Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

INVERZNÉ RELÁCIE K NIEKTORÝM VYTVÁRAJÚCIM FUNKCIÁM PERMUTÁCIÍ

MICHAL BUČKO, Košice

(Došlo dňa 2. mája 1966)

Nech n je prirodzené číslo. Nech $E(u, t) = \exp u\, f(t)$, $F(u, t) = \exp u\, g(t)$, $f^k(t) \equiv \equiv f_k(t)$, $g^k(t) \equiv g_k(t)$ sú exponenciálne vytvárajúce funkcie pre postupnosti funkcií $\{f_n(t)\}$ a $\{g_n(t)\}$ (pozri [1], II. kapitola).

Definícia 1. Postupnosť funkcií $\{g_n(t)\}$ nazývame inverznou postupnosťou k postupnosti funkcií $\{f_n(t)\}$, ak platí

$$(\exp u\, f(t))(\exp u\, g(t)) = 1\,. \tag{1}$$

Rovnica (1) je ekvivalentná s týmito dvoma rovnicami

$$f_0(t)\, g_0(t) = 1\,, \tag{2}$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_k(t)\, g_{n-k}(t) = 0\,.$$

1. Majme vytvárajúcu funkciu $c_n(t) = (t + n - 1)_n$, $c_0(t) = 1$ pre počet permutácií z n rôznych prvkov obsahujúcich práve k cyklov $(1 \leqq k \leqq n)$ bez ohľadu na ich dĺžky ([1], IV. kapitola). Označme $\{\bar{c}_n(t)\}$ inverznú postupnosť k postupnosti $\{c_n(t)\}$.

Veta 1. *Postupnosť $\{\bar{c}_n(t)\}$ je inverznou postupnosťou k postupnosti $\{c_n(t)\}$, ak platí*

$$\bar{c}_n(t) = c_n(-t)\,. \tag{3}$$

Dôkaz. Stačí dokázať, že $\bar{c}_n(t)$ a $c_n(t)$ vyhovujú rovniciam (2). Je $c_n(t) = = (t + n - 1)_n$, utvorme $\bar{c}_n(t) = c_n(-t) = (-1)^n (t)_n$. Zrejme $c_0(t)\, \bar{c}_0(t) = 1$. Ďalej je

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c_{n-k}(t)\, c_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (t + n - k - 1)_{n-k} (-1)^k (t)_k =$$
$$= -(1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (t)_{n-k} (-t)_k = (-1)^n\, d(n)\,.$$

Potom stačí dokázať, že $d(n) = 0$ pre $n \geqq 1$. Dôkaz prevedieme indukciou.

Platí $d(1) = (t)_1 + (-t)_1 = t - t = 0$. Nech platí $d(n) = 0$. Utvorme

$$d(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (t)_{n-k+1} (-t)_k = \sum_{k=0}^{n+1} \left\{ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right\} (t)_{n-k+1} (-t)_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (t)_{n-k} (-t)_k (t - n + k) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (t)_{n-k} (-t)_{k+1} =$$

$$= -n\, d(n) + d(n) \,.\, 0 = 0 \,.$$

Tým je dôkaz vety prevedený.

Z rovníc

$$c_n(t) = (t + n - 1)_n \,, \quad \bar{c}_n(t) = (-1)^n (t)_n$$

dostávame

$$\binom{t}{n} c_n(t) = (-1)^n \bar{c}_n(t) \binom{t + n - 1}{t - 1} ,$$

alebo

$$\bar{c}_n(t) = (-1)^n \binom{t}{n} \binom{t + n - 1}{t - 1}^{-1} c_n(t) \,. \tag{4}$$

Stirlingove čísla ([1], II. kapitola) sú definované pre $n > 0$ takto:

$$(t)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n, k)\, t^k \,, \tag{5}$$

$$t^n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k)\, (t)_k \,, \quad s(0, 0) = S(0, 0) = 1 \,, \tag{6}$$

kde $s(n, k)$ sú Strilingove čísla prvého a $S(n, k)$ druhého druhu. Z (5) a (6) dostávame Kroneckerove delta

$$\delta_{nm} = \sum_{k=m}^{n} s(n, k)\, S(k, m) \,, \tag{7}$$

pre ktoré platí

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad m \neq n \\ 1 & \text{pre} \quad m = n \,. \end{cases}$$

Rovnice (5) a (6) nazývame inverznými reláciami (pozri napr. [2]), alebo inverznou dvojicou.

Je

$$c_n(t) = (-1)^n (-t)_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} s(n, k)\, (-t)^k \,,$$

teda

$$c_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} s(n, k) t^k .$$

Ďalej

$$t^n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k) (t)_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S(n, k) \bar{c}_k(t) .$$

Ak tu za $\bar{c}_k(t)$ dosadíme (4), dostávame inverznú dvojicu

(8) $$t^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{t}{k} \binom{t+k-1}{t-1}^{-1} S(n, k) c_k(t) ,$$

(9) $$c_n(t) \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} s(n, k) t^k .$$

Z (8) a (9) dostávame Kroneckerove delta vo tvare

(10) $$\delta_{mn} = \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k+m} \binom{t}{k} \binom{t+k-1}{t-1}^{-1} S(n, k) s(k, m) .$$

Pretože je

$$\bar{c}_n(t) = (-1)^n (t)_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} s(n, k) t^k ,$$

$$t^n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k) (t)_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S(n, k) \bar{c}_k(t) ,$$

potom

$$\bar{c}_n(t) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} s(n, k) t^k , \quad t^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S(n, k) \bar{c}_k(t)$$

tvoria ďalšiu inverznú dvojicu.

2. Označme vytvárajúce funkcie pre počty párnych (nepárnych) permutácií z n rôznych prvkov, obsahujúcich práve k cyklov ($1 \leqq k \leqq n$) bez ohľadu na dĺžky týchto cyklov $c_n^e(t)$ ($c_n^0(t)$). Potom ([1], IV. kapitola)

(11) $$2c_n^e(t) = (t + n - 1)_n + (t)_n ,$$

(12) $$2c_n^0(t) = (t + n - 1)_n - (t)_n .$$

Veta 2. *Postupnosť* $\{\bar{c}_n^e(t)\}$ ($\{\bar{c}_n^0(t)\}$) *je inverznou postupnosťou k* $\{c_n^e(t)\}$ ($\{c_n^0(t)\}$), *ak platí*

(13) $$\bar{c}_n^e(t) = c_n^e(-t) , \quad (\bar{c}_n^0(t) = c_n^0(-t)) .$$