A_4 je residuální. Všimněme si, že odtud plyne: je-li $x \in A_4$, $t \in (0, 1)$, $a \in R^1$, pak existuje posloupnost $h_n \to 0$ tak, že $h_n^{-1}(x(t + h_n) - x(t)) \to a$.

Metody residuálních množin užil Jarník asi v 10 pracích a mj. jako i řada autorů řešil otázky, které souvisejí s aproximativní derivací. (Aproximativní derivace funkce x v bodě τ se zavádí takto: Nechť $m(U)$ znamená Lebesgueovu míru měřitelné podmnožiny $U \subset R^1$. Je-li $V \subset R^1$ měřitelná množina, $\tau \in R^1$, říkáme, že V má v bodě τ

hustotu 1, jestliže $\lim_{\gamma \to 0+, \delta \to 0+} (\gamma + \delta)^{-1} m(V \cap (\tau - \gamma, \tau + \delta)) = 1$. Existuje-li měřitelná množina $V \subset R^1$ taková, že v bodě τ má hustotu 1 a že existuje

$$\lim (t - \tau)^{-1} (x(t) - x(\tau)),$$

kde limitu bereme pro $t \to \tau$, $t \in V$, $t \neq \tau$, pak tato limita se nazývá aproximativní derivace funkce x v bodě τ.) Jarník v [48] dosáhl výsledku, jemuž patří přívlastek definitivní: množina takových $x \in C$, že aproximativní derivace neexistuje v žádném $t \in (0, 1)$, je residuální. Poslední prací tohoto zaměření je [82]. Otázku (související s teorií operátorů Mikusińského), zda existují spojité funkce x, y tak, aby jejich konvoluce $x * y$ neměla derivaci v žádném bodě, zodpověděl V. Jarník takto: existuje residuální množina $Q \subset C \times C$ tak, že $x * y$ nemá derivaci v žádném bodě pro $(x, y) \in Q$.

Více než deset Jarníkových prací nelze zařadit do žádné ze čtyř právě popsaných skupin. Pomineme-li nezaslouženě velmi zajímavé práce, které jsou tématicky ojedinělé ([1], [3], [23], [29], [43], [61], [79] a [85]), zůstává několik prací z teorie řad a Riemannova integrálu. Přínosem práce [15] je nový důkaz známé Arzelovy věty o limitním přechodu v Riemannově integrálu, který byl také pojat do druhého vydání díla prof. Petra o integrálním počtu. V práci [25] je úplně vyšetřena otázka jak dalece je omezená reálná funkce určena systémem svých Darbouxovských součtů. Práce [11], [13] a [14] jsou věnovány v základě přerovnání neabsolutně konvergentních řad (obecně s komplexními členy).

Z uvedeného nástinu vědecké práce prof. Jarníka vyplývá, že byl v počátcích své vědecké práce ovlivněn zejména dílem E. Landaua. Jarníkovy práce indukovaly nové výsledky jiných matematiků a je dokladem jejich myšlenkové hloubky, že příklady pro to můžeme nalézt v době současné. Jarník byl v živém styku s mnohými význačnými matematiky (Landau, Walfisz, Mahler, Rogers, Erdös, Sierpiński, Chinčin, Turán, Zahorski, Saks atd.), s některými má i společné publikace. Z výše uvedeného rozboru je patrné, že Jarníkovy práce podstatně ovlivnily teorii mřížových bodů, teorii diofantických aproximací a i geometrii čísel. Je zajímavé a méně známé, že i stejný vliv měly jeho práce z teorie reálných funkcí. Stačí uvést např. práci [41], která indukovala řadu prací Zahorského, práci [39], z jejíž hlavní věty odvodil v loňském roce Garg dosud nejsilnější větu o vlastnostech derivovaných čísel spojitých funkcí ve smyslu kategorií. Podobně práce [57] byla na počátku celého vyšetřování o limitních hodnotách reálných funkcí, které je zvlášť intensivní v posledních letech. Zajímavé také je, že výsledky práce [5] byly již několikrát znovu objeveny a skutečnost, že tato práce byla publikována v r. 1923, je překvapením i pro specialisty.

