Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

# MITTELWERTSÄTZE DER GITTERPUNKTLEHRE II

BŘETISLAV NOVÁK, Praha

(Eingelangt am 26. November 1970)

*Zum Andenken meines Lehrer* Prof. VOJTĚCH JARNÍK *gewidmet*

**1. Einleitung.** Sei $r \geqq 2$ eine natürliche Zahl und sei

$$Q(u) = Q(u_j) = \sum_{j,l=1}^{r} a_{jl} u_j u_l \tag{1}$$

eine positiv definite quadratische Form mit einer symmetrischen Koeffizientenmatrix und mit der Determinante $D$. Es seien weiter

$$M_1 > 0, M_2 > 0, \ldots, M_r > 0\,, \quad b_1, b_2, \ldots, b_r \tag{2}$$

und

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \tag{3}$$

reelle Zahlen. Bedeute $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ die Folge aller Werte der Form

$$Q(m_j M_j + b_j) > 0$$

mit ganzen $m_1, m_2, \ldots, m_r$, $\lambda_0 = 0$ und für ein ganzes nichtnegatives $m$ sei mit $a_m$ die Summe

$$\sum \exp\left[2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j (m_j M_j + b_j)\right]$$

bezeichnet, wobei über alle Systeme $m_1, m_2, \ldots, m_r$ ganzer Zahlen, für welche $Q(m_j M_j + b_j) = \lambda_m$ ist, summiert wird.

Für $x \geqq 0$, $\varrho \geqq 0$ legen wir

$$A_\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\varrho + 1)} \sum_{\lambda_m \leqq x} a_m (x - \lambda_m)^\varrho\,, \quad V_\varrho(x) = \frac{M \exp\left[2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j b_j\right] \delta}{\Gamma(\frac{1}{2}r + \varrho + 1)}\, x^{r/2 + \varrho}\,,$$

wobei $M = \pi^{r/2}/\sqrt{(D)}\, M_1 M_2 \ldots M_r$, $\delta = 1$, wenn alle Zahlen $\alpha_1 M_1, \alpha_2 M_2, \ldots, \alpha_r M_r$ ganz sind, sonst $\delta = 0$. Schliesslich sei

$$P_\varrho(x) = A_\varrho(x) - V_\varrho(x) \tag{4}$$

$$M_\varrho(x) = \int_0^x |P_\varrho(t)|^2 \, \mathrm{d}t \,. \tag{5}$$

Für $\varrho = 0$ ist die Funktion (4) der bekannte „Gitterrest", welcher in einer Reihe von Arbeiten untersucht worden ist (siehe z. B. [1]–[7] und die in diesen Arbeiten angeführten Hinweise). Die Funktion (4) (für ganze $\varrho \geqq 0$) führte schon Landau ein (vgl. [3], S. 11 und die weiteren) und benützte diese bei seiner Methode. Von den $O$- und $\Omega$-Abschätzungen der Funktion (4) für ein gewisses (genügend grosses) $\varrho$ können nämlich meistens $O$- und $\Omega$-Abschätzungen der Funktion $P(x) = P_0(x)$ hergeleitet werden.

Im Jahre 1968 kehrte zu diesen Fragen Jarník in seiner Arbeit [2] zurück und stellte die Frage der Auffindung der besten möglichen $O$- und $\Omega$-Abschätzungen der Funktion (4) in Abhängigkeit von dem Wert $\varrho$. Wir führen in gekürzter Form sein bemerkenswertes Ergebnis an:

*Die Form* (1) *besitze ganzzahlige Koeffizienten, sei* $\alpha_j = b_j = 0$, $M_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, r$. *Dann gilt*

a) *Wenn* $0 \leqq \varrho < r/2 - 2$ *ist, dann ist*

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/2-1})$$

*wenn* $\varrho > r/2 - \frac{1}{2}$ *ist, dann ist*

$$P_\varrho(x) = O(x^{(r-1)/4+\varrho/2}) \,.$$

b) *Für* $\varrho \geqq 0$ *gelten zugleich die folgenden Abschätzungen*

$$P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/2-1}) \,, \quad P_\varrho(x) = \Omega(x^{(r-1)/4+\varrho/2}) \,.$$

Es ist leicht zu sehen, dass für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}r - 2$ oder $\varrho > \frac{1}{2}(r-1)$ so definitive Ergebnisse erreicht worden sind. Für $\varrho \geqq 0$, $\frac{1}{2}r - 2 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}(r-1)$ gibt Jarník in der Arbeit [2] auch einige $O$-Abschätzungen, welche aber nicht definitive Ergebnisse liefern. Für $\varrho = 0$ entspricht dieser Fall dem klassischen Problemkreis $r = 2, 3, 4$. Für allgemeines $\varrho$ bekommt man also eine gewisse „Verschiebung" in das Intervall $2\varrho + 4 \geqq r \geqq 2\varrho + 1$. Die erste $\Omega$-Abschätzung von Jarník ist besser als die zweite für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}(r-3)$, für $\varrho = \frac{1}{2}(r-3) \geqq 0$ sind beide Abschätzungen gleich, für $\varrho < \frac{1}{2}(r-3)$, $\varrho \geqq 0$ ist wieder die zweite $\Omega$-Abschätzung besser. Es ist also natürlich zu vermuten, dass für $\varrho = \frac{1}{2}(r-3) \geqq 0$ das eine definitive Ergebnis in das andere übergeht.

Die direkte Untersuchung der Funktion (4) ist erheblich schwierig. Deswegen wurde auch für $\varrho = 0$ der Mittelwert der Funktion $P(x)$ untersucht d. h. die Funktion (5) (für $\varrho = 0$), wie man es in den Arbeiten [1], [3] und [7] finden kann. Das Studium der Funktion (5) ist nämlich verhältnismässig einfacher (Nichtnegativität und Monotonie) und man kann zusätzlich von manchen „genügend guten" Ergebnissen für die Funktion (5) auch $O$- und $\Omega$-Abschätzungen der Funktion (4) herleiten.

