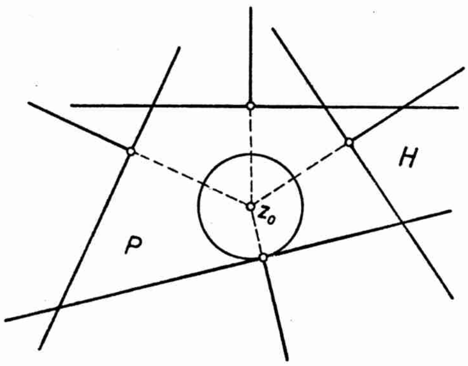
Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

ZOBECNĚNÍ TAYLOROVA A LAURENTOVA ROZVOJE

JIŘÍ ŠTĚPÁNEK, Praha

(Došlo dne 14. dubna 1966)

Práce navazuje na článek [1]. Je v ní sestrojen rozvoj jednoznačné analytické funkce v jejím polygonu konvergence, a sice tak, že koficienty řady jsou vyjádřeny pomocí integrálů. Na základě toho je zde podáno zobecnění Laurentova rozvoje.



Obr. 1.

Mějme dánu analytickou funkci elementem

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

a sestrojme v Gaussově rovině pro tuto funkci jednoduše souvislou oblast H, tzv. hvězdu, tímto způsobem: Na spojnici bodu z_0 s každým singulárním bodem analytické funkce zvolíme polopřímku neobsahující bod z_0 a mající singulární bod za počáteční. Množina všech těchto polopřímek-paprsků tvoří pak hranici hvězdy H (viz obr. 1).[1])
Analytickým pokračováním elementu (1) v hvězdě H dostaneme podle věty o monodromii jednoznačnou větev naší funkce, kterou označíme f.

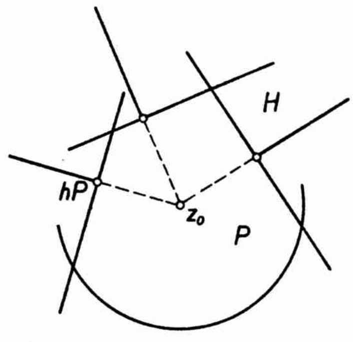
Sestrojme pro funkci f její polygon konvergence P o „středu“ z_0 jako průnik otevřených polorovin, obsahujících bod z_0 a majících hranice v kolmicích vztyčených ve všech signulárních bodech na paprsky hvězdy (viz obr. 1)[2]). Polygon konvergence je konvexní množina, která obsahuje vždy konvergenční kruh elementu (1). Je-li funkce f meromorfní, je hranice P (označení hP) složena z úseček, polopřímek nebo přímek. Tvoří-li singulární body funkce jistý hladký oblouk, pak tento oblouk je úpatnicí příslušného oblouku hP pro střed z_0. Každý bod hP, v němž neexistuje tečna, nazveme vrcholem.

[1]) Viz [1].
[2]) Viz [1], kde polygon konvergence je označen PK.

Polygon konvergence P funkce f může být omezený nebo neomezený. Je-li P neomezený, sestrojíme jeho omezenou část tak, že část hranice hP doplníme jedním nebo několika kruhovými oblouky o středu z_0 na jednoduchou uzavřenou křivku (viz obr. 2).

V dalším budeme pod pojmem polygonu konvergence P funkce f rozumět vždy buď omezený P nebo jeho omezenou část.

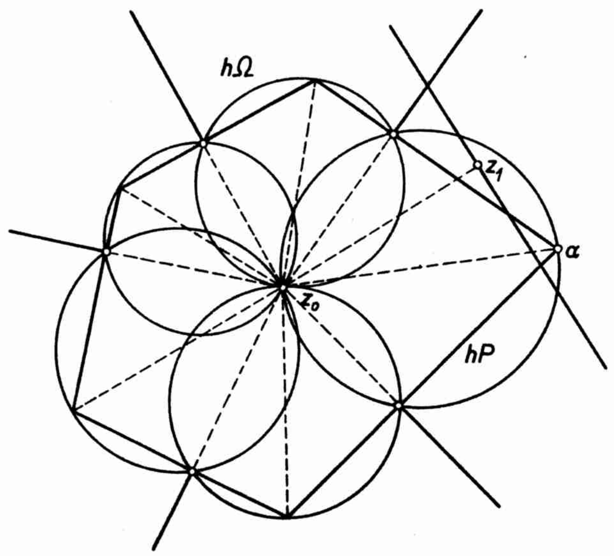
Vyjádříme nyní funkci f jistou řadou, která konverguje v P. Přitom koeficienty tohoto rozvoje budou dány pomocí integrálů.