Je velmi nesnadné podat rozbor neb dokonce jen vyčerpávající přehled Jarníkovy pedagogické činnosti. Zaznamenejme spíše jen pro mladší generaci pracovníků v matematice, kteří neměli to štěstí a nenavštěvovali jeho přednášky, že v prof. Jarníkovy odešel patrně nejlepší přednášející, kterého matematicko-fyzikální fakulta kdy měla. O způsobu jeho přednášení bylo již mnoho napsáno. Upozorněme na vlastní poznámky k tomuto tématu, které otiskuje prvé číslo Pokroků matematiky, fyziky a astronomie v letošním roce a na některé podstatné rysy jeho učitelské činnosti. Typická pro Jarníkovy přednášky byla jejich přesnost. Nebyla to ovšem přesnost ztrnulá, stejná pro všechny ročníky a pro všechny okruhy posluchačů. Prof. Jarník dovedl velmi přesně odhadnout, které úvahy jsou pro auditorium, před nímž stojí, tak běžné, že je může jen načrnout. Proto pověstný „Jarníkův styl" neznamená redukci přednášky na řetěz definic a vět s úzkostlivým prováděním všech kroků až do „posledního $\varepsilon - \delta$" od prvé hodiny do poslední, bez ohledu na ročníky. Naopak: Jarník stále prokládal své přednášky orientačními úvahami, v nichž ukazoval, proč je třeba ubírat se právě tímto směrem, volit tento postup důkazu, kde je možno očekávat potíže. Vlastní výklad byl ovšem naprosto korektní, tlumočený formou úměrnou úrovni auditoria. Typické je také to, že se Jarník nevyhýbal partiím neb důkazům, které jsou mnohými učiteli vynechávány pro svou komplikovanost a náročnost. Připomeňme např. že se málokomu podaří během semestrální čtyřhodinové přednášky vyložit teorii Lebesgueova integrálu se všemi důkazy (včetně věty o substituci) pro posluchače druhého ročníku matematiky a fyziky, málokdo dokáže přednášet výběrovou přednášku o mřížových bodech, speciálních funkcích neb zařadit do přednášky úplný důkaz věty o Markovově řetězci a vše naprosto korektně a jasně ve velmi krátkém čase přednést.

Dalším podstatným rysem učitelské činnosti prof. Jarníka byl výběr tématiky, kterou přednášel. V povinných přednáškách to byly hlavně základní kursy matematické analýzy pro prvé dvouletí universitního studia.

Po osvobození v r. 1945 došlo na našich vysokých školách k mimořádné situaci; řady vysokoškolských učitelů prořídly a přitom vysoké školy musely zvládnout nával posluchačů těch ročníků, které nemohly pokračovat ve studiích za okupace pro uzavření vysokých škol. Zvlášť citelný byl nedostatek učebnic. V. Jarník v této době mimořadného pracovního zatížení našel dost sil, aby pracoval na čtyřech svazcích učebnic matematické analýsy: Úvod do počtu integrálního vychází v r. 1948, Úvod do počtu diferenciálního v r. 1951, Diferenciální počet v r. 1953, Integrální počet v r. 1955. První dva svazky dokládají, jak Jarník promyšleně vede posluchače na stupni elementárním, druhé dva svazky tvoří solidní základ pro práci v matematické analyse a obsahují takové bohatství materiálu a upozornění na vzájemné souvislosti, že tvoří mezistupeň mezi učebnicí a monografií. Je příznačné, že i v těchto učebnicích, věnovaných vlastně základům matematické analýsy, najdeme nejen řadu metodicky původních postupů, ale i po vědecké stránce původní zpracování některých témat (např. výklad totálního diferenciálu v diferenciálním počtu je ve světové literatuře ojedinělý).

Prof. Jarník však přednášel i teorii funkcí komplexní proměnné a když bylo třeba i diferenciální rovnice jak v reálném tak i komplexním oboru. Prof. Jarník o sobě pouze připouštěl, že je specialistou v teorii čísel (a to ještě v některých oblastech, jak skromně vždy dodával). Jeho nebývale široký rozhled po matematice však umožňoval, že dokázal sestavit přednášku i z oborů jeho vlastní práci dosti vzdálených a to vždy tak, že znamenala po mnoha stránkách pro fakultu přínos. Typická je v tomto směru např. přednáška o speciálních funkcích v letech 1959–61, výběrová přednáška a seminář z konstruktivní teorie funkcí v letech 1954–56 atp. Prof. Jarník vždy vycházel z dokonalé a široké znalosti problematiky na základě čehož provedl vlastní výběr a uspořádání látky, formulaci vět, důkazů. V těchto přednáškách byla skryta celá řada drobných i větších metodických a i vědeckých poznatků.