In der Arbeit [6] wurde die Funktion (5) unter der Voraussetzung, dass die Koeffizienten der Form (1) und die Zahlen (2) ganz sind, untersucht. Nach einem der Hauptergebnisse dieser Arbeit (Satz 3 von S. 74) gilt unter den angeführten Voraussetzungen (natürlich setzt man voraus, dass die Funktion (5) nicht identisch Null gleich ist):

$$(6) \qquad K_1 x^{r/2+\varrho+1/2} < M_\varrho(x) < K_2 x^{r-1} \qquad \text{für} \quad 0 \leqq \varrho < \tfrac{1}{2}(r-3),$$

$$(7) \qquad \begin{aligned} K_1 x^{r/2+\varrho+1/2} &< M_\varrho(x) < K_2 x^{r-1} \lg x &&\text{für} \quad \varrho = \tfrac{1}{2}(r-3) \geqq 0, \\ K_1 x^{r/2+\varrho+1/2} &< M_\varrho(x) < K_2 x^{r/2+\varrho+1/2} &&\text{für} \quad \varrho > \tfrac{1}{2}(r-3), \quad \varrho \geqq 0, \end{aligned}$$

wo $x > K_0$ und $K_0, K_1, K_2$ sind positive Konstante, welche nur von der Form (1), von $\varrho$ und von den Zahlen (2) und (3) abhängen.

In derselben Arbeit ist gezeigt, dass die unteren Abschätzungen allgemein nicht verbesserbar sind. Wenn nämlich der sogenannte Singularfall vorkommt (siehe § 2 dieser Arbeit), ist für $x > K_0$, $\varrho \geqq 0$ sogar

$$K_1 x^{r/2+\varrho+1/2} < M_\varrho(x) < K_2 x^{r/2+\varrho+1/2}.$$

Das Hauptziel dieser Arbeit ist es zu zeigen, dass auch die angeführten oberen Abschätzungen allgemein nicht verbesserbar sind. Es gilt nämlich der folgende

**Hauptsatz 1.** *Es seien die Koeffizienten der Form* (1) *und die Zahlen* (2) *ganz und die Zahlen* (3) *seien rational. Es entstehe nicht der Singularfall. Dann gibt es positive Konstanten* $K$, $\alpha < r - 1$, $\beta < 1$ (*diese hängen nur von* $\varrho$, *der Form* (1) *und den Zahlen* (2), (3) *ab*) *so dass*

$$(8) \qquad M_\varrho(x) = K x^{r-1} + O(x^\alpha) \qquad \text{für} \quad 0 \leqq \varrho < \tfrac{1}{2}(r-3),$$

$$(9) \qquad M_\varrho(x) = K x^{r-1} \lg x + O(x^{r-1} \lg^\beta x) \qquad \text{für} \quad \varrho = \tfrac{1}{2}(r-3) \geqq 0$$

gilt.

Für $\varrho = 0$ wurde dieser Satz in der Arbeit [7] bewiesen. Dessen Beweis is also eine Verallgemeinerung des in dieser Arbeit benützen Verfahrens d. h. des von Jarník abstammenden Ausdruckes der Funktion $M_0(x)$ mittels eines zweifachen Kurvenintergrales zusammen mit dem Ausnützen der Transformationseigenschaften der zugehörigen Thetafunktion (siehe [1]).

Vom Hauptsatz 1 ergibt sich (nach dem üblichen Widerspruch) sofort der folgende

**Hauptsatz 2.** *Es seien die Koeffizienten der Form* (1) *und die Zahlen* (2) *ganz, die Zahlen* (3) *seien rational und es entstehe nicht der Singularfall. Dann ist*

$$P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/2-1}) \qquad \text{für} \quad 0 \leqq \varrho < \tfrac{1}{2}(r-3)\,,$$
$$P_\varrho(x) = \Omega[x^{r/2-1}\sqrt{(\lg x)}] \quad \text{für} \quad \varrho = \tfrac{1}{2}(r-3) \geqq 0\,.$$

Diese Resultate verstärken und verallgemeinern Jarníks oben angeführte $\Omega$-Abschätzungen und ebenfalls auch die Ergebnisse des Verfassers von den Arbeiten [7] und [8]. Besonders ist der logarithmische Faktor für $\varrho = \frac{1}{2}(r-3) \geqq 0$ von Interesse. Führen wir noch an, dass die $\Omega$-Methode von Jarník, welche in der Arbeit [2] benützt worden ist, wesentlich an der Voraussetzung $\delta = 1$ beruht und für $\delta = 0$ keine Ergebnisse liefert. Im Spezialfall $\varrho = 0$, $\alpha_j = b_j = 0$, $M_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, r$ wurden beide Sätze von Jarník in der Arbeit [1] bewiesen.

**2. Bezeichnungen und Hilfssätze.** In der ganzen Arbeit wird vorausgesetzt, dass die Koeffizienten der Form (1) und die Zahlen (2) ganz und dass die Zahlen (3) rational sind. Von unseren Untersuchungen ist der Fall, wenn $A_0(x) = 0$ für alle $x$ ausgeschlossen (nach dem Lemma 5 von der Arbeit [6] ist dann auch die Funktion $P_\varrho(x)$ identisch Null gleich).

Mit dem Buchstaben $c$ werden (allgemein verschiedene) positive Konstanten bezeichnet, welche nur von der Form (1), den Zahlen (2), (3) und von $\varrho$ abhängen. Mit dem Buchstaben $H$ bezeichnen wir den kleinsten gemeinsamen Nenner der Zahlen $\alpha_1 M_1, \alpha_2 M_2, \ldots, \alpha_r M_r$. $\varrho$ bezeichne immer eine nichtnegative Zahl $\varrho \leqq \frac{1}{2}(r-3)$, $x$ sei eine hinreichned grosse positive Zahl, d. h. $x > c$, $m$, $h$, $p$ (eventuell mit einem Index usw. versehen) bedeute ganze Zahlen, $n$ und $k$ (wieder mit Index usw.) seien natürliche Zahlen. Falls $h$ und $k$ gemeinsam (in Formeln usw.) auftreten, setzen wir immer voraus, dass $(h, k) = 1$ ist (ähnlich für $h'$, $k'$ usw.).

Wenn $|A| \leqq cB$ ist, schreiben wir kurz $A \ll B$. Mit $A \asymp B$ wird kurz die gleichzeitige Gültigkeit der Beziehungen $A \ll B$, $B \ll A$ bezeichnet. Die Symbole $O$, $o$ und $\Omega$ haben die übliche Bedeutung d. h. sie werden zum Grenzübergang $x \to +\infty$ bezogen und die, in deren Definitionen auftretenden Konstanten sind immer vom „Typ“ $c$.

Unter einem Integral wird das (absolut konvergente) Lebesguesche Integral verstanden. Wenn $a$ eine reelle Zahl ist, sei

$$\int_{(a)} f(s)\,\mathrm{d}s = i\int_{-\infty}^{\infty} f(a+it)\,\mathrm{d}t\,.$$

Wenn $x > 0$, $-\infty \leqq a \leqq b \leqq +\infty$ und $I$ ein Intervall mit den Endpunkten $a$ und $b$ ist, dann sei

$$\int_I f(s)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f\left(\frac{1}{x} + it\right)\mathrm{d}t\,.$$

(Die beiden Schreibarten benützen wir natürlich unter der Voraussetzung, das die Integrale auf der rechten Seite existieren.)

