Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

K RIEŠENIU DIOFANTICKEJ ROVNICE $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a}{b}$

PAVEL BARTOŠ, Bratislava, KATARÍNA PEHARTZOVÁ-BOŠANSKÁ, Želiezovce

(Došlo dňa 30. decembra 1969)

V tomto článku odvodíme formuly na určenie všetkých riešení rovnice

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a}{b}, \quad (a, b \text{ prirodzené čísla}) \tag{1}$$

v prirodzených číslach x, y, z a dokážeme jednu vetu vyslovujúcu dostačujúce podmienky pre jej riešiteľnosť.

Veta 1. *Všetky riešenia rovnice*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{b} \tag{2}$$

kde b je prirodzené číslo, v prirodzených číslach x, y, z pre ktoré platí $x \leqq y \leqq z$, dostaneme z formúl

$$x = \frac{\gamma uv}{b}, \quad y = \frac{\gamma bv(u + v)}{\gamma uv - b^2}, \quad z = \frac{\gamma bu(u + v)}{\gamma uv - b^2} \tag{3}$$

kde γ, u, v sú prirodzené čísla, $u \geqq v$, $(u,v) = 1$, o ktorých platí

$$b^2 < \gamma uv \leqq 3b^2, \quad (\gamma uv - b^2)^2 \leqq b^2(b^2 + \gamma v^2) \tag{4}$$

a

$$b \mid \gamma uv, \quad \gamma uv - b^2 \mid \gamma b(u + v). \tag{5}$$

Dôkaz. Nech (x, y, z) je riešením rovnice (2) a nech $x \leqq y \leqq z$. Potom $b < x$. Položme $x = b + k$, kde k je prirodzené číslo. Z rovnice (2) máme potom po úprave

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{k}{b(b + k)}. \tag{6}$$

Podľa vety 1 z práce [1] vyplýva, že všetky riešenia rovnice (2) dostaneme z formúl

$$y = \frac{b(b+k)+k_1}{k}, \quad z = \frac{b(b+k)+k_2}{k} \tag{7}$$

kde k_1, k_2 sú prirodzené čísla, o ktorých platí

$$k_1 k_2 = b^2(b+k)^2, \quad k \mid b^2 + k_1, \quad b^2 + k_2 \tag{8}$$

(lebo platí $k \mid (b(b+k) + k_1), (b(b+k) + k_2)$).

Všetky riešenia rovnice (2) v prirodzených číslach x, y, z, $x \leqq y \leqq z$ dávajú teda vzorce

$$x = b + k, \quad y = b + \frac{b^2 + k_1}{k}, \quad z = b + \frac{b^2 + k_2}{k}, \tag{9}$$

pričom $k_1 k_2 = b^2(b+k)^2$, $k \leqq (b^2 + k_1)/k$, $k_1 \leqq k_2$,

$$k \mid b^2 + k_1, \quad b^2 + k_2, \quad b < x \leqq 3b.$$ [1])

Podla (9) teda existujú prirodzené čísla n, m také, že

$$b^2 + k_1 = nk, \quad b^2 + k_2 = mk, \quad n \leqq m. \tag{10}$$

Z (10) vzhľadom na (8) máme po malej úprave

$$k_2^2 - k(m-n)\,k_2 - b^2(b+k)^2 = 0$$

odkiaľ

$$k_2 = \tfrac{1}{2}[(m-n)\,k + \sqrt{((m-n)^2 k^2 + 4b^2(b+k)^2)}] \tag{11}$$

(odmocnina so záporným znamienkom nevedie k prirodzenému číslu k_2).

Z (11) je zrejmé, že

$$(m-n)^2 k^2 + 4b^2(b+k)^2 = l^2, \quad (l \text{ prirodzené číslo}).$$

Ak je $m \neq n$, potom podľa známych vlastností riešení pytagorejskej diofantickej rovnice (pozri napr. [2] str. 38–41) existujú prirodzené čísla γ, u, v, $(u, v) = 1$, $u > v$, že

$$(m-n)\,k = \gamma(u^2 - v^2), \quad 2b(b+k) = \gamma \,.\, 2uv. \tag{12}$$

---

[1]) Keby bolo $x > 3b$, bolo by $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{b}$.

Prípad $m = n$ sem zahrnieme pripustiac $u = v = 1$. Z (11) máme potom $k_2 = \frac{1}{2}[\gamma(u^2 - v^2) + \gamma(u^2 + v^2)] = \gamma u^2$ a podľa (12) $k = (\gamma uv - b^2)/b$. Z (10) vyplýva potom $k_2 - k_1 = (m - n) k$, teda $k_1 = k_2 - (m - n) k$, čo dá $k_1 = \gamma u^2 - \gamma(u^2 - v^2) = \gamma v^2$. Ak tieto hodnoty dosadíme do (9) dostaneme (3) s podmienkami (4), (5).[2])

Ešte treba dokázať, že (3) skutočne dáva riešenie rovnice (2) v prirodzených číslach $x \leqq y \leqq z$, ak sú splnené podmienky (4) a (5). Dosadiac (3) do (2) zistíme ľahko, že rovnica je identicky splnená. Podmienky (4) zaručujú, že $x \leqq y \leqq z$ a podmienky (5), že x, y, z sú čísla prirodzené.

