ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

3

92

ACADEMIA
PRAHA

ČAS. PRO PĚST. MAT. · SV. 92 · Č. 3 · STR 247—372 · PRAHA 16. 8. 1967

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(*Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky“*)

SVAZEK 92 (1967)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd

Redakce:

Matematický ústav Československé akademie věd
Praha 1, Žitná 25

OBSAH

Články:

Valter Šeda, Bratislava: On a class of linear differential equations of order n, $n \geqq 3$ (O jednej triede lineárnych diferenciálnych rovníc n-tého rádu, Об одном классе линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка) 247

Beloslav Riečan, Bratislava: Poznámka o hustote ako množinovej funkcii (Заметка о плотности как о функции множества, Note on the density as a set function) 262

Tibor Neubrunn, Tibor Šalát, Bratislava: On certain spaces of transformations of infinite series (O istých priestoroch transformácií nekonečných radov, О некоторых пространствах преобразований бесконечных рядов) 267

Igor Kluvánek, Košice: Miery v kartézskych súčinoch (Меры в произведениях пространств, Measures in product-spaces) 283

Bohdan Zelinka, Liberec: Poznámka o nekonečných hranově disjunktních systémech cest v grafu (Заметка о бесконечных системах цепей без общих ребер в графе, A remark on infinite edge-disjoint systems of paths in graph) 289

Nikolaj Podtjagin, Bratislava: Ešte o jednej triede racionálnych kriviek (Еще об одном классе алгебраических кривых, Encore sur une classe de courbes algébriques) 294

Bohdan Zelinka, Liberec: Hasse's operator and directed graphs (Hasseův operátor a orientované grafy, Оператор Хассе и направленные графы) 313

Teo Sturm, Praha: Isotonní rozšíření isotonních zobrazení (Изотонное расширение изотонных изображений, Isotone Erweiterung der isotonen Abbildungen) 318

Vladimír Kohout, Praha: Über die sphärische Abbildung der abgeschlossenen sphärischen Kurve (O sférickém obrazu uzavřené sférické křivky, О сферическом отображении замкнутой сферической кривой) 332

Jiří Sedláček, Praha: Finite graphs and their spanning trees (Konečné grafy a jejich kostry, Конечные графы и их основы) 338

И. Т. Кигурадзе, Тбилиси: Заметка о колеблемости решений уравнения $u'' + a(t)\,|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$ (O oscilacích řešení diferenciální rovnice $u'' + a(t)\,|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$, Über die Oszillation der Lösungen der Differentialgleichung $u'' + a(t)\,|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$) 343

František Štěpánek, Praha: Замечание о произведении рядов Лейбница (Poznámka o součinu Leibnizových řad, A note on the product of Leibniz series) 351

SUMMARIES OF ARTICLES PUBLISHED IN THIS ISSUE

(Publication of these summaries is permitted)

VALTER ŠEDA, Bratislava: *On a class of linear differential equations of order n, $n \geqq 3$.* Čas. pěst. mat. *92* (1967), 247—261. (Original paper.)

In the paper the transformation theory of the n-th order linear differential equations is applied on the class C of the equations, which are locally equivalent to the equation $v^{(n)} = 0$. A theorem on the decomposition of the differential operator standing on the left side of the equations of this class is proved. From the theorem on the decomposition of the solutions some properties of the zeros of the solutions are derived. Finally the theorems concerning the oscillatory character of the solutions of the nonhomogeneous equations, whose corresponding homogeneous equations are of the class C, are given.

BELOSLAV RIEČAN, Bratislava: *Poznámka o hustote ako množinovej funkcii.* (Note on the density as a set function.) Čas. pěst. mat. *92* (1967), 262—266. (Original paper.)

N. F. G. Martin has studied some properties of Lebesgue density on the line as a set function. In this article Martin's results are extended in two directions: for symmetric density and for Lebesgue density in Euclidean space of any dimension.

TIBOR NEUBRUNN, TIBOR ŠALÁT, Bratislava: *On certain spaces of transformations of infinite series.* Čas. pěst. mat. *92* (1967), 267—282. (Original paper.)

The functions preserving the convergence of all the series $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$, $t_n \geqq 0$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \leqq 1$ are characterised. A norm, under which the set of all these functions is a Banach space, is given and the properties of these space are studied.

IGOR KLUVÁNEK, Košice: *Miery v kartézskych súčinoch.* (Measures in product-spaces.) Čas. pěst. mat. *92* (1967), 283—288. (Original paper.)

A function λ defined on a system of sets of the form $E \times F$ which is a measure as a function of E and as a function of F can be extended under certain conditions to a measure.

BOHDAN ZELINKA, Liberec: *Poznámka o nekonečných hranově disjunktních systémech cest v grafu.* (A remark on infinite edge-disjoint systems of paths in a graph.) Čas. pěst. mat. *92* (1967), 289—293. (Original paper.)

The negativ answer to the following problem of G. A. Dirac is given: The two distinct vertices a and b of a graph are connected by an infinite number δ of paths each of which have a and b as their end-vertices and no pair of which have an edge in common. Are a and b necessarily connected by δ paths such that each of them has a and b as its end-vertices, no two of them have an edge in common, and the common vertices of any couple of the paths occur in the same order along both paths of the couple going from a to b.

ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В НАСТОЯЩЕМ НОМЕРЕ

(Эти характеристики позволено репродуцировать)

DALIBOR KLUCKÝ, JAROMÍR KRYS, Olomouc: *Druhá poznámka k článku akademika Bohumila Bydžovského „Inflexní body některých rovinných kvartik.* (Второе замечание к статье академика Б. Быджовского „Точки перегиба некоторых плоских кривых 4-ого порядка".) Čas. pěst. mat. *92* (1967), 212—214. (Оригинальная статья.)

В статье исследуется, если 16 точек перегиба плоской неприводимой кривой 4-ого порядка, которая не имеет особых точек кроме одной двухкратной точки, образует полное пересечение с другой кривой 4-ого порядка. Ответ без дальнейших условий положительный.

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava: *Über die Eigenschaft von Darboux für Funktionen aus der ersten Baireschen Klasse im topologischen Produkt.* (О свойстве Дарбу для функций из первого класса Бэра в топологическом произведении.) Čas. pěst. mat. *92* (1967), 215—218. (Оригинальная статья.)

В работе доказывается, что функция из первого класса Бера, определенная на топологическом произведении, в котором все открытые множества являются множествами второй категории, обладает свойством Дарбу тогда, если она имеет это свойство для каждой переменной отдельно.

VALTER ŠEDA, Bratislava: *On a class of linear differential equations of order n, $n \geqq 3$.* (Об одном классе линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка.) Čas. pěst. mat. *92* (1967), 247—261. (Оригинальная статья.)

В работе применяется теория преобразований линейных дифференциальных уравнений n-ого порядка на класс C уравнений локально эквивалентных с уравнением $v^{(n)} = 0$. Доказывается теорема о разложении оператора, стоящего в левой части этих уравнений. Из теоремы о разложении решений вытекают некоторые свойства нулевых точек решения. Наконец приведены теоремы, которые касаются характера решений неоднородного уравнения, соответствующее однородное уравнение которого принадлежит классу C.

BOHDAN ZELINKA, Liberec: *Hasse's operator and directed graphs.* (Оператор Хассе и направленные графы.) Čas. pěst. mat. *92* (1967), 313—317. (Оригинальная статья.)

В статье решены две проблемы К. Чулика. Расматриваемые графы суть множества вместе с бинарным отношением, которое определено на них. Если M—множество и $\sigma \subset M \times M$ то $T\sigma$ обозначает транзитивное замыкание σ. Далее мы определим $H\sigma = \{(u, v) \in \sigma$; не существует пути $(w_1, \ldots, w_n)$ в $[M, \sigma]$ такого, чтобы $k \geqq 3$ и $w_1 = u$, $w_k = v\}$. Мы говорим об операторе транзитивного замыкани T и об операторе Хассе H. В статье дано необходимое и достаточное условие для $TH\varrho = \varrho$, где $[M, \varrho]$—частично упорядоченное множество, и потом необходимое и достаточное условие для $THT\sigma = T\sigma$, где σ—произвольное бинарное отношение. Потом результаты применены в математической лингвистике.

Beloslav Riečan, Bratislava: *Poznámka o hustote ako množinovej funkcii.* (Заметка о плотности как о функции множества.) Čas. pěst. mat. *92* (1967), 262—266. (Оригинальная статья.)

Н. Ф. Г. Мартин изучал некоторые свойства плотности на прямой как функции множества. В статье распространяются результаты Мартина в двух направлениях: для симметрической плотности и для плотности Лебега в евклидовом пространстве любой размерности.

Tibor Neubrunn, Tibor Šalát, Bratislava: *On certain spaces of transformations of infinite series.* (О некоторых пространствах преобразований бесконечных рядов.) Čas. pěst. mat. *92* (1967), 267—282. (Оригинальная статья.)

Характеризируются функции, сохраняющее сходимость рядов типа $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$, $t_n \geqq 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \leqq 1$. Определяется норма, при которой множество этих функций превращается в пространство Банаха, изучаются свойства этого пространства.

Igor Kluvánek, Košice: *Miery v kartézských súčinoch.* (Меры в произведениях пространств.) Čas. pěst. mat. *92* (1967), 283—288. (Оригинальная статья.)

Функция, определенная на системе множеств вида $E \times F$, являющаяся мерой как функция от E и как функция от F, может быть при некоторых условиях продолжена до меры.

Bohdan Zelinka, Liberec: *Poznámka o nekonečných hranově disjunktních systémech cest v grafu.* (Заметка о бесконечных системах цепей без общих ребер в графе.) Čas. pěst. mat. *92* (1967), 289—293. (Оригинальная статья.)

Дан отрицательный ответ на следующую проблему Г. А. Дирака: Две различные вершины a и b графа соединены бесконечным числом δ цепей, каждая из которых имеет a и b в качестве своих граничных вершин и никакие две из этих не имеют общего ребра. Следует ли из этого, что a и b соединены δ цепями такими, что каждые две из них имеют a и b в качестве своих граничных вершин, никакие две из них не имеют общего ребра и общие вершины произвольных двух цепей находятся в том же самом порядке вдоль обеих на ходу от a до b?

Nikolaj Podtjagin, Bratislava: *Ešte o jednej triede racionálnych kriviek.* (Еще об одном классе алгебраических кривых.) Čas. pěst. mat. *92* (1967), 294—312. (Оригинальная статья.)

В статье доказывается, что эпиэпициклоиды, эпигипоциклоиды, гипоэпициклоиды и гипогипоциклоиды в случае их замкнутости, являются рациональными кривыми. Кроме того дается одна, общая для всех этих кривых, формула для определения их степени.

František Štěpánek, Praha: *Замечание о произведении рядов Лейбница.* Čas. pěst. mat. *92* (1967), 351—355. (Оригинальная статья.)

При помощи одной простой тауберовской теоремы для метода средних арифметических дано новое доказательство классической теоремы Прингсхейма о произведении (по правилу Коши) двух рядов Лейбница.

Nikolaj Podjagin, Bratislava: *Ešte o jednej triede racionálnych kriviek.* (Encore sur une classe de courbes algébriques.) Čas. pěst. mat. *92* (1967), 294—312. (Mémoire scientifique original.)

Dans l'article, on démontre que toutes les épiépicycloïdes, épihypocycloïdes, hypoépicycloïdes et hypohypocycloïdes, en cas, que ces courbes sont fermées, sont des courbes algébriques, dont l'ordre est donné par une formule unique.

Bohdan Zelinka, Liberec: *Hasse's operator and directed graphs.* Čas. pěst. mat. *92* (1967), 313—317. (Original paper.)

In this article two problems by K. Čulík are solved. The graphs considered are sets together with a binary relation which is defined on them. If M is a set and $\sigma \subset M \times M$, then $T\sigma$ denotes the transitive closure of σ. Further we define $H\sigma = \{(u, v) \in \sigma;$ there is no directed path $(w_1, \ldots, w_k)$ in $[M, \sigma]$ such that $k \geqq 3$ and $w_1 = u, w_k = v\}$. We speak about the transitive closure operator T and Hasse's operator H.

In the article a necessary and sufficient condition for $TH\varrho = \varrho$ is given, where $[M, \varrho]$ is partially ordered set, and then the necessary and sufficient condition for $THT\sigma = T\sigma$ where σ is an arbitrary binary relation. Then the results are applied in mathematical linguistics.

Teo Sturm, Praha: *Isotonní rozšíření isotonních zobrazení.* (Isotone Erweiterung der isotonen Abbildungen.) Čas. pěst. mat. *92* (1967), 318—331. (Originalartikel.)

Mit Hilfe einer transfiniten Mengenkonstruktion leitet man die für die Existenz der isotonen Erweiterung notwendige Bedingung ab. Weiter wird ein Beweis gegeben, dass diese Bedingung für die Existenz der isotonen Erweiterung in einigen wichtigeren Fällen auch als hinreichend anzusehen ist (wenn z. B. die die Menge von Bildern enthaltende Menge eine Kette oder ein vollständiger Verband ist; diese Bedingung gilt als hinreichend auch in dem Falle wenn die Menge von Urbildern einigen allgemeinen Bedingungen genügt, die in der Theorie der geordneten Mengen üblich oder vom kombinatorischen Charakter sind).

Vladimír Kohout, Praha: *Über die sphärische Abbildung der abgeschlossenen sphärischen Kurve.* Čas. pěst. mat. *92* (1967), 332—337. (Originalartikel.)

Wenn die sphärische Abbildung einer abgeschlossenen sphärischen Kurve sich selbst nicht schneidet, halbiert sie die Sphäre. In dem Artikel wird eine Verallgemeinerung dieses bekannten Satzes für den Fall, wenn die sphärische Abbildung sich selbst schneidet, untersucht. Es wird eine Bedingung gefunden, die für die Existenz und Abgeschlossentheit des sphärischen Originals einer abgeschlossenen sphärischen Kurve notwendig und hinreichend ist.

František Štěpánek, Praha: *Замечание о произведении рядов Лейбница.* (A note on the product of Leibniz series.) Čas. pěst. mat. *92* (1967), 351—355. (Original paper.)

By means of one simple Tauberian theorem for the method of arithmetic means a new proof of the classical Pringsheim's theorem concerning Cauchy product of two Leibniz (i.e. alternating) series is given.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 92 * PRAHA 16. 8. 1967 * ČÍSLO 3

ON A CLASS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ORDER n, $n \geqq 3$

VALTER ŠEDA, Bratislava

(Received June 19, 1963, in revised form July 5, 1966)

In the papers [1], [2] the transformation theory of linear differential equations (or equations, as we shall write for short) was worked out. In this paper some applications of that theory are given. Besides the results of that theory the notations introduced in it will be used. Further I will denote some open interval and it will be assumed $n \geqq 3$.

The simplest homogeneous equation of the n-th order is the equation

$$(1) \qquad (L^*(v) \equiv) \frac{d^n v}{d\xi^n} = 0 .$$

By this equation and by the interval I the class C of all equations of the form

$$(2) \qquad (L(y) \equiv) \frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} p_k(x) \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} = 0 , \quad p_k(x) \in C_0(I) , \quad k = 2, \ldots, n ,$$

which are locally equivalent to the equation (1), is defined. As we shall see, the equations of this class have similar oscillatory properties as the equation (1). Further the class C will be studied in detail.[1])

The meaning of the equation (2) being locally equivalent to the equation (1) is given by the following definition ([2], Definition 5).

[1]) Originally the equations of the class C were called the equations with zero fundamental invariants. This title is mentioned in the paper [3], which follows up this paper. Since it was shown that in this case there is no need for the notion of fundamental invariants, this notion was omitted and the title of this paper was changed. The equations with zero fundamental invariants are dealt with in the papers [4], [5].

Definition 1. Equation (2) is called *locally equivalent to the equation* (1) if there exists a solution $u(x) \not\equiv 0$ of its accompanying equation of the 2-nd order such that on each interval $I_{2x} \subset I$, where $u(x) \neq 0$, the equivalence $(1)\, I_{1\xi} \sim (2)\, I_{2x}$, $I_{1\xi}$ being an interval, holds.

Recall that under *the accompanying equation of the 2-nd order* (in short the accompanying equation) is meant the equation

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3}{n+1}\, p_2(x)\, y = 0\,.$$

In the paper [2] the following properties of the equations belonging to the class C were proved:

1. If the equation (2) is of the class C and $r(x)$, $s(x)$ form a fundamental set for the equation (3), then on each interval I^*_{2x} in which $s(x) \neq 0$ the equivalence $(1)\, I^*_{1\xi} \sim (2)\, I^*_{2x}\{\xi(x), c/\sqrt{(|\xi'(x)|^{n-1})}\}$, where $\xi(x) = r(x)/s(x)$, $\xi(I^*_{2x}) = I^*_{1\xi}$ and $c \neq 0$ is a constant, is valid.

2. The coefficients $p_k(x)$ of the equation (2) of the class C fulfil the relation $p_k(x) \in C_{n-k}(I)$, $k = 2, \ldots, n$.

3. For each $f(x) \in C_{n-2}(I)$ there exists one and only one equation (2) of the class C whose coefficient $p_2(x) = f(x)$, $x \in I$. This equation shall be denoted by $I_n(y, f(x)) = 0$. Evidently $I_n(y, 0) = 0$ is identical with the equation $d^ny/dx^n = 0$.

4. Each equation of the class C is self-adjoint on I.

5. Let (3_f), (3_g) be the accompanying equations of the equation $I_n(y, f(x)) = 0$, $I_n(v, g(\xi)) = 0$, respectively. Then it holds: $I_n(v, g(\xi)) = 0\ I_{2\xi} \sim I_n(y, f(x)) = 0\ I_{1x}\{\xi(x), c/\sqrt{(|\xi'(x)|^{n-1})}\} \Leftrightarrow (3_g)\ I_{2\xi} \sim (3_f)\ I_{1x}\{\xi(x), c_1/\sqrt{(|\xi'(x)|)}\}$, $c \neq 0$, $c_1 \neq 0$ are constants.

By its properties 1–5 the class C is similar to the class of equations (3). In particular, the property 5 means that the equivalence of two equations of the class C is found if and only if their accompanying equations are equivalent.

The operator standing on the left side of the equation (1) is decomposable into a product of n equal factors. The same assertion is valid for the operator L on the left side of the equation of the class C. Here the decomposition into regular operators is considered ([1], p. 400).

Theorem 1. *Assume there exists a solution $s(x) \neq 0$, $x \in I$, of the equation* (3). *Then the equation* (2) *is of the class C if and only if the operator $[s(x)]^{2n} L$ is decomposable on I into a symbolic product of n equal factors*

$$(4) \qquad [s(x)]^{2n} L = L_1 \ldots L_1 L_1$$

defined by the relation

$$(5) \qquad L_1(y) = [s(x)]^2\, y' - (n-1)\, s'(x)\, s(x)\, y\,.$$

Proof. Let the equation (2) be of the class C. Then, by the property 1, (1) $I^*_{1\xi} \sim$ (2) $I\{\xi(x), t(x)\}$. From the decomposition of the operator L into the product of n equal operators L^*_1, $L^*_1(v) = dv/d\xi$ the decomposition

$$\frac{1}{[\xi'(x)]^n} L = L_1 \dots L_1 L_1 \tag{6}$$

into the product of n equal operators L_1 of the first order with the coefficient at their first derivative equal to $1/\xi'(x)$, follows by Corollary to Theorem 9, [1]. Here $L^*_1(v) = 0\ I^*_{1\xi} \sim L_1(y) = 0\ I\{\xi(x), t(x)\}$. From these two conditions and from the fact that $t(x) = c/\sqrt{(|\xi'(x)|^{n-1})}$ we obtain that

$$L_1(y) = \frac{1}{\xi'(x)}\left(y' + \frac{n-1}{2}\frac{\xi''(x)}{\xi'(x)}\,y\right). \tag{7}$$

If in the function $\xi(x) = r(x)/s(x)$ such a solution $r(x)$ of the equation (3) is chosen that the Wronskian of the functions $r(x)$, $s(x)$ is equal to -1, then (4) follows from (6) and (5) from (7).

Conversely, let the decomposition (4) on I exist, where the operator L_1 is given by (5). If we put $\xi'(x) = 1/[s(x)]^2$, $t(x) = [s(x)]^{n-1}$, $x \in I$, then $L^*_1(v) = 0\ I^*_{1\xi} \sim L_1(y) = 0\ I\{\xi(x), t(x)\}$. Further $\xi(x), t(x) \in C_n(I)$ and $1/([s(x)]^2\, \xi'(x)) = 1$. From this, by virtue of Corollary to Theorem 10, [1], follows (1) $I^*_{1\xi} \sim$ (2) $I\{\xi(x), t(x)\}$, and the theorem is proved.

Remark 1. Theorem 1 also follows from Theorem 4.4 and Remark 4.5a) in [4], p. 180.

If the non-regular operators are considered, then we get from Theorem 1

Corollary. *The equation* (2) *belongs to the class C if and only if, for an arbitrary solution $s(x) \not\equiv 0$ of the equation* (3) *there exists on I a decomposition of the operator $[s(x)]^{2n} L$ into the symbolic product* (4) *of n equal factors given by the relation* (5).

Theorem 2. *Let $r(x)$, $s(x)$ form on I a fundamental set for the equation* (3). *Then the equation* (2) *is of the class C if and only if the functions*

$$[r(x)]^{n-k}\,[s(x)]^{k-1}, \quad k = 1, \dots, n \tag{8}$$

form a fundamental set on I for this equation.

Proof. Let the equation (2) be of the class C and let $I^*_{2x} \subset I$ be an arbitrary interval on which $s(x) \neq 0$ and whose each endpoint is either a zero of $s(x)$ or an endpoint of I. Then, by virtue of property 1, the functions

$$\frac{[\xi(x)]^{n-k}}{\sqrt{(|\xi'(x)|^{n-1})}}, \quad k = 1, \dots, n, \tag{9}$$

form a fundamental set for (2) on I^*_{2x}. Here $\xi(x) = r(x)/s(x)$. From this we obtain that the functions (8) also form a fundamental set for the equation (2) on I^*_{2x} as well as on the union of all intervals I^*_{2x}. From the continuity of the coefficients of the equation (2) and from the fact that $r(x), s(x) \in C_n(I)$ it follows that the functions (8) satisfy the equation (2) at the common endpoints of the intervals I^*_{2x}, too.

Let the functions (8) form a fundamental set for the equation (2) on I and let I^*_{2x} have the same meaning as before. We put $\xi(x) = r(x)/s(x)$, $t(x) = 1/\sqrt{(|\xi'(x)|^{n-1})}$. Evidently $\xi(x)$, $t(x)$ have all properties of the carrier of equivalence. Since $y_k(x)$ are equal, up to a multiplicative constant, to the functions (9), the fundamental set $v_k(\xi) = \xi^{n-k}$, $k = 1, \ldots, n$ for the equation (1) is transformed into a basis of solutions of the equation (2) on I_{2x}. From this it follows (1) $I^*_{1\xi} \sim$ (2) I^*_{2x}, and thus the equation (2) is shown to be of the class C.

Remark 2. Theorem 2 also follows from Lemma 4.1 in [4], p. 179.

In what follows, we shall take the same basis $r(x)$, $s(x)$ of solutions of the equation (3). Then from the Theorem 2 it follows that the general solution of the equation (2) belonging to the class C can be written in the form

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k [r(x)]^{n-k} [s(x)]^{k-1}, \tag{10}$$

$c_1, \ldots, c_n$ are constants. To this expression the polynomial

$$P_y(\varrho) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varrho^{n-k} \tag{11}$$

of the degree at most $n - 1$ may be associated in a one-to-one manner. This polynomial will be called *the auxiliary polynomial*. It will be said to be *dominating* if it is exactly of the degree $n - 1$. The set of all solutions of the equation (2) belonging to the class C is isomorphic to the set of all polynomials which are of the degree at most $n - 1$. From now on, we shall not consider the trivial solution of the equation (2) and its corresponding polynomial.

From the relation between the function (10) and the polynomial (11) it follows that this function can be similarly factorated as its auxiliary polynomial.

Lemma 1. *The auxiliary polynomial $P_y(\varrho)$ is of the degree $n - l$, $1 \leqq l \leqq n$ and can be factorated into the factors*

$$P_y(\varrho) = \sum_{k=l}^{n} c_k \varrho^{n-k} = c_l(\varrho - \varrho_1) \ldots (\varrho - \varrho_{n-l}), \quad c_l \neq 0, \tag{12}$$

if and only if the function y given by the relation (10) can be written in the form

$$y(x) = c_l [s(x)]^{l-1} \cdot [r(x) - \varrho_1 s(x)] \ldots [r(x) - \varrho_{n-l} s(x)]. \tag{13}$$

Proof. If (12) is valid, then $y(x) = [s(x)]^{l-1} \sum_{k=l}^{n} c_k [r(x)]^{n-k} [s(x)]^{k-l}$. Further, on the intervals I_{2x}^* where $s(x) \neq 0$ we can write

$$y(x) = [s(x)]^{n-1} \sum_{k=l}^{n} c_k (r(x)/s(x))^{n-k} =$$
$$= [s(x)]^{n-1} \{c_l[(r(x)/s(x)) - \varrho_1] \dots [(r(x)/s(x)) - \varrho_{n-l}]\} =$$
$$= c_l [s(x)]^{l-1} [r(x) - \varrho_1 s(x)] \dots [r(x) - \varrho_{n-l} s(x)] .$$

From the continuity of the functions on both sides of the equation (13) this equality is valid at the zeros of $s(x)$, too.

The converse implication can be proved on the interval I_{2x}^*.

Corollary. *The product of exactly $n - 1$ solutions of the equation* (3) *is a solution of the equation* (2) *belonging to the class C.*

Proof. The product $y^*(x)$ of exactly $n - 1$ solutions of the equation (3) can be written in the form (13), where $1 \leqq l \leqq n$, $c_l \neq 0$, $\varrho_1, \dots, \varrho_{n-l}$ (if $l = n$, $y^*(x) = c_n[s(x)]^{n-1}$) are some numbers. Let $\sum_{k=l}^{n} c_k \varrho^{n-k}$ be a polynomial with $\varrho_1, \dots, \varrho_{n-l}$ being its roots. By Lemma 1, the equality $y^*(x) = \sum_{k=l}^{n} c_k [r(x)]^{n-k} [s(x)]^{k-1}$ holds, which implies, with respect to Theorem 2, the assertion.

Remark 3. Corollary also follows from Corollary to Lemma 5, [5], p. 31.

From the Lemma also follows

Theorem 3. *The auxiliary polynomial* (12) *of the solution $y(x)$ of the equation* (2) *belonging to the class C has a decomposition*

$$(12') \qquad P_y(\varrho) = c_l(\varrho - \varrho_1) \dots (\varrho - \varrho_m)(\varrho^2 + \alpha_1 \varrho + \beta_1) \dots (\varrho^2 + \alpha_q \varrho + \beta_q)$$

where $\varrho_1, \dots, \varrho_m, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_q, \beta_q$ are real numbers, not necessarily different and $\beta_1 - \alpha_1^2/4 > 0, \dots, \beta_q - \alpha_q^2/4 > 0$, $m + 2q = n - l$ if and only if the function y can be written in the form

$$(13') \qquad y(x) = c_l [s(x)]^{l-1} [r(x) - \varrho_1 s(x)] \dots [r(x) - \varrho_m s(x)] \, .$$
$$\cdot \left\{ \left[r(x) + \frac{\alpha_1}{2} s(x) \right]^2 + (\beta_1 - \alpha_1^2/4) [s(x)]^2 \right\} \dots$$
$$\dots \left\{ \left[r(x) + \frac{\alpha_q}{2} s(x) \right]^2 + (\beta_q - \alpha_q^2/4) [s(x)]^2 \right\} .$$

Proof. In (12′) the expressions $\varrho^2 + \alpha_w \varrho + \beta_w$, $w = 1, \dots, q$ are obtained by multiplying the factors with the complex conjugate roots $\sigma_w \pm i\tau_w$. With them the factors of the form $r(x) - (\sigma_w + i\tau_w)\, s(x)$, $r(x) - (\sigma_w - i\tau_w)\, s(x)$ are associated, which by multiplying each other give $[r(x)]^2 + \alpha_w\, r(x)\, s(x) + \beta_w [s(x)]^2 = [r(x) + (\alpha_w/2)\, s(x)]^2 + (\beta_w - \alpha_w^2/4)\, [s(x)]^2$.