Obr. 2.

Věta 1. *Funkce f je regulární v každém (otevřeném) kruhu R opsaném nad úsečkou s krajními body z_0, α, kde $\alpha \in hP$.*

Důkaz. Je-li z_1 singulární bod funkce f, pak $z_1 \notin P$. Je-li $z_1 \in R - \bar{P}$, pak kolmice na spojnici bodů z_0, z_1 protne nutně úsečku $z_0\alpha$ v bodě různém od α, což je ve sporu s definicí polygonu konvergence (viz obr. 3, kde α je vrchol P).



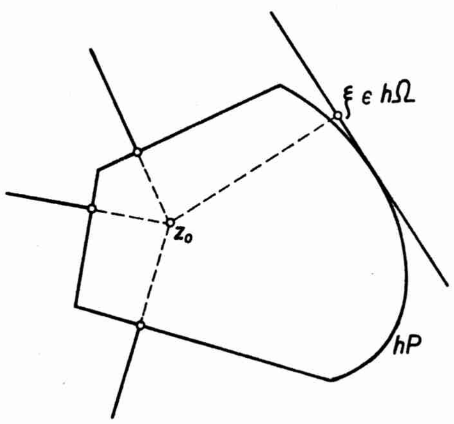
Obr. 3.

Nechť Ω je sjednocení všech kruhů R z věty 1 pro $\alpha \in hP$ a množiny (z_0). Množina Ω je omezená, jednoduše souvislá oblast, přičemž $P \subset \Omega$. Budeme v dalším předpokládat, že hranice oblasti Ω, tj. $h\Omega$, je uzavřená Jordanova po částech hladká křivka.

Poznámka 1. Je-li funkce f racionální a P omezený, pak hP je složena z úseček a křivka $h\Omega$ je zřejmě složena z kruhových oblouků opsaných nad úsečkami o krajních bodech z_0, α, kde α je vrchol hP (viz obr. 3).

Z věty 1 ihned plyne, že funkce f je regulární v Ω.

Věta 2. *Nechť $\zeta \in h\Omega$ a L je otevřená polorovina obsahující bod z_0, jejíž hranicí je přímka jdoucí bodem ζ a kolmá na spojnici bodů z_0, ζ. Pak průnik všech polorovin L je P polygon konvergence funkce f.*



Obr. 4.

Důkaz. Je-li f meromorfní, je důkaz podle věty 1 a poznámky 1 evidentní, neboť $h\Omega$ obsahuje vždy singulární body z_i funkce f. Kolmice v bodě $\zeta \in h\Omega$, $\zeta \neq z$; protíná hP pouze ve vrcholu. Je-li částí hranice hP oblouk (různý od úsečky), pak důkaz plyne ihned z toho, že množina příslušných singulárních bodů funkce f je úpatnicí tohoto oblouku pro střed z_0, tj. kolmice v bodě ζ na spojnici bodů z_0, ζ je tečnou hP (viz obr. 4), Je-li konečně částí hranice hP kruhový oblouk, je tento oblouk totožný se svou úpatnicí.

Sestrojme omezenou jednoduše souvislou oblast $\Omega_\delta \subset \Omega$, jejíž hranice $h\Omega_\delta$ je homotetická s $h\Omega$ podle středu z_0 a poměru δ $(0 < \delta < 1)$. Zvolme v Ω_δ libovolný bod z. Podle Cauchyova integrálního vzorce platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{h\Omega_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta .$$

Vyjádříme nyní $1/(\zeta - z)$ ve tvaru jisté řady. Nechť $z_{1/2}$ je půlicí bod úsečky o krajních bodech z_0, z, tj.

$$z_{1/2} = \tfrac{1}{2}(z + z_0) . \tag{2}$$

Jest pak

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_{1/2} - (z - z_{1/2})} = \frac{1}{\zeta - z_{1/2}} \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_{1/2}}{\zeta - z_{1/2}}} .$$

Je-li tedy

$$\left| \frac{z - z_{1/2}}{\zeta - z_{1/2}} \right| < 1 , \tag{3}$$

pak můžeme psát

$$(4) \qquad \frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_{1/2})^n}{(\zeta - z_{1/2})^{n+1}}.$$