Legen wir $M_{\varrho,1}(t) = M_\varrho(t)$ und für jedes $n$, $t \geqq 0$ definieren wir induktionsweise

$$M_{\varrho,n+1}(t) = \int_0^t M_{\varrho,n}(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Für ein komplexes $s$, $\operatorname{Re} s > 0$ sei

$$\Theta(s) = \Theta(s;\alpha_j) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s} \tag{10}$$

und

$$F(s) = F(s;\alpha_j) = \Theta(s) - \frac{M \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{k} \alpha_j b_j\right)}{s^{r/2}}\,\delta\,, \quad G(s) = \overline{F(\bar{s})} = F(s; -\alpha_j)\,. \tag{11}$$

Alle diese Funktionen sind offensichtlich in der Halbebene $\operatorname{Re} s > 0$ holomorph und in jeder Mengen der Form $\operatorname{Re} s \geqq \varepsilon > 0$ beschränkt. (Wir bemerken noch, dass in (11) und auch ferner für ein komplexes $s$, $\tau$ positiv, $s^\tau$ den Zweig der Funktion $s^\tau$ bedeuten wird, für welchen diese Funktion einen positiven Wert für positive $s$ annimmt.)

Zuerst führen wir drei Hilfssätze an.

**Lemma 1.** *Es sei $a_2 > a_1 > 0$, $b_2 > b_1 > 0$, $\lambda \geqq 1$, $\mu \geqq 1$, $\nu \geqq 1$. Die Funktion $f(s, s')$ sei im Gebiet $a_1 \leqq \operatorname{Re} s \leqq a_2$, $b_1 \leqq \operatorname{Re} s' \leqq b_2$ holomorph und beschränkt. Dann gilt*

$$\int_{(a_1)}\left(\int_{(b_1)} \ldots \mathrm{d}s'\right)\mathrm{d}s = \int_{(a_1)}\left(\int_{(b_2)} \ldots \mathrm{d}s'\right)\mathrm{d}s = \int_{(b_2)}\left(\int_{(a_1)} \ldots \mathrm{d}s\right)\mathrm{d}s' =$$
$$= \int_{(b_2)}\left(\int_{(a_2)} \ldots \mathrm{d}s\right)\mathrm{d}s' = \int_{(a_2)}\left(\int_{(b_2)} \ldots \mathrm{d}s'\right)\mathrm{d}s = \int_{(a_2)}\left(\int_{(b_1)} \ldots \mathrm{d}s'\right)\mathrm{d}s\,,$$

*wobei alle Integrale den Integrand*

$$\frac{f(s, s')}{s^\lambda s'^\mu (s + s')^\nu}$$

*haben und absolut konvergent sind.*

Beweis. Siehe [1], Hilfssatz 1.

**Lemma 2.** *Es sei $a > 0$, $b > 0$. Dann gilt*

$$M_{\varrho,n}(x) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{(a)}\left(\int_{(b)} \frac{F(s)\,G(s')\,e^{x(s+s')}}{s^{\varrho+1} s'^{\varrho+1}(s + s')^n}\,\mathrm{d}s'\right)\mathrm{d}s\,. \tag{12}$$

Beweis. Siehe [6], Lemma 1.

**Lemma 3.** *Sei* $s = 1/x + it$. *Ist* $t \ll x^{-1/2}$, *dann ist*

$$\frac{F(s)}{s^{\varrho+1}} \ll x^{r/4+\varrho/2+1/2}\,. \tag{13}$$

*Wenn* $h \neq 0$, $k \leqq \sqrt{x}$ *und*

$$\left|t - \frac{2\pi h}{k}\right| \ll \frac{1}{k\sqrt{x}} \tag{14}$$

*ist, dann gelten die Beziehungen*

$$F(s) \ll \frac{x^{r/2}}{k^{r/2}\left(1 + x\left|t - \dfrac{2\pi h}{k}\right|\right)^{r/2}}, \tag{15}$$

$$F(s) - \frac{MS_{h,k}}{k^r\left(s - \dfrac{2\pi ih}{k}\right)^{r/2}} \ll x^{r/4} \ll \frac{x^{r/2}}{k^{r/2}\left(1 + x\left|t - \dfrac{2\pi h}{k}\right|\right)^{r/2}}, \tag{16}$$

*wobei wir* $S_{h,k} = 0$ *legen, wenn* $k \not\equiv 0 \pmod{H}$ *ist und*

$$S_{h,k} = S_{h,k}(\alpha_j) = \sum_{a_1,a_2,\ldots,a_r=1}^{k} \exp\left(-\frac{2\pi ih}{k}\, Q(a_jM_j + b_j) + 2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(a_jM_j + b_j)\right),$$

*wenn* $k \equiv 0 \pmod{H}$. *Immer ist*

$$S_{h,k} \ll k^{r/2}\,. \tag{17}$$

Beweis. Siehe z. B. [6] Lemma 3, [7] Lemma 4.

Wir bemerken, dass in der Arbeit [6] die Zahlen $S_{h,k}$ in einer etwas anderen Weise definiert worden sind. In der ganzen Arbeit werden wir voraussetzen, dass der sogenannte Singulärfall nicht entsteht, d. h. es existieren $h$ und $k$ derartig, dass $S_{h,k} \neq 0$ ist.

**3. Beweis des Hauptsatzes 1.** Der Beweis des Hauptsatzes 1 ist im Grunde dem Beweis des analogischen Satzes von der Arbeit [7] ähnlich. Wir gehen von dem Ausdruck (12) aus und beweisen, dass für ein gewisses $n$ ($n = c$ und hinreichend gross) ür $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}(r - 3)$ die Beziehung

$$M_{\varrho,n}(x) = Kx^{r+n-2} + O(x^{\alpha})\,, \quad K = c\,, \quad \alpha < r + n - 2$$

gilt. Nach der Benützung der Ungleichungen ($0 < \lambda < \frac{1}{2}$)

$$\lambda x\, M_{\varrho,n}(x) \leqq \int_x^{x(1+\lambda)} M_{\varrho,n}(t)\, \mathrm{d}t\,, \quad \lambda x\, M_{\varrho,n}(x) \geqq \int_{x(1-\lambda)}^{x} M_{\varrho,n}(t)\, \mathrm{d}t$$

und der rekurrenten Definition der Funktion $M_{\varrho,n}(x)$ kann einfach hergeleitet werden, dass eine ähnliche Beziehung schon für alle $n$ gilt. Ähnlicherweise kann man auch im Fall $\varrho = \frac{1}{2}(r - 3) \geqq 0$ fortschreiten. Da treten nur gewisse Schwierigkeiten technischen Charakters zu, welche der logarithmische Faktor im Hauptglied verursacht.