By a converse procedure the second part of the theorem will be proved.

With help of the mentioned Corollaries to Theorem 2 we shall prove some theorems concerning the zero-points of the solutions of the equation (2) belonging to the class C. Here the definition of the type for the equation (3) introduced in [6], p. 231, and the following definition will be used.

Definition 2. The equation (2) *is of the type* k ($\geqq 1$) on the interval $I_1 \subset I$ if each of its solutions has at most k zeros on I_1 and there exists a solution of this equation having exactly k zeros on I_1. Here each zero-point is counted as many times as its multiplicity indicates.

Theorem 4. *The equation* (2) *of the class C is of the type $k(n - 1)$ on the interval $I_1 \subset I$ if and only if the equation* (3) *is of the type k on I_1.*

Proof. If (3) is of the type k on I_1, then every solution of the equation (2) of the class C being of the form (13′), by the Theorem 3, has at most $k(n - 1)$ zero-points on I_1 and at the same time there exists a solution of this equation having exactly $k(n - 1)$ zero-points on I_1. Thus a one-to-one correspondence between the type of the equation (3) and that of the equation (2) is given.

Corollary. *If the equation* (2) *of the class C is non-oscillatory on the interval I_1 (that means if it is of the type $n - 1$ on I_1), then there exists a non-vanishing on I_1 solution of this equation.*

From the Theorem 3 immediately follows

Theorem 5. *Let the equation* (2) *of the class C be of odd order. Then each solution of this equation, whose auxiliary polynomial is dominating and having only complex conjugate roots, is non-vanishing on I.*

Theorem 6. *Let the equation* (2) *of the class C be of even order. Then it has a non-vanishing solution on I if and only if it is non-oscillatory on I.*

Proof. Let the solution $y(x)$ of this equation have no zero-point on I. If its auxiliary polynomial is dominating, then this polynomial is of odd degree and has at least one root ϱ_1. In the decomposition (13′) a non-vanishing on I factor $r(x) - \varrho_1\, s(x)$ corresponds to it. Therefore, both the equation (3) and the equation (2) of the class C are non-oscillatory on I. If the auxiliary polynomial of the solution $y(x)$ is not dominating, then in the decomposition (13′) the factor $[s(x)]^{l-1}$, $l \geqq 2$ without zeros on I occurs and the assertion is valid again.

The second part of the Theorem was stated in Corollary to Theorem 4.

Remark 4. Theorem 5 strengthens the Remark 7 in [5], p. 32. Theorem 6 completes Theorem 1 in [5], p. 31.

Let now $a \in I$ be an arbitrary point. Consider the set $M(a)$ of all solutions $y(x)$ of the equation (2) of the class C having a zero at a. The zero-points of the solution $y(x) \in M(a)$ situated on the right (on the left) from the point a, provided they exist, can be enumerated. On the right let they be the points

$$a \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \dots \leqq a_{n-1} \leqq a_n \leqq \dots \leqq a_{2(n-1)} \leqq a_{2n-1} \leqq \dots \leqq a_{3(n-1)} \leqq \dots$$

and on the left

$$\dots \leqq a_{-3(n-1)} \leqq \dots \leqq a_{-(2n-1)} \leqq a_{-2(n-1)} \leqq \dots \leqq a_{-n} \leqq a_{-(n-1)} \leqq \dots \leqq$$
$$\leqq a_{-2} \leqq a_{-1} \leqq a \,.$$

Each point is counted as many times as its multiplicity indicates. If, e.g., the point a is a k-tuple zero-point of the solution $y(x)$, then $a = a_1 = \dots = a_{k-1} < a_k$ (if there exists the last point) and $a_{-k} < a_{-(k-1)} = \dots = a_{-1} = a$ (if the point a_{-k} exists).

Definition 3. Let $y(x) \in M(a)$, and let k be a natural number. Then the point $a_{k(n-1)}(a_{-k(n-1)})$ will be called *the k-th successive (the k-th preceding) conjugate point to the point a of the solution* $y(x)$. Further the k-th successive (the k-th preceding) conjugate point to the point a of the equation (2) belonging to the class C will be defined as *the lower bound* of the k-th successive (as *the upper bound* of the k-th preceding) conjugate points to the point a of all solutions $y(x) \in M(a)$.

If there is no solution $y(x) \in M(a)$ having the k-th successive (the k-th preceding) conjugate point to the point a, then we shall say that there does not exist the k-th successive (the k-th preceding) conjugate point to the point a of the equation (2) belonging to the class C.

Theorem 7. *Let the equation* (2) *be of the class C, let k be a natural number, and let* $y_0(x)$ *be the solution of the considered equation having* $(n - 1)$*-tuple zero-point at the point* $a \in I$. *Then the k-th successive (the k-th preceding) conjugate point to the point a of the equation* (2) *exists if and only if there exists the k-th successive (the k-th preceding) conjugate point to the point a of the solution* $y(x)$. *If both the points exist, then they are equal to each other.*

Proof. The theorem will be proved only for the successive conjugate points. The case of the preceding conjugate points can be dealt with similarly. Each solution $y(x) \in M(a)$ contains a factor $[\widetilde{s(x)}]^k$, $1 \leqq k \leqq n - 1$, $\widetilde{s(x)}$ being a solution of the equation (3) with a simple zero a, in its decomposition (13'). Here $[\widetilde{s(x)}]^{n-1}$ appears if and only if $y(x)$ are linearly dependent with $y_0(x)$. Therefore the k-th successive conjugate point a_k to the point a of the solution $y_0(x)$ is identical with the k-th successive conjugate point to the point a of the solution $\widetilde{s(x)}$. Since the solutions $y(x) \in M(a)$ are not multiples of $y_0(x)$, the product of at most $n - 1$ solutions of the accompanying equation may appear in the decomposition (13'). From this, by virtue of the Separation Theorem, the statement of the theorem follows.

From the proof it can be easily seen the following

Corollary. *The conjugate points of the equation* (2) *of the class C are identical with the conjugate points of its accompanying equation* (3).

From the proof of the last theorem it also follows that except the solution $y_0(x)$, all solutions $y(x) \in M(a)$ being products of $n - 1$ solutions of the equation (3) have the same conjugate points as the equation (2). Further, we see that all zeros of the solution $y_0(x)$ are $(n - 1)$-tuple, whereby for even n the values of the function $y_0^{(n-1)}(x)$ change their sign at these points while for n odd they are of the same sign.

From the Separation Theorem, using Theorem 3, we get that the behaviour of the zero-points of the other solutions $y(x)$ of the equation (2) belonging to the class C is the same between two successive zeros of the solution $y_0(x)$, that is, if a, b and c, d are two pairs of the neighbouring zero-points of the solution $y_0(x)$, then $y(x)$ has the same number of zeros on (a, b) as on (c, d), whereby the order of the multiplicity of the zeros is the same on both the intervals. In a similar manner we obtain this generalized separation theorem.

Theorem 8. *Let the equation* (2) *be of the class C and let $y_0(x)$ be its arbitrary solution with $(n - 1)$-tuple zeros. Then in the case of even n every solution $y(x)$ of the equation* (2) *that is not a multiple of $y_0(x)$ must vanish between any two successive zeros of $y_0(x)$. If n is odd, this statement holds for any solution $y(x)$ of the equation* (2) *with at least one zero-point on I.*

Let us consider the n-th order equation with constant coefficients defined for n even by the symbolic product

$$(14_e)\quad \left[\frac{d^2}{d\xi^2} + (n-1)^2\right]\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + (n-3)^2\right]\cdots\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + 1^2\right] v = 0\,, \quad \xi \in (-\infty, \infty)\,,$$

and for n odd by the relation

$$(14_o)\quad \left[\frac{d^2}{d\xi^2} + (n-1)^2\right]\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + (n-3)^2\right]\cdots\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + 2^2\right]\frac{d}{d\xi} v = 0\,, \xi \in (-\infty, \infty)\,.$$

The general solution of the equation (14_e) is

$$(15_e)\qquad v(\xi) = \sum_{k=1}^{n/2} [c_k \cos (2k - 1)\,\xi + d_k \sin (2k - 1)\,\xi]\,,$$

c_k and d_k are constants, while that of (14_o) is

$$(15_o)\qquad v(\xi) = c_0 + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} [c_k \cos 2k\xi + d_k \sin 2k\xi]\,,$$

c_k and d_k are constants. From the definition of the equations (14_e), (14_o) it follows that they are of the form

$$\frac{\mathrm{d}^n v}{\mathrm{d}\xi^n} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} q_k(\xi) \frac{\mathrm{d}^{n-k} v}{\mathrm{d}\xi^{n-k}} = 0 . \tag{2'}$$

With respect to the equalities

$$\sum_{k=1}^{n/2} (2k-1)^2 = \binom{n+1}{3}, \quad n \text{ is even}, \quad \sum_{k=1}^{(n-1)/2} (2k)^2 = \binom{n+1}{3}, \quad n \text{ is odd},$$

we obtain $q_2(\xi) = (n+1)/3$. Thus the accompanying equation of the equations (14_e), (14_o) is the equation

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}\xi^2} + v = 0 . \tag{3'}$$

Further it is true that the equations (14_e), (14_o) are of the class C on the interval $(-\infty, \infty)$. In fact, because of the trigonometrical identity

$$(\cos \xi)^{n-k} (\sin \xi)^{k-1} = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{i^{k-1}} \sum_{l=0}^{n-k} \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \binom{n-k}{l} \binom{k-1}{m} e^{i(n-1-2m-2l)\xi}\right\},$$
$$k = 1, \ldots, n$$

we have that with the functions (15_e), (15_o) the functions

$$(\cos \xi)^{n-k} (\sin \xi)^{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n \tag{16}$$

are the solutions of (14_e), (14_o), too. Conversely, by making linear combinations from the system (16) we get the functions $(\cos \xi)^{n-2l-k} (\sin \xi)^{k-1}$, $k = 1, \ldots, n-2l$ for $l = 0, 1, \ldots, (n/2) - 1$, if n is even and $l = 0, 1, \ldots, (n-1)/2$ if n is odd, respectively. From these functions, by means of the relation

$$\cos (n-1-2l)\xi + i \sin (n-1-2l)\xi =$$
$$= \sum_{k=1}^{n-2l} \binom{n-1-2l}{k-1} i^{k-1} (\cos \xi)^{n-2l-k} (\sin \xi)^{k-1}$$

the functions (15_e), (15_o) can be obtained. Thus the functions (16) form a fundamental set for the equation (14_e), (14_o), respectively. By Theorem 2 these equations belong to the class C on $(-\infty, \infty)$. From this, in virtue of the property 5 of the equations belonging to the class C and of the equivalence $(3')\, I_1 \sim (3)\, I$, I_1 is an interval, it follows

Theorem 9. *If the equation* (2) *is of the class C and n is even (n is odd), then there exists an interval I_1 such that* $(14_e)\, I_1 \sim (2)\, I$ $((14_o)\, I_1 \sim (2)\, I)$.

With regard to Definition 1 and Theorem 9 the equation (1) and the equation (14_e), (14_o) will be called *a typical non-oscillatory* and *oscillatory equation of the class C*, respectively.

Consider the nonhomogeneous equation

$$L(y) = p_{n+1}(x), \quad p_{n+1}(x) \in C_0(I), \tag{17}$$

whose corresponding homogeneous equation (2) is of the class C.

Assume the equation (2) is non-oscillatory on I and $p_{n+1}(x)$ has exactly k zeros on this interval, $0 \leqq k < +\infty$. Then $(1)\, I_1 \sim (2)\, I\{\xi(x), t(x)\}$, I_1 is an interval. If $x(\xi)$ is the inverse function to $\xi(x)$, $t_1(\xi) = 1/t[x(\xi)]$ and

$$\frac{\mathrm{d}^n v}{\mathrm{d}\xi^n} = [x'(\xi)]^n\, t_1(\xi)\, p_{n+1}[x(\xi)], \quad \xi \in I_1, \tag{18}$$

then in virtue of Theorems 1 a 8, [1], $(17)\, I \sim (18)\, I_1\{x(\xi), t_1(\xi)\}$ holds. The right side of (18) has exactly k zero-points. Using Rolle's Theorem successively we get that every solution of this equation has at most $k + n$ zeros in I_1. The same is true for the solutions of the equation (17) on I. This completes the proof of

Theorem 10. *Let the corresponding homogeneous equation of the equation* (17) *be of the class C and let be non-oscillatory on I. Let $p_{n+1}(x)$ have exactly k zeros in I. Then every solution of the equation* (17) *has at most $k + n$ zeros.*

Consider now the case that the equation (2) being of the class C is oscillatory on I, that is, there exists at least one its solution having infinitely many zeros in I. Then, from Theorem 3 it follows that for n even every solution of the equation (2) has infinitely many zeros, while in the case of n odd this is true for each solution having at least one zero-point.

Suppose n is even and the function $p_{n+1}(x)$ is given by the relation

$$p_{n+1}(x) = f(x)\, u(x) \tag{19}$$

where $f(x) \in C_0(I)$, $f(x) \neq 0$, $x \in I$, and $u(x)$ is a solution of (2) with $(n-1)$-tuple zeros. If we denote

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} + (n-1)^2\right]\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} + (n-3)^2\right]\cdots\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} + 1^2\right] v = g(\xi)\, s(\xi), \tag{20}$$

where $g(\xi) = [x'(\xi)]^n f[x(\xi)]$, $s(\xi) = t_1(\xi)\, u[x(\xi)]$, $\xi \in I_1$, then from the Theorem 9 we get $(17)\, I \sim (20)\, I_1\{x(\xi), t_1(\xi)\}$. Here $x(\xi)$ is the inverse function to $\xi(x)$, $t_1(\xi) = 1/t[x(\xi)]$, whereby $(14_e)\, I_1 \sim (2)\, I\{\xi(x), t(x)\}$. With regard to the meaning of the functions $x(\xi)$, $t_1(\xi)$ the function $s(\xi)$ represents a solution of (14_e) having infinitely many $(n-1)$-tuple zero-points.

The oscillatory properties of the solutions of the equation (20) will be dealt with on the basis of a Comparison Theorem which is a generalization of the classical Sturm's Theorem. For this purpose let us consider two equations of the $2n$-th order

$$(21)\qquad u^{(2n)} + a_2 u^{(2n-2)} + a_4 u^{(2n-4)} + \ldots + a_{2n-2} u'' + \varphi_{2n}(x)\, u = \varphi_{2n+1}(x)$$

$$(22)\qquad v^{(2n)} + a_2 v^{(2n-2)} + a_4 v^{(2n-4)} + \ldots + a_{2n-2} v'' + \psi_{2n}(x)\, v = \psi_{2n+1}(x)\,,$$

in which $a_2, \ldots, a_{2n-2}$ are some constants, $\varphi_{2n}(x), \varphi_{2n+1}(x), \psi_{2n}(x), \psi_{2n+1}(x) \in C_0(I_1)$, I_1 is an interval, $u^{(l)} = \mathrm{d}^l u/\mathrm{d}x^l$, $v^{(l)} = \mathrm{d}^l v/\mathrm{d}x^l$, $l = 1, \ldots, 2n$. Let $u(x)$ be a solution of the former equation and let $v(x)$ be a solution of the latter one. By simple combining these equations we get for $x \in I_1$

$$\begin{gathered} u(x)\, v^{(2n)}(x) - u^{(2n)}(x)\, v(x) + a_2[u(x)\, v^{(2n-2)}(x) - u^{(2n-2)}(x)\, v(x)] + \ldots + \\ + a_{2n-2}[u(x)\, v''(x) - u''(x)\, v(x)] + [\psi_{2n}(x) - \varphi_{2n}(x)]\, u(x)\, v(x) = \\ = \psi_{2n+1}(x)\, u(x) - \varphi_{2n+1}(x)\, v(x)\,. \end{gathered}$$

Integrating this equality on the interval $\langle x_1, x_2 \rangle \subset I_1$, we come to the relation

$$\begin{gathered} \Big[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \{u^{(k)}(x)\, v^{(2n-1-k)}(x) - u^{(2n-1-k)}(x)\, v^{(k)}(x)\}\Big]_{x_1}^{x_2} + \\ + a_2\Big[\sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \{u^{(k)}(x)\, v^{(2n-3-k)}(x) - u^{(2n-3-k)}(x)\, v^{(k)}(x)\}\Big]_{x_1}^{x_2} + \ldots + \\ + a_{2n-2}[u(x)\, v'(x) - u'(x)\, v(x)]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} [\psi_{2n}(x) - \varphi_{2n}(x)]\, u(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x = \\ = \int_{x_1}^{x_2} [\psi_{2n+1}(x)\, u(x) - \varphi_{2n+1}(x)\, v(x)]\, \mathrm{d}x\,. \end{gathered}$$

Under the assumption that the solution $u(x)$ of the equation (21) fulfils the conditions

$$(23)\qquad \begin{aligned} u(x_1) = u'(x_1) = \ldots = u^{(2n-2)}(x_1) = 0\,, \quad u^{(2n-1)}(x_1) \neq 0 \\ u(x_2) = u'(x_2) = \ldots = u^{(2n-2)}(x_2) = 0\,, \quad u^{(2n-1)}(x_2) \neq 0 \end{aligned}$$

the last equality reduces to the form

$$(24)\qquad \begin{gathered} -u^{(2n-1)}(x_2)\, v(x_2) + u^{(2n-1)}(x_1)\, v(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} [\psi_{2n}(x) - \varphi_{2n}(x)]\, u(x) \\ v(x)\, \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} [\psi_{2n+1}(x)\, u(x) - \varphi_{2n+1}(x)\, v(x)]\, \mathrm{d}x\,. \end{gathered}$$

From it we get the following Comparison Theorem:

Theorem 11. *Let the following conditions on the interval $\langle x_1, x_2\rangle$ be satisfied:*

1. $\varphi_{2n}(x) \leqq \psi_{2n}(x)$.
2. $\varphi_{2n+1}(x) = 0$.
3. *Let $u(x)$ be a solution of* (21) *satisfying the conditions* (23).
4. *Let* $\operatorname{sgn} u^{(2n-1)}(x_1) \neq \operatorname{sgn} u^{(2n-1)}(x_2)$ *and if* $\varphi_{2n}(x) \not\equiv \psi_{2n}(x)$ *on* $\langle x_1, x_2\rangle$, *let* $u(x) \neq 0$, $x \in (x_1, x_2)$.
5. *Let* $\psi_{2n+1}(x) = f(x)\, u(x)$, $f(x) \in C_0\langle x_1, x_2\rangle$.

Then, if $f(x) \geqq 0\ (\leqq 0)$ on $\langle x_1, x_2\rangle$ and if there exists a solution $v(x)$ of (22) *such that* $v(x) \neq 0$, $x \in (x_1, x_2)$, $\operatorname{sgn} v(x) \neq \operatorname{sgn} u^{(2n-1)}(x_1)$ $(\operatorname{sgn} v(x) = \operatorname{sgn} u^{(2n-1)}(x_1))$, $x \in (x_1, x_2)$, *then the equation* (22) *is identical with the equation* (21) *and* $v(x_1) = v(x_2) = 0$.

Particularly, if $f(x) \equiv 0$ on $\langle x_1, x_2\rangle$ and if there exists a non-vanishing on (x_1, x_2) solution $v(x)$ of the equation (22), *then the equation* (22) *is identical with the equation* (21) *and* $v(x_1) = v(x_2) = 0$.

Proof. Consider the case $f(x) \geqq 0$ on $\langle x_1, x_2\rangle$. Then the right side of (24) being equal to $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,[u(x)]^2\,dx$ is not negative. If $\varphi_{2n}(x) \not\equiv \psi_{2n}(x)$, then $u(x) > 0\ (<0)$ on (x_1, x_2). Simultaneously $u^{(2n-1)}(x_1) > 0\ (<0)$ and $u^{(2n-1)}(x_2) < 0\ (>0)$. Suppose there exists a solution $v(x)$ of (22) such that $v(x) < 0\ (>0)$ on (x_1, x_2). This implies that in (24) the first term is $\leqq 0$ and the second one <0. From the obtained contradiction the equality $\varphi_{2n}(x) = \psi_{2n}(x)$ on $\langle x_1, x_2\rangle$ follows. Then in (24) the first term must be equal to 0. This arises if and only if $v(x_1) = v(x_2) = 0$. Simultaneously it must be $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,[u(x)]^2\,dx = 0$. This gives $f(x) = 0$ on $\langle x_1, x_2\rangle$, q.e.d.

The case $f(x) \leqq 0$ can be treated similarly.

By similar consideration Theorem 11′ will be proved.

Theorem 11′. *Let the assumptions* 1–5 *of Theorem* 11 *be satisfied. Then, if $f(x) > 0\ (<0)$ on (x_1, x_2), there does not exist the solution $v(x)$ of the equation* (22) *such that* $v(x)\, u^{(2n-1)}(x_1) \leqq 0\ (\geqq 0)$, $x \in \langle x_1, x_2\rangle$.

Corollary. *Let the following conditions be satisfied on I_1:*

1. $\varphi_{2n}(x) \leqq \psi_{2n}(x)$.
2. $\varphi_{2n+1}(x) = 0$.
3. *Let $u(x)$ be a solution of the equation* (21) *with* $(2n-1)$*-tuple zeros* x_m, $m = 1, 2, \ldots$, *on* I_1.
4. *Let for each* m $\operatorname{sgn} u^{(2n-1)}(x_m) \neq \operatorname{sgn} u^{(2n-1)}(x_{m+1})$ *and if* $\varphi_{2n}(x) \not\equiv \psi_{2n}(x)$, $x \in \langle x_m, x_{m+1}\rangle$, *then let* $u(x) \neq 0$, $x \in (x_m, x_{m+1})$.
5. *Let* $\psi_{2n+1}(x) = f(x)\, u(x)$, $f(x) \in C_0(I_1)$, $f(x) \neq 0$, $x \in I_1$. *Then every solution $v(x)$ of the equation* (22) *changes its sign in the interval* (x_m, x_{m+2}) *at least once*, $m = 1, 2, \ldots$

Proof. For the sake of definiteness let us assume that $f(x) > 0$ on I_1. If $v(x)$ did not change its sign on (x_m, x_{m+2}) at least once, the inequality $v(x)\, u^{(2n-1)}(x_m) \leqq 0$, $v(x)\, u^{(2n-1)}(x_{m+1}) \leqq 0$, would hold on one of the intervals $\langle x_m, x_{m+1}\rangle$, $\langle x_{m+1}, x_{m+2}\rangle$ but this is not possible.

Return now to the equation (20). This equation is of the form (22) and its corresponding homogeneous equation (14) has the form (21). If $\{\xi_m\}$ denotes the sequence of zeros of the solution $s(\xi)$ of the equation (14_e), then by Corollary to Theorem 11′, whose all assumptions have been satisfied, every solution $v(\xi)$ of the equation (20) changes its sign on the intervals (ξ_m, ξ_{m+2}) at least once. With respect to the equivalence of the equations (20), (17) this implies

Theorem 12. *Let n be even, let the equation (2) be of the class C. Let $u(x)$ be its solution with infinitely many $(n - 1)$-tuple zeros x_m on I. Let $f(x) \in C_0(I)$, $f(x) \neq 0$ for $x \in I$. Then every solution $v(x)$ of the nonhomogeneous equation (17), whose right side $p_{n+1}(x)$ is given by (19), changes its sign on every interval (x_m, x_{m+1}) at least once.*

Remark 5. Theorems 10 and 12 represent a generalization of the theorems concerning the character of the solutions of 2-nd order nonhomogeneous equations, given in paper [7].

References

[1] *V. Šeda:* Über die Transformation der linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung I. Čas. Pěst. Mat. *90* (1965), 385—412.

[2] *V. Šeda:* Über die Transformation der linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung II. Čas. Pěst. Mat. Im Druck.

[3] *J. Moravčík:* O zobecnení Floquetovej teórie pre lineárne diferenciálne rovnice obyčajné n-tého rádu, Čas. Pěst. Mat. *91* (1966), 8—17.

[4] *Z. Hustý:* Über die Transformation und Äquivalenz homogener linearer Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung. III. Teil, Czech. Math. Journ. *16* (*91*) 1966, 161—185.

[5] *З. Густы:* Некоторые колебательные свойства однородного линейного дифференциального уравнения n-ого порядка ($n \geqq 3$), Czech. Math. Journ. *14* (*89*) 1964, 27—38.

[6] *O. Borůvka:* Sur les transformations différentielles linéaires complètes du second ordre, Ann. di Mat. p. ed app. *49* (1960), 229—252.

[7] *M. Švec:* On Various Properties of the Solutions of Third- and Fourth-Order Linear Differential Equations, Differential Equations and Their Applications, Proceedings of the Conference held in Prague in September 1962, 187—198.

Author's address: Bratislava, Šmeralova 2 (Prírodovedecká fakulta Univerzity Komenského).

Výťah

O JEDNEJ TRIEDE LINEÁRNYCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC n-TÉHO RÁDU

VALTER ŠEDA, Bratislava

V práci sa aplikuje teória transformácie lineárnych diferenciálnych rovníc (v ďalšom len rovníc) n-tého rádu, uvedená v prácach [1], [2] na triedu rovníc (2) lokálne ekvivaletných s rovnicou $v^{(n)} = 0$ v intervale I. Rovnice tejto triedy sú samoadjungované, ďalej operátor vystupujúci na ľavej strane týchto rovníc dá sa rozložiť na symbolický súčin n rovnakých faktorov (veta 1). Fundamentálny systém riešení rovnice triedy C je určený vzťahom (8) pomocou fundamentálneho systému riešení $r(x)$, $s(x)$ jej sprievodnej rovnice (3) (veta 2). Z toho plynie, že každé riešenie rovnice (2) z C možno rozložiť na súčin riešení rovnice (3) podobne ako sa rozkladá polynóm na súčin koreňových činiteľov (veta 3). Vzhľadom na to je typ rovnice z C rovný $(n - 1)$-násobku typu rovnice (3) (veta 4). Rovnica z triedy C nepárneho rádu má vždy riešenie bez nulového bodu. Rovnica párneho rádu má také riešenie práve vtedy, ak je neoscilatorická (vety 5 a 6). Ďalej platí, že medzi dvoma koreňami riešenia $y_0(x)$ rovnice z C, ktoré má $(n - 1)$-násobné korene, leží aspoň jeden nulový bod každého riešenia $y(x) \not\equiv c\, y_0(x)$ tejto rovnice (ktoré má aspoň jeden nulový bod, ak je n nepárne) (veta 8).

Predstaviteľom rovníc triedy C slúži rovnica (14_e) pre n párne a rovnica (14_o) pre n nepárne (veta 9). Vety 10 a 12 týkajú sa charakteru riešení nehomogénnej rovnice (17), ktorej zodpovedajúca homogénna rovnica (2) je z triedy C. Ak rovnica (2) a pravá strana $p_{n+1}(x)$ sú neoscilatorické, to isté platí aj o riešeniach rovnice (17) (veta 10). Ak ale n je párne, rovnica (2) je oscilatorická, $u(x)$ je jej riešenie s $(n - 1)$-násobnými nulovými bodmi, a $f(x) \neq 0$, potom sú všetky riešenia rovnice (17) s pravou stranou (19) oscilatorické.