Věta 3. *Řada* (4) *konverguje v polygonu konvergence P funkce f.*

Důkaz. Nerovnost (3) je ekvivalentní s nerovností

$$|z - z_{1/2}|^2 < |\zeta - z_{1/2}|^2 \quad \text{čili} \quad |z|^2 - 2Re(z_{1/2} \cdot \bar{z}) < |\zeta|^2 - 2Re(z_{1/2} \cdot \bar{\zeta}).$$

Označíme-li

$$z = x + iy, \quad z_0 = x_0 + iy_0, \quad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2$$

dostaneme po úpravě

$$(5) \qquad (\zeta_1 - x_0)\, x + (\zeta_2 - y_0)\, y + x_0\zeta_1 + y_0\zeta_2 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 < 0.$$

Nerovnost (5) vyjadřuje polorovinu, jejíž hranicí je přímka kolmá na spojnici bodů z_0, ζ. V této polorovině leží vždy bod z_0, neboť

$$(\zeta_1 - x_0)\, x_0 + (\zeta_2 - y_0)\, y_0 + x_0\zeta_1 + y_0\zeta_2 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 =$$
$$= -(x_0 - \zeta_1)^2 - (y_0 - \zeta_2)^2 < 0.$$

Protože $\zeta \in h\Omega_\delta$, je průnik všech těchto polorovin podle věty 2 omezená konvexní oblast P_δ, jejíž hranice hP_δ je homotetická s hranicí hP pro střed z_0 a poměr δ. Vzhledem k tomu, že δ můžeme volit libovolně blízko 1, plyne odtud, že řada (4) konverguje v polygonu konvergence P funkce f.

Poznámka 2. „Proměnný střed" řady (4), tj. bod $z_{1/2}$ (daný rovnicí (2)) leží zřejmě vždy v oblasti ω, jejíž hranice $h\omega$ je homotetická s hP podle středu z_0 a poměru $1/2$. Znakem ω_δ označme oblast, jejíž hranice $h\omega_\delta$ je homotetická s $h\omega$ pro střed z_0 a poměr δ.

Věta 4. *Řada* (4) *konverguje stejnoměrně vzhledem k* $\zeta \in h\Omega_\delta$.

Důkaz. Pro n-tý člen řady (4) dostaneme podle poznámky 2 odhad

$$\left| \frac{(z - z_{1/2})^n}{(\zeta - z_{1/2})^{n+1}} \right| = \left| \frac{(z_0 - z_{1/2})^n}{(\zeta - z_{1/2})^{n+1}} \right| < \delta^n \frac{1}{\varrho},$$

kde $0 < \delta < 1$ a ϱ je vzdálenost hranic $h\omega_\delta$ a hP_δ. Odtud plyne ihned naše tvrzení.

Vynásobme nyní řadu (4) výrazem $1/(2\pi i) f(\zeta)$ (omezeným na $h\Omega_\delta$); dostaneme

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_{1/2})^{n+1}} (z - z_{1/2})^n.$$

Integrací přes $h\Omega_\delta$ odtud plyne

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_{1/2})\,(z - z_{1/2})^n \tag{6}$$

kde

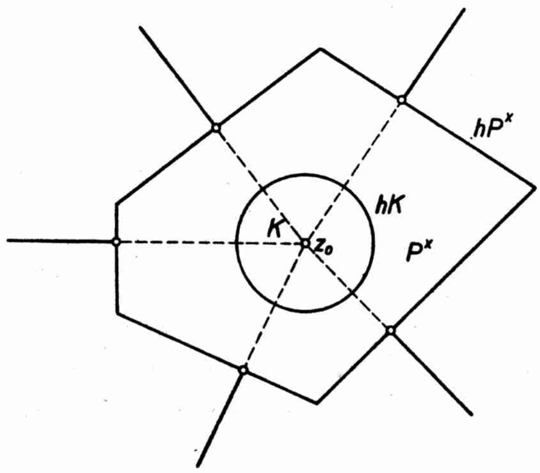
$$a_n(z_{1/2}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{h\Omega_\delta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_{1/2})^{n+1}}\,d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_{1/2})}{n!}\,. \tag{7}$$

Dostali jsme tak

větu 5. *Nechť P je polygon konvergence funkce f o středu z_0. Pak funkci f lze rozvést v P v řadu* (6), *jejíž koeficienty jsou dány vzorci* (7), *přičemž* $z_{1/2} = \frac{1}{2}(z + z_0)$.[3])

Vyjádření koeficientů $a_n(z_{1/2})$ ve tvaru integrálním nám umožní naše výsledky ještě dále zobecnit.