Setzen wir also voraus, dass die Zahl $n$ hinreichend gross ist, $n = c$. Zuerst erinnern wir noch an die Fundamentaleigenschaften der Fareybrüche, welche wir ferner gebrauchen werden. Erwägen wir die Fareybrüche, welche zu der Zahl $\sqrt{x}$ gehören, d. h. Brüche der Form $h/k$, wo $k \leqq \sqrt{x}$ ist. Wenn $h'/k' < h/k < h''/k''$ drei solche nacheinander folgende Brüche sind (d. h. zwischen $h'/k'$ und $h''/k''$ liegt genau ein zu $\sqrt{x}$ gehörender Fareybruch – nämlich $h/k$), dann ist notwendig (vgl. z. B. [3], S. 249–250) $hk' - h'k = 1$, $h''k - hk'' = 1$, $k + k' > \sqrt{x}$, $k + k'' > \sqrt{x}$. Wenn man in diesem Fall

$$\mathfrak{B}_{h,k} = \left(2\pi \frac{h + h'}{k + k'},\ 2\pi \frac{h + h''}{k + k''}\right]$$

legt (wir bemerken, dass dieses Intervall eindeutig durch die Zahl $\sqrt{x}$ und das Paar $h, k$, $k \leqq \sqrt{x}$ bestimmt ist), dann ist $(\pi < \vartheta_1, \vartheta_2 \leqq 2\pi)$

$$\mathfrak{B}_{h,k} = \left(2\pi \frac{h}{k} - \frac{\vartheta_1}{k\sqrt{x}},\ 2\pi \frac{h}{k} + \frac{\vartheta_2}{k\sqrt{x}}\right]. \tag{18}$$

Die Intervalle $\mathfrak{B}_{h,k}$ sind offensichtlich punktfremd und bedecken die ganze reelle Achse. Wenn man

$$w = \frac{2\pi}{[\sqrt(x)] + 1}$$

bezeichnet, ist offenbar $w \asymp x^{-1/2}$ und $\mathfrak{B}_{0,1} = (-w, w]$. Bezeichnen wir noch der Einfachheit wegen $(k, k' \leqq \sqrt{x})$

$$\beta = 2\pi \frac{h}{k}, \quad \beta' = 2\pi \frac{h'}{k'}, \quad \mathfrak{B} = +\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{h,k}, \quad -\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{-h,k},$$

$$\mathfrak{B}' = +\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_{h',k'}, \quad -\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_{-h',k'}.$$

Immer sei $s = 1/x + it$, $s' = 1/x + it'$ und bezeichne man noch

$$H(t, t'; \alpha_j) = \frac{F(s)\, G(s')\, e^{x(s+s')}}{s^{\varrho+1} s'^{\varrho+1} (s + s')^n}. \tag{19}$$

Leicht ist zu sehen, dass

$$H(-t, -t'; \alpha_j) = \overline{H(t, t'; -\alpha_j)}, \quad H(t, t'; \alpha_j) = H(t', t; -\alpha_j) \tag{20}$$

gilt. Wir führen noch einige einfache Abschätzungen an, welche wir immer benützen werden. Es gilt

$$\frac{1}{s + s'} \ll \frac{x}{1 + x|t + t'|} \tag{21}$$

und für $0 \leqq u \leqq x$ ist

$$e^{u(s+s')} \ll 1 . \tag{22}$$

Wenn $|t - 2\pi h/k| \ll 1/k\sqrt{x}$ (insbesondere also nach (18) für $t \in \mathfrak{B}_{h,k}$), $h \neq 0$ ist, dann ist

$$|s| \asymp |t| \asymp \frac{|h|}{k} . \tag{23}$$

Nach (12) (wo $a = b = 1/x$) gelegt wird) ergibt sich

$$4\pi^2 M_{\varrho,n}(x) = \sum \int_{\mathfrak{B}} \left( \int_{\mathfrak{B}'} \dots \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}t' , \tag{24}$$

wo über alle solche $h, k, h', k'$ summiert wird, für welche $k \leqq \sqrt{x}$, $k' \leqq \sqrt{x}$ ist (im Sinne unserer Verabredung ist auch $(h, k) = 1$, $(h', k') = 1$). Die rechte Seite von (24) zerlegen wir nun in einige Teile. Sei

$$S_1 = \iint_{\mathfrak{A}} \dots \mathrm{d}t \, \mathrm{d}t' , \tag{25}$$

wo $\mathfrak{A}$ das Gebiet $\min(|t|, |t'|) \leqq w$ ist. Für

$$h > 0 , \quad k \leqq \sqrt{x} \tag{26}$$

und

$$h' > 0 , \quad k' \leqq \sqrt{x} , \quad h'k \neq hk' \tag{27}$$

bezeichnen wir

$$M(h, k, h', k') = \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}'} \dots \mathrm{d}t' \, \mathrm{d}t + \int_{\mathfrak{B}} \int_{-\mathfrak{B}'} \dots \mathrm{d}t' \, \mathrm{d}t + \tag{28}$$
$$+ \int_{-\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}'} \dots \mathrm{d}t' \, \mathrm{d}t + \int_{-\mathfrak{B}} \int_{-\mathfrak{B}'} \dots \mathrm{d}t' \, \mathrm{d}t ,$$

$$N(h, k) = N(h, k; \alpha_j) = \int_{\mathfrak{B}} \int_{-\mathfrak{B}} \dots \mathrm{d}t' \, \mathrm{d}t , \tag{29}$$
$$P(h, k) = P(h, k; \alpha_j) = \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} \dots \mathrm{d}t' \, \mathrm{d}t$$

(die Integranden in (24), (25), (28) und (29) sind $H(t, t'; \alpha_j)$). Endlich sei

$$S_2 = \Sigma M(h, k, h', k') \tag{30}$$

(das Summierungsgebiet (26) und (27)) und

$$S_3(\alpha_j) = \Sigma P(h, k; \alpha_j) , \quad S_4(\alpha_j) = \Sigma N(h, k; \alpha_j) \tag{31}$$

(das Summierungsgebiet (26)). Nach (24)–(31) und (20) ergibt sich

$$(32)\qquad 4\pi^2 M_{\varrho,n}(x) = S_1 + S_2 + S_3(\alpha_j) + \overline{S_3(-\alpha_j)} + S_4(\alpha_j) + S_4(-\alpha_j)\,.$$

Wir untersuchen ferner die einzelnen Glieder von der rechten Seite dieser Beziehung.