Резюме

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ОГО ПОРЯДКА

ВАЛЬТЕР ШЕДА (Valter Šeda), Братислава

В работе применяется теория преобразований линейных дифференциальных уравнений (далее только „уравнений") n-ого порядка, разработанная в работах [1], [2], на класс C уравнений (2) локально эквивалентных с уравнением $v^{(n)} = 0$

в интервале I. Уравнения этого класса самосопряжены, далее, оператор, стоящий в левой части этих уравнений, разлагается на символическое произведение n одинаковых факторов (теорема 1). Фундаментальная система решений уравнения класса C определена соотношением (8) с помощью фундаментальной системы решений $r(x)$, $s(x)$ его сопровождающего уравнения (3) (теорема 2). Из этого вытекает, что всякое решение уравнения (2) из C можно разложить на произведение решений уравнения (3) темже образом, как разлагаем многочлен на произведение корневых множителей (теорема 3). Ввиду того, тип уравнения из C равен $(n - 1)$-вой кратности типа уравнения (3) (теорема 4). Уравнение из класса C нечетного порядка имеет всегда решение без нулевой точки. Уравнение четного порядка имеет такое решение тогда и только тогда, если оно не колеблющееся (теоремы 5 и 6). Далее имеет место утверждение, что между двумя нулями решения $y_0(x)$ уравнения из C с $(n - 1)$-кратными корнями лежит по крайней мере один нуль всякого решения $y(x) \not\equiv c\, y_0(x)$ этого уравнения (которое имеет по крайней мере одну нулевую точку, если n нечетное) (теорема 8).

Представителем уравнений класса C служит уравнение (14_e) для n четного и уравнение (14_o) для n нечетного (теорема 9). Теоремы 10 и 12 касаются характера решений неоднородного уравнения (17), соответствующее однородное уравнение (2) которого принадлежит классу C. Если уравнение (2) и функция $p_{n+1}(x)$ неколеблющиеся, то то же самое верно и о решениях уравнения (17) (теорема 10). Если n четное, уравнение (2) колеблющееся, $u(x)$-его решение с $(n - 1)$-кратными нулями и $f(x) \neq 0$, то все решения уравнения (17) с функцией $p_{n+1}(x)$, даной (19), колеблющиеся.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

POZNÁMKA O HUSTOTE AKO MNOŽINOVEJ FUNKCII

BELOSLAV RIEČAN, Bratislava

(Došlo 27. júla 1965, prepracované 8. februára 1966)

V práci [1] vyšetroval N. F. G. MARTIN vlastnosti Lebesgueovej hustoty v danom bode na priamke ako množinovej funkcie. V tejto poznámke sú rozšírené Martinove výsledky v dvoch smeroch: 1. Pre symetrickú hustotu $\lim_{r\to 0+} m(E \cap c(x, r))/m(c(x, r))$, kde $c(x, r)$ je sféra v metrickom priestore so stredom v x a polomerom r. 2. Lebesgueovu hustotu merateľných podmnožín euklidovského priestoru ľubovoľnej dimenzie.

Ďakujem prof. J. MAŘÍKOVI za cenné pripomienky, ktoré prispeli k zlepšeniu výsledkov.

1. Definície a označenia. X je abstraktný priestor, $\mathscr{A}$ σ-algebra podmnožín X, $\mathscr{K}$, $\mathscr{T}$ systémy podmnožín X, $\mathscr{K} \subset \mathscr{A}$, m je konečne aditívna nezáporná funkcia na $\mathscr{A}$, konečná a kladná na $\mathscr{K}$.

Definícia 1. Postupnosť $\{E_n\}$ podmnožín X konverguje (vzhľadom k $\mathscr{T}$), ak k ľubovoľnému $T \in \mathscr{T}$ existuje N tak, že pre všetky $n > N$ je $E_n \subset T$. Pre ľubovoľné $E \in \mathscr{A}$ označme znakom $\bar{D}(E)$ suprémum množiny

$$\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{m(E \cap E_n)}{m(E_n)} : \{E_n\} \text{ konverguje, } E_n \in \mathscr{K}\right\},$$

znakom $\underline{D}(E)$ jej infímum. Stále budeme predpokladať, že existuje aspon jedna konvergentná postupnosť.

Definícia 2. Znakom $\mathscr{D}$ budeme značiť systém všetkých $E \in \mathscr{A}$ pre ktoré $\underline{D}(E) = \bar{D}(E)$. Ak $E \in \mathscr{D}$, povieme, že E má hustotu rovnú číslu $D(E) = \underline{D}(E) = \bar{D}(E)$.

Definícia 3. Znakom $\mathscr{M}$ budeme značiť systém všetkých $A \in \mathscr{A}$ spĺňajúcich pre ľubovoľné $E \in \mathscr{A}$ rovnosť $\bar{D}(E) = \bar{D}(E \cap A) + \bar{D}(E - A)$.

Príklad 1. Nech X je metrický priestor, $\mathscr{A}$ systém všetkých borelovských množín, $b \in X$, $\mathscr{K} = \mathscr{T}$ je systém všetkých uzavretých gúľ so stredom v b. V tomto prípade nazveme $D(E)$ symetrickou hustotou množiny E v bode b.

Príklad 2. Nech X je euklidovský priestor, $\mathscr{A}$ systém všetkých lebesgueovsky merateľných množín, $b \in X$, $\mathscr{K}$ systém všetkých ohraničených intervalov do uzáverov ktorých patrí b, $\mathscr{T}$ je systém všetkých otvorených množín. Takto obdržanú hustotu budeme nazývať Lebesgueovou.

2. Všeobecné tvrdenia. Lema 1. *$A \in \mathscr{D}$ vtedy a len vtedy, keď $\bar{D}(A) + \bar{D}(X - A) = 1$.*

Dôkaz. Ak $A \in \mathscr{D}$, tak, ako ľahko nahliadneme, $X - A \in \mathscr{D}$ a platí $\bar{D}(A) + \bar{D}(X - A) = D(A) + D(X - A) = D(X) = 1$. K dôkazu opačnej implikácie si stačí uvedomiť vzťah $\underline{D}(A \cup B) \leqq \underline{D}(A) + \bar{D}(B)$. Ak je potom $B = X - A$, $\bar{D}(A) + \bar{D}(B) = 1$, je $\bar{D}(A) + \bar{D}(B) = 1 = \underline{D}(X) = \underline{D}(A \cup B)$ a teda $\bar{D}(A) = \underline{D}(A)$.

Lema 2. *$\bar{D}$ je nezáporná, subaditívna funkcia definovaná na systéme $\mathscr{A}$.*

Dôkaz. Prvé tvrdenie je zrejmé. Ak $A, A_i \in \mathscr{A}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, tak $m(J \cap A)/m(J) \leqq \sum_{i=1}^{n} m(J \cap A_i)/m(J)$ pre všetky $J \in \mathscr{K}$, teda $\bar{D}(A) \leqq \sum_{i=1}^{n} \bar{D}(A_i)$.

Lema 3. *$\mathscr{M} \subset \mathscr{D}$.*

Dôkaz. Nech $A \in \mathscr{M}$, položme $E = X$. Zrejme $1 = \bar{D}(X) = \bar{D}(X - A) + \bar{D}(A)$, teda podľa lemy 1 je $A \in \mathscr{D}$.

Lema 4. *$\mathscr{M}$ obsahuje systém všetkých $A \in \mathscr{D}$, pre ktoré je $D(A) = 1$, alebo $D(A) = 0$.*

Dôkaz. Ak $D(A) = 0$, tak $\bar{D}(E \cap A) = 0$ pre všetky $E \in \mathscr{A}$, teda $\bar{D}(E) \geqq \bar{D}(E - A) = \bar{D}(E - A) + \bar{D}(E \cap A) \geqq \bar{D}(E)$. Ak je $D(A) = 1$, tak $D(X - A) = 0$ a platí $\bar{D}(E) = \bar{D}(E - (X - A)) + \bar{D}(E \cap (X - A)) = \bar{D}(E \cap A) + \bar{D}(E - A)$.

3. Symetrická hustota. V ďalšom pre každé $r > 0$ je $C(r) \in \mathscr{A}$, $0 < m(C(r))$, pričom $\lim_{r \to 0+} m(C(r)) = 0$ a pre $0 < r < s$ je $C(r) \subset C(s)$. Položme $\mathscr{T} = \mathscr{K} = \{C(r) : r > 0\}$. Zrejme $\bar{D}(E) = \limsup_{r \to 0+} m(E \cap C(r))/m(C(r))$, $\underline{D}(E) = \liminf \ldots$, $D(E) = \lim \ldots$, ak tá limita existuje.

V celom 3. odstavci budeme predpokladať práve uvedenú špeciálnu voľbu systémov $\mathscr{K}$, $\mathscr{T}$. Všimnime si, že k dôkazu nasledujúcej lemy stačí predpokladať subaditívnosť množinovej funkcie m.

Lema 5. *Nech $A_i \in \mathscr{A}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Potom existujú také množiny $A'_i \in \mathscr{A}$, že $A'_i \subset A_i$, $\bar{D}(A'_i) = \bar{D}(A_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $\bar{D}(\bigcup_{i=1}^{k} A'_i) = \max_i \bar{D}(A_i)$.*

Dôkaz. Zvoľme ľubovoľné čísla a_1^i, b_1^i $(i = 1, 2, \dots, k)$ tak, aby $a_1^1 > b_1^1 > a_1^2 > > b_1^2 > \dots > a_1^k > b_1^k$. Nech $n > 1$ a predpokladajme, že sme už definovali a_i^j pre $i < n$, $j = 1, 2, \dots, k$. Určme teraz a_n^j $(j = 1, 2, \dots, k)$ tak, aby platilo

$$b_{n-1}^k > a_n^1 > b_n^1 > a_n^2 > b_n^2 > \dots > a_n^k > b_n^k > 0\,,$$

$$\frac{m(A_i \cap C(a_n^i))}{m(C(a_n^i))} > \bar{D}(A_i) - \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, k)\,,$$

$$\frac{m(C(a_n^1))}{m(C(b_{n-1}^k))} + \sum_{i=1}^{k} \frac{m(C(b_n^i))}{m(C(a_n^i))} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{m(C(a_n^{i+1}))}{m(C(b_n^i))} < \frac{1}{n}\,.$$

Tým sme definovali a_n^i, b_n^i $(i = 1, 2, \dots, k)$ pre všetky n. Položme $A_i' = A_i \cap \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (C(a_n^i) - C(b_n^i))\right)$ $(i = 1, 2, \dots, k)$. Pre každé n je zrejmé $C(b_n^i) \cup (A_i' \cap \cap C(a_n^i)) \supset A_i \cap C(a_n^i)$. Je teda

$$\frac{m(A_i' \cap C(a_n^i))}{m(C(a_n^i))} \geqq \frac{m(A_i \cap C(a_n^i))}{m(C(a_n^i))} - \frac{m(C(b_n^i))}{m(C(a_n^i))}\,.$$

Odtiaľ vyplýva, že $\bar{D}(A_i') \geqq \bar{D}(A_i)$, teda $\bar{D}(A_i') = \bar{D}(A_i)$ $(i = 1, 2, \dots, k)$.

Pre každé $r > 0$ položme teraz $f(r) = m((\bigcup_{i=1}^{k} A_i') \cap C(r))/m(C(r))$. Ak je $0 < < r \leqq b_n^{i-1}$, je zrejme $A_j' \cap C(r) \subset C(a_{n+1}^j)$ pre $j < i$ a $A_j' \cap C(r) \subset C(a_n^j)$ pre $j > i$. Ak je teda $b_n^i < r \leqq b_n^{i-1}$ $(i = 2, 3, \dots, k)$, je

$$\begin{aligned} f(r) &\leqq \frac{m(A_i \cap C(r))}{m(C(r))} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m(C(a_{n+1}^j))}{m(C(b_n^i))} + \sum_{j=i+1}^{k} \frac{m(C(a_n^j))}{m(C(b_n^i))} \leqq \\ &\leqq \frac{m(A_i \cap C(r))}{m(C(r))} + \frac{m(C(a_{n+1}^1))}{m(C(b_n^k))} + \sum_{j=2}^{i-1} \frac{m(C(a_{n+1}^j))}{m(C(b_{n+1}^{j-1}))} + \\ &+ \sum_{j=i+1}^{k} \frac{m(C(a_n^j))}{m(C(b_n^{j-1}))} \leqq \frac{m(A_i \cap (C(r))}{m(C(r))} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\,. \end{aligned}$$

Pre $b_n^1 < r \leqq b_{n-1}^k$ je

$$\begin{aligned} f(r) &\leqq \frac{m(A_1 \cap C(r))}{m(C(r))} + \sum_{j=2}^{k} \frac{m(C(a_n^j))}{m(C(b_n^1))} \leqq \frac{m(A_1 \cap C(r))}{m(C(r))} + \sum_{j=2}^{k} \frac{m(C(a_n^j))}{m(C(b_n^{j-1}))} < \\ &< \frac{m(A_1 \cap C(r))}{m(C(r))} + \frac{1}{n}\,. \end{aligned}$$

Odtiaľ vyplýva hneď, že $\bar{D}(\bigcup_{i=1}^{k} A_i') = \limsup_{r \to 0+} f(r) \leqq \max_i \bar{D}(A_i)$. Pretože $\bar{D}(A_i) = \bar{D}(A_i')$, platí rovnosť.

Veta 1. *$\mathcal{M}$ je systém práve tých $E \in \mathcal{A}$ pre ktoré je $D(E) = 0$, alebo $D(E) = 1$.*

Dôkaz. Vzhľadom na lemy 3 a 4 stačí dokázať toto tvrdenie: Ak $0 < D(A) < 1$, tak existuje množina $E \in \mathcal{A}$, pre ktorú $\bar{D}(E) < \bar{D}(E \cap A) + \bar{D}(E - A)$.

Položme $A_1 = A$, $A_2 = X - A$, $E = A'_1 \cup A'_2$, kde A'_1, A'_2 sú množiny z lemy 5. Podľa predpokladu je $D(A_1) > 0$, $D(A_2) > 0$, teda podľa lemy 5 je $\bar{D}(E - A) + \bar{D}(E \cap A) = \bar{D}(A'_1) + \bar{D}(A'_2) > \max(\bar{D}(A_1), \bar{D}(A_2)) = \bar{D}(E)$.

Dôsledok. *Nech X je metrický priestor, $b \in X$, $C(r)$ uzavretá guľa so stredom v b a polomerom r, m je miera na systéme všetkých borelovských množín, kladná a konečná na systéme gúľ. Nech $\mathcal{M}$ je systém tých $A \in \mathcal{A}$, ktoré pre každé $E \in \mathcal{A}$ spĺňajú rovnosť $\bar{D}(E) = \bar{D}(E \cap A) + \bar{D}(E - A)$, pričom $\bar{D}(M)$ je horná symetrická hustota množiny M v bode b. Potom $\mathcal{M}$ je systém práve tých $E \in \mathcal{A}$ pre ktoré existuje symetrická hustota $D(E)$ a je rovná 0, alebo 1.*

4. Lebesgueova hustota. X je metrický priestor, $C(r)$ je uzavretá guľa o polomere r so stredom v bode $b \in X$, $\mathcal{T} = \{C(r) : r > 0\}$, $\mathcal{K}$ je systém množín. Ďalej je daná množina $R \subset X$, ktorá spolu so systémom $\mathcal{K}$ spĺňa nasledujúce podmienky: Pre každé $E \in \mathcal{K}$, pre ktoré $m(E \cap R) > 0$ (resp. $m(E - R) > 0$), je $E \cap R \in \mathcal{K}$ (resp. $E - R \in \mathcal{K}$). Ku každému $r > 0$ existujú $E, F \in \mathcal{K}$ tak, že $E \cup F \subset C(r)$, $E \subset R$, $F \subset X - R$.

Lema 6. *Nech existuje $D(M)$. Potom $\bar{D}(M \cap R) = D(M) = \bar{D}(M - R)$.*

Dôkaz. Podľa predpokladu existujú $E_n \in \mathcal{K}$ tak, že $E_n \to b$, $E_n \subset R$. Odtiaľ ľahko vyplýva, že $D(M) \leqq \bar{D}(M \cap R)$; zrejme tu platí rovnosť. Podobne sa dokáže vzťah $\bar{D}(M - R) = D(M)$.

Lema 7. *Pre každé $M \in \mathcal{A}$ je $\bar{D}(M) = \max(\bar{D}(M \cap R), \bar{D}(M - R))$.*

Dôkaz. Zrejme $\max(\bar{D}(M \cap R), \bar{D}(M - R)) \leqq \bar{D}(M)$. Predpokladajme, že v predošlom vzťahu platí ostrá nerovnosť; odvodíme spor. Existuje číslo c, pre ktoré $\max(\bar{D}(M \cap R), \bar{D}(M - R)) < c < \bar{D}(M)$. Existuje $r > 0$ že pre všetky $E \in \mathcal{K}$ pre ktoré $E \subset C(r)$ je $m(M \cap R \cap E) \leqq c\, m(E)$. Majme také E. Ak je $m(E \cap R) > 0$, je podľa predpokladu $E \cap R \in \mathcal{K}$ a teda $m(M \cap E \cap R) = m((M \cap R) \cap (E \cap R)) \leqq c\, m(E \cap R)$; táto nerovnosť je zrejmá, ak platí $m(E \cap R) = 0$. Podobne sa dokáže vzťah $m(M \cap (E - R)) \leqq c\, m(E - R)$. Je teda $m(M \cap E) \leqq c\, m(E)$, takže $\bar{D}(M) \leqq c$, čo je spor.

Lema 8. *Nech $0 < D(A) < 1$. Položme $E = (A - R) \cup (R - A)$. Potom $\bar{D}(E \cap A) + \bar{D}(E - A) > \bar{D}(E)$.*

Dôkaz. Podľa lemy 6 je $\bar{D}(E \cap A) = \bar{D}(A - R) = D(A)$, $\bar{D}(E - A) = \bar{D}(R - A) = \bar{D}((X - A) \cap R) = D(X - A) = 1 - D(A)$, takže $\bar{D}(E \cap A) + \bar{D}(E -$

$- A) = 1$. Podľa lemy 7 je $\bar{D}(E) = \max(\bar{D}(E \cap R), \bar{D}(E - R)) = \max(\bar{D}(R - A), \bar{D}(A - R)) = \max(1 - D(A), D(A)) < 1$.

Veta 2. *$\mathcal{M}$ je systém práve tých množín $E \in \mathcal{A}$, pre ktoré je $D(E) = 0$, alebo $D(E) = 1$.*

Dôkaz. Vyplýva z liem 3, 4 a 8.

Dôsledok. *Nech $D(E)$ resp. $\bar{D}(E)$ je Lebesgueova hustota resp. horná hustota množiny E v bode b, $\mathcal{M}$ systém množín $E \in \mathcal{A}$, ktoré spĺňajú rovnosť $\bar{D}(F) = \bar{D}(F \cap E) + \bar{D}(F - E)$ pri ľubovoľnom $F \in \mathcal{A}$. Potom $\mathcal{M}$ je systém práve tých $E \in \mathcal{A}$, ktorých Lebesgueova hustota existuje a rovná sa 0, alebo 1.*

Dôkaz. Vezmime systém $\mathcal{K}$ všetkých ohraničených intervalov do uzáverov ktorých patrí $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Ďalej položme $R = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_1 \geqq b_1\}$.

Literatúra

[1] *Martin N. F. G.*: Lebesgue density as a set function, Pacific J. of Math., *7* (1961), 699—704.

Adresa autora: Bratislava, Gottwaldovo nám. 2a, (Slovenská vysoká škola technická).

Резюме

ЗАМЕТКА О ПЛОТНОСТИ КАК О ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВА

БЕЛОСЛАВ РИЕЧАН, (Beloslav Riečan), Братислава

Н. Ф. Г. Мартин изучал некоторые свойства плотности на прямой как функции множества. В настоящей статье распространяются результаты Мартина по двум направлениям: для симметрической плотности (теорема 1) и для плотности Лебега в евклидовом пространстве любой размерности (теорема 2).

Summary

NOTE ON THE DENSITY AS A SET FUNCTION

Beloslav Riečan, Bratislava

N. F. G. Martin has studied some properties of Lebesgue density on the line as a set function. In this article Martin's results are extended in two directions; for symmetric density (theorem 1) and for Lebesgue density in Euclidean space of any dimension (theorem 2).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

ON CERTAIN SPACES OF TRANSFORMATIONS OF INFINITE SERIES

TIBOR NEUBRUNN and TIBOR ŠALÁT, Bratislava

(Received December 16, 1965)

1. THE SYSTEMS $\mathfrak{M}_\infty$ AND $\mathfrak{M}$ OF TRANSFORMATIONS OF INFINITE SERIES

In this part of the paper two systems of transformations of series of a certain type are defined and their properties are studied.

Definition 1,1. $\mathfrak{A}$ denotes the system of all series $A = \sum_{n=1}^{\infty} t_n$, $t_n \geqq 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \leqq 1$.

Definition 1,2. Let $c \geqq 0$. $\mathfrak{M}_c$ denotes the system of all functions φ defined on $\langle 0, 1 \rangle$ for which the following condition is fulfilled: If $A = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \in \mathfrak{A}$, then $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(t_n)$ is convergent and $|\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(t_n)| \leqq c$.

Definition 1,3. Let $\mathfrak{M}_\infty = \bigcup_{c \geqq 0} \mathfrak{M}_c$. Further, let $\mathfrak{M}$ denote the set of all such functions φ defined on $\langle 0, 1 \rangle$ for which the following is true: If $A = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \in \mathfrak{A}$ then $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(t_n)$ is convergent.

Remark 1,1. To be short we shall write $\varphi\{A\}$ instead of $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(t_n)$ $(A = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \in \mathfrak{A})$.

The set $\mathfrak{M}_\infty$ represents a system of functions preserving, in a way uniformly, the convergence of the series of the system $\mathfrak{A}$. In the paper [1] R. RADO showed that if a real function f defined for $x \in (-\infty, +\infty)$ preserves the convergence of all convergent series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (x_n are real numbers) then there exist positive numbers k, δ ($k = k(f)$, $\delta = \delta(f)$) such that for $|x| < \delta$, $f(x) = kx$ (to be short, we say f is linear in a neighbourhood of the point 0). Evidently, the converse is also true. Let us note that if $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$, then φ may not be linear in a right neighbourhood of the point 0.

E.g., if we put $\varphi(0) = 0$ and $\varphi(x) = x \sin(1/x)$ for $x \in (0, 1\rangle$, then for each $A = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \in$ $\in \mathfrak{A}$, $|\varphi\{A\}| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(t_n)| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} t_n \leqq 1$, consequently $\varphi \in \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_\infty$ and evidently φ is not linear in any right neighbourhood of the point 0. But the following result ressembling in a way the result of Rado and characterising the elements of $\mathfrak{M}_\infty$ can be proved.

Theorem 1,1 *Let φ be defined on the interval $\langle 0, 1\rangle$. Then φ belongs to $\mathfrak{M}_\infty$ if and only if all the following conditions are satisfied:*

(1)
$$\varphi(0) = 0$$

(2)
$$\limsup_{t \to 0+} \frac{|\varphi(t)|}{t} < +\infty$$

(3)
$$\varphi \text{ is bounded on } \langle 0, 1\rangle$$

Corollary. *If $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$, then* $\lim_{t \to 0+} \varphi(t) = \varphi(0) = 0$.

Proof. If φ is defined on $\langle 0, 1\rangle$ and has the properties (1), (2), (3) then obviously $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$. Let $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$. Then in view of the definition of the set $\mathfrak{M}_\infty$, there exists $c \geqq 0$ such that $\varphi \in \mathfrak{M}_c$. It is easily seen that the magnitudes of the function φ on the intervals $(2^{-n}, 2^{-n+1}\rangle$ $(n = 1, 2, \ldots)$ are not greater than $c \,.\, 2^{-n+1}$. In fact, if at a point t of the interval $(2^{-n}, 2^{-n+1}\rangle$ the value $\varphi(t)$ were either greater than $c \,.\, 2^{-n+1}$, or less than $-c \,.\, 2^{-n+1}$ then the series

$$A = \underbrace{t + t + \ldots + t}_{2^{n-1} \text{ times}} + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$$

would belong to $\mathfrak{A}$ and $|\varphi\{A\}| = |2^{n-1} \varphi(t)| > c$. Now, let $t > 0$, $t < 1$. Then $t \in (2^{-n}, 2^{-n+1}\rangle$ for a suitably chosen n and consequently, $|\varphi(t)| \leqq c \,.\, 2^{-n+1}$. Thus, we have

$$\frac{|\varphi(t)|}{t} \leqq \frac{c \,.\, 2^{-n+1}}{2^{-n}} = 2c < +\infty$$

and therefore $\limsup_{t \to 0+} |\varphi(t)|/t \leqq 2c < +\infty$, hence, (2) is valid. The validity of (3) is also easily seen. If $\varphi(0) \neq 0$ were the case, then the series $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(0)$ would not be convergent in spite of the fact that $A = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \in \mathfrak{A}$. Hence (1) is also true and the proof is finished.

Remark 1,2. From the proof of the above theorem it follows that $\varphi(0) = 0$, for $\varphi \in \mathfrak{M}$.

Remark 1,3. If $\varphi \in \mathfrak{M}$, then $\limsup_{t\to 0+} |\varphi(t)|/t < +\infty$ may not be necessarily take true. We may define the function φ e.g. in this way: $\varphi(2^{-n}) = n \,.\, 2^{-n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ and $\varphi(t) = 0$ for each $t \in \langle 0, 1\rangle$, $t \neq 2^{-n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Evidently, $\varphi \in \mathfrak{M}$ and $\limsup_{t\to 0+} |\varphi(t)|/t = +\infty$. Moreover, from this example it follows that $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{M}_\infty$, thus the set $\mathfrak{M}_\infty$ is a proper part of the set $\mathfrak{M}$. As we have seen each function of the system $\mathfrak{M}_\infty$ is bounded, but the system $\mathfrak{M}$ contains also unbounded functions. For example, the function φ defined by $\varphi(x) = (1 - x)^{-1}$ for $x \in \langle 2^{-1}, 1)$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi(x) = x$ for $x \in \langle 0, 2^{-1})$ belongs to $\mathfrak{M}$ and it is not bounded on $\langle 0, 1\rangle$.

Theorem 1,2. *If $\varphi \in \mathfrak{M}$, then* $\lim_{t\to 0+} \varphi(t) = \varphi(0) = 0$.

Proof. Let $\varphi \in \mathfrak{M}$ and let the assertion of the theorem is not true. Then there exists an $\varepsilon_0 > 0$ and a sequence of positive numbers $\{\delta_n\}_1^\infty$ such that $\delta_n \leqq 2^{-n}$ and $|\varphi(\delta_n)| \geqq \varepsilon_0$. Let e.g. $\varphi(\delta_n) > 0$ for infinitely many n (for $n \in N'$). Then $\sum_{n\in N'} \delta_n \in \mathfrak{A}$, but the series $\sum_{n\in N'} \varphi(\delta_n)$ does not converge, thus $\varphi \notin \mathfrak{M}$.

Theorem 1,3. *The sets $\mathfrak{M}_\infty$ and $\mathfrak{M}$ are real vector spaces (under the operations of addition and multiplication by a real number defined in usual way).*

Proof. As for $\mathfrak{M}$ the assertion follows immediately from the fundamental theorems concerning the convergent series and for $\mathfrak{M}_\infty$ the assertion follows from the Theorem 1,1.

Now, let us define on $\mathfrak{M}_\infty$ a nonnegative real function $\|\varphi\|$ in this way:

Definition 1,4. $\|\varphi\| = \sup_{A\in\mathfrak{A}} |\varphi\{A\}|$.

It is not difficult to verify that the function $\|\varphi\|$ fulfills the axioms of homogeneous norm. In fact,

(a) $\|\varphi\| \geqq 0$ and if $\varphi(t) = 0$ for each $t \in \langle 0, 1\rangle$, then $\|\varphi\| = 0$. If there exists a number $t \in \langle 0, 1\rangle$ such that $\varphi(t) \neq 0$, then $A = t + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots \in \mathfrak{A}$ and $|\varphi\{A\}| > 0$, consequently $\|\varphi\| > 0$, $\|\varphi\| \neq 0$.

(b) If k is a real number, then $\|k\varphi\| = \sup_{A\in\mathfrak{A}} |k\varphi\{A\}| = |k| \sup_{A\in\mathfrak{A}} |\varphi\{A\}| = |k| \,.\, \|\varphi\|$.

(c) $\|\varphi_1 + \varphi_2\| = \sup_{A\in\mathfrak{A}} |(\varphi_1 + \varphi_2)\{A\}|$, but $|(\varphi_1 + \varphi_2)\{A\}| \leqq |\varphi_1\{A\}| + |\varphi_2\{A\}| \leqq \leqq \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$. Hence $\|\varphi_1 + \varphi_2\| \leqq \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$.