Tým je veta dokázaná.

Veta 2. *Všetky riešenia rovnice (1) v prirodzených číslach x, y, z, $(x \leqq y \leqq z)$ dostaneme zo vzťahov*

$$x = \frac{\gamma uv}{ab}, \quad y = \frac{\gamma bv(u + v)}{a(\gamma uv - b^2)}, \quad z = \frac{\gamma bu(u + v)}{a(\gamma uv - b^2)} \tag{13}$$

kde $\gamma, u, v, u \geqq v, (u, v) = 1$ sú prirodzené čísla, ktoré splňujú nasledujúce podmienky:

$$b^2 < \gamma uv \leqq 3b^2, \quad (\gamma uv - b^2)^2 \leqq b^2(b^2 + \gamma v^2) \tag{14}$$

a

$$ab \mid \gamma uv, \quad a(\gamma uv - b^2) \mid \gamma b(u + v). \tag{15}$$

Dôkaz. Podľa vety 12 z článku [3] dostaneme z riešení (x', y', z') rovnice (2) všetky riešenia $(x'/a, y'/a, z'/a)$ rovnice (1) v prirodzených číslach. Na základe tejto vety vyplýva teda veta 2 ihneď z vety 1.

Príklad. Riešiť rovnicu $1/x + 1/y + 1/z = a/3$ v prirodzených číslach x, y, z pre $a = 1$ a $a = 2$.

Najprv nájdeme všetky riešenia rovnice $1/x + 1/y + 1/z = 1/3$ podľa vety 1. Keďže podľa (8) $3 \mid \gamma uv$ a podľa (7) $9 < \gamma uv \leqq 27$, prichádzajú do povahy len hodnoty

$$\gamma uv = 12, 15, 18, 21, 24, 27\,.$$

Pri riešení sa o ďalšie podmienky (7) a (8) nestaráme, ale vylúčime výsledky, v ktorých neplatí $x \leqq y \leqq z$, alebo v ktorých x, y, z nie sú prirodzené čísla. Postup výpočtu a výsledky obsahujú nasledujúce tabuľky.

---

[2]) Keďže $(u, v) = 1$, platí

$$\gamma uv - b^2 \mid \gamma bv(u + v),\ \gamma bu(u + v) \Leftrightarrow \gamma uv - b^2 \mid \gamma b(u + v)\,.$$

	$yuv = 12$								$yuv = 15$				
γ	1	1	2	2	3	4	6	12	1	1	3	5	15
u	12	4	6	3	4	3	2	1	15	5	5	3	1
v	1	3	1	2	1	1	1	1	1	3	1	1	1
x	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5
y	13	21	14	20	15	16	18	24	8	12	9	10	15
z	156	28	84	30	60	48	36	24	120	20	45	30	15

	$yuv = 18$								$yuv = 21$				
γ	1	1	2	3	3	6	9	18	1	1	3	7	21
u	18	9	9	6	3	3	2	1	21	7	7	3	1
v	1	2	1	1	2	1	1	1	1	3	1	1	1
x	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7
y	$\frac{19}{3}$	$\frac{22}{3}$	$\frac{20}{3}$	7	10	8	9	12	$\frac{11}{2}$	$\frac{15}{2}$	6	7	$\frac{21}{2}$
z	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	42	15	24	18	12	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	21	$\emptyset$

	$yuv = 24$											$yuv = 27$			
γ	1	1	2	2	3	4	4	6	8	12	24	1	3	9	27
u	24	8	12	4	8	6	3	4	3	2	1	27	9	3	1
v	1	3	1	3	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
x	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9	9
y	5	$\frac{33}{5}$	$\frac{26}{5}$	$\frac{42}{5}$	$\frac{27}{5}$	$\frac{28}{5}$	8	6	$\frac{32}{5}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{48}{5}$	$\frac{14}{3}$	5	6	9
z	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	12	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	9

Z nájdených riešení rovnice $1/x + 1/y + 1/z = 1/3$ ľahko určíme všetky riešenia rovnice $1/x + 1/y + 1/z = 2/3$ vyhľadajúc medzi nimi riešenia so spoločným deliteľom $a = 2$, ktorým ich delíme. Tak máme

x	2	2	2	2	2	3	3	4
y	7	10	8	9	12	4	6	4
z	42	15	24	18	12	12	6	6

Ak máme riešiť len rovnicu $1/x + 1/y + 1/z = 2/3$, je veľmi výhodné postupovať pomocou vety 2. V tomto prípade totiž $6|\gamma uv$, a teda sú možné len prípady $\gamma uv = 12, 18, 24$.

O diofantickú rovnicu (1) je v literatúre záujem (pozri napr. [2], [4], [5], [6]). V [4] a [6] sa uvádza viac problémov o nej, dosiaľ úplne neriešených. Ich obťažnosť