Ještě patrnější a výraznější byly v tomto směru jeho přednášky z různých oborů teorie čísel. Uvedeme pro ilustraci jen výběr témat z posledních zhruba dvaceti let: L-řady, Goldbachův problém, geometrie čísel, nauka o rozložení prvočísel, algebraická a transcendentní čísla, teorie mřížových bodů, diofantických aproximací, pravděpodobnostní metody v teorii čísel. V rukopisné pozůstalosti prof. Jarníka jsou zachovány velmi podrobné texty těchto přednášek, které mnohdy snesou srovnání se světovou monografickou literaturou těchto oborů. Je snad zbytečné dodávat, že to vše byly přednášky na současné úrovni světového bádání a mnohdy seznamovaly a právě vznikajícími a rozvíjejícími se obory.

Velmi cenná, ale těžko úplněji postihnutelná je Jarníkova recenzní činnost. Nemyslíme tím jen zasvěcené referáty v referativních časopisech a obsáhlé recense nových knih v našich matematických časopisech, z nichž každá je ve skutečnosti malým dílkem, které čtenáře pozorně uvádí do příslušné problematiky. Prof. Jarník jako člen redakční rady řady časopisů recenzoval práce do časopisu zaslané. Nebylo vyjímkou, že díky jeho pečlivé a nezištné recenzi mohly být některé práce vůbec publikovány neb jejich výsledky mohly být dovedeny do úplnějšího tvaru.

Je snad v dnešní době poněkud neobvyklé, že tak vynikající učitel a vědec jako profesor Jarník nezaložil svou vlastní vědeckou školu. Je skutečně pravda, že v Československu není početnější skupina matematiků, kteří by se věnovali výhradně některému z oborů, v nichž prof. Jarník pracoval. Je to způsobeno zejména tím, že prof. Jarník nebyl přítelem úzké specializace v matematice a vždy pokládal pro naši matematiku za důležitější získat mladé lidi pro práci v matematice, dát jim solidní základy a naučit je vědecky pracovat než vychovat několik byť vynikajících úzkých specialistů. Proto také považoval za důležitější dát naší matematice obšírné základní učebnice, než sám napsat dalších deset, dvacet prací. Proto dával přednost přednáškám z matematické analýsy před přednáškami z teorie čísel, i když jich vedl celou řadu. Profesor Jarník ovlivnil naši matematiku nejen svou vědeckou prací, ale hlavně svou prací vysokoškolského učitele a autora základních učebnic takovým způsobem, že prakticky všechny naše matematiky lze považovat za přímé nebo nepřímé Jarníkovy žáky, protože každý z nich byl ve své práci ovlivněn Jarníkovým dílem a osobním příkladem.

Můžeme jen litovat, že se prof. Jarník nemohl více věnovat studiím zaměřeným k dějinám matematiky. Jak ukazují jeho studie o B. Bolzanovi mohl zachovat zejména pro dějiny matematické analýsy a teorie čísel velmi cenná svědectví, neboť jednak celou problematiku v nebývalé šíři ovládal, jednak byl aktivním účastníkem rozvoje těchto disciplín v našem století a velmi úzce se stýkal s řadou vědců, kteří v toto období patřili k vedoucím osobnostem světové matematiky.

Sama osobnost profesora V. Jarníka byla stejně neobyčejná jako jeho dílo. Bývá řídkým jevem, že vynikající matematik je i vynikající učitel. U profesora Jarníka k oběma těmto vlastnostem přistupovala skutečně ojedinělá osobní skromnost. Profesor Jarník vždy ve všem kladl sám sebe až na poslední místo. Nikdy, ani před posluchači, nedával najevo svou vědeckou převahu. Se svými osobními pocity a názory se svěřoval jen ve vzácných chvílích a měl až úzkostlivý smysl pro to, aby jeho rozhodnutí neb vystoupení pečlivě a spravedlivě vážilo mezi různými hledisky a argumenty. Snažil se vždy — a někdy možná na škodu věci — neprosazovat pouze své osobní názory.

Profesor Jarník patřil k lidem s nebývale širokým kulturním rozhledem, k lidem veskrze pokrokovým v nejlepším slova smyslu. Vynikající znalec milovník hudby a vůbec umění, milovník historie našich národů. Vášnivý čtenář, aktivní sportovec až do vysokého věku, který si ani v posledním roce svého života neodepřel procházky po oblíbených místech. Do poslední chvíle neúnavně pracoval, do poslední chvíle se věnoval svým velkým láskám — rodině, matematice a umění. Jeho odchodem postihla řady našich matematiků a vysokoškolských pracovníků ztráta těžká a nenahraditelná.