Thus, the set $\mathfrak{M}_\infty$ with this norm is a linear normed space.

Theorem 1,4. *Let φ_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, φ be functions belonging to $\mathfrak{M}_\infty$. Let $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$ as $n \to \infty$. Then the sequence $\{\varphi_n\}_1^\infty$ is uniformly convergent on $\langle 0, 1\rangle$ to φ.*

Proof. Let $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi\| = 0$, $\varphi_n, \varphi \in \mathfrak{M}_\infty$. Let $\varepsilon > 0$. Then there exists $n_0(\varepsilon)$ such that for $n \geqq n_0(\varepsilon)$ $\|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$. Let A traverse over all series of the form $t + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. Evidently $A \in \mathfrak{A}$ and $|\varphi_n\{A\} - \varphi\{A\}| < \varepsilon$ for each A of this kind, hence for each $t \in \langle 0, 1\rangle$ $|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ whenever $n \geqq n_0(\varepsilon)$, so $\{\varphi_n\}_1^\infty$ is uniformly convergent on $\langle 0, 1\rangle$ to φ.

Remark 1,4. If $\varphi_n, \varphi \in \mathfrak{M}_\infty$ and if $\{\varphi_n\}_1^\infty$ is uniformly convergent on $\langle 0, 1\rangle$ to φ, the convergence in the sense of the norm may not take place. We shall show this fact on the following example: Let us put $\varphi_n(t) = t/(1 + n^2t^2)$ for $t \in \langle 0, 1\rangle$ and $\varphi(t) = 0$ for each $t \in \langle 0, 1\rangle$. Evidently, $\varphi_n, \varphi \in \mathfrak{M}_\infty$, $0 \leqq \varphi_n(t) \leqq t$ for each t and $\varphi_n(t) = 2nt/[2n(1 + n^2t^2)] \leqq 2^{-n}$, hence $\{\varphi_n\}_1^\infty$ is uniformly convergent to φ on $\langle 0, 1\rangle$. Let us put for fixed n $t_1 = 1/n$ where $1 \leqq i \leqq n$ and $t_i = 0$ for $i > n$. Then $A = \sum_{i=1}^\infty t_i \in \mathfrak{A}$, $\varphi_n\{A\} = 1/2$, so that $\|\varphi_n\| \geqq 1/2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Consequently $\{\|\varphi_n - \varphi\|\}_1^\infty = \{\|\varphi_n\|\}_1^\infty$ does not converge to zero.

A simple consequence of the foregoing theorem is the following one.

Theorem 1,5. *The system $\mathfrak{M}_\infty^{(c)}$ of all functions continuous on $\langle 0, 1\rangle$ which belong to $\mathfrak{M}_\infty$ is a closed linear subspace of the space $\mathfrak{M}_\infty$.*

Proof. Evidently it suffices to prove that $\mathfrak{M}_\infty^{(c)}$ is closed in $\mathfrak{M}_\infty$. Let $\varphi_n \in \mathfrak{M}_\infty^{(c)}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\varphi_n \to \varphi$ (in the norm-convergence), $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$. On the base of foregoing theorem $\{\varphi_n\}_1^\infty$ is uniformly convergent to φ on $\langle 0, 1\rangle$ and hence in view of the known fact from analysis the continuity of φ follows. Hence $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty^{(c)}$.

Theorem 1,6. *Let $c \geqq 0$. Then $\mathfrak{M}_c$ is a symmetric, convex and closed set in $\mathfrak{M}_\infty$.*

Proof. The properties of the symmetry and convexity are evident. Now, if $\varphi_n \in \mathfrak{M}_c$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$ and $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$, then to each $\varepsilon > 0$ there exists $n_0(\varepsilon)$ such that for each $n > n_0(\varepsilon)$ and each $A = \sum_{k=1}^\infty t_k \in \mathfrak{A}$

$$\left|\sum_{k=1}^\infty \varphi(t_k)\right| - \left|\sum_{k=1}^\infty \varphi_n(t_k)\right| \leqq \left|\sum_{k=1}^\infty \varphi_n(t_k) - \sum_{k=1}^\infty \varphi(t_k)\right| < \varepsilon\,,$$

hence $\left|\sum_{k=1}^\infty \varphi(t_k)\right| < \|\varphi_n\| + \varepsilon \leqq c + \varepsilon$. Since the inequality holds for each $\varepsilon > 0$, we have $\|\varphi\| \leqq c$, $\varphi \in \mathfrak{M}_c$.

Theorem 1,7. *The space $\mathfrak{M}_\infty$ with the norm $\|\varphi\|$ (see definition 1,4) is a Banach linear normed space.*

Proof. Let $\{\varphi_n\}_1^\infty$ be a fundamental sequence of points of $\mathfrak{M}_\infty$. Let $\eta > 0$. Then in view of the assumption there exists $n_0(\eta)$ such that for $m, n \geqq n_0(\eta)$ $\|\varphi_n - \varphi_m\| < \eta/4$ holds. If A^* travers over the series of the form $t + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$,

$t \in \langle 0, 1\rangle$, then from the above mentioned facts, it follows that for each $t \in \langle 0, 1\rangle$ there exists $\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ and $\{\varphi_n\}_1^\infty$ is uniformly convergent to φ on $\langle 0, 1\rangle$. It will be shown that $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$ and $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$ holds. Let $A = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \in \mathfrak{A}$. To any positive integer λ there exists, in view of the uniform convergence of $\{\varphi_n\}_1^\infty$, a positive integer $n(\lambda) \geqq n_0(\eta)$ such that

$$-\frac{\eta}{4\lambda} < \varphi(t_k) - \varphi_{n(\lambda)}(t_k) < \frac{\eta}{4\lambda} \quad (k = 1,2, \dots, \lambda)$$

Hence

$$\sum_{k=1}^{\lambda} \varphi_{n(\lambda)}(t_k) - \frac{\eta}{4} < \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi(t_k) < \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi_{n(\lambda)}(t_k) + \frac{\eta}{4}. \tag{4}$$

If we take into the account that $\|\varphi_{n_0} - \varphi_{n(\lambda)}\| < \eta/4$, we get for the series $t_1 + t_2 + \dots + t_\lambda + 0 + 0 + \dots \in \mathfrak{A}$ the following:

$$\sum_{k=1}^{\lambda} \varphi_{n_0}(t_k) - \frac{\eta}{4} < \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi_{n(\lambda)}(t_k) < \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi_{n_0}(t_k) + \frac{\eta}{4}. \tag{5}$$

From (4) and (5) we get

$$\sum_{k=1}^{\lambda} \varphi_{n_0}(t_k) - \frac{\eta}{2} < \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi(t_k) < \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi_{n_0}(t_k) + \frac{\eta}{2}. \tag{6}$$

Since (6) is valid for each positive integer λ, we have

$$\left|\liminf_{\lambda\to\infty} \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi(t_k) - \limsup_{\lambda\to\infty} \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi(t_k)\right| \leqq \eta .$$

From the last inequality valid for each $\eta > 0$, we have

$$\liminf_{\lambda\to\infty} \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi(t_k) = \limsup_{\lambda\to\infty} \sum_{k=1}^{\lambda} \varphi(t_k),$$

so that the series $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(t_k)$ is convergent. Simultaneously from (6) it follows that

$$|\varphi\{A\}| \leqq \|\varphi_{n_0}\| + \frac{\eta}{2} \leqq c + \frac{\eta}{2} \quad (\varphi_{n_0} \in \mathfrak{M}_c).$$

Since n_0 is independent of A, we get $\|\varphi\| = \sup_{A\in\mathfrak{A}} |\varphi\{A\}| \leqq c + \eta/2$, so that $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$.

Further from (6) evidently follows for each $n \geqq n_0(\eta)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_n(t_k) - \eta < \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(t_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_n(t_k) + \eta$$

hence $\|\varphi_n - \varphi\| \leqq \eta$ for $n \geqq n_0(\eta)$, so that $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$. This finishes the proof.

In what follows sets $\mathfrak{M}_\infty$ and $\mathfrak{M}$ will be studied as subspaces of the topological space $\mathfrak{F}$ of all real functions defined on $\langle 0, 1\rangle$. The topology considered in this space will be that which is given by the uniform convergence. $\bar{B}$ will denote the closure of that B in the topology given by uniform convergence.

Theorem 1,8. *Let $\mathfrak{M}_\infty$, $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{F}$ have the previous meaning. Then*

(a) $\mathfrak{M}_\infty$ and $\mathfrak{M}$ are not closed sets.

(b) $\overline{\mathfrak{M}}_\infty \neq \mathfrak{M}$ and none of the relations $\overline{\mathfrak{M}}_\infty \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M} \subset \overline{\mathfrak{M}}_\infty$ takes place.

Proof. (a) Let $t_k = 2^{-k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Let $\{\varphi_n\}_1^\infty$ be defined by $\varphi_n(t) = k^{-1}$ for $t = 2^{-k}$, $k \leqq n$, $\varphi_n(t) = 0$ for the rest of t, $t \in \langle 0, 1\rangle$. Then the sequence $\{\varphi_n\}_1^\infty$ converges to the function defined by $\varphi(t) = k^{-1}$ for $t = 2^{-k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ and $\varphi(t) = 0$ for $t \in \langle 0, 1\rangle$, $t \neq 2^{-k} (k = 1, 2, \ldots)$. Evidently $\varphi_n \in \mathfrak{M}_\infty \subset \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ but $\varphi \notin \mathfrak{M}$, because $A = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \in \mathfrak{A}$ and $\varphi\{A\} = +\infty$. This proves (a) and simultaneously the non-validity of $\overline{\mathfrak{M}}_\infty \subset \mathfrak{M}$ is shown.

For concluding the proof it suffices to prove the existence of a function $\varphi \in \mathfrak{M}$ not belonging to $\mathfrak{M}_\infty$. Let us define φ by $\varphi(k/(k+1)) = k$ for $k = 1, 2, 3, \ldots$ and $\varphi(t) = 0$ for $t \in \langle 0, 1\rangle$, $t \neq k/(k+1)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Then $\varphi \in \mathfrak{M}$. Actually, if $A = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \in \mathfrak{A}$, then at most for two indexes j, r t_j, $t_r \in \langle 2^{-1}, 1\rangle$, so that in the series $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(t_n)$ all but at most two terms are equal to zero. If there existed a sequence $\{\varphi_n\}_1^\infty$, $\varphi_n \in \mathfrak{M}_\infty$ uniformly converging to the function φ then to each $\varepsilon > 0$ there would exist n_0 such that for each $n \geqq n_0$ and for all $t \in \langle 0, 1\rangle$

$$\varphi(t) - \varepsilon < \varphi_n(t) < \varphi(t) + \varepsilon \tag{7}$$

would hold. Let $\varphi_{n_0} \in \mathfrak{M}_{c_0}$ $(c_0 \geqq 0)$. Let us choose $k > c_0 + \varepsilon$ and put $t = k/(k+1)$, $n = n_0$, then we get from (7)

$$\varphi\left(\frac{k}{k+1}\right) - \varepsilon < \varphi_{n_0}\left(\frac{k}{k+1}\right).$$

Hence

$$c_0 < k - \varepsilon = \varphi\left(\frac{k}{k+1}\right) - \varepsilon < \varphi_{n_0}\left(\frac{k}{k+1}\right).$$

Which is a contradiction, since $\varphi_{n_0} \in \mathfrak{M}_{c_0}$.

Theorem 1,4 shows that the convergence in norm is stronger than the uniform convergence. The following theorem characterises the convergence in norm.

Theorem 1,9. *Let $\{\varphi_n\}_1^\infty$ be a sequence of functions belonging to $\mathfrak{M}_\infty$. Then the sequence $\{\varphi_n\}_1^\infty$ converges to $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$ in the convergence in norm if and only if there exists such right neighbourhood U of the point 0, that the sequence $\{\varphi_n \chi_U\}_{n=1}^\infty$ (χ_U denotes the characteristic function of the set U) converges in the convergence in norm to $\varphi\chi_U$ and $\{\varphi_n\}_1^\infty$ converges uniformly to φ on $\langle 0, 1\rangle - U$.*

Proof. The necessity follows from the theorem 1,4. We prove the sufficiency. Let U be a right neighbourhood of the point 0, $U = \langle 0, \delta)$; let $\{\varphi_n \chi_U\}_1^\infty$ converges to $\varphi\chi_U$ in the convergence in norm and $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ ($\rightrightarrows$ is the symbol of uniform convergence) on $\langle 0, 1\rangle - U$. Let $A = \sum_{k=1}^\infty t_k \in \mathfrak{A}$. Then interval $\langle \delta, 1\rangle = \langle 0, 1\rangle - U$ contains at most $[\delta^{-1}]$ terms of the sequence $\{t_k\}_1^\infty$. Let $t_{k_1}, t_{k_2}, \ldots, t_{k_s}$ $(k_1 < k_2 < \ldots < k_s)$ are those terms. In view of the convergence in norm of $\{\varphi_n \chi_U\}_1^\infty$ we know that to each $\varepsilon > 0$ there exists $n_1(\varepsilon)$ such that $\left|\sum_{i=1}^{\infty}{}' (\varphi_n(t_i) - \varphi(t_i)\right| < \varepsilon/2$ for $n > n_1(\varepsilon)$. The dash appearing at the symbol $\sum$ denotes that the summation is made for $i \neq k_1, k_2, \ldots, k_s$. Further according to the uniform convergence of $\{\varphi_n\}_1^\infty$ on $\langle \delta, 1\rangle$, the existence of $n_2(\varepsilon)$ follows such that for $n > n_2(\varepsilon)$,

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2[1/\delta]}, \quad t \in \langle \delta, 1\rangle .$$

Then for $n > \max(n_1/\varepsilon), n_2(\varepsilon))$ we have

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_n(t_i) - \varphi(t_i)\right| \leqq \left|\sum_{i=1}^{\infty}{}' (\varphi_n(t_i) - \varphi(t_i)\right| +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s} |\varphi_n(t_{k_j}) - \varphi(t_{k_j})| < \frac{\varepsilon}{2} + s\frac{\varepsilon}{2[1/\delta]} \leqq \varepsilon .$$

From the last inequality the assertion of the theorem immediately follows.

The following theorem is motivated by the preceding one.

Theorem 1,10. *A function φ defined and bounded on $\langle 0, 1\rangle$ belongs to $\mathfrak{M}_\infty$ if and only if there exists a right neighbourhood U of zero and a function $\varphi_1 \in \mathfrak{M}_\infty$ such that $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ for $x \in U$.*

Proof. Evidently it is sufficient to show that if φ is bounded on $\langle 0, 1\rangle$ and in some neighbourhood $U = \langle 0, \delta)$ of zero $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ where $\varphi_1 \in \mathfrak{M}_\infty$, then $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$. Let $|\varphi(x)| \leqq K$ for $x \in \langle 0, 1\rangle$ and $\varphi_1 \in \mathfrak{M}_c$. Let $A = \sum_{k=1}^\infty t_k \in \mathfrak{A}$. Then in the interval

$\langle\delta, 1\rangle$ is at most $[1/\delta]$ terms of the sequence $\{t_k\}_1^\infty$. Let us denote those terms $t_{k_1}, \ldots, t_{k_s}$, $s \leqq [1/\delta]$. Then

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(t_k)\right| \leqq \left|\sum_{i=1}^{\infty}{}' \varphi_1(t_i)\right| + \sum_{j=1}^{s} |\varphi(t_{k_j})| ,$$

where $\sum'$ denotes that i runs over all positive integers with the exception of $k_1, k_2, \ldots, k_s$. According to the fact that $\varphi_1 \in \mathfrak{M}_c$ and in view of boundedness of φ we get

$$|\varphi\{A\}| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(t_k)\right| \leqq c + sK$$

where c, s, K on the right side are independent on A. Hence $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$ and $\|\varphi\| \leqq \leqq c + sK$.

If $M(0, 1)$ denotes the metric space of all bounded functions on $\langle 0, 1\rangle$ with the metric $\varrho(f, g) = \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} |f(t) - g(t)|$ then according to the theorem 1,1 (see (3)) $\mathfrak{M}_\infty$ is included in $\mathfrak{M}(0, 1)$. The set $\mathfrak{M}_\infty$ is not a closed subset of $M(0, 1)$ (see theorem 1,8, the proof of (a)). But the following theorem may be proved.

Theorem 1,11. *Let $M_1(0, 1)$ be the set of all the functions $\varphi \in M(0, 1)$ for which $\lim_{t\to 0+} \varphi(t) = \varphi(0) = 0$. Then $\overline{\mathfrak{M}}_\infty = M_1(0,1)$ ($\overline{\mathfrak{M}}_\infty$ denotes the closure in the space $M(0, 1)$).*

Proof. We have $\mathfrak{M}_\infty \subset M_1(0, 1) = \overline{M_1(0, 1)}$ (see the corollary following theorem 1,1), so that $\overline{\mathfrak{M}}_\infty \subset M_1(0, 1)$. Now, let $\varphi \in M_1(0, 1)$. Let us define φ_n ($n = = 1, 2, 3, \ldots$) by $\varphi_n(t) = 0$ for $t \in \langle 0, 1/n\rangle$ and $\varphi_n(t) = \varphi(t)$ for $t \in (1/n, 1\rangle$. In view of Theorem 1,10, $\varphi_n \in \mathfrak{M}_\infty$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) and evidently $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ on $\langle 0, 1\rangle$. Hence $M_1(0, 1) \subset \overline{\mathfrak{M}}_\infty$. Thus $\overline{\mathfrak{M}}_\infty = M_1(0, 1)$ is proved.

In connection with the above mentioned Rado's result let $\mathfrak{L}$ denote the set of all such functions φ which have the following property: $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$ and there exists $\delta = = \delta(\varphi)$ such that φ is linear on the interval $\langle 0, \delta(\varphi)\rangle$. As we have seen $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{M}_\infty$. But it is not difficult to prove the following theorem showing that as for the approximations in the space $M(0, 1)$ the sets $\mathfrak{L}(\subset \mathfrak{M}_\infty)$ and $\mathfrak{M}_\infty$ are of the same value.

Theorem 1,12. *Let $\mathfrak{L}$ and $\mathfrak{M}_\infty$ have the previous meaning. Then $\overline{\mathfrak{L}} = \overline{\mathfrak{M}}_\infty (= M_1(0,1))$ (in the sense of uniform convergence).*

Proof. Let $f \in \mathfrak{M}_\infty$. Then to each positive integer n, there exists an interval $\langle 0, \delta_n\rangle$ in which $|f(x)| < 1/n$. Let us define g_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) on $\langle 0, 1\rangle$ by $g_n(x) = = f(x)$ if $x \notin \langle 0, \delta_n\rangle$ and $g_n(x) = x/n\delta_n$ if $x \in \langle 0, \delta_n\rangle$. Evidently $g_n \rightrightarrows f$ on $\langle 0, 1\rangle$ and $g_n \in \mathfrak{L}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Hence $\mathfrak{M}_\infty \subset \overline{\mathfrak{L}}$. But $\mathfrak{L} \subset M_1(0, 1)$ and so $M_1(0, 1) = = \overline{\mathfrak{M}}_\infty \subset \overline{\mathfrak{L}} = M_1(0, 1)$ and we get $\overline{\mathfrak{M}}_\infty = \overline{\mathfrak{L}}$.

A question appears, if $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}_\infty$ is dense in $\mathfrak{M}_\infty$ (if $\mathfrak{M}_\infty$ is considered as a linear normed space with the norm defined in definition 1,4). We shall show that the answer is negative. The following lemma will be useful.

Lemma 1,1. *Let φ be defined and bounded on $\langle 0, 1\rangle$. Then $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$ if and only if $|\varphi| \in \mathfrak{M}_\infty$.*

Proof. If $|\varphi| \in \mathfrak{M}_\infty$, then evidently $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$. Now, if $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$, then in view of Theorem 1,1 and the boundedness of φ on $\langle 0, 1\rangle$ we obtain the existence of $K > 0$ such, that $|\varphi(t)| \leqq Kt$ for all $t \in \langle 0, 1\rangle$. From the last inequality it follows that $|\varphi| \in \mathfrak{M}_\infty$.

Definition 1,5. Let $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{M}_\infty$. The closure of the set $\mathfrak{E}$ in the sense of the convergence in norm (see the definition 1,4) will be denoted by cl $\mathfrak{E}$.

Theorem 1,13. *Let $\mathfrak{M}_\infty$ denote the linear space with the norm given in the definition 1,4 and let $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}_\infty$ have the previous meaning. Then* cl $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{M}_\infty$.

Proof. Let us put $f^+(x) = \max(0, x \sin(1/x))$ for $x \neq 0$ and $f^+(0) = 0$. Since $f(x) = x \sin(1/x)$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$ belongs to $\mathfrak{M}_\infty$, we have $f^+ \in \mathfrak{M}_\infty$ according to Lemma 1,1 and to the fact that $\mathfrak{M}_\infty$ is a vector space. It will be shown that f^+ is not a limit function (in the sense of the convergence in norm in $\mathfrak{M}_\infty$) of any sequence $\{f_n\}_1^\infty$ of functions belonging to $\mathfrak{L}$. Denote as $\langle 0, \delta_n\rangle$ the interval on which f_n is linear and let $f_n(x) = k_n x$ on that interval. Evidently it suffices to consider the case $k_n \geqq 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Let us consider two cases

1) There exists $\varepsilon_0 > 0$ such that to each N there is $n \geqq N$ such that $k_n > \varepsilon_0$.

2) To each $\varepsilon > 0$ there exists $n_1(\varepsilon)$ such that $k_n \leqq \varepsilon$ for $n \geqq n_1(\varepsilon)$.

If the first case occurs, then there exists an infinite set of indexes n such that $k_n > \varepsilon_0$. These indices form a set N'. If $n \in N'$, choose in the interval $\langle 0, \delta_n\rangle$ points $t_1, t_2, \ldots, t_r$ $(r = r(n))$ such that $1 \geqq t_1 + t_2 + \ldots + t_r \geqq \varepsilon_0/k_n$ and $\sin(1/t_j) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Let us put $t_j = 0$ for $j > r$. Then

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} t_j \in \mathfrak{A}\,, \quad \left|\sum_{j=1}^{\infty} f^+(t_j) - f_n(t_j)\right| = k_n \sum_{j=1}^{r} t_j \geqq \varepsilon_0\,.$$

Hence $\|f^+ - f_n\| \geqq \varepsilon_0$ for an infinite set of indices n $(n \in N')$, so that $\{f_n\}_1^\infty$ does not converge to f^+ in the norm.

Next, consider the second case and let $\varepsilon \leqq 1/3$. Let $\langle 0, \delta_n\rangle$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ have the previous meaning. For $n \geqq n_1(\varepsilon)$ we have $k_n \leqq \varepsilon$. Choose in the interval $\langle 0, \delta_n\rangle$ $(n \geqq n_1(\varepsilon))$ points $t_1, t_2, \ldots, t_s$ $(s = s(n))$ such that

$$\sin\frac{1}{t_i} = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, s)\,, \quad 1 \geqq t_1 + t_2 + \ldots + t_s \geqq \tfrac{2}{3}$$

and put $t_j = 0$ for $j > s$. Then for this n

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f^+(t_j) - f_n(t_j)| \geqq \sum_{j=1}^{s} t_j - \varepsilon \sum_{j=1}^{s} t_j \geqq \tfrac{3}{4}(1 - \varepsilon) > \tfrac{1}{2},$$

$\|f^+ - f_n\| \geqq \frac{1}{2}$ for $n \geqq n_1(\varepsilon)$. Hence $\{f_n\}_1^\infty$ does not converge to f^+ in the norm. The proof is finished.

2. THE SPACE $\mathfrak{M}_\infty$ AS AN INTERSECTION OF CERTAIN QUOTIENT SPACES

We shall show, that $\mathfrak{M}_\infty$ may be considered as an intersection of certain quotient spaces. At first we prove some general theorems concerning these spaces.

Under a quotient space on a vector space $\mathfrak{X}$ we shall undestand the set of all the equivalence classes formed by means of a subspace of the space $\mathfrak{X}$. The subspace by means of which the quotient space will be formed will be called the zero class of the quotient space. Under the operations of forming sums and multiplying by a real number, which are assumed to be defined in the usual way on the equivalence classes, the quotient space is a vector space (see [2] p. 25). If a metric or a norm on such quotient space is given then the latter will be called a quotient space with metric or norm respectively.

Remark 2,1. If $T \neq \emptyset$ and $\mathfrak{X}_t$ is a quotient space for $t \in T$, whose zero class is O_t, then $O^* = \bigcap_{t \in T} O_t$ is a subspace of the space $\mathfrak{X}$ (see e.g. [2] p. 23).

Definition 2,1. The quotient space $\mathfrak{X}^*$ formed by means of the subspace O^* will be called the intersection of quotient spaces $\mathfrak{X}_t$.

Theorem 2,1. *A set $C \subset \mathfrak{X}$ belongs to the intersection of the quotient spaces $\mathfrak{X}_t$ if and only if for each $t \in T$ there exists $C_t \in \mathfrak{X}_t$ such that $\bigcap_{t \in T} C_t \neq \emptyset$ and $C = \bigcap_{t \in T} C_t$. The latter representation of the set C by means of C_t $(t \in T)$ is unique.*

Proof. Let $C \in \mathfrak{X}^*$. Then $C \neq \emptyset$. If x is an arbitrarily chosen element in C, then for each $t \in T$ there exists a class $C_t \in \mathfrak{X}_t$ such that $x \in C_t$. Such class there is just one. If $y \in C$, then y belongs to the same class C_t $(t \in T)$ because $y - x \in O^* \subset O_t$. Thus $C \subset C_t$ $(t \in T)$ and from this inclusion $C \subset \bigcap_{t \in T} C_t$ follows immediately. Now, if $x, y \in \bigcap_{t \in T} C_t$, then $y - x \in O_t$ for each $t \in T$, consequently $y - x \in O^*$. The intersection $\bigcap_{t \in T} C_t$ contains all mutually equivalent (modulo O^*) elements. The last fact implies that $\bigcap_{t \in T} C_t$ is included in some class of $\mathfrak{X}^*$. From the disjointness of these classes we have $C = \bigcap_{t \in T} C_t$. Each class $C \in \mathfrak{X}^*$ may be represented in the form $C = \bigcap_{t \in T} C_t$, $C_t \in \mathfrak{X}_t$ $(t \in T)$. The uniqueness is seen from the proof.

Now, let $C = \bigcap_{t\in T} C_t \neq \emptyset$, $C_t \in \mathfrak{X}_t$ $(t \in T)$. We shall show that $C \in \mathfrak{X}^*$. From the preceding part of the proof it follows that $C = \bigcap_{t\in T} C_t \subset C'$, where $C' \in \mathfrak{X}^*$. Let $x \in C$ and $y \in C'$. Then $y - x \in O^*$ in view of the definition of C'. Hence $y - x \in O_t$ for each $t \in T$. Since $x \in C_t$, then also $y \in C_t$, for each t and we have $y \in C = \bigcap_{t\in T} C_t$, so that $C' \subset C$, $C' = C$.

Theorem 2,2. *Let $(\mathfrak{X}_t, \varrho_t)$ for $t \in T$ be quotient spaces on $\mathfrak{X}$ with metric ϱ_t. Let $\varrho(C, D) = \sup_{t\in T} \{\varrho_t(C_t, D_t)\} < +\infty$ for any two elements $C, D \in \mathfrak{X}^*$ $(C_t, D_t, t \in T$ are those elements of the space $\mathfrak{X}_t$ for which $C \subset C_t$, $D \subset D_t)$. Then $(\mathfrak{X}^*, \varrho)$ is a metric space.*

Proof. We shall prove that ϱ is a metric.

(a) Evidently $\varrho(C, D) \geqq 0$. If $\varrho(C, D) = 0$, then $\varrho_t(C_t, D_t) = 0$ for each $t \in T$ and $C_t = D_t$ $(t \in T)$ follows. From Theorem 2,1 $C = D$. If $C = D$ then again in view of Theorem 2,1 $C_t = D_t$ for each $t \in T$ consequently $\varrho(C, D) = 0$.

(b) The symmetry of ϱ is evident.