**Behauptung 1.**

$$(33)\qquad S_1 \ll x^{r/2+\varrho+n-1/2}\,.$$

Beweis. Nach (20) kann offenbar

$$S_1 \ll \int_{-2w}^{2w}\int_{-2w}^{2w} \ldots \,dt'\,dt + \int_{-w}^{w}\left(\int_{2w}^{\infty} \ldots \,dt' + \int_{-\infty}^{-2w} \ldots \,dt'\right)dt = T_1 + T_2$$

mit den Integranden $|H(t, t'; \alpha_j)|$ geschrieben werden. Die Abschätzung $T_1 + T_2 \ll \ll x^{r/2+\varrho+n-1/2}$ ist nun in [6], S. 66–67 (Beziehungen (22) und (24)) angeführt.

**Behauptung 2.**

$$(34)\qquad S_3(\alpha_j) + \overline{S_3(-\alpha_j)} \ll x^{r/2-1/2+\varrho+n/2}\,.$$

Beweis. In $P(h, k)$ (siehe (29)) ist nach (23) offenbar $\min(|s|, |s'|, |s+s'|) \gg h/k$. Wenn man nun die Beziehung (15) vom Lemma 3 auf die Funktion $F(s)$ und die gleiche Abschätzung (siehe (11)) für die Funktion $G(s')$ benützt, erhält man

$$S_3(\alpha_j) + \overline{S_3(-\alpha_j)} \ll$$

$$\ll \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{k}{h}\right)^{2(\varrho+1)+n} \frac{x^{r-2}}{k^r} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dt\,x\,dt'}{(1 + x|t-\beta|)^{r/2}(1 + x|t'-\beta|)^{r/2}} \ll$$

$$\ll x^{r-2} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} k^{2(\varrho+1)+n-r} \ll x^{r/2-1/2+\varrho+n/2}\,.$$

**Behauptung 3.**

$$(35)\qquad S_4(\alpha_j) = \frac{M^2 x^{r-2+n}\,\Gamma(r-1)}{(2\pi)^{2\varrho}\,\Gamma(r+n-1)\,\Gamma^2(r/2)} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{|S_{h,k}|^2}{h^{2(\varrho+1)}k^{2r-2\varrho-2}} + O(g(x))\,,$$

*wo* $g(x) = \max\left(x^{r/2+\varrho+n-1/2}, x^{r+n-3}\right)$.

Beweis. Wähle man (26) erfüllende $h$ und $k$, und bezeichne man

$$(36)\qquad f_1(s) = \frac{F(s)}{s^{\varrho+1}} - \frac{MS_{h,k}}{s^{\varrho+1}k^r(s-i\beta)^{r/2}}\,,\quad f_2(s) = \frac{MS_{h,k}}{k^r(s-i\beta)^{r/2}}\left(\frac{1}{s^{\varrho+1}} - \frac{1}{(i\beta)^{\varrho+1}}\right),$$

$$f_3(s) = \frac{1}{(i\beta)^{\varrho+1}}\,\frac{MS_{h,k}}{k^r(s-i\beta)^{r/2}}\,,\qquad g_j(s) = \overline{f_j(\bar{s})}\,,\quad j = 1, 2, 3\,.$$

Es gilt also

$$(37)\qquad \frac{F(s)}{s^{\varrho+1}} = f_1(s) + f_2(s) + f_3(s)\,, \quad \frac{G(s)}{s^{\varrho+1}} = g_1(s) + g_2(s) + g_3(s)\,.$$

Für $t \in \mathfrak{B}$ ergeben sich nach (15)–(17) und (23) die Abschätzungen

$$(38)\qquad f_1(s) \ll x^{r/4}\left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+1},$$

$$f_2(s) \ll \frac{x^{r/2-1}}{k^{r/2}(1 + x|t - \beta|)^{r/2-1}}\left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+2},$$

$$f_3(s) \ll \frac{x^{r/2}}{k^{r/2}(1 + x|t - \beta|)^{r/2}}\left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+1}.$$

Ähnliche Beziehungen ($+\beta$ anstatt $-\beta$) gelten für die Funktionen $g_j(s)$, $j = 1, 2, 3$ unter der Voraussetzung $t \in -\mathfrak{B}$ (siehe (36) und (11)). Daher bekommen wir nach Benützung von (18) sofort

$$(39)\qquad |f_1(s)| + |f_2(s)| + |f_3(s)| \ll \frac{x^{r/2}}{k^{r/2}}\left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+1}\frac{1}{(1 + x|t - \beta|)^{r/2}}$$

(für $t \in \mathfrak{B}$) und

$$(40)\qquad |g_1(s)| + |g_2(s)| + |g_3(s)| \ll \frac{x^{r/2}}{k^{r/2}}\left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+1}\frac{1}{(1 + x|t + \beta|)^{r/2}}$$

(für $t \in -\mathfrak{B}$). Wir bezeichnen

$$V(h, k) = \int_{\mathfrak{B}}\int_{-\mathfrak{B}} f_3(s)\,g_3(s')\,\frac{e^{x(s+s')}}{(s + s')^n}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t'\,,$$

$$W(h, k) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_3(s)\,g_3(s')\,\frac{e^{x(s+s')}}{(s + s')^n}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t'$$

und schätzen die Differenz $N(h, k) - W(h, k)$ ab (dabei wir $t'$ statt $-t'$ geschrieben und also $\mathfrak{B}$ statt $-\mathfrak{B}$). Nachdem

$$\frac{F(s)\,G(s')}{s^{\varrho+1}s'^{\varrho+1}} - f_3(s)\,g_3(s') \ll$$

$$\ll (|f_1(s)| + |f_2(s)|)\,(|g_1(s')| + |g_2(s')| + |g_3(s')|) + |f_3(s)|\,(|g_1(s')| + |g_2(s')|)$$

ist, bekommt man nach (38) (und nach den analogischen Beziehungen für die Funktionen $g_j(s')$, $j = 1, 2, 3$), (39) und (40)

$$N(h, k) - V(h, k) \ll \int_{\mathfrak{B}}\int_{\mathfrak{B}} \left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+1} \frac{x^{r/2+n}}{k^{r/2}(1 + x|t' - \beta|)^{1/2}} \frac{1}{(1 + x|t - t'|)^n} \cdot$$