SEZNAM VĚDECKÝCH PRACÍ AKADEMIKA VOJTĚCHA JARNÍKA

Zkratky:

Rozpravy ... Rozpravy II. tř. České akademie věd a umění
Bulletin ... Bulletin international de l'Académie des sciences de Boheme
Věstník ... Věstník Král. čes. spol. nauk

A. Původní vědecké práce

Práce vyšlé dvojmo (např. originál v Rozpravách a výtah v jiném jazyku v Bulletinu) jsou uvedeny pod týmž číslem jako a), b) apod.

[1] O kořenech funkcí Besselových, Rozpravy *29* (1920), č. 28, 6 stran.
[2] O funkci Bolzanově, Časopis pěst. mat. *51* (1922), 248—264.
[3] Poznámka k methodě postupných approximací, Časopis pěst. mat. *52* (1922), 51—55.
[4] O číslech derivovaných funkcí jedné reálné proměnné, Časopis pěst. mat. *53* (1923), 98—101.
[5] a) O derivaci funkcí jedné proměnné, Rozpravy *32* (1923), č. 5, 8 stran.
b) Sur la dérivée des fonctions d'une variable. Bulletin 1923, 4 strany.
[6] a) O rozšíření definičního oboru funkcí jedné proměnné, při němž zůstává zachována derivabilita funkce, Rozpravy *32* (1923), č. 15, 15 stran.
b) Sur l'extension du domaine de définition des fonctions d'une variable qui laisee intacte la dérivalibilité de la fonction, Bulletin 1923, 5 stran.
[7] a) O mřížových bodech v rovině, Rozpravy *33* (1924), č. 36, 23 strany.
b) Sur les points à coordonnées entières dans le plan, Bulletin 1924, 12 stran.
[8] a) Několik poznámek o mřížových bodech v kruhu, Rozpravy *34* (1925), č. 27, 13 stran.
b) Quelques remarques sur les points à coordonnées entières à l'intérieur d'un cercle, Bulletin 1925, 3 strany.
[9] Über die Gitterpunkte auf konvexen Kurven, Math. Z. *24* (1925), 500—518.
[10] a) O funkcích první třídy Baireovy, Rozpravy *35* (1926), č. 2, 13 stran.
b) Sur les fonctions de la première classe de Baire, Bulletin 1926, 11 stran.

[11] Über bedingt konvergente Reihen, Math. Z. *24* (1926), 715—732.
[12] Über die Gitterpunkte auf homothetischen Kurven, Math. Z. *26* (1927), 445—459.
[13] Umordnungen von bedingt konvergenten Reihen, Math. Z. *28* (1928), 360—371.
[14] Über die Umordnung unendlicher Reihen, Věstník 1927, č. 8, 45 stran.
[15] O integrování nekonečných řad, Časopis pěst. mat. *57* (1928), 103—113.
[16] O mřížových bodech ve vícerozměrných koulích, Časopis pěst. mat. *57* (1928), 123—128.
[17] a) O mřížových bodech ve vícerozměrných elipsoidech, Rozpravy *37* (1928), č. 27, 19 stran.
b) Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoïdes à plusieurs dimensions, Bulletin 1928, 10 stran.
[18] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Ann. *100* (1928), 699—721.
[19] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. 2. Abhandlung, Math. Ann. *101* (1929), 136—146.
[20] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Z. *27* (1927), 154—160.
[21] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. 2. Mitteilung, Math. Z. *28* (1928), 311—316.

Poznámka. Práce [18], [19] jsou zcela odlišné od prací 20, 21 přes stejný název. Totéž platí o jiných pracích stejného názvu, pokud jsou uvedeny pod různými pořadovými čísly.