(c) Let $C, D \in \mathfrak{X}^*$. Then $\varrho(C, E) = \sup_{t\in T} \{\varrho_t(C_t, E_t)\}$, where $C = \bigcap_{t\in T} C_t$, $D = \bigcap_{t\in T} D_t$, $E = \bigcap_{t\in T} E_t$. Since ϱ_t is a metric on $\mathfrak{X}_t$, we have for each $t \in T$

$$\varrho_t(C_t, E_t) \leqq \varrho_t(C_t, D_t) + \varrho_t(D_t, E_t) \leqq \varrho(C, D) + \varrho(D, E),$$

hence

$$\varrho(C, E) = \sup_{t\in T} \{\varrho_t(C_t, E_t)\} \leqq \varrho(C, D) + \varrho(D, E).$$

Theorem 2,3. *Let $(\mathfrak{X}_t, \varrho_t)$ $(t \in T)$ be linear normed spaces (the norm $\|Y\|_t$ on $\mathfrak{X}_t$ is given by $\|Y\|_t = \varrho_t(Y, O_t)$) and let $\varrho(C, D) = \sup_{t\in T} \{\varrho_t, (C_t, D_t)\}$ for any $C, D \in \mathfrak{X}^*$, $C = \bigcap_{t\in T} C_t$, $D = \bigcap_{t\in T} D_t$. Then $(\mathfrak{X}^*, \varrho)$ is a normed space (with the norm $\|Y\| = \varrho(Y, O^*)$).*

Proof. *a*) We shall show that for k complex $\varrho(kC, O^*) = |k|\, \varrho(C, O^*)$ holds. Let $C \in \mathfrak{X}^*$, then $C = \bigcap_{t\in T} C_t$, $C_t \in X_t$, $kC = \bigcap_{t\in T} kC_t$, $\varrho(kC, O^*) = \sup_{t\in T} \{\varrho_t(kC_t, O_t)\} = |k| \sup_{t\in T} \{\varrho_t(C_t, O_t)\} = |k|\, \varrho(C, O^*)$.

b) If $C, D, E \in \mathfrak{X}^*$, then $\varrho(C + E, D + E) = \varrho(C, D)$. In fact, $\varrho(C + E, D + E) = \sup_{t\in T} \{\varrho_t(C_t + E_t, D_t + E_t)\}$, where $C = \bigcap_{t\in T} C_t$, $D = \bigcap_{t\in T} D_t$, $E = \bigcap_{t\in T} E_t$. Since $\varrho_t(C_t + E_t, D_t + E_t) = \varrho_t(C_t, D_t)$, for each $t \in T$ we have $\varrho(C + E, D + E) = \sup_{t\in T} \{\varrho_t(C_t, D_t)\} = \varrho(C, D)$.

Remark 2,2. If $O^* = \{0\}$ in the previous considerations (0 is the zero element of the space $\mathfrak{X}$), then the corresponding space $\mathfrak{X}^*$ has the onepoint sets as elements. In such case we shall identify $\mathfrak{X}^*$ with $\mathfrak{X}$.

Now we show that $\mathfrak{M}_\infty$ may be considered as an intersection of certain quotient spaces. For the set T, the set of all sequences $t = \{t_k\}_{k=1}^\infty$ with $A = \sum_{k=1}^\infty t_k \in \mathfrak{A}$ will be taken. If $t = \{t_k\}_1^\infty \in T$ then O_t denotes the set of all those functions φ for which $\varphi(t_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. O_t is evidently a subspace in $\mathfrak{M}_\infty$ so that we may form by means of the last a quotient space $\mathfrak{M}_t$. To show that $\mathfrak{M}_\infty$ is the intersection of quotient spaces $\mathfrak{M}_t$ $(t \in T)$ it suffices (according to the last remark) to show that $O^* = \{0\}$, 0 denotes the function which is identically zero on $\langle 0, 1 \rangle$). Let $\varphi \in O^*$, then $\varphi(t) = 0$ for each $t \in \langle 0, 1 \rangle$. In fact, it suffices to form a sequence $\{t_k\}_1^\infty$, in which $t_1 = t$, $t_k = 0$ for $k > 1$ and to note that $\varphi \in O_t$.

The metric ϱ_t in $\mathfrak{M}_t$ will be given as follows: If $D_t, E_t \in \mathfrak{M}_t$ $(t = \{t_k\}_1^\infty, \sum_1^\infty t_k \in \mathfrak{A})$, then $\varrho_t(D_t, E_t) = \sum_{k=1}^\infty |\varphi(t_k) - \psi(t_k)|$, where $\varphi \in D_t$, $\psi \in E_t$. It is easily seen that ϱ_t is independent of the choire of φ and ψ. The condition $\sup_{t \in T} \{\varrho_t(D_t, E_t)\} < +\infty$ follows from the fact that $\varphi - \psi \in \mathfrak{M}_\infty$ and consequently $|\varphi - \psi| \in \mathfrak{M}_\infty$ (see Lemma 1,1). To prove that ϱ_t is a metric makes no difficulties. Evidently $\varrho_t(D_t, E_t) = 0$ if and only if $\varphi(t_k) = \psi(t_k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ but the last equality holds exactly if φ and ψ are from the same class. The symmetry and the triangular inequality are evident. It is also easily seen that $(\mathfrak{X}_t, \varrho_t)$ are normed spaces with the norm $\|D_t\| = \varrho_t(D_t, O_t)$. Thus the space $\mathfrak{M}_\infty$ with the metric $\varrho(\varphi, \psi) = \sup_{t \in T} \{\varrho_t(D_t, E_t)\}$, where $\varphi = \bigcap_{t \in T} D_t$, $\psi = \bigcap_{t \in T} E_t$ (we identify f and $\{f\}$) is in view of Theorem 2,3 a linear normed space with the norm $\|\varphi\|_1 = \sup_{t \in T} \sum_{k=1}^\infty |\varphi(t_k)|$. The norm $\|\varphi\|_\infty$ was defined on the space $\mathfrak{M}_\infty$ by $\|\varphi\| = \sup_{t \in T} \left|\sum_{k=1}^\infty \varphi(t_k)\right|$. It is immediately seen that on the sets of all nonnegative and nonpositive functions respectively the norms $\|\varphi\|$ and $\|\varphi\|_1$ are identical. In general this is not the case. If we put e.g. $\varphi(3/4) = 2$, $\varphi(1/4) = -1$, $\varphi(t) = 0$ for the rest of $t \in \langle 0, 1 \rangle$, then $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$, $\|\varphi\| = 2$, $\|\varphi\|_1 = 3$. But the following theorem shows that from the topological point of view, there is no difference between these two norms.

Theorem 2,4. *The convergence induced by the norm* $\|\varphi\|$ *is equivalent with that induced by* $\|\varphi\|_1$.

Proof. It suffices to prove the equivalence of convergences for sequences which converge to zero. Since $\|\varphi\| \leq \|\varphi\|_1$ we see that the convergence in norm of $\{\varphi_n\}_1^\infty$ induced by $\|\varphi\|_1$ implies the convergence in norm $\|\varphi\|$. Now, let $\{\varphi_n\}_1^\infty$ converge to 0 in the sense of the norm $\|\varphi\|$ i.e. $\lim_{n \to \infty} \|\varphi_n\| = 0$. To each $\varepsilon > 0$ there exists n_0 such that for $n > n_0$ and each $t = \{t_k\}_1^\infty \in T$ we have

$$(8) \qquad \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_n(t_k)\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Let $t^0 = \{t_k^0\}_1^\infty \in T$. Let us form a sequence $\{t_{k_l}^0\}_l$ from those t_k^0 for which $\varphi_n(t_k^0) \geqq 0$ and a sequence $\{t_{m_j}^0\}_j$ from those ones for which $\varphi_n(t_k^0) < 0$. Both of these sequence (after completing by zero terms if some of them is finite) belong to T and (8) implies

$$\sum_l \varphi_n(t_{k_l}^0) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \Big|\sum_j \varphi_n(t_{m_j}^0)\Big| = \sum_j \big|\varphi_n(t_{m_j}^0)\big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hence $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_n(t_k^0)| = \sum_l \varphi_n(t_{k_l}^0) + \sum_j \varphi_n(t_{m_j}^0)$ and we get $\|\varphi_n\|_1 \leqq \varepsilon$ for $n > n_0$, so $\|\varphi_n\|_1 \to 0$ as $n \to \infty$.

In Theorem 1,7 the completness of the space $\mathfrak{M}_\infty$ with the norm $\|\varphi\|$ was proved. From the last fact and from Theorem 2,4 the completeness of $\mathfrak{M}_\infty$ with the norm $\|\varphi\|_1$ follows.

Now we shall prove two theorems concerning the completeness and separability of general quotient spaces.

Definition 2,2. Let $\{C_t\}$, $t \in T$ be a system containing for each $t \in T$ just one element of $\mathfrak{X}_t$. The system $\{C_t\}$, $t \in T$ will be called uniformly attainable if to each $t \in T$ there exists a sequence $\{C_t^n\}_{n=1}^\infty$ of elements of $\mathfrak{X}_t$ such that $\lim_{n\to\infty} C_t^n = C_t$ uniformly with respect to $t \in T$ and $\bigcap_{t\in T} C_t^n \neq \emptyset$.

Theorem 2,5. *Let $(\mathfrak{X}_t, \varrho_t)$ for $t \in T$ be complete linear metric spaces. The intersection $(\mathfrak{X}^*, \varrho)$ of the spaces $(\mathfrak{X}_t, \varrho_t)$ is complete if and only if each uniformly attainable system $\{C_t\}$, $t \in T$ has a nonempty intersection ($\bigcap_{t\in T} C_t \neq \emptyset$).*

Proof. Let each uniformly attainable system $\{C_t\}$, $t \in T$ have a nonempty intersection. Let $\{C^n\}_{n=1}^\infty$ be a fundamental sequence of elements of $\mathfrak{X}^*$. To $\varepsilon > 0$ there exists $n_0(\varepsilon)$ such that for $m, n \geqq n_0(\varepsilon)$

$$(9) \qquad \varrho(C^m, C^n) = \sup_{t\in T} \{\varrho_t(C_t^m, C_t^n)\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

holds, where $C^m = \bigcap_{t\in T} C_t^m$, $C^n = \bigcap_{t\in T} C_t^n$. (9) implies

$$(10) \qquad \varrho_t(C_t^m, C_t^n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (m, n \geqq n_0(\varepsilon))$$

for each $t \in T$. Since $\mathfrak{X}_t$ is complete, there exists $C_t \in \mathfrak{X}_t$ such that $\lim_{n\to\infty} C_t^n = C_t$.

Simultaneously from (10) it is seen that the convergence is uniform with respect to $t \in T$, so that if $n \geqq n_0(\varepsilon)$ then (10) implies $\varrho_t(C_t^n, C_t) \leqq \varepsilon/2 < \varepsilon$ for each $t \in T$. The last inequality implies $\sup_{t \in T} \{\varrho_t(C_t^n, C_t)\} < \varepsilon$ for $n \geqq n_0(\varepsilon)$. According to the assumption $\bigcap_{t \in T} C_t \neq \emptyset$ holds. Let us put $C = \bigcap_{t \in T} C_t$. Then $\{C^n\}_{n=1}^{\infty}$ converges to C because $\varrho(C^n, C) \doteq \sup_{t \in T} \{\varrho_t(C_t^n, C_t)\} < \varepsilon$ for $n \geqq n_0(\varepsilon)$. The completeness of the space $(\mathfrak{X}^*, \varrho)$ is proved.

Let $(\mathfrak{X}^*, \varrho)$ be complete and let $\{C_t\}$, $t \in T$ be a uniformly attainable system. By the definition of $\{C_t\}$, $t \in T$, for each $t \in T$ there exists a sequence $\{C_t^n\}_{n=1}^{\infty}$ of elements of X_t such that

$$\lim_{n \to \infty} \varrho_t(C_t^n, C_t) = 0 \tag{11}$$

uniformly with respect to $t \in T$ and $C^n = \bigcap_{t \in T} C_t^n \neq \emptyset$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Since $\varrho(C^m, C^n) = \doteq \sup_{t \in T} \{\varrho_t(C_t^m, C_t^n)\}$ and since $\{C_t^n\}_{n=1}^{\infty}$ are uniformly fundamental with respect to $t \in T$, the sequence $\{C^n\}_{n=1}^{\infty}$ is fundamental in $\mathfrak{X}^*$. Due to the completness of the space $(\mathfrak{X}^*, \varrho)$, there exists $C \in \mathfrak{X}^*$ such that

$$\lim_{n \to \infty} C^n = C \in \mathfrak{X}^* \tag{12}$$

In view of Theorem 2,1, $C = \bigcap_{t \in T} C'_t$, $C'_t \in \mathfrak{X}_t$. We shall show that $C'_t = C_t$ for each $t \in T$ and consequently $C = \bigcap_{t \in T} C_t \neq \emptyset$. Thus, it suffices to prove $C'_t = C_t$ for each $t \in T$. According to the definition of the metric, (12) implies $\lim_{n \to \infty} \varrho_t(C_t^n, C_t) = 0$ for each $t \in T$ and using (11) we get $C_t = C'_t$ in view of the uniqueness of the limit.

Theorem 2,6. *A necessary condition for the separability of the space $(\mathfrak{X}^*, \varrho)$ is the separability of the spaces $(\mathfrak{X}_t, \varrho_t)$.*

Proof. Let $(\mathfrak{X}^*, \varrho)$ be separable and let $t_0 \in T$. Let $\mathfrak{M}$ be a countable and dense set in $\mathfrak{X}^*$. Let $\mathfrak{M}_{t_0}$ denote the set of all those $C_{t_0} \in \mathfrak{X}_{t_0}$ which appear in the intersections $C = \bigcap_{t \in T} C_t$, where $C \in \mathfrak{M}$. Evidently $\mathfrak{M}_{t_0}$ is countable. We shall show that $\mathfrak{M}_{t_0}$ is dense in $\mathfrak{X}_{t_0}$. Let $D_{t_0} \in \mathfrak{X}_{t_0}$, then there exists $D \in \mathfrak{X}^*$ such that $D \subset D_{t_0}$. To each $\varepsilon > 0$ there exists $C \in \mathfrak{M}$ such that $\varrho(C, D) < \varepsilon$. The existence of such C follows from the density of $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{X}^*$. Among the terms C_t appearing in the intersection $\bigcap_{t \in T} C_t$ the term $C_{t_0} \in \mathfrak{M}_{t_0}$ appears. According to the definition of the metric ϱ we have $\varrho_{t_0}(C_{t_0}, D_{t_0}) \leqq \varrho(C, D) < \varepsilon$. Hence $(\mathfrak{X}_{t_0}, \varrho_{t_0})$ is a separable space. The proof is finished.

Remark 2,3. The condition stated in the preceding theorem is not sufficient. We shall show it on an example. An example is furnished by the space $\mathfrak{M}_\infty$ serve. $\mathfrak{M}_\infty$

will be considered as the intersection of the quotient spaces $\mathfrak{M}_t$, $t \in T$, $t = \{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \in \mathfrak{A}$, $\|C_t\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(t_k)|$, where φ is some representative of the class C_t. It is immediately seen that if $t \in T$ is fixed then $\mathfrak{X}_t = \mathfrak{M}_t$ is isometric with the space l_1 of all sequences $x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ for which $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < +\infty$ with the norm $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$. It is well known that l_1 is separable and consequently $\mathfrak{M}_t = \mathfrak{X}_t$ is separable space. In spite of it $\mathfrak{M}_\infty$ is not separable. It suffices to consider in $\mathfrak{M}_\infty$ the subset $\mathfrak{M}^*$ of all such $\varphi \in \mathfrak{M}_\infty$ which assume values 0 and 1 at the point of the form $k/(k+1)$ and 0 at other points. Evidently $\mathfrak{M}^*$ is an uncountable subset of $\mathfrak{M}_\infty$ and the distance of any two points of $\mathfrak{M}^*$ is $\geqq 1$.

References

[1] *R. Rado:* A theorem on infinite series, J. London Math. Soc. *XXXV* (1960), 273—276.
[2] *M. Katětov:* Přednášky z funkcionální analýsy (skriptum), Praha, 1957 I. část.

Authors' address: Bratislava Šmeralova 2, (Prírodovedecká fakulta UK).

Výťah

O ISTÝCH PRIESTOROCH TRANSFORMÁCIÍ NEKONEČNÝCH RADOV

TIBOR NEUBRUNN a TIBOR ŠALÁT, Bratislava

Označme znakom $\mathfrak{A}$ systém všetkých nekonečných radov $A = \sum_{n=1}^{\infty} t_n$, $0 \leqq t_n \leqq 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, ktorých súčty neprevyšujú číslo 1. Nech pri $c \geqq 0$ $\mathfrak{M}_c$ značí systém všetkých reálnych funkcií φ definovaných na $\langle 0, 1 \rangle$, ktoré majú tú vlastnosť, že pre každý rad $A = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \in \mathfrak{A}$ je $|\varphi\{A\}| = |\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(t_n)| \leqq c$. Položme $\mathfrak{M}_\infty = \bigcup_{c \geqq 0} \mathfrak{M}_c$ a na množine $\mathfrak{M}_\infty$ definujme reálnu funkciu $\|\varphi\|$ takto: $\|\varphi\| = \sup_{A \in \mathfrak{A}} |\varphi\{A\}|$. V práci sa dokazuje, že $\|\varphi\|$ je norma a $\mathfrak{M}_\infty$ s touto normou je Banachov lineárny priestor. V práci sa podrobne študujú vlastnosti tohoto priestoru a dokazuje sa, že $\mathfrak{M}_\infty$ možno chápať aj ako prenik istých faktorových priestorov.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ

ТИБОР НОЙБРУНН и ТИБОР ШАЛАТ, Братислава

Пусть $\mathfrak{A}$ обозначает множество всех бесконечных рядов $A = \sum_1^\infty t_n$, $0 \leqq t_n \leqq 1$, $(n = 1, 2, \ldots)$, суммы которых небольше 1.

Пусть $\mathfrak{M}_c$ $(c \geqq 0)$ обозначает множество всех действительных функции φ, определенных на отрезке $\langle 0, 1 \rangle$ и имеющих следующее свойство: для всякого $A = \sum_1^\infty t_n \in \mathfrak{A}$ имеет место неравенство $|\varphi\{A\}| = |\sum_1^\infty \varphi(t_n)| \leqq c$. Пусть $\mathfrak{M}_\infty = \bigcup_{c \geqq 0} \mathfrak{M}_c$. Если на множестве $\mathfrak{M}_\infty$ определим действительную функцию $\|\varphi\|$ следующим образом $\|\varphi\| = \sup_{A \in \mathfrak{A}} |\varphi\{A\}|$, то эта функция является нормой, и $\mathfrak{M}_\infty$ с этой нормой является линейным пространством Банаха. В работе детально изучаются свойства этого постранства и показывается что $\mathfrak{M}_\infty$ можно рассматривать как пересечение определенного вида фактор-пространств.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

MIERY V KARTÉZSKYCH SÚČINOCH

IGOR KLUVÁNEK, Košice

(Došlo 20. ledna 1966)

V niektorých súvislostiach je zaujímavá nasledujúca otázka.

Dané sú merateľné priestory $(X, \mathscr{S})$ a $(Y, \mathscr{T})$ a funkcia λ na systéme $\mathscr{Q}$ všetkých množín tvaru $E \times F$, $E \in \mathscr{S}$, $F \in \mathscr{T}$. Predpokladáme, že $\lambda(E \times F)$ pri každom pevnom $F \in \mathscr{T}$ je spočetne aditívna na $\mathscr{S}$ ako funkcia E a pri každom $E \in \mathscr{S}$ je spočetne aditívna na $\mathscr{T}$ ako funkcia F. Otázka je, či je λ spočetne aditívna na $\mathscr{Q}$ ako funkcia $E \times F$.

V tomto článku je daná kladná odpoveď na túto otázku pre prípad, že sa jedná o systémy $\mathscr{S}$, $\mathscr{T}$ bairovských množín v lokálne kompaktných priestoroch X, Y a za ďalších predpokladov o regulárnosti pre prípad borelovských množín.

Terminológia z teórie miery je v súlade s [1].

V ďalšom X a Y sú lokálne kompaktné Hausdorffove priestory, $Z = X \times Y$. Ďalej $\mathscr{S}_0$, resp. $\mathscr{S}$ značí systém všetkých bairovských, resp. borelovských množín v X. Podobný význam má $\mathscr{T}_0$ a $\mathscr{T}$ v Y a $\mathscr{W}_0$ a $\mathscr{W}$ v Z.

Označme

$$\mathscr{Q}_0 = \{E \times F : E \in \mathscr{S}_0, F \in \mathscr{T}_0\}, \quad \mathscr{Q} = \{E \times F : E \in \mathscr{S}, F \in \mathscr{T}\}.$$

Ak λ je nejaká funkcia na $\mathscr{Q}_0$, pre ľubovoľnú $E \in \mathscr{S}_0$ znak ${}_E\lambda$ bude znamenať funkciu na $\mathscr{T}_0$ definovanú rovnosťou ${}_E\lambda(F) = \lambda(E \times F)$.

Podobne pre $F \in \mathscr{T}_0$ označíme λ_F funkciu na $\mathscr{S}_0$, pre ktorú $\lambda_F(E) = \lambda(E \times F)$.

Podobné definície prijímame i pre funkciu λ na $\mathscr{Q}$.

Ešte označíme $\mathscr{R}_0$, resp. $\mathscr{R}$ najmenší okruh množín, obsahujúci $\mathscr{Q}_0$, resp. $\mathscr{Q}$. Je známe [1; Theorem 33 E], že $\mathscr{R}_0$, resp. $\mathscr{R}$ pozostáva zo všetkých množín tvaru

$$G = \bigcup_{i=1}^{k} E_i \times F_i, \tag{1}$$

kde $\{E_i \times F_i\}$ je konečný systém navzájom disjunktných množín z $\mathscr{Q}_0$, resp. $\mathscr{Q}$.

Ak λ je aditívna funkcia na $\mathscr{Q}_0$, resp. $\mathscr{Q}$, potom na $\mathscr{R}_0$, resp. $\mathscr{R}$ existuje práve jedna aditívna funkcia ν taká, že ν sa zhoduje s λ na $\mathscr{Q}_0$, resp. $\mathscr{Q}$. Funcia ν je definovaná rovnosťou

$$\nu(G) = \sum_{i=1}^{k} \lambda(E_i \times F_i), \tag{2}$$

pre každú množinu G vyjadrenú v tvare (1) [1; Exercise 8.5].

Veta 1. *Nech λ je funkcia na $\mathscr{Q}_0$ s vlastnosťami:*

(i) *Hodnoty λ sú nezáporné reálne čísla alebo ∞, pričom $\lambda(C \times D) < \infty$ pre ľubovoľné kompaktné $C \in \mathscr{S}_0$, $D \in \mathscr{T}_0$.*

(ii) *Pre každé $E \in \mathscr{S}_0$ je ${}_E\lambda$ σ-aditívna na $\mathscr{T}_0$.*

(iii) *Pre každé $F \in \mathscr{T}_0$ je λ_F σ-aditívna na $\mathscr{S}_0$.*

Potom je λ σ-aditívna na $\mathscr{Q}_0$.

Dôkaz. Ľahko sa zistí, že λ na $\mathscr{Q}_0$ je aditívna funkcia [1; Theorem 33 D, Exercise 75] a teda i funkcia ν definovaná rovnosťou (2) na $\mathscr{R}_0$ je aditívna .

Dokážeme tvrdenie:

(A) *Pre každú množinu $G \in \mathscr{R}_0$ takú, že $\nu(G) < \infty$, a $\varepsilon > 0$ existuje kompaktná množina $C \in \mathscr{R}_0$ a otvorená množina $U \in \mathscr{R}_0$ tak, že $C \subset G \subset U$ a $\nu(U - C) < \varepsilon$. Ak je $\nu(G) = \infty$, pre každé číslo K existuje kompaktná množina $C \in \mathscr{R}_0$ tak, že $C \subset G$ a $\nu(C) > K$.*

Je známe [1; Theorem 52G], že každá miera na $\mathscr{S}_0$ a $\mathscr{T}_0$ je regulárna, čiže platí (A), ak nahradíme $\mathscr{R}_0$ znakom $\mathscr{S}_0$, prípadne $\mathscr{T}_0$. (Pre ohraničené množiny z $\mathscr{S}_0$ prípadne $\mathscr{T}_0$ vyplýva (A) priamo z definície regulárnosti [1; § 52], pre neohraničené zo skutočnosti, že každá bairovská množina je súčtom postupnosti ohraničených bairovských množín.)

Predpokladajme najskôr, že $G = E \times F \in \mathscr{Q}_0$, $\nu(G) < \infty$. Z regulárnosti λ_F vyplýva, že existuje kompaktná množina $C_1 \in \mathscr{S}_0$ a otvorená množina $U_1 \in \mathscr{S}_0$ tak, že $C_1 \subset E \subset U_1$ a $\lambda_F(U_1 - C_1) = \lambda((U_1 - C_1) \times F) < \varepsilon/3$. Ďalej z regulárnosti ${}_{U_1}\lambda$ vyplýva existencia otvorenej množiny $U_2 \in \mathscr{T}_0$ takej, že $F \subset U_2$ a $\lambda(U_1 \times (U_2 - F)) < \varepsilon/3$. Konečne z regulárnosti ${}_{C_1}\lambda$ vyplýva existencia takej kompaktnej množiny $C_2 \in \mathscr{T}_0$, že $C_2 \subset F$ a $\lambda(C_1 \times (F - C_2)) < \varepsilon/3$.

Množina $C_1 \times C_2$ je kompaktná a patrí do $\mathscr{R}_0$, množina $U_1 \times U_2$ je otvorená a patrí do $\mathscr{R}_0$, ďalej $C_1 \times C_2 \subset G \subset U_1 \times U_2$ a $\nu((U_1 \times U_2) - (C_1 \times C_2)) = \lambda(U_1 \times (U_2 - F)) + \lambda((U_1 - C_1) \times F) + \lambda(C_1 \times (U_2 - F)) < \varepsilon$.

Ak teraz G je ľubovoľná množina tvaru (1), $\nu(G) < \infty$, pre laždé $i = 1, 2, \ldots, k$ nájdeme kompaktnú množinu $C^{(i)} \in \mathscr{R}_0$ a otvorenú množinu $U^{(i)} \in \mathscr{R}_0$ tak, aby bolo $C^{(i)} \subset E_i \times F_i \subset U^{(i)}$ a $\nu(U^{(i)} - C^{(i)}) < \varepsilon/k$. Potom bude $C = \bigcup_{i=1}^{k} C^{(i)}$ kompaktná, $U = \bigcup_{i=1}^{k} U^{(i)}$ otvorená, $C \subset G \subset U$; $C, U \in \mathscr{R}_0$ a $\nu(U - C) < \varepsilon$.

Časť tvrdenia (A) týkajúcu sa prípadu $\nu(G) = \infty$ dokážeme podobným postupom z definície regulárnosti ako časť pre prípad $\nu(G) < \infty$.

Z vlastnosti (A) a z aditívnosti ν na $\mathscr{R}_0$ vyplýva σ-aditívnosť na $\mathscr{R}$. To je obsahom vety Alexandrovovej dokázanej napr. v [2; III.5.13] pre prípad, že Z je kompaktný priestor. Ale dôkaz z [2] si vyžaduje iba triviálne úpravy, aby sa hodil i na náš lokálne kompaktný prípad.

Dôsledok 1. *Ak λ je funkcia spĺňajúca predpoklady vety* 1, *na $\mathscr{W}_0$ existuje jediná miera μ_0 a na $\mathscr{W}$ jediná regulárna miera μ taká, že pre $E \times F \in \mathscr{Q}_0$ je $\mu(E \times F) = \mu_0(E \times F) = \lambda(E \times F)$.*

Dôkaz. Funkcia ν je jediné aditívne rozšírenie λ na $\mathscr{R}_0$. Dokázali sme σ-aditívnosť funkcie ν na $\mathscr{R}_0$. Z klasických viet vyplýva (pozri [1; Theorem 13A]), že na σ-okruhu vytvorenom $\mathscr{R}_0$ existuje jediná miera μ_0, ktorá sa zhoduje s ν na $\mathscr{R}_0$. Tento σ-okruh je však $\mathscr{W}_0$ [1; Theorem 51E]. Ďalej bairovská miera μ_0 na $\mathscr{W}_0$ sa dá rozšíriť jediným spôsobom na regulárnu borelovskú mieru μ na $\mathscr{W}$ [1; Theorem 54D].