Nechť f je jednoznačná analytická funkce a z_0 libovolný bod. Sestrojme uzavřený kruh K o středu z_0 a poloměru $\varrho \geqq 0$[4]) a uvažujme pouze singulární body funkce f ležící vně K. Předpokládejme přitom, že nejbližší singulární bod k hranici hK má od hK kladnou vzdálenost. Spojme všechny singulární body ležící vně K s bodem z_0 a sestrojme na tyto spojnice v singulárních bodech kolmice. Průnik všech otevřených polorovin obsahujících bod z_0, jejichž hranice jsou tyto kolmice, označme $P^\times$. Množina $P^\times$ je konvexní oblast, která obsahuje kruh K (a tedy i všechny singulární body ležící v K). Není-li oblast $P^\times$ omezená, sestrojíme její omezenou část tak, že část hranice $hP^\times$ doplníme jedním nebo několika kruhovými oblouky o středu z_0 na jednoduchou uzavřenou křivku. Tuto omezenou část označíme zase $P^\times$.



Obr. 5.

Utvořme nyní dvojnásobně souvislou oblast $P^\times - K$, kterou nazveme prstencový polygon konvergence funkce f o středu z_0 (viz obr. 5). Vyjádříme funkci f řadou, která konverguje v $P^\times - K$. Za tím účelem sestrojíme sjednocení $\Omega^\times$ všech kruhů, opsaných nad úsečkami o krajních bodech z_0, α, kde $\alpha \in hP^\times$. Funkce f je regulární v dvojnásobně souvislé oblasti $\Omega^\times - K$ s hranicí $h(\Omega^\times - K) = h\Omega^\times \cup hK$. Dále sestrojíme oblasti $\Omega_\delta^\times \subset \Omega^\times$ a $K_\delta \supset K$, jejichž hranice $h\Omega_\delta^\times$, resp. hK_δ jsou homotetické

---

[3]) Srovnej s větou 1 v [1], kde bod $z_{1/2}$ jest označen písmenem ζ.

[4]) Připouštíme tedy možnost, že $K = (z_0)$.

s $h\Omega^\times$, resp. hK podle středu z_0 a poměru δ, resp. $1/\delta$ $(0 < \delta < 1)$ [5]), přičemž nechť $\Omega_\delta^\times \supset K_\delta$.

Zvolme nyní v dvojnásobně souvislé oblasti $\Omega_\delta^\times - K_\delta$ libovolný bod z. Podle Cauchyova integrálního vzorce dostaneme

$$(8) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{h\Omega_\delta{}^\times} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{hK_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta .$$

První integrál v (8) rozvedeme jako dříve v „zobecněnou Taylorovu řadu" o proměnném středu $z_{1/2} = \frac{1}{2}(z + z_0)$, tj. v řadu

$$(9) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_{1/2}) (z - z_{1/2})^n$$

jejíž koeficienty jsou dány vzorci

$$(10) \qquad a_n(z_{1/2}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{h\Omega_\delta{}^\times} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_{1/2})^{n+1}} \, d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) .$$

Tato řada konverguje v oblasti $P^\times$.

Rozveďme druhý integrál v (8) v řadu podle celých záporných mocnin $z - z_0$, tj. v řadu

$$(11) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z_0) (z - z_0)^{-n}$$

jejíž koeficienty jsou dány vzorci

$$(12) \qquad a_{-n}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{hK_\delta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \, d\zeta \quad (n = 1, 2, \ldots) .$$

Tato řada konverguje vně kruhu K_δ. Dosadíme-li rozvoje (9) a (11) do (8), dostáváme

větu 6. *Nechť $P^\times - K$ je prstencový polygon konvergence funkce f o středu z_0. Pak funkci f lze rozvést v $P^\times - K$ v řadu*

$$(13) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_{1/2}) (z - z_{1/2})^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z_0) (z - z_0)^{-n}$$

jejíž koeficienty jsou dány vzorci (10) a (12), přičemž $z_{1/2} = \frac{1}{2}(z + z_0)$.

Poznámka 3. Rozvoj (13) je zobecněním rozvoje (6), který dostaneme z (13) v případě, že kruh K má poloměr $\varrho = 0$ a z_0 není singulární bod funkce f. Je-li $\varrho = 0$ a z_0 je singulární bod, je (13) rozvoj funkce f v prstencovém polygonu konvergence $P^\times - (z_0)$. Řada (13) je tedy zobecnění Laurentovy řady.

[5]) hK_δ je kružnice.