$$\cdot \left[x^{r/4}\left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+1} + \left(\frac{k}{h}\right)^{\varrho+2} \frac{x^{r/2-1}}{k^{r/2}(1 + x|t - \beta|)^{r/2}}\right] \mathrm{d}t'\,\mathrm{d}t \ll$$

$$\ll x^{r/2+n} \frac{k^{2(\varrho+1)-r/2}}{h^{2(\varrho+1)}} \int_{\mathfrak{B}}\int_{\mathfrak{B}} \frac{1}{(1 + x|t' - \beta|)^{r/2}(1 + x|t - t'|)^n} \cdot$$

$$\cdot \left(x^{r/4} + \frac{k^{1-r/2}}{h} \frac{x^{r/2-1}}{(1 + x|t - \beta|)^{r/2}}\right) \mathrm{d}t'\,\mathrm{d}t \ll$$

$$\ll \frac{x^{r/2+n-2}k^{2(\varrho+1)-r/2}}{h^{2(\varrho+1)}} \left[x^{r/4} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}v}{(1 + xv)^n}\right) \frac{x\,\mathrm{d}t'}{(1 + x|t' - \beta|)^{r/2}} + \right.$$

$$+ \frac{x^{r/2-1}}{hk^{r/2-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x}{(1 + x|t - t'|)^{qn}} + \frac{x}{(1 + x|t - \beta|)^{q'(r/2-1)}}\right) \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \frac{\mathrm{d}t\, x\,\mathrm{d}t'}{(1 + x|t' - \beta|)^{r/2}}\right] \ll$$

(es wurde dabei die Ungleichung $|ab| \leqq |a|^q/q + |b|^q/q'$, $q > 1$, $q' = q/(q - 1)$ benützt z. B. für $q = \frac{3}{2}$). Daher bekommen wir

$$(41)\quad S_4(\alpha_j) - \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} V(h, k) \ll x^{3r/4+n-2} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} (k^{2\varrho+2-r/2} + x^{r/4-1}k^{2\varrho+3-r}) \ll$$

$$\ll \begin{cases} x^{r/2+\varrho+n-1/2} & \text{für } \frac{1}{2}(r - 5) \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}(r - 3)\,, \\ x^{r+n-3} & \text{für } 0 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}(r - 5)\,. \end{cases}$$

Für die Abschätzung der Differenz $V(h, k) - W(h, k)$ bedenken wir, dass nach (38) (und nach den analogen Beziehungen für $g_3(s')$), nach (21)–(23) und (17)

$$(42)\qquad V(h, k) - W(h, k) \ll \left(\frac{k^{\varrho+1}}{h^{\varrho+1}k^{r/2}}\right)^2 x^{r+n-2}(I_1 + I_2)\,,$$

ist, wo

$$I_1 = \int_{\mathfrak{B}} \left(\int_{\mathfrak{N}} \frac{x\,\mathrm{d}t'}{(1 + x|t - \beta|)^{r/2}(1 + x|t' - \beta|^{r/2}(1 + x|t - t'|)^n}\right) x\,\mathrm{d}t\,,$$

$$I_2 = \int_{\mathfrak{N}} \left(\int_{\mathfrak{N}} \ldots \mathrm{d}t'\right) \mathrm{d}t$$

(mit dem gleichen Integrand, $\mathfrak{N} = E_1 - \mathfrak{B}$). Ist $t \in \mathfrak{B}$, dann ist nach (18) $|t - \beta| \ll \ll 1/k\sqrt{x}$, für $t \in \mathfrak{N}$ ist wieder nach (18) $|t - \beta| \gg 1/k\sqrt{x}$. Also ist

$$(43)\quad I_2 \ll \left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{r/2} \int_{\mathfrak{N}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}t}{(1 + x|t - t'|)^n (1 + x|t' - \beta|)^{r/2}} \right) x\,\mathrm{d}t' \ll \left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{r-1}.$$

Für die Abschätzung von $I_1$ bedenke man, dass für $t \in \mathfrak{B}$, $t' \in \mathfrak{N}$ ist $|t - \beta| \leqq \leqq 2\pi/k\sqrt{x}$ und $|t' - \beta| \geqq \pi/k\sqrt{x}$; also ist entweder $|t - \beta| > \pi/2k\sqrt{x}$ oder $|t - t'| > \pi/2k\sqrt{x}$ d. h.

$$(1 + x|t - \beta|)(1 + x|t - t'|) \gg \frac{\sqrt{x}}{k}$$

und also für $I_1$ erhalten wir die Abschätzung

(44)

$$c\left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{r/2-3/2} \int_{\mathfrak{B}} \left( \int_{\mathfrak{N}} \frac{x\,\mathrm{d}t'}{(1 + x|t - \beta|)^{3/2} (1 + x|t' - \beta|)^{r/2} (1 + x|t - t'|)^{n - r/2 + 3/2}} \right) x\,\mathrm{d}t \ll$$

$$\ll \left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{r-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}t\, x\,\mathrm{d}t'}{(1 + x|t - t'|)^2 (1 + x|t - \beta|)^{3/2}} \ll \left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{r-3/2}.$$

Nach (42)–(44) erhalten wir

$$\sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} (V(h, k) - W(h, k)) \ll x^{r/2+n-5/4} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{k^{2\varrho+1/2}}{h^{2(\varrho+1)}} \ll x^{r/2+\varrho+n-1/2}$$

und also nach (41) auch

$$(45)\quad S_4(\alpha_j) - \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} W(h, k) \ll \begin{cases} x^{r/2+\varrho+n-1/2} & \text{für } \tfrac{1}{2}(r - 5) \leqq \varrho \leqq \tfrac{1}{2}(r - 3), \\ x^{r+n-3} & \text{für } 0 \leqq \varrho \leqq \tfrac{1}{2}(r - 5). \end{cases}$$

Ferner ist

$$(46)\quad W(h, k) = \frac{M^2 |S_{h,k}|^2}{(2\pi)^{2\varrho+2} k^{2r-2\varrho-2} h^{2(\varrho+1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x(s+s')}}{s^{r/2} s'^{r/2} (s + s')^n} \mathrm{d}t\,\mathrm{d}t'.$$

Um das letzte Integral zu berechnen, erwäge man, dass $(a, u > 0)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(a)} \frac{e^{us}}{s^{r/2}} \mathrm{d}s = \frac{u^{r/2-1}}{\Gamma(r/2)}$$

ist und also

$$(47)\quad -\frac{1}{4\pi^2} \int_{(a)} \int_{(a)} \frac{e^{u(s+s')}}{s^{r/2} s'^{r/2}} \mathrm{d}s\,\mathrm{d}s' = \frac{u^{r/2}}{\Gamma^2(r/2)}.$$

Nach dem Lemma 1 ist zu sehen, dass das Integral

$$\int_{(a)} \left( \int_{(a)} \frac{ds}{s^{r/2} s'^{r/2} (s + s')^n} \right) ds'$$

von $a$ nicht abhängt und also (nach dem Grenzübergang $a \to +\infty$) Null gleich ist. Nach der gliedweisen Integration der Beziehung (47) bekommen wir so, dass das Integral in (46) den Wert

$$-4\pi^2 \frac{x^{r+n-2}\,\Gamma(r-1)}{\Gamma(r+n-1)\,\Gamma^2(r/2)}$$

hat. Daher, von (46) und (45) ergibt sich schon sofort die Behauptung.