[22] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Tohoku Math. J. *30* (1929), 354—371.
[23] Bestimmung einer absoluten Konstanten aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Annali di matematica pura ed applicata, ser. 4, sv. 6 (1928—29), 7 stran. Společně s *K Grandjotem, E. Landauem* a *J. E. Littlewoodem.*
[24] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, Math. Z. *30* (1929), 768—786.
[25] Über das Riemannsche Integral, Věstník 1929, č. 1, 14 stran.
[26] Zur metrischen Tehorie der diophantischen Approximationen, Prace matematyczno-fizyczne *36* (1928—29), 16 stran.
[27] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Z. *32* (1930), 152—160. Společně s *A. Walfiiszem.*
[28] a) Několik poznámek o Hausdorffově míře. Rozpravy *40* (1930), č. 9, 8 stran.
b) Quelques remarques sur la mesure de M. Hausdorff, Bulletin 1930, 6 stran.
[29] O jistém problému minimálním. Práce moravské přírodovědecké společnosti, sv. 6, spis 4, 1930, 57—63.
[30] Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass. Math. Sb. 36 (1929), 371—382.
[31] Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoides à plusieurs dimensions, Věstník 1930, č. 6, 11 stran.
[32] Sur une fonction arithmétique. Věstník 1930, č. 7, 13 stran.
[33] Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, Math. Z. *33* (1931), 62—84.
[34] Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre. 2. Abhandlung, Math. Z. *33* (1931), 85—97.
[35] Über die simultanen diophantischen Approximationen, Math. Z. *33* (1931), 505—543.
[36] Ein Existenzsatz aus der Theorie der diophantischen Approximationen, Prace matematyczno-fizyczne *39* (1932), 135—144.
[37] Zur Theorie der diophantischen Approximationen, Monatsh. Math. *39* (1932), 403—438.
[38] Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, Věstník 1931, č. 20, 17 stran.
[39] Über die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen, Fund. Math. *21* (1933), 48—58.
[40] Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre. 3. Abhandlung, Math. Z. *36* (1933), 581—617.
[41] Über die Menge der Punkte, in welchen die Ableitung unendlich ist, Tohoku Math. J. *37* (1933), 248—253.
[42] O jedné třídě funkcí spojitých, Časopis pěst. mat. *63* (1934), 135—146.
[43] O minimálních grafech, obsahujících *n* daných bodů, Časopis *63* (1934), 223—235. Spolu s *M. Kösslerem.*

[44] Sur la dérivabilité des fonctions continues, Spisy přírodov. fakulty univ. Karlovy, č. 129 (1934), 7 stran.
[45] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden: eine Anwendung des Hausdorfschen Massbegriffes, Math. Z. *38* (1934), 217—256.
[46] Sur les nombres dérivés approximatifs, Fund. Math. *22* (1934), 4—16.
[47] Über die stetigen Abbildungen der Strecke, Monatsh. Math. *41* (1934), 408—423.
[48] Sur la dérivée approximative unilatérale, Věstník 1934, č. 9, 10 stran.
[49] Untersuchungen über einen van der Corputschen Satz, Math. Z. *39* (1935), 745—767. Společně s *E. Landauem.*
[50] Sur l'approximation des fonctions contiunes par les superpositions de deux fonctions, Fund. Math. *24* (1935), 206—208. Společně s *V. Knichalem.*
[51] Sur les superpositions des fonctions continues non décroissantes, Fund. Math. *25* (1935), 190—197. Společně s *V. Knichalem.*
[52] Remarque sur les nombres dérivés, Fund. Math. *23* (1934), 1—8.
[53] a) O simultánních diofantických aproximacích, Rozpravy *45* (1935), č. 19, 16 stran.
b) Sur les approximations diophantiques simultannées, Bulletin 1935, 8 stran.
[54] Über einen Satz von A. Khintchine, Prace matematyczno-fizyczne *43* (1935), 1—16.
[55] Sur une propriété des fonctions continues, Časopis pěst. mat. *65* (1936), 53—63.
[56] Über einen Satz von A. Khintchine. 2. Mitteilung, Acta Arith. *2* (1936), 1—22.
[57] Sur les fonctions de deux variables réelles, Fund. Math. *27* (1936), 147—150.
[58] Über die angenährte Lösung der Gleichung $x_1\Theta_1 + \ldots + x_n\Theta_n + x_0 = 0$ in ganzen Zahlen, Časopis pěst. mat. *66* (1937), 192—205.
[59] Eine Bemerkung über lineare Kongruenzen, Acta Arith. *2* (1937), 214—220. Společně s *P. Erdösem.*
[60] Neuer Beweis eines Khintchinechen Satzes, Časopis pěst. mat. *67* (1938), 109—113.
[61] Sur un problème de M. Čech, Věstník 1938, č. 6, 7 stran.
[62] Zum Khintchineschen „Übertragungssatz". Труды тбилиского математ. института *3* (1938), 193—216.
[63] Sur les solutions approchées de l'équation $x_1\Theta_1 + x_2\Theta_2 + x_0 = 0$ en nombres entiers x_1, x_2, x_0, Věstník 1938, č. 7, 26 stran.
[64] Sur un théorème de M. Mahler, Časopis pěst. mat. *68* (1939), 59—60.
[65] Remarques à l'article précédent de M. Mahler, Časopis pěst. mat. *68* (1939), 103—111.
[66] Über einen p-adischen Übertragungssatz, Monatsh. Math. *48* (1939), 277—287.
[67] Eine Bemerkung zur Gitterpunktlehre, Časopis pěst. mat. *69* (1940), 57—60.
[68] Zur Gitterpunktlehre der Ellipsoide $\alpha_1(u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2) \leqq x$, Věstník 1940, č. 3, 63 stran.
[69] Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre. 5. Abhandlung, Časopis pěst. mat. *69* (1940), 148—174.
[70] Zur Gitterpunktlehre der Ellipsoide $\alpha_1(u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2) \leqq x$. Zweite Abhandlung, Časopis pěst. mat. *70* (1940), 1—33.
[71] Věty o střední hodnotě z teorie mřížových bodů. 6. pojednání, Časopis pěst. mat. *70* (1941), 89—103.
[72] Dvě poznámky ke geometrii čísel, Věstník 1941, č. 24, 12 stran.
[73] a) O lineárních nehomogenních diofantických aproximacích, Rozpravy *51* (1941), č. 29, 21 stran.
b) Sur les approximations diophantiques linéaires non homogènes, Bulletin 1946, 16 stran.
[74] a) K hlavní větě geometrie čísel. Rozpravy *53* (1943), č. 43, 15 stran. Společně s *V. Knichalem.*
b) Sur le théoreme de Minkowski dans la géométrie des nombres, Bulletin 1946, 15 stran. s *V. Knichalem.*