Dôsledok 2. *Nech λ je funkcia na $\mathscr{Q}$ s vlastnosťami*

(i) *Hodnoty λ sú nezáporné reálné čísla alebo ∞, pričom $\lambda(C \times D) < \infty$ pre kompaktné $C \in \mathscr{S}$, $D \in \mathscr{T}$.*

(ii) *Pre každé $E \in \mathscr{S}$ je ${}_E\lambda$ aditívna a regulárna na $\mathscr{T}$.*

(iii) *Pre každé $F \in \mathscr{T}$ je λ_F aditívna a regulárna na $\mathscr{S}$.*

Potom je λ σ-aditívna na $\mathscr{Q}$ a na $\mathscr{W}$ existuje jediná regulárna miera μ, ktorá sa zhoduje s λ na $\mathscr{Q}$.

Dôkaz. Keďže podľa Alexandrovovej vety z regulárnosti a aditívnosti vyplýva σ-aditívnosť, zúženie na $\mathscr{Q}_0$ (parciálna funkcia) λ_0 funkcie λ spĺňa predpoklady vety. Podľa dôsledku 1 existuje teda jediná regulárna miera μ na $\mathscr{W}$, ktorá sa zhoduje s λ_0 na $\mathscr{Q}_0$.

Nech $E \in \mathscr{S}_0$ je ľubovoľná množina. Ak pre $F \in \mathscr{T}$ položíme $\sigma(F) = \mu(E \times F)$, ľahko sa zistí, že σ je regulárna miera na $\mathscr{T}$, ďalej pre $F \in \mathscr{S}_0$ je $\mu(E \times F) = \lambda_0(E \times F) = \lambda(E \times F)$, čiže $\sigma(F) = {}_E\lambda(F)$, $F \in \mathscr{T}_0$. Keďže regulárne miery na $\mathscr{T}$, ktoré splývajú na $\mathscr{T}_0$, sú totožné [1; Theorem 52H], je $\sigma(F) = {}_E\lambda(F)$ pre $F \in \mathscr{T}$, čo znamená, že $\mu(E \times F) = \lambda(E \times F)$ pre $E \in \mathscr{S}_0$, $F \in \mathscr{T}$.

Teraz pre ľubovoľnú množinu $F \in \mathscr{T}$ uvažujeme o funkcii τ definovanej na $\mathscr{S}$ rovnosťou $\tau(E) = \mu(E \times F)$, $E \in \mathscr{S}$. Zasa je ľahké zistiť, že τ je regulárna na $\mathscr{S}$ a že $\tau(E) = \lambda_F(E)$ pre $E \in \mathscr{S}_0$. Odtiaľ už z jednoznačnosti regulárnej borelovskej miery dostaneme, že $\mu(E \times F) = \lambda(E \times F)$ pre $E \in \mathscr{S}$, $F \in \mathscr{T}$.

Pred vyslovením nasledujúcej vety pripomenieme, že komplexná σ-aditívna funkcia je regulárna, ak jej variácia je regulárna.

Veta 2. *Nech λ je funkcia na $\mathscr{Q}_0$ s vlastnosťami:*

(i) ***Hodnoty λ sú komplexné čísla a príslušná funkcia ν definovaná vzťahom** (2) **je na $\mathscr{R}_0$ ohraničená.***

(ii) *Pre každé $E \in \mathscr{S}_0$ je ${}_E\lambda$ σ-aditívna na $\mathscr{T}_0$.*

(iii) *Pre každé $F \in \mathscr{T}_0$ je λ_F σ-aditívna na $\mathscr{S}_0$.*

Potom je λ σ-aditívna na $\mathscr{Q}_0$ a na $\mathscr{W}_0$ existuje σ-aditívna funkcia μ_0, ktorá sa na $\mathscr{Q}_0$ zhoduje s λ a na $\mathscr{W}$ jediná regulárna σ-aditívna funkcia μ, ktorá sa na $\mathscr{Q}_0$ zhoduje s λ.

Dôkaz. Pretože ν je ohraničená a aditívna na $\mathscr{R}_0$, má na $\mathscr{R}_0$ ohraničenú variáciu $|\nu|$, ktorá je tiež aditívna [2; III. 1.6]. Ukážeme, že pre parciálnu funkciu z funkcie $|\nu|$ branú na $\mathscr{Q}_0$ (túto parciálnu funkciu značíme zasa $|\nu|$) sa splnia predpoklady vety 1.

Predpoklad (i) je zrejme splnený.

Ukážeme, že sa splnia i predpoklady (ii) a (iii). Budeme v ďalšom predpokladať, že ide o reálnu funkciu λ (tedy i ν), pretože môžeme odbaviť reálnu a imaginárnu časť zvlášť.

Nech $E \in \mathscr{S}_0$ je ľubovoľná množina. Nech $\{F_n\}$ je postupnosť disjunktných množín z $\mathscr{T}_0$ a nech $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Keďže $|\nu|$ je nezáporná a aditívna, pre $m = 1, 2, \dots$ je $|\nu|(E \times F) \geqq \sum_{n=1}^{m} |\nu|(E \times F_n)$, odkiaľ $|\nu|(E \times F) \geqq \sum_{n=1}^{\infty} |\nu|(E \times F_n)$. Z druhej strany, nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Existuje $G \in \mathscr{R}_0$ tak, že $G \subset E \times F$ a $|\nu|(E \times F) - \varepsilon < |\nu(G)|$. Nech $G = \bigcup_{n=1}^{k} E'_i \times F'_1$ s disjunktnými $E'_i \times F'_i \in \mathscr{Q}_0$. Potom platí

$$|\nu|(E \times F) - \varepsilon < \Big|\sum_{i=1}^{k} \lambda(E'_i \times F'_i)\Big| \leqq \sum_{i=1}^{k} |\lambda(E'_i \times F'_i)| =$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \Big|\lambda(E'_i \times ((\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \cap F'_i))\Big| = \sum_{i=1}^{k} \Big|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E'_i \times (F_n \cap F'_i))\Big| \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} |\lambda(E'_i \times (F_n \cap F'_i))| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |\nu|(E \times F_n).$$

Vzhľadom na to, že ε je ľubovoľné, máme $|\nu|(E \times F) = \sum_{n=1}^{\infty} |\nu|(E \times F_n)$. Tým je overený predpoklad (ii). Predpklad (iii) sa overí podobne.

Podľa dôsledku 1 existuje jediná regulárna miera $|\mu|$ na $\mathscr{W}$, ktorá sa na $\mathscr{R}_0$ shoduje s $|\nu|$. Keďže $|\nu|$ je ohraničená, je i $|\mu|$ ohraničená.

Zo systému $\mathscr{W}$ urobíme metrický priestor tak, že položíme $\varrho(G_1, G_2) = |\mu|(G_1 - G_2) + |\mu|(G_2 - G_1)$, pre $G_1, G_2 \in \mathscr{W}$ (a samozrejme stotožníme G_1, G_2, ak $\varrho(G_1, G_2) = 0$).

Z nerovnosti $|\nu(G)| \leqq |\nu|(G) = |\mu|(G)$ vyplýva, že ν je rovnomerne spojitá na podpriestore priestoru $\mathscr{W}$, ktorý predstavuje systém $\mathscr{R}_0$. Ďalej je známe, že $\mathscr{R}_0$ je hustá vo $\mathscr{W}_0$ [1; Theorem 13D] a tiež vo $\mathscr{W}$ (v skutočnosti ako množiny v metrickom priestore $\mathscr{W}$ a $\mathscr{W}_0$ splývajú). Dá sa teda ν rozšíriť a to jediným spôsobom na spojitú funkciu μ definovanú na $\mathscr{W}$. Z jej spojitosti sa ľahko odvodí, že je σ-aditívna a regulárna.

Dôsledok 3. *Nech λ je komplexná funkcia na $\mathscr{Q}$ s vlastnosťami:*

(i) *Príslušná funkcia ν je na $\mathscr{R}$ ohraničená.*
(ii) *Pre každé $E \in \mathscr{S}$ je ${}_E\lambda$ na $\mathscr{T}$ aditívna a regulárna.*
(iii) *Pre každé $F \in \mathscr{T}$ je λ_F na $\mathscr{S}$ aditívna a regulárna.*

Potom je λ σ-aditívna na $\mathscr{Q}$ a na $\mathscr{W}$ existuje jediná regulárna σ-aditívna funkcia μ, ktorá sa shoduje s λ na $\mathscr{Q}$.

Dôkaz je podobný ako pre dôsledok 2, preto podrobnosti vynecháme.

Literatúra

[1] *Halmos P. R.:* Measure Theory. Van Nostrand, New York 1950.
[2] *Dunford N., Schwartz J. T.:* Linear Operators. Part I. General Theory. Interscience Publ. New York, London 1958.

Adresa autora: Košice, Nám. Februárového víťazstva 9 (Univerzita P. J. Šafárika).

Резюме

МЕРЫ В ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВ

ИГОРЬ КЛУВАНЕК (Igor Kluvánek), Кошице

Пусть X, Y — локально компактные хаусдорфовые пространства и пусть $Z = X \times Y$. Далее, пусть $\mathscr{Q}$ система всех множеств $G = E \times F$ где $E \subset X$, $F \subset Y$ борелевские множества.

Если λ такая функция на $\mathscr{Q}$ что $E \to \lambda(E \times F)$ является регулярной борелевской мерой в X для любого борелевского $F \subset Y$ и $F \to \lambda(E \times F)$ является регулярной борелевской мерой в X для любого борелевского множества $E \subset X$, то функция λ σ-аддтивна на $\mathscr{Q}$ и может быть продолжена до регулярной борелевской меры в Z.

Аналогичное утверждение имеет место при некотором условии тоже для функции λ не обьязательно неотрицательной.

Summary

MEASURES IN PRODUCT-SPACES

IGOR KLUVÁNEK, Košice

Let X and Y be locally compact Hausdorff spaces and let $Z = X \times Y$. Let $\mathcal{Q}$ be the system of all sets $G = E \times F$, where $E \subset X$, $F \subset Y$ are Borel sets.

Let λ be a real-valued function on $\mathcal{Q}$ such that, for every Borel set $F \subset Y$, $E \to \lambda(E \times F)$ is a regular Borel measure in X and, for every Borel set $E \subset X$, $F \to \lambda(E \times F)$ is a regular Borel measure in Y. Then λ is σ-additive on $\mathcal{Q}$ and can be extended to a regular Borel measure in Z.

Under a certain condition an analogous statement is true without the supposition that λ is positive.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

POZNÁMKA O NEKONEČNÝCH HRANOVĚ DISJUNKTNÍCH SYSTÉMECH CEST V GRAFU

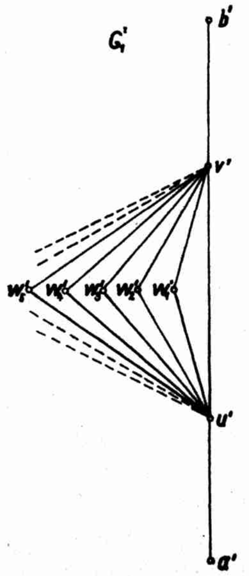
BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Došlo 21. ledna 1966)

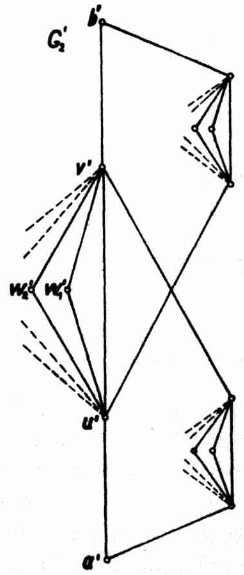
V [1] G. A. DIRAC uvádí tento problém:

Dva různé uzly a a b grafu jsou spojeny nekonečným počtem δ cest, z nichž každá má a a b jako koncové uzly a z nichž žádné dvě nemají společnou hranu. Vyplývá z toho, že a b jsou spojeny δ cestami takovými, že každá z nich má a a b jako koncové uzly, žádné dvě z nich nemají společnou hranu a společné uzly kterýchkoliv dvou cest se vždy vyskytují v témž pořadí, jdeme-li podél obou těchto cest z a do b?

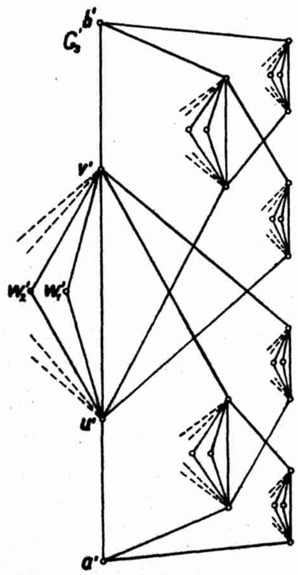
Odpověď na tuto otázku je záporná. V tomto článku bude sestrojen graf, pro který tato hypotéza neplatí (při $\delta = \aleph_0$). Nejprve budeme rekurentně definovat



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.

nekonečnou posloupnost grafů $G'_1, G'_2, \ldots$ Graf G'_1 (obr. 1) obsahuje uzly a', b', u', v' a w'_j, kde j probíhá všechna přirozená čísla. Hrany grafu G'_1 jsou $a'u', u'v', b'v', u'w'_j, v'w'_j$ pro všechna přirozená j. Popíšeme nyní konstrukci grafu G'_n, kde $n \geqq 2$. Mějme tři grafy G'_1, H_1, H_2, kde oba grafy H_1 a H_2 jsou isomorfní s G'_{n-1}. Graf G'_{n-1} obsahuje uzly a' a b', tedy vezmeme v grafu H_1 uzel odpovídající v isomorfismu uzlu a' grafu G'_{n-1} a ztotožníme jej s uzlem a' grafu G'_1. Dále uzel grafu H_1 odpovídající uzlu b' ztotožníme s uzlem v' grafu G'_1. Uzel grafu H_2 odpovídající uzlu a' (resp. b') ztotožníme s uzlem u' (resp. b') grafu G'_1. Tuto konstrukci nazveme konstrukcí (K). Grafy G'_2 a G'_3 jsou na obr. 2 a 3.

Dokážeme lemma.

Lemma 1. *Pro každé přirozené $n \geqq 2$ platí, že graf G'_n obsahuje podgraf G''_{n-1} isomorfní s G'_{n-1} takový, že uzly a', b', u', v', w'_j jsou v tomto isomorfismu samodružné.*

D ů k a z provedeme matematickou indukcí. Pro $n = 2$ plyne tvrzení přímo z konstrukce grafu G'_2, neboť $G'_{n-1} = G'_1$. Budiž $n = k > 2$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = k - 1$. Konstruujme nyní graf G'_k z grafu G'_1 a grafů H_1, H_2 isomorfních s G'_{k-1} konstrukcí (K). Graf H_1 (resp. H_2) obsahuje podgraf H'_1 (resp. H'_2) isomorfní s G'_{k-2} a takový, že uzlům a', b', u', v', w'_j odpovídají tytéž uzly v isomorfismu G'_{k-1} na H_1 (resp. H_2) jako v isomorfismu G'_{k-2} na H'_1 (resp. H'_2). Graf G'_k obsahuje tedy podgraf vzniklý z G'_1, H'_1 a H'_2 konstrukcí (K). Tento podgraf je zřejmě isomorfní s G'_{k-1}, přičemž uzly a', b', u', v', w'_j jsou v příslušném isomorfismu samodružné.

Můžeme tedy vytvořit opět nekonečnou posloupnost grafů $G_1, G_2, \ldots$ tak, že pro každé přirozené n je G_n isomorfní s G'_n, dále $G_{n-1} \subset G_n$ pro každé přirozené $n \geqq 2$ a existují uzly a, b, u, v, w_j, které odpovídají uzlům a', b', u', v', w'_j v isomorfismu G'_n na G_n pro všechna n.

Lemma 2. *V grafu G_n existuje systém $\mathscr{C}_n$ složený z n cest $C_1, \ldots, C_n$ z a do b, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu, přičemž cesty $C_1, \ldots, C_{n-1}$ leží celé v G_{n-1} (který je podgrafem G_n), cesta C_n neleží celá v G_{n-1} (pro $n \geqq 2$).*

D ů k a z provedeme opět matematickou indukcí. U grafu G_1 je tvrzení zřejmé; cesta C_1 je cesta složená z hran au, uv, vb, leží zřejmě celá v G_1. Cesta C_2 je složena z cest, které jsou obrazy cesty C_1 v isomorfních zobrazeních grafu G_1 na grafy H_1 a H_2 (z nichž se tvoří konstrukcí (K) graf G_2) a dále z hran uw_1, vw_1, tato cesta zřejmě neleží celá v G_1. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = k - 1$ $(k \geqq 3)$. Vezměme graf G'_k, o němž víme, že je isomorfní s G_k. Z konstrukce grafu G'_k pomocí grafů G'_1, H_1, H_2 a z indukčního předpokladu plyne, že v grafu G'_k existuje systém $k - 1$ cest $D'_1, \ldots, D'_{k-1}$ z a' do v', z nichž žádné dvě nemají společnou hranu, tyto cesty leží v H_1. Rovněž existuje systém stejné vlastnosti $D''_1, \ldots, D''_{k-1}$ z u' do b'; všechny cesty tohoto systému leží v H_2, jsou tedy disjunktní s cestami prvého systému, poněvadž grafy H_1 a H_2 jsou disjunktní. Přitom v isomorfismu H_1 (resp. H_2) na G_{k-1}

obrazy cest $D'_1, \ldots, D'_{k-2}$ (resp. $D''_1, \ldots, D''_{k-2}$) leží v G_{k-2}, obraz cesty D'_{k-1} (resp. D''_{k-1}) neleží celý v G_{k-2}. Konečně existuje systém nekonečně mnoha cest $D'''_1, D'''_2, \ldots$ z u' do v', kde cesta D'''_j se skládá z uzlů u', w'_j, v'. Žádná z cest $D'''_1, D'''_2, \ldots$ nemá zřejmě společnou hranu se žádnou z cest $D'_1, \ldots, D'_k, D''_1, \ldots, D''_k$. Sestrojíme tedy systém cest $C'_1, \ldots, C'_k$ z a' do b', kde $C'_{j+1} = D'_j \cup D''_j \cup D'''_j$ pro $j = 1, \ldots, k-1$ a C'_1 je cesta složená z uzlů a', u', v', b'. V tomto systému zřejmě žádné dvě cesty nemají společnou hranu. Vezmeme-li v H_1 (resp. v H_2) podgraf H'_1 (resp. H'_2), který je obrazem G_{k-2} v isomorfismu G_{k-1} na H_1 (resp. H_2), pak graf vzniklý konstrukcí (K) z grafů G'_1, H'_1, H'_2 je graf G'_{k-1} (viz lemma 1). Zřejmě v něm leží cesty $C_1, \ldots, \ldots, C_{k-1}$ zatím co C_k v něm celá neleží.

Vidíme tedy, že $\mathscr{C}_{n-1} \subset \mathscr{C}_n$ pro každé přirozené $n \geqq 2$. Vezměme nyní sjednocení $G_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. V grafu G_∞ zřejmě existuje systém $\mathscr{C}_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ který se skládá z $\aleph_0$ cest z a do b, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu (to plyne z toho, že $\mathscr{C}_{n-1} \subset \subset \mathscr{C}_n$ pro každé $n \geqq 2$ a z toho, že každý systém $\mathscr{C}_n$ má onu vlastnost).

Zřejmě platí další lemma.

Lemma 3. *Jestliže při konstrukci* (K) *bereme grafy H_1 a H_2 oba isomorfní s G_∞ (místo s G'_{n-1}), pak výsledek konstrukce* (K) *je opět graf isomorfní s G_∞ (místo grafu G'_n).*

Každé hraně h grafu G_∞ přiřadíme nyní přirozené číslo $m(h)$, které definujeme jako nejmenší přirozené číslo takové, že h leží v $G_{m(h)}$. Samozřejmě je-li $n \geqq m(h)$, pak h leží v G_n, je-li $n < m(h)$, pak h neleží v G_n. Každá cesta C z a do b obsahuje konečný počet hran, můžeme tedy definovat $m(C) = \max_{h \in C} m(h)$. Snadno bychom zjistili, že cesta C leží celá v $G_{m(c)}$, ale neleží celá v $G_{m(c)-1}$.

Lemma 4. *Budiž $\mathscr{C}$ systém cest z a do b v G_∞ takový, že žádné dvě cesty systému nemají společnou hranu a společné uzly kterýchkoliv dvou cest systému se vždy vyskytují v témž pořadí, jdeme-li podél obou těchto cest z a do b. Pak $\mathscr{C}$ obsahuje pouze konečný počet cest.*

Důkaz. Budiž $\mathscr{C}$ takovýto systém cest a budiž C cesta z $\mathscr{C}$ taková, že $m(C) = = \min_{C' \in \mathscr{C}} m(C')$. Taková cesta musí existovat, protože hodnoty $m(C')$ jsou přirozená čísla. Proveďme matematickou indukci podle $m(C)$. Je-li $m(C) = 1$, znamená to, že C je cesta složená buď z uzlů a, u, v, b, nebo z uzlů a, u, w_j, v, b pro nějaké přirozené j. Buďtež H_1, H_2 grafy z lemmatu 3. Budiž C_0 libovolná cesta z a do b v G_∞, která nemá společnou hranu s C. Její hrana incidentní s a (resp. s b) nemůže být au (resp. bv), poněvadž ta náleží cestě C, musí to být tedy hrana z H_1 (resp. H_2). Protože graf H_1 (resp. H_2) je disjunktní s H_2 (resp. H_1) a má s grafem G'_1 společné pouze uzly a, v (resp. b, u), obsahuje tedy cesta C_0 úsek z a do v ležící v H_1 a úsek z u do b ležící v H_2. Jdeme-li po C_0 z a do b, dojdeme tedy nejprve do v, potom po hraně uv

nebo přes některý z uzlů w_j do u a odtud do b. Tedy společné uzly u, v cest C, C_0 se objevují po každé v opačném pořadí. Systém $\mathscr{C}$ obsahující cestu C při $m(C) = 1$ obsahuje tedy pouze jedinou cestu.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $m(C) < k$, kde k je libovolné přirozené číslo, a dokažme je pro $m(C) = k$. Mějme graf G_∞ a grafy H_1, H_2 z lemmatu 3. Budiž H'_1 (resp. H'_2) obraz grafu G_{k-1} při isomorfismu G_∞ na H_1 (resp. H_2). Poněvadž C leží v G_k, obsahuje buď úsek z a do v v H'_1, nebo úsek z u do b v H'_2; předpokládejme bez újmy na obecnosti, že nastane první případ. Je-li nyní C_0 cesta ze systému $\mathscr{C}$ různá od C, je $l = m(C_0) \geqq m(C)$, tedy C_0 leží v G_l. Budiž H''_1 (resp. H''_2) obraz grafu G_{l-1} při isomorfismu G_∞ na H_1 (resp. H_2). Cesta C_0 obsahuje buď úsek z a do v v H''_1, nebo úsek z u do b v H''_2. Nastane-li první případ, pak v isomorfismu H_1 na G_∞ obrazy úseků z a do v cest C a C_0 jsou cesty C'' a C''_0 z a do b v G_∞ takové, že $m(C'') \leqq m(C''_0)$, $m(C'') < k$. Podle indukčního předpokladu vidíme, že vezmeme-li podsystém $\mathscr{C}^*$ systému $\mathscr{C}$ takový, který obsahuje všechny cesty obsahující úsek z a do v v H_1, pak $\mathscr{C}^*$ je konečný. Všechny cesty z a do b v G_∞, které takovýto úsek neobsahují, obsahují zřejmě hranu au. Proto může být nejvýše jedna cesta v $\mathscr{C} - \mathscr{C}^*$. Tedy i $\mathscr{C}$ je konečný.

Tím jsme dokázali větu.

Věta. *Existuje graf obsahující uzly a a b takový, že uzly a a b jsou v něm spojeny systémem $\aleph_0$ cest, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu, přičemž v každém takovémto systému existují dvojice cest takové, že některé jejich společné uzly se vyskytují v různém pořadí, jdeme-li podél obou těchto cest z a do b.*

Poznámka. Pro konečné δ je známo, že Diracova hypotéza platí.

Literatura

[1] Theory of Graphs and its Applications. Proceedings of the Symposium held in Smolenice in June 1963. Praha 1964.

Adresa autora: Liberec, Studentská 5 (Vysoká škola strojní a textilní).

Резюме

ЗАМЕТКА О БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМАХ ЦЕПЕЙ БЕЗ ОБЩИХ РЕБЕР В ГРАФЕ

БОГДАН ЗЕЛИНКА (Bohdan Zelinka), Либерец

Известная теорема из теории графов утверждает:

Пусть две различные вершины a и b графа соединены δ цепями (δ-натуральное число), каждая из которых имеет a и b в качестве своих граничных вершин и накакие две из них не имеют общего ребра. Тогда a и b соединены δ цепями такими, что каждая из них имеет a и b в качестве своих граничных вершин, никакие две из них не имеют общего ребра и общие вершины произвольных двух цепей находятся в том же самом порядке вдоль обеих на ходу от a до b.

На Симпозиуме о теории графов в Смоленице в 1963 году Г. А. Дирак задал проблему, верна ли эта теорема тоже, когда δ бесконечное кардинальное число. В этой статье дан отрицательный ответ на этот вопрос — приведен контр-пример с $\delta = \aleph_0$.

Summary

A REMARK ON INFINITE EDGE-DISJOINT SYSTEMS OF PATHS IN A GRAPH

BOHDAN ZELINKA, Liberec

A well-known theorem of the theory of graphs affirms:

Let two different vertices a and b of a graph be connected by δ paths (δ is a positive integer), each of which has a and b as its end vertices and none two of which have an edge in common. Then a and b are connected by δ paths such that each of them has a and b as its end vertices, none two of them have an edge in common and common vertices of arbitrary two paths occur always in the same order while going from a to b.

At the Symposium on the theory of graphs in Smolenice in 1963 G. A. Dirac has proposed the question, whether this theorem is also true, if δ is an infinite cardinal number. In this article the question is answered negatively — a counterexample with $\delta = \aleph_0$ is given.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

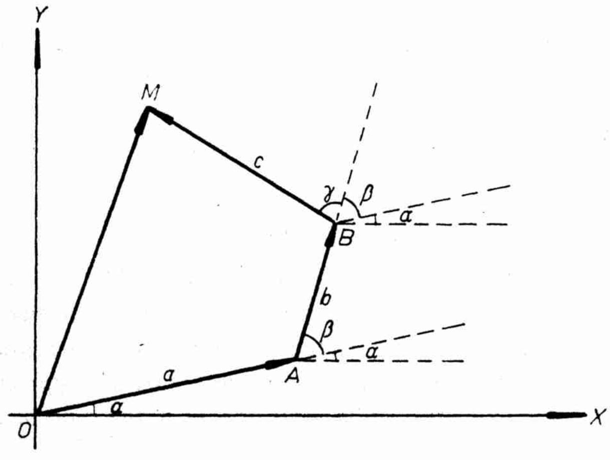
EŠTE O JEDNEJ TRIEDE RACIONÁLNYCH KRIVIEK

NIKOLAJ PODTJAGIN, Bratislava

(Došlo dňa 27. januára 1966)

Cieľom tohoto článku je zovšeobecniť výsledky, ku ktorým dospel autor vo svojom predchádzajúcom článku [1]. Použitím rovnakej metódy sa v ňom dokazuje, že všetky epiepicykloidy, epihypocykloidy, hypoepicykloidy a hypohypocykloidy, pokiaľ sú uzavreté, sú racionálne krivky. Ich stupeň sa dá určiť jediným, pre všetky tieto krivky spoločným vzorcom.