Wir untersuchen nun die Summe in (35).

**Behauptung 4.** *Sei*

$$(48) \quad T(x) = T(x; \alpha_j) = \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^{2r-2\varrho-2} h^{2(\varrho+1)}}, \quad S(x) = T(x; \alpha_j) + T(x; -\alpha_j).$$

*Ist* $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}(r-3)$, *dann ist*

$$(49) \qquad S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h \neq 0} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^{2r-2\varrho-2} |h|^{2(\varrho+1)}} + O(x^{3/2+\varrho-r/2}),$$

*wobei die Reihe in* (49) *konvergent ist. Ist* $\varrho = \frac{1}{2}(r-3) \geqq 0$ *dann ist*

$$(50) \qquad S(x) = K \lg x + O(1)$$

*mit einer passenden Konstante* $K = c$.

*Ferner ist für* $0 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}(r-3)$

$$(51) \qquad S(x) - S\left(\frac{x}{2}\right) \ll x^{\varrho+3/2-r/2},$$

$$(52) \qquad S(x) \ll \lg^{\varepsilon} x,$$

*wo* $\varepsilon = 1$ *für* $\varrho = \frac{1}{2}(r-3) \geqq 0$, $\varepsilon = 0$ *für* $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}(r-3)$ *ist.*

Beweis. Wenn wir (17) und die Tatsache, dass offenbar

$$\bar{S}_{h,k}(\alpha_j) = S_{-h,k}(-\alpha_j)$$

ist, benützen, dann bekommen wir sofort die Konvergenz der Reihe in (49) und die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h \neq 0} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^{2r-2\varrho-2} |h|^{2(\varrho+1)}} - S(x) \ll \sum_{k > \sqrt{x}} \frac{1}{k^{r-2\varrho-2}} \ll x^{3/2+\varrho-r/2}$$

(für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}(r - 3)$). Wenn $\varrho = \frac{1}{2}(r - 3) \geqq 0$ ist, hat $T(x)$ die Form

$$\sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^{r+1} h^{2(\varrho+1)}} = \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{k} \frac{|S_{h,k}|^2}{k^{r+1} h^{2(\varrho+1)}} + O(1)$$

und der Beweis der Beziehung (50) verläuft ganz so wie der Beweis vom Lemma 8 in [7] (für den Fall $r = 3$, $\varrho = 0$). Es genügt überall anstatt $h^2$ den Ausdruck $h^{2(\varrho+1)}$ zu schreiben. Schliesslich ist nach (17)

$$S(x) - S(x/2) \ll \sum_{\sqrt{(x/2)} < k \leqq x} k^{2\varrho+2-r} \ll \sqrt{(x)}\, x^{(2\varrho+2-r)/2} = x^{3/2+\varrho-r/2}$$

und

$$S(x) \ll \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{k^{r-2\varrho-2}} \ll \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}(r-3)\,, \\ \lg x & \text{für} \quad 0 \leqq \varrho = \frac{1}{2}(r-3)\,. \end{cases}$$

**Behauptung 5.**

$$S_2 \ll x^{r/2+\varrho+n-1/2}\,. \tag{53}$$

Beweis. Die Benützung von (15), (28), (30), (21)–(23) liefert

$$S_2 \ll x^{r-2} \sum \left(\frac{kk'}{hh'}\right)^{\varrho+1} \int_{\mathfrak{B}} \left( \int_{\mathfrak{B}'} \frac{x\,\mathrm{d}t'}{k'^{r/2}(1 + x|t' - \beta'|)^{r/2}\,(1/x + |t - t'|)^n} \right) \cdot \frac{x\,\mathrm{d}t}{k^{r/2}(1 + x|t - \beta|)^{r/2}}\,, \tag{54}$$

wo über alle (26) und (27) erfüllende $h, k, h', k'$ summiert wird. Mit Rücksicht zur Symmetrie der Fälle beschränken wir uns nur auf den Fall $k' \geqq k$. Die Summe in (54) zerlegen wir in zwei Teile: in $T_1$ seien alle Glieder mit $0 < |h'/k' - h/k| \leqq 4/k\sqrt{x}$ enthalten, $T_2$ enthalte alle übrigen Glieder d. h. Glieder in welchen $|h'/k' - h/k| > 4/k\sqrt{x}$ ist. Es ist also

$$S_2 \ll T_1 + T_2\,. \tag{55}$$

In $T_1$ haben wir offenbar

$$\frac{1}{kk'} \leqq \left|\frac{h'}{k'} - \frac{h}{k}\right| \leqq \frac{4}{k\sqrt{x}} \tag{56}$$

und also nach (27) ist $\frac{1}{4}\sqrt{x} \leqq k' \leqq \sqrt{x}$ und $h'/k' \geqq h/k - 4/k\sqrt{x} \gg h/k$. Von (56) folgt ferner $|hk' - h'k| \leqq 4$. Wählt man also $h$ und $k$, dann sind für $k'$ höchstens $c$ Möglichkeiten mod $k$ vorhanden und also insgesamt $c(\sqrt{x}/k)$ Möglichkeiten. Wählt man $h, k, k'$, dann sind für $h'$ höchstens $c$ Möglichkeiten vorhanden. Bedenken wir noch, dass nach (56) ist

$$(1 + x|t - \beta|)(1 + x|t' - \beta'|)(1 + x|t - t'|) >$$
$$> x(|\beta - t| + |t - t'| + |\beta' - t'|) \geqq x|\beta - \beta'| \gg \frac{\sqrt{x}}{k}.$$