[75] Sur les approximations diophantiques des nombres p-adiques, Revista de Ciencias, Lima, *47* (1945), 489—505.
[76] On the main theorem of the Minkowski geometry of numbers, Časopis pěst. mat. *73* (1948), 1—8.
[77] On the successive minima of arbitrary sets, Časopis pěst. mat. *73* (1948), 9—15.
[78] On Estermann's proof of a theorem of Minkowski, Časopis pěst. mat. *73* (1949), 131—140.
[79] O kružnici křivosti, Časopis pěst. mat. *73* (1949), D37—D51.
[80] Sur la symétrie des nombres dérivés approximatifs, Annales de la société polonaise de mathématique, Kraków, *21* (1948), 214—218.
[81] Une remarque sur les approximations diophantiennes linéaires, Acta scientiarum mathematicarum, Szeged, *12* (1950), 82—86.
[82] Sur le produit de composition de deux fonctions continues, Studia Math. *12* (1951), 58—64.
[83] К теории однородных линейных диофантовых приближений, Czechoslovak Math. J. *79* (1954), 330—353.
[84] К метрической теории цепных дробей, Czechoslovak Math. J. *79* (1945), 318—329.
[85] Lineární závislost funkcí jedné proměnné, Časopis pěst. mat. *80* (1955), 32—43.
[86] Eine Bemerkung zum Übertragungssatz, Известия на математическия институт (Bulgarian Ac. Sci) vol. *3*, book 2 (1959), 170—175.
[87] Eine Bemerkung über diophantische Approximationen, Math. Z. *72* (1959), 187—191.
[88] Zur Gitterpunktslehre von mehrdimensionalen Ellipsoiden, Acta Arith. *9* (1964), 321—329.
[89] Bemerkungen zu Landauschen Methoden in der Gitterpunktlehre, Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis. Zur Erinnerung an E. Landau, VEB, Berlin, 1968, 139—156.
[90] Un théoréme d'existence pour les approximations diophantiennes, L'Enseignement mathé matique *XV* (1969), 171—175.

B. Kongresové referáty

[1] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, Sprawozdanie z I. kongresu matematyków krajów slowiańskich, Warszawa 1929, 244—245.
[2] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Verhandlungen des Internat. Mathematikerkongresses, Zürich 1932, sv. II, 24—25.
[3] Zur Theorie der diophantischen Approximationen, Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens, Oslo 1936, sv. II, 11.
[4] Sur quelques points de la théorie géométrique des nombres, Zprávy o 2. sjezdu matematiků zemí slovanských, Praha 1934 (též Časopis pěst. mat. *64* (1934—35), 26—48.
[5] Über lineare diophantische Approximationen, Bericht über die Mathematikertagung in Berlin 14.—18. I. 1953, 189—192.
[6] Approximations diophantiennes linéaires et homogènes, Proceedings of the Int. Congr. Amsterdam, Vol. *I* (1957), 430.

C. Knižní publikace

[1] Úvod do theorie množství, Dodatek do *K. Petra* Integrálního počtu, 2. vyd., JČMF, Praha 1931, 655—725.
[2] O derivovaných číslech funkcí jedné proměnné, Dodatek do knihy *E. Čecha,* Bodové množiny, JČMF, Praha 1936, 245—265.
[3] Úvod do integrálního počtu, JČMF 1938, stran 168.
[4] Úvod do počtu diferenciálního, 1. vyd., JČMF, Knihovna spisů matematických a fyzikálních, sv. 22, 1946, stran 448.
[5] Úvod do počtu integrálního, 1. vyd., JČMF, Knihovna spisů matematických a fyzikálních, sv. 22, 1948, stran 324.