1. Parametrické rovnice kriviek triedy PP. Východiskom naších úvah je nasledudujúca úloha: Úsečka OA sa rovnomerne otáčka pkolo bodu O. Druhá účseka AB



Obr. 1.

sa rovnomerne otáča okolo pohyblivého konca A prvej úsečky OA. Tretia úsečka BM sa rovnomerne otáča okolo konca B úsečky AB. Treba určiť krivku, ktorú pri tomto zloženom pohybe opisuje koniec M úsečky BM (obr. 1).

Tie hľadané krivky, ktoré sú uzavreté, považujme za prvky istej množiny, ktorú pre stručnosť nazveme triedou PP.

V ďalšom budeme písmenami a, b, c označovať samotné úsečky OA, AB, BM i ich dĺžky.

Zo samotnej definície kriviek triedy PP vyplývajú tieto ich vlastnosti:

1) krivka môže prechádzať pevným bodom O len vtedy, keď dĺžky úsečiek a, b, c vyhovujú podmienkam

$$\mathrm{a} \leqq \mathrm{b} + \mathrm{c}, \quad \mathrm{b} \leqq \mathrm{a} + \mathrm{c}, \quad c \leqq \mathrm{a} + \mathrm{b},$$

2) vzdialenosť bodov každej krivky od pevného bodu O nie je väčšia ako a + b + c.

Pri určovaní rovníc kriviek triedy PP postupujme takto: Zvoľme pevný bod O za počiatok pravouhlej súradnicovej sústavy XY a predpokladajme, že v okamihu začatia pohybu body A, B, M ležali na osi X, pričom bod A sa nachádzal medzi bodmi O a B a bod B sa nachádzal medzi bodmi A a M. Predpokladajme ďalej, že za istý čas t sa úsečka a pootočila o uhol α, úsečka b o uhol β vzhľadom na úsečku a, teda o uhol $\alpha + \beta$ vzhľadom na súradnicovú sústavu a úsečka c o uhol γ vzhľadom na úsečku b, teda o uhol $\alpha + \beta + \gamma$ vzhľadom na súradnicovú sústavu. Ak premitneme vektory $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{OM}$ do súradnicových osí, dostaneme rovnice

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= \mathrm{a} \,.\, \cos\alpha + \mathrm{b} \,.\, \cos(\alpha + \beta) + \mathrm{c} \,.\, \cos(\alpha + \beta + \gamma)\,, \\ y &= \mathrm{a} \,.\, \sin\alpha + \mathrm{b} \,.\, \sin(\alpha + \beta) + \mathrm{c} \,.\, \sin(\alpha + \beta + \gamma)\,, \end{aligned}$$

kde x a y sú súradnice bodu M v čase t.

Označme v uhlovú rychlosť otáčania sa úsečky a, v' uhlovú rýchlosť otáčania sa úsečky b vzhľadom na úsečku a, v'' uhlovú rýchlosť otáčania sa úsečky c vzhľadom na úsečku b. Vzhľadom na súradnicovú sústavu uhlové rýchlosti otáčania sa úsečiek a, b, c postupne budú v, $v + v'$, $v + v' + v''$. Z rovníc

$$\alpha = v \,.\, t\,, \quad \beta = v' \,.\, t\,, \quad \gamma = v'' \,.\, t$$

potom dostaneme

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{v'}{v}\,, \quad \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{v''}{v}\,.$$

Ak teraz pomer rýchlostí v'/v označíme písmenom m a pomer rýchlostí v''/v zasa písmenom m', rovnice (1) môžeme písať v tvaré

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= a \,.\, \cos\alpha + \mathrm{b} \,.\, \cos(1 + m)\,\alpha + \mathrm{c} \,.\, \cos(1 + m + m')\,\alpha\,, \\ y &= a \,.\, \sin\alpha + \mathrm{b} \,.\, \sin(1 + m)\,\alpha + \mathrm{c} \,.\, \sin(1 + m + m')\,\alpha\,. \end{aligned}$$

Možno sa ľahko presvedčiť, že rovnice (2) určujú uzavretú krivku, teda krivku triedy PP, vtedy a len vtedy, keď pomery m a m' rýchlostí otáčania sa úsečiek a, b, c sú vyjadrené racionálnymi číslami.

Položme $m = p/q$, $m' = p'/q'$, kde p a q ako i p' a q' sú nesúdeliteľné čísla. Položme ďalej $\alpha/qq' = \omega$. Potom rovnice (2) nadobúdajú tvar

$$(3) \qquad \begin{aligned} x &= a \,.\, \cos qq'\omega + b \,.\, \cos (p + q)\, q'\omega + c \,.\, \cos (p'q + pq' + qq')\, \omega \,, \\ y &= a \,.\, \sin qq'\omega + b \,.\, \sin (p + q)\, q'\omega + c \,.\, \sin (p'q + pq' + qq')\, \omega \,. \end{aligned}$$

Ak sa úsečky b, c otáčajú v zmysloch opačných zmyslu otáčania úsečky a, podiely rýchlostí otáčania $m = p/q$, $m' = p'/q'$ sú záporné. V ďalšom pre určitosť budeme predpokladať, že čísla q a q' sú kladné. Čísla p a p' sú potom kladné, ak zmysel otáčania sa úsečky b a c je zhodný so zmyslom otáčania sa úsečky a, čísla p a p' sú záporné, ak zmysel otáčania sa úsečky b a c je opačný zmyslu otáčania sa úsečky a.

Súradnice x a y bodov krivky triedy PP, definované rovnicami (3), sú periodické funkcie parametra ω. Ich spoločná perioda je určená každým z troch zlomkov

$$(4) \qquad \frac{2k\pi}{qq'} = \frac{2k_1\pi}{|p + q|\, q'} = \frac{2k_2\pi}{|p'q + pq' + qq'|}\,,$$

kde k, k_1, k_2 sú najmenšie celé kladné čísla, pre ktoré je splnená podmienka ich rovnosti.

Podmienka (4) je rovnocenná s podmienkou

$$\frac{k_1}{k} = \frac{|p + q|}{q}\,, \quad \frac{k_2}{k} = \frac{|p'q + pq' + qq'|}{qq'}\,.$$

Označme $\bar{q}$ najväčší spoločný deliteľ čísel q a q' a položme

$$q = \bar{q} \,.\, q_1 \,, \quad q' = \bar{q} \,.\, q_2 \,.$$

Predchádzajúce rovnosti potom možno písať v tvare

$$\frac{k_1}{k} = \frac{|p + q|}{\bar{q} \,.\, q_1}\,, \quad \frac{k_2}{k} = \frac{|p'q_1 + pq_2 + qq_2|}{\bar{q} \,.\, q_1 \,.\, q_2}\,.$$

Pretože čísla p a q ako i čísla p' a q' sú nesúdeliteľné, zlomky na pravých stranách týchto rovností sa nedajú už zjednodušiť. Najmenšie hodnoty konštánt k, k_1, k_2, ktoré vyhovujú týmto rovniciam, teda sú

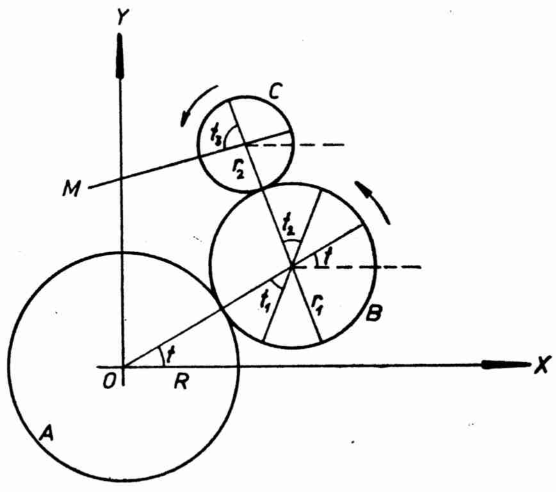
$$k = \bar{q} \,.\, q_1 \,.\, q_2 \,, \quad k_1 = |p + q|\, q_2 \,, \quad k_2 = |p'q_1 + pq_2 + qq_2| \,.$$

Pre tieto hodnoty konštánt k, k_1, k_2 každý zo zlomkov (4) sa rovná $2\pi/\bar{q}$. Súradnice x, y bodov krivky triedy PP sú teda periodické funkcie parametra ω so spoločnou periodou $2\pi/\bar{q}$: pri zmene parametra ω od nuly do $2\pi/\bar{q}$ krivka bude celá opísaná. V ďalšom budeme predpokladať, že parameter ω je nezáporný a mení sa v intervale $[0, 2\pi/\bar{q})$.

Pretože krivky triedy PP podľa definície sú vytvorené otáčaním sa troch úsečiek a, b, c, konštanty a, b, c, p, q, p', q' nemôžu sa rovnať nule. Pretože ďalej pre $p + q = 0$ alebo pre $p'q + pq' + qq' = 0$ rovnice (3) určujú v článku [1] už podrobne preskúmané krivky triedy P, v ďalšom budeme tiež predpokladať, že

$$p + q \neq 0\,, \quad p'q + pq' + qq' \neq 0\,.$$

2. Základné typy kriviek triedy PP. Predpokladajme, že po pevnom kruhu A (obr. 2) o polomere R sa rovnomerne valí v kladnom zmysle, tj. v zmysle opačnom otáčaniu sa hodinových ručičiek, kruh B o polomere r_1 a po kruhu B sa rovnomerne bez šmyku valí vzhľadom na kruh B v kladnom zmysle kruh C o polmere r_2.



Obr. 2.

Keď sa kruh B valí mimo kruhu A a kruh C mimo kruhu B, krivku, ktorú pri tomto zloženom pohybe opisuje bod M, pevne spojený s kruhom C, nazývame *epiepicykloidou* [2]. Keď sa kruh B valí po obvode kruhu A zvnútra a kruh C sa valí po obvode kruhu B zvonka, krivku, ktorú opíše bod M, nazývame *epihypocykloidou.* Keď sa kruh B valí po obvode kruhu A zvonku a kruh C po obvode kruhu B zvnútra, krivku, ktorú opíše bod M nazývame *hypoepicykloidou.* Napokon, keď sa kruh B valí po obvode kruhu A zvnútra a kruh C po obvode kruhu B tiež zvnútra, krivku, ktorú opíše bod M, nazývame *hypohypocykloidou.*

Je zrejme, že veľkosti polomerov R, r_1, r_2 kruhov A, B, C ešte neurčujú krivku, ktorú opíše bod M. Táto závisí tiež od pomeru rýchlostí valenia sa kruhov B a C.

Uvažujme napr. epiepicykloidu. Predpokladajme, že za určitý čas sa kruh B otočil o uhol t_1 a za ten istý čas sa kruh C otočil o uhol t_3. Z obr. 2 ľahko nájdeme hodnoty súradnic bodu M hľadanej krivky:

$$\begin{aligned}(5)\quad x &= (R + r_1)\cos t + (r_1 + r_2)\cos(t + t_1 + t_2) + h\,.\cos(t + t_1 + t_2 + t_3)\,,\\ y &= (R + r_1)\sin t + (r_1 + r_2)\sin(t + t_1 + t_2) + h\,.\sin(t + t_1 + t_2 + t_3)\,,\end{aligned}$$

kde h je vzdialenosť bodu M od stredu kruhu C.

Pre $h = r_2$ epiepicykloidu nazývame *prostou,* pre $h > r_2$ *predĺženou* a pre $h < r_2$ *skrátenou.*

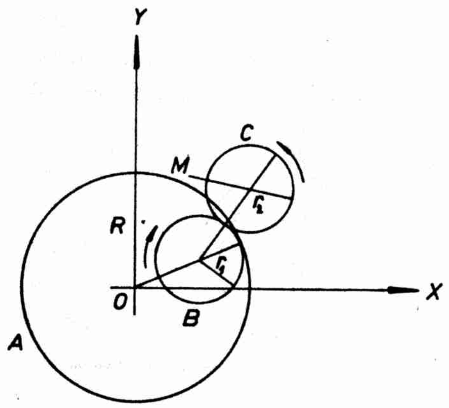
Pretože otáčanie sa kruhov B a C sa deje bez šmyku, musíme mať

$$r_1 t_1 = R \,.\, t\,, \quad r_2 t_3 = r_1 \,.\, t_2\,.$$

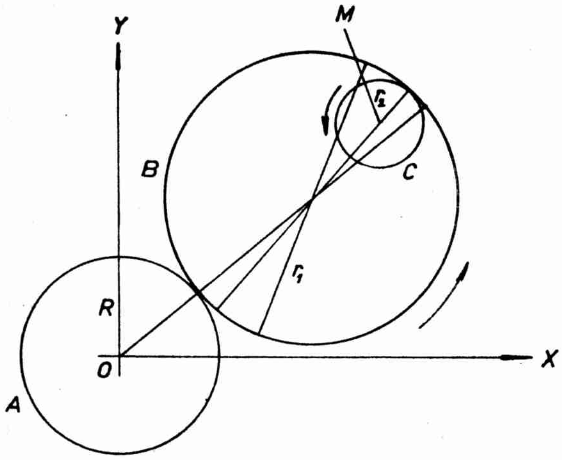
Z toho

$$t_1 = \frac{R}{r_1}\, t\,, \quad t_2 = \frac{\lambda r_2}{r_1}\, t\,, \quad t_3 = \lambda t\,, \tag{6}$$

kde $\lambda = t_3/t$ je dané číslo, ktoré závisí od pomeru rýchlostí otáčania sa kruhov B a C.



Obr. 3.



Obr. 4.

Ľahko by sme sa mohli presvedčiť, že bod M opíše uzavretú krivku vtedy a len vtedy, keď čísla λ, R/r_1 a r_2/r_1 sú racionálne.

Po dosadení hodnôt (6) uhlov t_1, t_2, t_3 do rovníc (5), dostaneme

$$x = (R + r_1) \cos t + (r_1 + r_2) \cos \frac{R + r_1 + \lambda r_2}{r_1}\, t + \\ + h \,.\, \cos \frac{R + r_1 + \lambda(r_1 + r_2)}{r_1}\, t$$

$$y = (R + r_1) \sin t + (r_1 + r_2) \sin \frac{R + r_1 + \lambda r_2}{r_1}\, t + \\ + h \,.\, \sin \frac{R + r_1 + \lambda(r_1 + r_2)}{r_1}\, t\,.$$

Možno sa ľahko presvedčiť, že epiepicykloidy, určené týmito rovnicami, sú krivky triedy PP, ktoré sú dané tiež rovnicami (3), v ktorých

$$\frac{p'}{q'} = \lambda\,, \quad \frac{p}{q} = \frac{R + \lambda r_2}{r_1}\,, \quad a = R + r_1\,, \quad b = r_1 + r_2\,, \quad c = h\,.$$

Pre $c = h = r_2$ príslušná krivka je prostá epiepicykloida. Jednoduchý výpočet nám ukáže, že to bude vtedy, keď konštanty rovníc (3) vyhovujú podmienke

$$\Delta_1 = aqq' - b(p + q) q' + c(p'q + pq' + qq') = 0 .$$

Analogickým postupon nájdeme rovnice ostatných zovšeobecnených epicykloíd a hypocykloíd.

Epihypocykloida je určená rovnicami (obr. 3)

$$x = (R - r_1) \cos t + (r_1 + r_2) \cos \frac{R - r_1 - \lambda r_2}{r_1} t + \\ + h \,.\, \cos \frac{R - r_1 - \lambda(r_1 + r_2)}{r_1} t ,$$

$$y = (R - r_1) \sin t - (r_1 + r_2) \sin \frac{R - r_1 - \lambda r_2}{r_1} t - \\ - h \,.\, \sin \frac{R - r_1 - \lambda(r_1 + r_2)}{r_1} t .$$

Hypoepicykloida je určená rovnicami (obr. 4)

$$x = (R + r_1) \cos t + (r_1 - r_2) \cos \frac{R + r_1 - \lambda r_2}{r_1} t + \\ + h \,.\, \cos \frac{R + r_1 + \lambda(r_1 - r_2)}{r_1} t ,$$

$$y = (R + r_1) \sin t + (r_1 - r_2) \sin \frac{R + r_1 - \lambda r_2}{r_1} t + \\ + h \,.\, \sin \frac{R + r_1 + \lambda(r_1 - r_2)}{r_1} t .$$

Hypohypocykloida je určená rovnicami (obr. 5)

$$x = (R - r_1) \cos t + (r_1 - r_2) \cos \frac{r_1 - R - \lambda r_2}{r_1} t + \\ + h \,.\, \cos \frac{r_1 - R + \lambda(r_1 - r_2)}{r_1} t ,$$

$$y = (R - r_1) \sin t + (r_1 - r_2) \sin \frac{r_1 - R - \lambda r_2}{r_1} t + \\ + h \,.\, \sin \frac{r_1 - R + \lambda(r_1 - r_2)}{r_1} t .$$

Rovnice (3) určujú prostú epihypocykloidu, ak platí

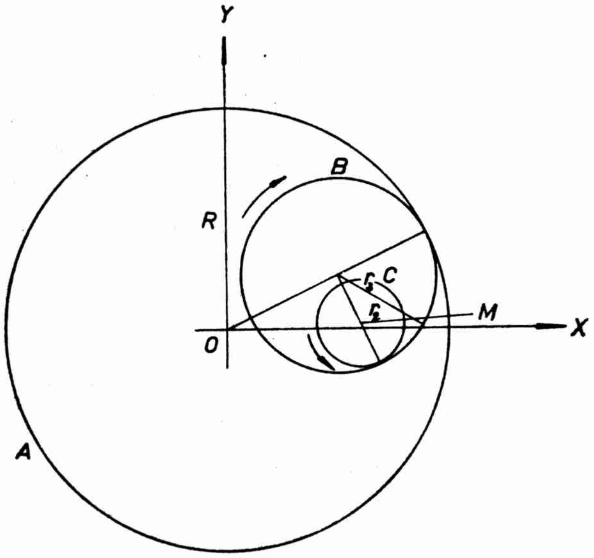
$$\Delta_2 = aqq' + b(p + q)\,q' - c(p'q + pq' + qq') = 0\,,$$

prostú hypoepicykloidu, ak platí

$$\Delta_3 = aqq' - b(p + q)\,q' - c(p'q + pq' + qq') = 0$$

a prostú hypohypocykloidu, ak platí

$$\Delta_4 = aqq' + b(p + q)\,q' + c(p'q + pq' + qq') = 0\,.$$



Obr. 5.

Pretože podľa predpokladu je $p + q \neq 0$, $p'q + pq' + qq' \neq 0$, možno sa ľahko presvedčiť, že keď jeden z výrazov Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 sa rovná nule, ostatné tri musia byť od nuly rôzne. Pri zachovaní počiatočných polôh kruhov B a C, vyplývajúcich z obrázkov 2, 3, 4 a 5, avšak pri zmene zmyslu ich valenia sa, znamienko parametra λ sa v uvažovaných rovniciach kriviek mení. Pritom však uvedené tvary výrazov Δ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ se nemenia.

3. Základné vlastnosti kriviek triedy PP. Z rovníc (3) pre vzdialenosť $\varrho = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ bodu krivky od počiatku súradnicovej sústavy dostaneme

$$(7) \qquad \varrho^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\,.\cos pq'\omega + 2ac\,.\cos(p'q + pq')\,\omega + \\ + 2bc\,.\cos p'q\omega\,.$$

Pretože konštanty a, b, c sú kladné, usudzujeme, že bodom, vzdialeným od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť $\varrho = a + b + c$, odpovedajú len tie hodnoty parametra ω, pre ktoré platia rovnosti

$$\cos p'q\omega = \cos pq'\omega = 1\,. \tag{8}$$

Táto podmienka zrejme platí pre $\omega = 0$. Je však splnená aj pre

$$\omega = \frac{2k\pi}{|p|\,q'} = \frac{2k_1\pi}{|p'|\,q}, \tag{9}$$

kde k a k_1 sú celé kladné čísla.

Označme teraz $\bar{p}$ najväčší spoločný deliteľ čísel $|p|$ a $|p'|$ a položme $p = \bar{p}\,.\,p_1$, $p' = \bar{p}\,.\,p_2$. Vzorec (9) môžeme potom písať v tvare

$$\omega = \frac{2k\pi}{\bar{p}\bar{q}|p_1|\,q_2} = \frac{2k_1\pi}{\bar{p}\bar{q}|p_2|\,q_1}. \tag{10}$$

Čísla k a k_1 musia potom vyhovovať podmienke

$$k_1 = \frac{|p_2|\,q_1}{|p_1|\,q_2}\,k\,. \tag{11}$$

Pretože $|p_2|\,q_1$ a $|p_1|\,q_2$ sú celé nesúdeliteľné čísla, číslo k musí byť nasobkom čísla $|p_1|\,q_2$. Keď položíme $k = |p_1|\,q_2k_2$, kde k_2 je opäť prirodzené číslo, z rovnosti (11) dostávame $k_1 = |p_2|\,q_1k_2$ a z rovností (10) potom máme

$$\omega = \frac{2k_2\pi}{\bar{p}\bar{q}}\,. \tag{12}$$

Pretože pre všetky hodnoty ω máme $\omega < 2\pi/\bar{q}$, z toho usudzujeme, že na každej krivke triedy PP vždy existuje presne $\bar{p}$ bodov, vzdialených od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť $\varrho = a + b + c$, určených vzorcom (12), kde $k_2 = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, \bar{p} - 1$.

Dokážeme, že všetky tieto body sú rôzne, tj. že každému z týchto bodov odpovedá len jedna hodnota parametra ω. Predpokladajme opak, tj. nech napr. niektorému bodu, vzdialenému od počiatku súradnicovej sústavy na vzdialenosť $\varrho = a + b + c$ odpovedajú dve rôzne hodnoty parametra ω:

$$\omega_1 = \frac{2k'\pi}{\bar{p}\bar{q}}\,, \quad \omega_2 = \frac{2k''\pi}{\bar{p}\bar{q}}\,,$$

ke $k' < k''$.

Pretože pri splnení podmienok (8) rovnice (3) nadobúdajú tvar

$$x = (a + b + c)\cos qq'\omega\,, \quad y = (a + b + c)\sin qq'\omega\,,$$

vidíme, že musia nutne platiť aj rovnosti

$$\cos qq'\omega_2 = \cos qq'\omega_1\,, \quad \sin qq'\omega_2 = \sin qq'\omega_1\,.$$

Tieto však môžu byť splnené len vtedy, keď $qq'\omega_2 - qq'\omega_1 = 2k'''\pi$, kde k''' je isté prirodzené číslo. Musíme teda mať

$$\frac{2qq'k''\pi}{\bar{p}\bar{q}} - \frac{2qq'k'\pi}{\bar{p}\bar{q}} = 2k'''\pi$$

alebo

$$k'' - k' = \frac{\bar{p}}{qq_2}\,k'''\,.$$

Pretože celé čísla $\bar{p}$ a qq_2 nemajú spoločných deliteľov, celé číslo k''' musí byť deliteľné číslom qq_2. Ak položíme $k''' = qq_2\,.\,k$, kde k je opäť celé kladné číslo, dostaneme $k'' - k' = \bar{p}\,.\,k$. Avšak celé nezáporné čísla k' a k'' nie sú väčšie ako číslo $\bar{p} - 1$. Posledná rovnosť nemôže byť teda splnená pre $k' \neq k''$.

Z rovníc (3) ďalej dostaneme

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\omega}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\omega}\right)^2 = \mathrm{a}^2q^2q'^2 + \mathrm{b}^2q'^2(p+q)^2 + \mathrm{c}^2(p'q + pq' + qq')^2 + \\ + 2\mathrm{ab}qq'(p+q)\cos pq'\omega + 2\mathrm{ac}qq'(p'q + pq' + qq')\cos(p'q + pq')\,\omega + \\ + 2\mathrm{bc}q'(p+q)(p'q + pq' + qq')\cos p'q\omega\,. \tag{13}$$

Za podmienok (8) má táto rovnica tvar

$$(\mathrm{d}x/\mathrm{d}\omega)^2 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}\omega)^2 = [aqq' + b(p+q)\,q' + c(p'q + pq' + qq')]^2 = \Delta_4^2\,. \tag{14}$$

Videli sme, že na každej krivke triedy PP existuje $\bar{p}$ bodov, pre ktoré $\varrho = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c}$ a ktorým odpovedajú jediné hodnoty parametra ω. Rovnica (14) nám hovorí, že všetky tieto body sú regulárne body u všetkých kriviek triedy PP s výnimkou prostých hypohypocykloíd, pre ktoré, ako sme videli, platí $\Delta_4 = 0$.

Pre

$$\cos pq'\omega = -1\,, \quad \cos p'q\omega = 1 \tag{15}$$

z rovnosti (7) dostaneme $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}|$. Podmienky (15) sú splnené pre

$$\omega = \frac{(2k+1)\,\pi}{|p|\,q'} = \frac{2k_1\pi}{|p'|\,q}\,,$$

kde k je celé nezáporné číslo a k_1 je celé kladné číslo.

Ak napíšeme tieto rovnosti v tvare

$$(16) \qquad \omega = \frac{(2k + 1)\pi}{\bar{p}|p_1|\,\bar{q}q_2} = \frac{2k_1\pi}{\bar{p}|p_2|\,\bar{q}q_1},$$

dostaneme

$$(17) \qquad 2k_1 = \frac{|p_2|\,q_1}{|p_1|\,q_2}(2k + 1).$$

Pretože čísla $|p_2|\,q_1$ a $|p_1|\,q_2$ nemajú spoločných deliteľov, rovnosť (17) môže platiť len vtedy, keď aspoň jedno z čísel $|p_2|$ a q_1 je číslo párne. Avšak keď číslo $|p_2|\,q_1$ je párne, číslo $|p_1|\,q_2$ musí byť nepárne. Môžeme tedy položiť $2k + 1 = (2k_2 + 1)\,.$ $.\,|p_1|\,q_2$, kde k_2 je celé nezáporné číslo. Vzorec (17) teraz nadobúda tvar $2k_1 =$ $= (2k_2 + 1)\,|p_2|\,q_1$. Z rovností (16) potom dostaneme

$$(18) \qquad \omega = \frac{(2k_2 + 1)\,\pi}{\bar{p}\bar{q}}, \quad (k_2 = 0, 1, 2, \ldots, \bar{p} - 1).$$

Z toho usudzujeme, že na každej krivke triedy PP pre $|p_2|\,q_1$ párne vždy existuje $\bar{p}$ bodov, vzdialenosť ktorých od počiatku súradnicovej sústavy je $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}|$ a ktoré sú určené vzorcom (18).

Aj tu by sme sa mohli presvedčiť, že v prípade, keď rovnosť (7) nám dáva $\varrho =$ $= |\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}|$ len za podmienok (15), každému bodu, vzdialenosť ktorého od počiatku súradnicovej sústavy je $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}| > 0$, odpovedá len jedna hodnota parametra ω. Avšak môže sa stať, že pre niektoré hodnoty konštánt a, b, c rovnosť (7) dáva $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}|$ nie len pre hodnoty parametra ω vyhovujúce podmienkám (15), ale i pre niektoré iné jeho hodnoty. Avšak z rovnosti (7) môžeme dostať rovnosť $\varrho = |\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}|$ len pre určitý konečný počet izolovaných hodnôt $\omega \in [0, 2\pi/\bar{q})$. To ale znamená, že pre $|p_2|\,q_1$ párne na každej krivke triedy PP vždy existujú intervaly $(\omega', \omega'') \in [0, 2\pi/\bar{q})$ také, v ktorých sa nachádzajú body, určené jedinými hodnotami parametra $\omega \in (\omega', \omega'')$, definovanými vzorcom (18). Pre $\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c} = 0$ počiatok súradnicovej sústavy je aspoň $\bar{p}$ násobným bodom.

Za podmienok (15) rovnosť (13) dáva

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\omega}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\omega}\right)^2 = [\mathrm{a}qq' - \mathrm{b}(p + q)\,q' - \mathrm{c}(p'q + pq' + qq')]^2 = \Delta_3^2\,.$$

Vidíme, že body určené rovnosťami (15) v spomenutých intervaloch (ω', ω'') pre $\Delta_3 \neq 0$ sú bodmi regulárnymi. A pretože Δ_3 a Δ_4 sa nemôžu súčasne rovnať nule, vyplýva z toho, že u prostej hypohypocykloidy pre $|p_2|\,q_1$ párnom a pre $\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c} \neq$ $\neq 0$ vždy existujú intervaly, v ktorých sa nachádzajú jej regulárne body, ktorým odpovedajú jediné hodnoty parametra ω.

