Werk

Label: Article

Jahr: 1971

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0096|log109

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

O RIEŠENÍ ROVNICE $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ A ROVNICE $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = yx_1x_2 \ldots x_n$ V PRIRODZENÝCH ČÍSLACH

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 20. marca 1970)

V tomto článku bude reč o riešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n], \quad n \geqq 2, \tag{1}$$

v prirodzených číslach $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$, pričom $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ značí najmenší spoločný násobok čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Výsledok úvahy použijeme aj na riešenie rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = yx_1x_2 \ldots x_n, \quad n \geqq 2, \tag{2}$$

v prirodzených číslach $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$.[1])

V ďalšom riešenia všetkých rovníc sa rozumejú v obore prirodzených čísel.

Veta 1. *Všetky riešenia $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ rovnice (1) dostaneme nasledovne:*

Ak čísla $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ tvoria riešenie tzv. optickej rovnice

$$1/\xi_1 + 1/\xi_2 + \ldots + 1/\xi_n = 1 \tag{3}$$

potom

$$x_i = \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_i} t, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

kde t je ľubovoľné prirodzené číslo a

$$y = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) : [x_1, x_2, \ldots, x_n]. \tag{4'}$$

[1]) O rovnici (2) vo zvláštnom prípade $y = 1$ pojednáva sa v knižke [1], str. 171—4.

Dôkaz. Ak čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ splňujú rovnicu (1), potom $x_i \mid x_1 + x_2 + \ldots$ $\ldots + x_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Teda existujú prirodzené čísla $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ také, že

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \xi_i x_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{5}$$

Obrátene, ak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyhovujú rovniciam (5), pričom ξ_i sú čísla prirodzené, potom platí $x_i \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, a teda $x_1 + x_2 + \ldots + x_n =$ $= y[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, kde y je prirodzené číslo. Čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n, y = (x_1 + x_2 + \ldots$ $\ldots + x_n)/[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ tvoria teda riešenie rovnice (1).

Riešením sústavy rovníc (5) v číslach $x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sa zaoberá článok [2], z ktorého vyplýva, že jej všetky riešenia dostaneme tak, že vezmeme ľubovolné riešenie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ rovnice (3) a potom (4) a (4') dávajú riešenie sústavy rovníc (5), a tým aj rovnice (1). Tým je veta dokázaná.

Poznámka. Zo (4) a (4') vyplýva, že ku každému riešeniu $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ rovnice (1) existuje nekonečne mnoho riešení tejto rovnice, a to $tx_1, tx_2, \ldots, tx_n, y$, kde t je ľubovoľné prirodzené číslo. Obrátene, ak rovnica (1) má riešenie $tx_1, tx_2, \ldots, tx_n, y$, má aj riešenie $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$. V ďalšom sa preto obmedzíme na tzv. primitívne riešenia, pre ktoré platí

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 1\,, \quad x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \ldots \leqq x_n\,. \tag{6}$$

Zrejme je počet primitívnych riešení rovnice (1) konečný (väčší než nula), zhodný s počtom všetkých riešení $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ optickej rovnice (3), majúcich vlastnosť $\xi_1 \geqq \xi_2 \geqq \ldots \geqq \xi_n$.

Príklad. Hľadajme všetky riešenia rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y[x_1, x_2, x_3, x_4] \tag{7}$$

v prirodzených číslach x_1, x_2, x_3, x_4, y.

Riešenie. Najprv treba riešiť rovnicu

$$1/\xi_1 + 1/\xi_2 + 1/\xi_3 + 1/\xi_4 = 1\,. \tag{8}$$

Voliac $\xi_1 \geqq \xi_2 \geqq \xi_3 \geqq \xi_4$, je $2 \leqq \xi_4 \leqq 4$. Treba teda riešiť

1) pre $\xi_4 = 2$ rovnicu $1/\xi_1 + 1/\xi_2 + 1/\xi_3 = \frac{1}{2}$

a

2) pre $\xi_4 = 3$ rovnicu $1/\xi_1 + 1/\xi_2 + 1/\xi_3 = \frac{2}{3}$.

Pre $\zeta_4 = 4$ máme jediné riešenie $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 4$.

V prípade 1) máme riešenia uvedené v knižke [3] str. 74 a v prípade 2) v článku [4]. V prípade 2) dostaneme niektoré riešenia ktoré nespĺňajú podmienku $\xi_1 \geqq \xi_2 \geqq$ $\geqq \xi_3 \geqq \xi_4$. Tieto vo výpočte neuvádzame, lebo sa so správným poradím dostali v prípade 1). Z riešení rovnice (8) dostaneme potom všetky primitívne riešenia rovnice (7). Výpočet obsahuje tabuľka č. 1.

Tabuľka 1

ξ_1	42	18	12	12	10	24	15	20	8	6	4	6	6	4
ξ_2	7	9	12	6	5	8	10	5	8	6	4	6	4	4
ξ_3	3	3	3	4	5	3	3	4	4	6	3	3	4	4
ξ_4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4
$M = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4]$	42	18	12	12	10	24	30	20	8	6	12	6	12	4
$x_1 = M/\xi_1$	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	2	1
$x_2 = M/\xi_2$	6	2	1	2	2	3	3	4	1	1	3	1	3	1
$x_3 = M/\xi_3$	14	6	4	3	2	8	10	5	2	1	4	2	3	1
$x_4 = M/\xi_4$	21	9	6	6	5	12	15	10	4	3	4	2	4	1
$y = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{[x_1, x_2, x_3, x_4]}$	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1	3	1	4

Veta 2. *Pre všetky primitívne riešenia* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y *rovnice* (1) *platí* $y \leqq n$ *a* $y = n$ *práve vtedy, keď* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Dôkaz. Hodnota y bude pri určitom $x_j = \operatorname{Max}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ najväčšia práve vtedy, keď bude mať $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ najmenšiu a súčasne pri tej istej podmienke $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ najväčšiu hodnotu. Keďže $x_1, x_2, \ldots, x_n \leqq x_j$ je $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ najmenšie práve vtedy, keď $x_1, x_2, \ldots, x_n \mid x_j$ a $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ najväčšiu hodnotu práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_j$. Táto podmienka zahrňuje v sebe predošlú, teda extrémny prípad v prípade $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ skutočne nastane a inokedy nie. Keďže vtedy $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = x_j$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = nx_j$, je $y = nx_j / x_j = n$ pri každom x_j. Tým je veta dokázaná.

Poznámka. Otvorenou zostáva otázka, kedy je $y = 1$ a či pre každé y, $1 \leqq y \leqq n$ skutočne existuje n-tica čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ktoré s ním spolu tvoria riešenie rovnice (1).

Na základe predošlých výsledkov možno tiež nájsť všetky riešenia rovnice (2). Je totiž

$$x_1 x_2 \ldots x_n = k[x_1, x_2, \ldots, x_n] \tag{9}$$

kde k je prirodzené číslo, takže rovnica (2) je ekvivalentná s rovnicou

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = ky[x_1, x_2, \ldots, x_n] \tag{10}$$

kde k závisí od $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ktorá je tvaru (1). Zrejme platí veta:

Veta 3. *Množinu všetkých riešení rovnice* (2) *tvoria práve tie riešenia rovnice* (1) *v ktorých platí*

$$x_1 x_2 \ldots x_n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n .$$