[6] Úvod do počtu diferenciálního, 2. vyd., Přírodovědecké vydavatelství, 1951.
[7] Úvod do počtu diferenciálního, 3. vyd., NČSAV, 1953, stran 449.
[8] Diferenciální počet. Pokračování Úvodu do počtu diferenciálního, I. vyd., NČSAV, 1953, stran 595.
[9] Úvod do počtu integrálního, 2. vyd., NČSAV, 1954, stran 295.
[10] Integrální počet II, 1. vyd., NČSAV, 1955, stran 760.
[11] Diferenciální počet, I, 4. vyd., NČSAV, 1955, stran 451.
[12] Integrální počet I, 3. vyd., NČSAV, 1956, stran 299.
[13] Diferenciální počet II, 2. vyd., NČSAV, 1956, stran 609.
[14] Diferenciální počet I, 5. vyd. 1963, NČSAV, 390 str.
[15] Integrální počet I, 4. vyd., 1963, NČSAV, 243 str.
[16] Differenciální rovnice v reálném oboru. Podle přednášek prof. Jarníka zpracoval V. Petrův. Učební texty vysokých škol, Státní pedag. naklad. 1963, offset, 245 str.
[17] Matematická analysa pro 3 semestr. Učební texty vysokých škol, Státní pedagog. naklad. 1965, rotaprint, 246 p.
[18] Diferenciální rovnice v komplexním oboru, vyjde v r. 1972, ACADEMIA.

D. Studie referativní a kritické

[1] Recense: *G. H. Hardy* and *M. Riesz,* The General Theory of Dirichlet's Series, Časopis pěst. mat. *51* (1922), 339—340.
[2] Felix Klein†, Časopis *55* (1925), 105—108.
[3] Recense: *G. Valiron,* Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable; *P. Lévy,* Analyse fonctionnelle, Časopis pěst. mat. *55* (1926), 191.
[4] Recense: *E. Landau,* Vorlesungen über Zahlentheorie I—III, Časopis pěst. mat. *57* (1927), 62—63.
[5] Mengerova teorie dimensí, Časopis pěst. mat. *58* (1929), 367—374.
[6] Bolzanova „Functionenlehre", Časopis pěst. mat. *60* (1931), 240—262.
[7] Recense: Poznámky k článku prof. Fr. Rádla: Odpověď k recensi prof. Petra, Časopis pěst. mat. *61* (1932), 211—223.
[8] Recense: Ještě k „Učebnici" prof. Fr. Rádla, Časopis pěst. mat. *62* (1932), 68—74.
[9] Recense: *W. Sierpiński,* Wstęp do teorji funkcji zmiennej rzeczywistej, Časopis pěst. mat. *63* (1933), 53.
[10] Nový matematický časopis (Compositio mathematica), Časopis pěst. mat. *63* (1934), 312—313.
[11] Recense: Tři knihy o funkcích skoroperiodických. *A. S. Besicovitch,* Almost periodic functions, *H. Bohr,* Fastperiodische Funktionen, *J. Favard,* Leçons sur les fonctions presque-périodiques, Časopis pěst. mat. *64* (1935), D 89—91.
[12] Recense: *E. Landau,* Grundlagen der Analysis; *E. Landau,* Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung, Časopis pěst. mat. *64* (1935), D 91—82.
[13] Nový matematický časopis (Acta arithmetica), Časopis pěst. mat. *64* (1935), D 122—123.
[14] Recense: *A. Zygmund,* Trigonometrical series; *S. Kaczmarz* a *H. Steinhaus,* Theorie der Orthogonalreihen, Časopis pěst. mat. *65* (1936), D 117—122.
[15] Recense: *E. C. Titchmarsch,* The Zeta-Funktion of Rieman; *A. E. Ingham,* The Distribution of Prime Numbers, Časopis pěst. mat. *67* (1937), D 54—56.
[16] Edmund Landau†, Časopis pěst. mat. *67* (1938), D 215—216.
[17] Recense: *E. Landau,* Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie; *J. M. Vinogradov,* Novyj metod v analitičeskoj teorii čísel, Časopis pěst. mat. *67* (1938), D 303—306.
[18] Recense: *S. Saks,* Theory of the Integral, Časopis pěst. mat. *68* (1939), D 111—113.
[19] Návod ke studiu analysy pro začátečníky, Časopis pěst. mat. *70* (1941), D 109—116.