Wählt man $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $\varepsilon = c$, dann kann man schreiben

$$T_1 \ll x^{r+n-2} \sum \left(\frac{kk'}{hh'}\right)^{\varrho+1} \left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{r/2-1-\varepsilon} \frac{1}{(kk')^{r/2}} \cdot$$
$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dt'\,x\,dt}{(1 + x|t - \beta|)^{1+\varepsilon}(1 + x|t' - \beta'|)^{1+\varepsilon}} \ll$$
$$\ll x^{r+n-2} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{k}{h}\right)^{2(\varrho+1)} \left(\frac{k}{\sqrt{x}}\right)^{r/2-1-\varepsilon} \frac{1}{k^{r/2}} \frac{\sqrt{x}}{k} \frac{1}{x^{r/4}} \ll$$
$$\ll x^{r/2+n-1+\varepsilon/2} \sum_{k \leqq \sqrt{x}} k^{2\varrho-\varepsilon} \ll x^{r/2+\varrho+n-1/2},$$

nachdem $2\varrho - \varepsilon > -\frac{1}{2}$, d. h. es gilt

(57) $$T_1 \ll x^{r/2+\varrho+n-1/2}.$$

In der Summe $T_2$ ist $|h'/k' - h/k| > 4/k\sqrt{x}$ und also $(k' \geqq k)$

(58) $$|\beta - \beta'| \geqq \frac{8\pi}{k\sqrt{x}} \geqq 2\left(\frac{2\pi}{k\sqrt{x}} + \frac{2\pi}{k'\sqrt{x}}\right).$$

Für $t \in \mathfrak{B}$, $t' \in \mathfrak{B}'$ ist nach (18) $|t - \beta| \leqq 2\pi/k\sqrt{x}$, $|t' - \beta'| \leqq 2\pi/k'\sqrt{x}$. Nach (58) ergibt sich

$$\frac{1}{x} + |t - t'| > |t - t'| > \tfrac{1}{2}|\beta - \beta'| = \pi\left|\frac{h}{k} - \frac{h'}{k'}\right|.$$

Daher folgt (es wird über (26) und (27) erfüllende $h$, $k$, $h'$, $k'$ summiert, $k \leqq k'$)

$$T_2 \ll \sum \left(\frac{kk'}{hh'}\right)^{\varrho+1} \frac{(kk')^n}{|kh' - hk'|^n} x^{r-2} \frac{1}{(kk')^{r/2}} \ll$$
$$\ll x^{r/2+\varrho+n-7/2} \sum \frac{kk'}{hh'} \frac{x}{(kk')^{3/2}} \frac{(kk')^2}{|kh' - hk'|^2}.$$

Nach [1], S. 164–167 ist die letzte Summe $O(x^3)$ (in den Bezeichnungen dieser Arbeit ist es die Summe $T_2$ für $r = 3$, $n = 2$). Wir haben so

(59) $$T_2 \ll x^{r/2+\varrho+n-1/2},$$

was zusammen mit (57) und (55) die Beziehung (53) gibt.

Auf dem Grund der Behauptungen 1—3 und (32) kann man folgendes aussagen:

**Behauptung 6.** *Es gibt ein* $n_0 = c$, *so dass für* $0 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{2}(r-3)$, $n \geqq n_0$, $n = c$

$$M_{\varrho,n}(x) = \frac{M^2 x^{r+n-2}\, \Gamma(r-1)}{(2\pi)^{2\varrho+2}\, \Gamma(r+n-1)\, \Gamma^2(r/2)} S(x) + O(g(x)), \tag{60}$$

*gilt, wo* $g(x) = \max\left(x^{r/2+\varrho+n-1/2}, x^{r+n-3}\right)$ *ist und* $S(x)$ *ist nach* (48) *definiert.*

Zum Beweis des Hauptsatzes 1 genügt es also die Induktion „herunterzu" durchzuführen. Setzen wir voraus, dass wir für ein gewisses $n > 1$ $(N = c)$

$$M_{\varrho,n}(x) = N x^{r+n-2} S(x) + O(x^\alpha \lg^\beta x)$$

bewiesen haben, wo für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}(r-3)$ wir $\beta = 0$, $0 < \alpha < r + n - 2$ haben und für $0 \leqq \varrho = \frac{1}{2}(r-3)$ ist $\alpha = r + n - 2$, $0 \leqq \beta < 1$. Da beide Funktionen $M_{\varrho,n-1}(x)$ und $S(x)$ nichtnegativ und nichtfallend sind, ist nach (51) und (52) für $0 < \lambda < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\lambda x\, M_{\varrho,n-1}(x) &\leqq \int_x^{x(1+\lambda)} M_{\varrho,n-1}(t)\, dt = M_{\varrho,n}(x(1+\lambda)) - M_{\varrho,n}(x) = \\
&= N x^{r+n-2}\left((1+\lambda)^{r+n-2} S(x(1+\lambda)) - S(x)\right) + O(x^\alpha \lg^\beta x) = \\
&= N x^{r+n-2} S(x)\left((1+\lambda)^{r+n-2} - 1\right) + N x^{r+n-2}(1+\lambda)^{r+n-2}\left(S(x(1+\lambda)) - \right. \\
&\quad \left. - S(x)\right) + O(x^\alpha \lg^\beta x) = N x^{r+n-2}(r+n-2)\, \lambda\, S(x) + \\
&\quad + O(x^{r+n-2}\lambda^2 \lg^\varepsilon x) + O(x^{r+n-2+\varrho+3/2-r/2}) + O(x^\alpha \lg^\beta x) = \\
&= \lambda N x^{r+n-2}(r+n-2)\, S(x) + O(x^{r+n-2}\lambda^2 \lg^\varepsilon x) + \\
&\quad + O(x^{r/2+\varrho+n-1/2}) + O(x^\alpha \lg^\beta x),
\end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned}
M_{\varrho,n-1}(x) \leqq N(r+n-2)\, x^{r+n-3} S(x) &+ O(x^{r+n-3}\lambda \lg^\varepsilon x) + \\
&+ \frac{1}{\lambda} O(x^{r/2+\varrho+n-3/2} + x^{\alpha-1} \lg^\beta x).
\end{aligned}$$

Wählt man nun $\lambda = \lg^{(\beta-1)/2} x$ für $\varrho = \frac{1}{2}(r-3) \geqq 0$, $\lambda = x^\tau$, wo $\tau = \frac{1}{2}(2 - r - n + \max(\frac{1}{2}r + \varrho + n - \frac{1}{2}, \alpha))$ für $0 \leqq \varrho < \frac{1}{2}(r-3)$, ergibt sich im ersten Fall

$$M_{\varrho,n-1}(x) \leqq N(r+n-2)\, x^{r+n-3} S(x) + O(x^{\alpha-1} \lg^{(\beta+1)/2} x)$$

und im zweiten Fall

$$M_{\varrho,n-1}(x) \leqq N(r+n-2)\, x^{r+n-3} S(x) + O(x^{\alpha'}),$$