[20] Recense: *O. Haupt, G. Aumann,* Differential- und Integralrechnung, Časopis pěst. mat. *70* (1941), D 224—227.
[21] Recense: *A. J. Chinčin,* Tři perly theorie čísel, Časopis pěst. mat. *74* (1949), D 87—88.
[22] Recense: *I. M. Vinogradov,* Úvod do theorie čísel, Časopis pěst. mat. *74* (1949), D 88—89.
[23] Nový důkaz věty o rozdělení prvočísel, Časopis pěst. mat. *74* (1949), D 51—54.
[24] Recense: *C. L. Siegel,* Transcendental Numbers, Časopis pěst. mat. *75* (1950), D 436—440.
[25] Recense: Tři sovětské knihy o analytické theorii čísel, Časopis pěst. mat. *76* (1951), 35—65.
[26] Před ustavením Československé akademie věd, Časopis pěst. mat. *77* (1952), 205—207.
[27] Před ustavením Československé akademie věd, Časopis Ústředního ústavu astronomického *2* (1952), 1.
[28] Recense: *A. Apfelbeck:* Příspěvek k Chinčinovu principu přenosu, Časopis pěst. mat. *77* (1952), 93.
[29] Recense: *J. Kurzweil,* Příspěvek k metrické theorii diofantických aproximací, Časopis pěst. mat. *77* (1952), 94.
[30] Recense: *Z. Zahorski,* O křivkách, jejichž tečna nabývá na každém oblouku všech směrů, Časopis pěst. mat. *77* (1952), 94—95.
[31] Recense: *A. J. Chinčin,* Řetězové zlomky, Časopis pěst. mat. *78* (1953), 113—116.
[32] Vědecké práce M. Kösslera, Časopis pěst. mat. *80* (1955), 106—115.
[33] a) Deset let matematiky v osvobozeném Československu, Časopis pěst. mat. *80* (1955), 261—273.
b) Десять лет математики в освобожденной Чехословакии, Czechoslovak Math. J. *80* (1955), 291—307.
[34] Bernard Bolzano a základy matematické analysy, Sborník „Zdeňku Nejedlému Československá akademie věd", 450—458.
[35] Něco o problémech a methodách moderní matematiky, Publikace „XX. století a co dalo lidstvu", III. svazek, 12—46.
[36] Recense: *J. W. S. Cassels,* An Introduction to Diophantine Approximations, Časopis pěst. mat. *84* (1959), 212—216.
[37] Recense: *A. Walfisz,* Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, Časopis pěst. mat. *85* (1960), 109—112.
[38] Recense: *K. Prachar,* Primzahlverteilung; *W. Specht,* Elementare Beweise der Primzahlsätze, Časopis pěst. mat. *85* (1960), 364—392.
[39] Bernard Bolzano (5. 10. 1781—18. 12. 1848) Czechoslovak Math. J. *86* (1961), 485—489, Časopis pěst. mat. *87* (1962), 107—111.
[40] Recense: *Carl Ludwig Siegel,* Gesammelte Abhandlungen I—III, Časopis pěst. mat. *92* (1967), 481—485.
[41] Poznámky k otázkám vysokoškolské výuky, Pokroky mat. fyz. astronomie *XVI* (1971), 5—9.

VZPOMÍNKOVÉ SHROMÁŽDĚNÍ K UCTĚNÍ PAMÁTKY AKAD. VOJTĚCHA JARNÍKA

Matematicko-fyzikální fakulta Karlovy university, vědecké kolegium matematiky ČSAV a Jednota československých matematiků a fyziků uspořádaly dne 14. 1. 1971 v budově fakulty v Praze 8 vzpomínkové shromáždění k uctění památky akad. Vojtěcha Jarníka.

Shromáždění zahájil děkan fakulty prof. dr. Alois Švec DrSc., který zvláště přivítal vdovu po akad. V. Jarníkovi paní Blaženu Jarníkovou a jeho syna pana RNDr. Jiřího Jarníka, CSc.

Vědeckou činnost zesnulého zhodnotili ve svých projevech prof. RNDr. Jaroslav Kurzweil, DrSc., člen-korespondent ČSAV a RNDr. Břetislav Novák, CSc. Hlavní myšlenky obou projevů jsou obsaženy v předcházejícím nekrologu.

Shromáždění se účastnila skoro celá pražská matematická obec. *Redakce*