Ak pre $|p_2|\,q_1$ párne máme $\mathrm{a} - \mathrm{b} - c = 0$, krivka prechádza počiatkom súradnicovej sústavy, ktorý je aspoň $\bar{p}$ násobným bodom tejto krivky. Avšak aj v tomto prípade existujú intervaly (ω', ω''), v ktorých počiatku súradnicovej sústavy odpovedá len jedna hodnota parametra ω z týchto intervalov.

Podobnými úvahami mohli by sme dokázať, že na každej krivke triedy PP pre $|p_1|, |p_2|, q_1, q_2$ nepárne existuje aspoň $\bar{p}$ rôznych bodov, ktorých vzdialenosť od počiatku súradnicovej sústavy je $\varrho = |\mathrm{b} - \mathrm{a} - \mathrm{c}| > 0$ a ktoré sú definované vzorcom (18) a pre $|p_1|\ q_2$ párne $\bar{p}$ bodov, ktorých vzdialenosť od počiatku súradnicovej sústavy je $\varrho = |\mathrm{c} - \mathrm{a} - \mathrm{b}| > 0$ a ktoré sú definované tým istým vzorcom (18). Pre $\mathrm{b} - \mathrm{a} - \mathrm{c} = 0$ v prvom prípade a pre $\mathrm{c} - \mathrm{a} - \mathrm{b} = 0$ v druhom prípade krivka prechádza počiatkom súradnicovej sústavy, ktorý je jej aspoň $\bar{p}$ násobným bodom.

Analogicky sa možno tiež presvedčiť aj o tom, že u prostých hypohypocykloíd vždy existujú intervaly (ω', ω'') také, v ktorých všetky spomenuté body sú bodmi regulárnymi, ktorým v týchto intervaloch odpovedajú jediné hodnoty parametra ω.

4. Základná veta. Teraz dokážeme túto základnú vetu:

Veta: *Krivky triedy* PP, *určené rovnicami* (3), *sú racionálnymi krivkami. Ich stupeň n je daný vzorcom*

$$n = |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|, \tag{19}$$

keď konštanty p a p' majú rovnaké znamienka. Tento vzorec platí aj v týchto dvoch prípadoch:

1) $p' < 0,\ p > 0,\ p'q + pq' + 2qq' \geqq 0,$
2) $p' > 0,\ p < 0,\ p'q + pq' + 2qq' \leqq 0.$

V prípadoch, keď

1) $p' < 0,\ p > 0,\ p'q + pq' + 2qq' < 0,$
2) $p' > 0,\ p < 0,\ p'q + pq' + 2qq' > 0,$

platí nerovnosť

$$n < |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|.$$

Dôkaz. Napíšme rovnice (3) v tvare

$$x = \frac{\mathrm{a}}{2}\left(e^{iqq'\omega} + e^{-iqq'\omega}\right) + \frac{\mathrm{b}}{2}\left[e^{i(p+q)q'\omega} + e^{-i(p+q)q'\omega}\right] + \\ + \frac{\mathrm{c}}{2}\left[e^{i(p'q+pq'+qq')\omega} + e^{-i(p'q+pq'+qq')\omega}\right],$$

$$y = \frac{\mathrm{a}}{2i}\left(e^{iqq'\omega} - e^{-iqq'\omega}\right) + \frac{\mathrm{b}}{2i}\left[e^{i(p+q)q'\omega} - e^{-i(p+q)q'\omega}\right] + \\ + \frac{\mathrm{c}}{2i}\left[e^{i(p'q+pq'+qq')\omega} - e^{-i(p'q+pq'+qq')\omega}\right]$$

a položme $e^{i\omega} = \tau$. Tieto rovnice potom budú mať tvar

$$x = \frac{1}{2}\left[a\left(\tau^{qq'} + \tau^{-qq'}\right) + b\left(\tau^{pq'+qq'} + \tau^{-pq'-qq'}\right) + \right.$$
$$\left. + c\left(\tau^{p'q+pq'+qq'} + \tau^{-p'q-pq'-qq'}\right)\right], \tag{20}$$

$$y = -\frac{i}{2}\left[a\left(\tau^{qq'} - \tau^{-qq'}\right) + b\left(\tau^{pq'+qq'} - \tau^{-pq'-qq'}\right) + \right.$$
$$\left. + c\left(\tau^{p'q+pq'+qq'} - \tau^{-p'q-pq'-qq'}\right)\right].$$

Ďalej máme

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{d\omega}{d\tau}\right)^2 \left[\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2\right] = -e^{-2i\omega}\left[\left(\frac{dx}{d\omega}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\omega}\right)^2\right].$$

Z toho, čo sme povedali už skôr, vyplýva, že na každej krivke triedy PP existujú intervaly (ω', ω''), v ktorých sa nachádza aspoň jeden bod, ktorému odpovedá jediná hodnota parametra τ, pre ktorú platí nerovnosť

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 \neq 0 .$$

Položme ďalej

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad \tau = \frac{\nu}{\mu}.$$

Rovnice (20) potom nadobudnú tvar

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{2}\left[a\left(\frac{\nu^{qq'}}{\mu^{qq'}} + \frac{\mu^{qq'}}{\nu^{qq'}}\right) + b\left(\frac{\nu^{pq'+qq'}}{\mu^{pq'+qq'}} + \frac{\mu^{pq'+qq'}}{\nu^{pq'+qq'}}\right) + \right.$$
$$\left. + c\left(\frac{\nu^{p'q+pq'+qq'}}{\mu^{p'q+pq'+qq'}} + \frac{\mu^{p'q+pq'+qq'}}{\nu^{p'q+pq'+qq'}}\right)\right], \tag{21}$$

$$\frac{x_2}{x_3} = -\frac{i}{2}\left[a\left(\frac{\nu^{qq'}}{\mu^{qq'}} - \frac{\mu^{qq'}}{\nu^{qq'}}\right) + b\left(\frac{\nu^{pq'+qq'}}{\mu^{pq'+qq'}} - \frac{\mu^{pq'+qq'}}{\nu^{pq'+qq'}}\right) + \right.$$
$$\left. + c\left(\frac{\nu^{p'q+pq'+qq'}}{\mu^{p'q+pq'+qq'}} - \frac{\mu^{p'q+pq'+qq'}}{\nu^{p'q+pq'+qq'}}\right)\right].$$

Rozoberme teraz tieto možné prípady:

1) $p' > 0$, $p > 0$. Ak napíšeme rovnice (21) v tvare

$$
\begin{aligned}
\frac{x_1}{x_3} = {} & \frac{1}{2\nu^{p'q+pq'+qq'}\,\mu^{p'q+pq'+qq'}}\left[\mathrm{a}\left(\nu^{p'q+pq'+2qq'}\mu^{p'q+pq'} + \right.\right. \\
& + \nu^{p'q+pq'}\mu^{p'q+pq'+2qq'}\Big) + \mathrm{b}\Big(\nu^{p'q+2pq'+2qq'}\mu^{p'q} + \\
& \left.\left. + \nu^{p'q}\mu^{p'q+2pq'+2qq'}\right) + \mathrm{c}\left(\nu^{2(p'q+pq'+qq')} + \mu^{2(p'q+pq'+qq')}\right)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{x_2}{x_3} = {} & -\frac{i}{2\nu^{p'q+pq'+qq'}\,\mu^{p'q+pq'+qq'}}\left[\mathrm{a}\left(\nu^{p'q+pq'+2qq}\,\mu^{p'q+pq'} - \right.\right. \\
& - \nu^{p'q+pq'}\mu^{p'q+pq'+2qq'}\Big) + \mathrm{b}\Big(\nu^{p'q+2pq'+2qq'}\mu^{p'q} - \\
& \left.\left. - \nu^{p'q}\mu^{p'q+2pq'+2qq'}\right) + \mathrm{c}\left(\nu^{2(p'q+pq'+qq')} - \mu^{2(p'q+pq'+qq')}\right)\right],
\end{aligned}
$$

vidíme, že homogénne súradnice x_1, x_2, x_3 bodov kriviek, definovaných rovnicami (3), v danom prípade môžeme určiť týmito binárnymi formami parametrov ν a μ:

$$
\begin{aligned}
\sigma x_1 = {} & \mathrm{a}\left(\nu^{p'q+pq'+2pq'}\mu^{p'q+pq'} + \nu^{p'q+pq'}\mu^{p'q+pq'+2qq'}\right) + \\
& + \mathrm{b}\left(\nu^{p'q+2pq'+2pp'}\mu^{p'q} + \nu^{p'q}\mu^{p'q+2pq'+2qq'}\right) + \\
& + \mathrm{c}\left(\nu^{2(p'q+pq'+qq')} + \mu^{2(p'q+pq'+qq')}\right), \\
\sigma x_2 = {} & -i\left[\mathrm{a}\left(\nu^{p'q+pq'+2qq'}\mu^{p'q+pq'} - \nu^{p'q+pq'}\mu^{p'q+pq'+2qq'}\right) + \right. \\
& + \mathrm{b}\left(\nu^{p'q+2pq'+2qq'}\,\mu^{p'q} - \nu^{p'q}\mu^{p'q+2pq'+2qq'}\right) + \\
& + \mathrm{c}\left(\nu^{2(p'q+pq'+qq')} - \mu^{2(p'q+pq'+qq')}\right), \\
\sigma x_3 = {} & 2\nu^{p'q+pq'+qq'}\mu^{p'q+pq'+qq'},
\end{aligned}
$$

kde σ je koeficient úmernosti.

Z toho vidíme, že krivka triedy PP je v danom prípade racionálnou krivkou stupňa $2(p'q + pq' + qq')$. A pretože podľa predpokladu p' a p sú čísla kladné, môžeme písať

$$2(p'q + pq' + qq') = |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|.$$

2) $p' < 0$, $p < 0$, $p'q + pq' + 2qq' > 0$. Z rovníc (21) v tomto prípade určíme tieto binárne formy pre homogénne súradnice x_1, x_2, x_3 bodov krivky triedy PP:

$$
\begin{aligned}
\sigma x_1 = {} & \mathrm{a}\left(\nu^{2qq'} + \mu^{2qq'}\right) + \mathrm{b}\left(\nu^{pq'+2qq'}\mu^{-pq'} + \nu^{-pq'}\mu^{pq'+2qq'}\right) + \\
& + \mathrm{c}\left(\nu^{p'q+pq'+2qq'}\mu^{-p'q-pq'} + \nu^{-p'q-pq'}\mu^{p'q+pq'+2qq'}\right), \\
\sigma x_2 = {} & -i\left[\mathrm{a}\left(\nu^{2qq'} - \mu^{2qq'}\right) + \mathrm{b}\left(\nu^{p'q+2qq'}\mu^{-pq'} - \right.\right. \\
& - \nu^{-pq'}\mu^{pq'+2qq'}\Big) + \mathrm{c}\Big(\nu^{p'q+pq'+2qq'}\mu^{-p'q-pq'} - \\
& \left.\left. \nu^{-p'q-pq'}\mu^{p'q+pq'+2qq'}\right)\right], \\
\sigma x_3 = {} & 2\nu^{qq'}\mu^{qq'}.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že krivka triedy PP v uvažovanom prípade je racionálna krivka stupňa $2qq'$. Pretože teraz p a p' sú čísla záporné a $p'q + pq' + 2qq' > 0$, máme

$$2qq' = |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'| .$$

3) $p' < 0$, $p < 0$, $p'q + pq' + 2qq' \leqq 0$. V tomto prípade z rovníc (21) možno určiť

$$\begin{aligned}
\sigma x_1 &= \mathrm{a}\left(\nu^{-p'q-pq'}\mu^{-p'q-pq'-2qq'} + \nu^{-p'q-pq'-2qq'}\mu^{-p'q-pq'}\right) + \\
&\quad + \mathrm{b}\left(\nu^{-p'q}\mu^{-p'q-2pq'-2qq'} + \nu^{-p'q-2pq'-2qq'}\mu^{-p'q}\right) + \\
&\quad + \mathrm{c}\left(\nu^{-2(p'q+pq'+qq')} + \mu^{-2(p'q+pq'+qq')}\right), \\
\sigma x_2 &= -i\left[\mathrm{a}\left(\nu^{-p'q-pq'}\mu^{-p'q-pq'-2qq'} - \nu^{-p'q-pq'-2qq'}\mu^{-p'q-pq'}\right) + \right. \\
&\quad + \mathrm{b}\left(\nu^{-p'q}\mu^{-p'q-2pq'-2qq'} - \nu^{-p'q-2pq'-2qq'}\mu^{-p'q}\right) + \\
&\quad \left. + \mathrm{c}\left(\nu^{-2(p'q+pq'+qq')} - \mu^{-2(p'q+pq'+qq')}\right)\right], \\
\sigma x_3 &= 2\nu^{-p'q-pq'-qq'}\mu^{-p'q-pq'-qq'} .
\end{aligned}$$

V danom prípade rovnice (3) určujú racionálnu krivku, ktorej stupeň sa rovná $-2(p'q + pq' + qq')$. Avšak aj teraz máme

$$-2(p'q + pq' + qq') = |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'| .$$

4) $p' < 0$, $p > 0$, $p'q + pq' + 2qq' \geqq 0$. V tomto prípade homogénne súradnice x_1, x_2, x_3 bodov triedy PP možno určiť binárnymi formami

$$\begin{aligned}
\sigma x_1 &= \mathrm{a}\left(\nu^{pq'+2qq'}\mu^{pq'} + \nu^{pq'}\mu^{pq'+2qq'}\right) + \mathrm{b}\left(\nu^{2(pq'+qq')} + \mu^{2(pq'+qq')}\right) + \\
&\quad + \mathrm{c}\left(\nu^{p'q+2pq'+2qq'}\mu^{-p'q} + \nu^{-p'q}\mu^{p'q+2pq'+2qq'}\right), \\
\sigma x_2 &= -i\left[\mathrm{a}\left(\nu^{pq'+2qq'}\mu^{pq'} - \nu^{pq'}\mu^{pq'+2qq'}\right) + \right. \\
&\quad + \mathrm{b}\left(\nu^{2(pq'+qq')} - \mu^{2(pq'+qq')}\right) + \mathrm{c}\left(\nu^{p'q+2pq'+2qq'}\mu^{-p'q} - \right. \\
&\quad \left.\left. - \nu^{-p'q}\mu^{p'q+2pq'+2qq'}\right)\right], \\
\sigma x_3 &= 2\nu^{pq'+qq'}\mu^{pq'+qq'} .
\end{aligned}$$

Krivka triedy PP je v tomto prípade racionálnou krivkou, ktorej stupeň sa rovná $2(pq' + qq')$. To však znamená, že jej stupeň je opät daný vzorcom (19), pretože aj teraz máme

$$2(pq' + qq') = |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'| .$$

5) $p' < 0$, $p > 0$, $p'q + pq' + 2qq' < 0$. Homogénne súradnice x_1, x_2, x_3 bodov krivky triedy PP sú teraz dané binárnymi formami parametrov ν a μ tvaru

$$\begin{aligned}
\sigma x_1 &= \mathrm{a}\left(\nu^{-p'q}\mu^{-p'q-2qq'} + \nu^{-p'q-2qq'}\mu^{-p'q}\right) + \\
&\quad + \mathrm{b}\left(\nu^{pq'-p'q}\mu^{-p'q-pq'-2qq'} + \nu^{-p'q-pq'-2qq'}\mu^{pq'-p'q}\right) + \\
&\quad + \mathrm{c}\left(\nu^{pq'}\mu^{-2p'q-pq'-2qq'} + \nu^{-2p'q-pq'-2qq'}\mu^{pq'}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma x_2 = & -i[\mathrm{a}(\nu^{-p'q}\mu^{-p'q-2qq'} - \nu^{-p'q-2qq'}\mu^{-p'q}) + \\ & + \mathrm{b}(\nu^{pq'-p'q}\mu^{-p'q-pq'-2qq'} - \nu^{-p'q-pq'-2qq'}\mu^{pq'-p'q}) + \\ & + \mathrm{c}(\nu^{pq'}\mu^{-2p'q-pq'-2qq'} - \nu^{-2p'q-pq'-2qq'}\mu^{pq'})], \\ \sigma x_3 = & \, 2\nu^{-p'q-qq'}\mu^{-p'q-qq'}.\end{aligned}$$

Pretože polynómy, ktoré sme určili pre x_1, x_2 majú spoločných deliteľov s polynómom, ktorý sme našli pre x_3, krivka triedy PP je v tomto prípade racionálnou krivkou, ktorej stupeň n je daný nerovnosťou

$$n < -2(p'q + qq').$$

Avšak teraz máme

$$-2(p'q + qq') = |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|.$$

6) $p' > 0$, $p < 0$, $p'q + pq' + 2qq' \leqq 0$. Homogénne súradnice x_1, x_2, x_3 bodov krivky triedy PP sú teraz binárnymi formami parametrov ν a μ tvaru

$$\begin{aligned}\sigma x_1 = & \, \mathrm{a}(\nu^{-pq'}\mu^{-pq'-2qq'} + \nu^{-pq'-2qq'}\mu^{-pq'}) + \\ & + \mathrm{b}(\mu^{-2pq'-2qq'} + \nu^{-2pq'-2qq'}) + \\ & + \mathrm{c}(\nu^{p'q}\mu^{-p'q-2pq'-2qq'} + \nu^{-p'q-2pq'-2qq'}\mu^{p'q}), \\ \sigma x_2 = & -i[\mathrm{a}(\nu^{-pq'}\mu^{-pq'-2qq'} - \nu^{-p'q-2qq'}\mu^{-pq'}) + \\ & \mathrm{b}(\mu^{-2pq'-2qq'} - \nu^{-2pq'-2qq'}) + \mathrm{c}(\nu^{p'q}\mu^{-p'q-2pq'-2qq'} - \\ & - \nu^{-p'q-2pq'-2qq'}\mu^{p'q})], \\ \sigma x_3 = & \, 2\nu^{-pq'-qq'}\mu^{-pq'-qq'}.\end{aligned}$$

V tomto prípade krivka triedy PP je racionálna krivka stupňa $-2(pq' + qq')$ a opäť máme

$$-2(pq' + qq') = |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|.$$

7) $p' > 0$, $p < 0$, $p'q + pq' + 2qq' > 0$. V tomto prípade môžeme písať

$$\begin{aligned}\sigma x_1 = & \, \mathrm{a}(\nu^{p'q+2qq'}\mu^{p'q} + \nu^{p'q}\mu^{p'q+2qq'}) + \\ & + \mathrm{b}(\nu^{p'q+pq'+2qq'}\mu^{p'q-qq'} + \nu^{p'q-pq'}\mu^{p'q+pq'+2qq'}) + \\ & + \mathrm{c}(\nu^{2p'q+pq'+2qq'}\mu^{-pq'} + \nu^{-pq'}\mu^{2p'q+pq'+2qq'}), \\ \sigma x_2 = & -i[\mathrm{a}(\nu^{p'q+2qq'}\mu^{p'q} - \nu^{p'q}\mu^{p'q+2qq'}) + \\ & + \mathrm{b}(\nu^{p'q+pq'+2qq'}\mu^{p'q-qq'} - \nu^{p'q-pq'}\mu^{p'q+pq'+2qq'}) + \\ & + \mathrm{c}(\nu^{2p'q+pq'+2qq'}\mu^{-pq'} - \nu^{-pq'}\mu^{2p'q+pq'+2qq'})], \\ \sigma x_3 = & \, 2\nu^{p'q+qq'}\mu^{p'q+qq'}.\end{aligned}$$

V tomto prípade krivka triedy PP je racionálna krivka, ktorej stupeň n je daný nerovnosťou

$$n < 2(p'q + qq').$$

Avšak aj v tomto prípade

$$2(p'q + qq') = |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|.$$

Poznámka. Ak v dokázanej základnej vete položíme $p' = 0$, $q' = 1$, nadobudne táto znenie základnej vety článku [1]. V tomto prípade rovnice (3) skutočne určujú krivky triedy P a platí

$$|p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'| = |p| + |p + 2q|.$$

Pri dôkaze vety tohoto článku potom prípad 3), pri ktorom je $p > 0$, $p'q + pq' + 2qq' < 0$, nie je možný a v prípade 7), pri ktorom je $p < 0$, $p'q + pq' + 2qq' > 0$, polynómy, ktoré sme určili pre x_1 a x_2. nemajú spoločných deliteľov s polynómom, ktorý sme určili pre x_3.

Literatúra

[1] *N. Podtjagin:* O jednej triede racionálnych kriviek, Časopis pro pěstování matematiky *90* (1965), 181—190.

[2] *G. Loria:* Spezielle algebraische und transcendente Kurven, 2. Auflage (1911), 123.

Adresa autora: Gottwaldovo nám. 2, Bratislava (Slovenská vysoká škola technická).

Резюме

ЕЩЕ ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

НИКОЛАЙ ПОДТЯГИН (Nikolaj Podtjagin), Братислава

В статье рассматривается класс кривых, названных автором кривыми класса PP, которые являются обобщением кривых класса P, исследованных автором в его статье [1].

Эти кривые даны уравнениями

$$x = \mathrm{a} \cos qq'\omega + \mathrm{b} \cos (p + q)\, q'\omega + \mathrm{c} \cos (p'q + pq' + qq')\, \omega,$$

$$y = \mathrm{a} \sin \; qq\omega + \mathrm{b} \sin (p + q)\, q'\omega + \mathrm{c} \sin (p'q + pq' + qq')\, \omega.$$

где ω — параметр, изменяющийся в интервале $[0, 2\pi/q)$, p и q, как и p' и q', целые числа, не имеющие общих делителей, причем числа q и q' положительны,

$\bar{q}$ — общий наибольший делитель чисел q и q', a, b, c — любые положительные числа.

В статье доказывается, что к кривым класса PP принадлежат так называемые епиепициклоиды, эпигипоциклоиды, гипоепициклоиды и гипогипоциклоиды. Доказываются некоторые свойства этих кривых.

Доказывается, что если положить

$$p = \bar{p}p_1, \quad p' = \bar{p}p_2$$

где $\bar{p}$ — общий наибольший делитель чисел $|p|$ и $|p'|$, то:

1) На каждой кривой класса PP существует $\bar{p}$ точек, удаленных от начала координат на расстояние a + b + c. У всех кривых класса PP, за исключением простых гипогипоциклоид эти точки являются обыкновенными точками.

2) При $|p_2|\, q_1$ четном на каждой кривой класса PP существует по меньшей мере $\bar{p}$ точек, удаленных от начала координат на расстояние |a − b − c|. При a − b − c = 0 начало координат является кратною точкою по меньшей мере порядка $\bar{p}$.

3) При $|p_1|$, $|p_2|$, q_1, q_2 нечетных на каждой кривой класса PP существует по крайней мере $\bar{p}$ точек, удаленных от начала координат на расстояние |b − a − c|. При b − a − c = 0 начало координат является кратною точкою по меньшей мере порядка $\bar{p}$.

4) При $|p_1|\, q_2$ четном на каждой кривой класса PP существует по меньшей мере $\bar{p}$ точек, удаленных от начала координат на расстояние |c − a − b|. При c − a − b = 0 начало координат является кратною точкою по меньшей мере порядка $\bar{p}$.

5) Кривые класса PP являются рациональными иривыми. Их степень n дана формулой

$$n = |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|$$

если постоянные p и p' имеют одинаковые знаки. Эта формула имеет место и в двух следующих случаях:

1) $p' < 0,\ p > 0,\ p'q + pq' + 2qq' \geqq 0,$

2) $p' > 0,\ p < 0,\ p'q + pq' + 2qq' \leqq 0.$

В остальных случаях:

1) $p' < 0,\ p > 0,\ p'q + pq' + 2qq' < 0$

2) $p' > 0,\ p < 0,\ p'q + pq' + 2qq' > 0$

имеет место неравенство

$$n < |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|\,.$$

Résumé

ENCORE SUR UNE CLASSE DE COURBES ALGÉBRIQUES

NIKOLAJ PODTJAGIN, Bratislava

Dans cet article on étudie une classe de courbes nommées par l'auteur les courbes de la classe PP qui sont d'une généralisation des courbes de la classe P étudiées par l'auteur dans son article [1]. Ces courbes sont données par les équations

$$x = \mathrm{a} \cos qq'\omega + \mathrm{b} \cos (p + q)\, q'\omega + \mathrm{c} \cos (p'q + pq' + qq')\, \omega\,,$$
$$y = \mathrm{a} \sin qq'\omega + \mathrm{b} \sin (p + q)\, q'\omega + \mathrm{c} \sin (p'q + pq' + qq')\, \omega\,,$$

où le ω figure comme un paramètre changeant dans l'intervalle $[0, 2\pi/q)$, p et q, aussi que p' a q' sont les nombres entiers, n'ayant pas de diviseurs communs, q a q' étant de plus positifs, $\bar{q}$ est le plus grand diviseur commun des nombres q a q', a, b, c sont des constantes positives arbitraires.

Dans l'article on démontre qu'aux courbes de la classe PP appartiennent les soi-disantes épiépicycloïdes, épihypocycloïdes, hypoépicycloïdes et hypohypocycloïdes.

On montre quelques propriétés générales de ces courbes.

En posant

$$p = \bar{p}p_1\,; \quad p' = \bar{p}p_2\,,$$

où $\bar{p}$ est le plus grand diviseur commun de nombres $|p|$ et $|p'|$, on démontre, que

1) Sur toute courve de la classe PP existent précisément $\bar{p}$ points éloignés de l'origine à la distance a + b + c. Pour chaques courbes de la classe PP, sauf les hypohypocycloïdes simples, ces points sont les points ordinaires.

2) Dans le cas où le nombre $|p_2|\, q_1$ est pair, sur toute courbe de la classe PP existent au moins $\bar{p}$ points éloignés de l'origine à la distance $|\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c}|$. Dans le cas où $\mathrm{a} - \mathrm{b} - \mathrm{c} = 0$, l'origine est un point multiple au moins d'ordre $\bar{p}$.

3) Dans le cas où tous les nombres $|p_1|$, $|p_2|$, q_1, q_2 sont impairs, sur toute courbe de la classe PP existent au moins $\bar{p}$ points éloignés de l'origine à la distance $|\mathrm{b} - \mathrm{a} - \mathrm{c}|$. Dans le cas où $\mathrm{b} - \mathrm{a} - \mathrm{c} = 0$, l'origine est un point multiple au moins d'ordre $\bar{p}$.

4) Dans le cas où le nombre $|p_1|\, |q_2|$ est pair, sur toute courbe de la classe PP existent au moins $\bar{p}$ points éloignés de l'origine á la distance $|\mathrm{c} - \mathrm{a} - \mathrm{b}|$. Dans le cas où $\mathrm{c} - \mathrm{a} - \mathrm{b} = 0$, l'origine est un point multiple au moins d'ordre $\bar{p}$.

5) Toute courbe de la classe PP est une courbe rationnelle. Leur ordre n est donné par la formule

$$n = |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'|\,,$$

si les nombres p, p' ont les mêmes signes. Cette formule a lieu aussi dans les deux cas suivants:

1) $p' < 0$; $p > 0$; $p'q + pq' + 2qq' \geqq 0$,
2) $p' > 0$; $p < 0$; $p'q + pq' + 2qq' \leqq 0$.

Dans les deux cas restent

1) $p' < 0$; $p > 0$; $p'q + pq' + 2qq' < 0$,
2) $p' > 0$; $p < 0$; $p'q + pq' + 2qq' > 0$

a lieu l'inégalité

$$n < |p'q| + |pq'| + |p'q + pq' + 2qq'| .$$

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

HASSE'S OPERATOR AND DIRECTED GRAPHS

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Received January 31, 1966)

In [1] the following problem by K. ČULÍK is given:

The graphs considered are sets together with a binary relation which is defined in them. If M is a set and $\sigma \subset M \times M$, then $T\sigma$ denotes the transitive closure of σ. Further we define $H\sigma = \{(u, v) \in \sigma$; there is no directed path $(w_1, \ldots, w_k)$ in $[M, \sigma]$ such that $k \geqq 3$ and $w_1 = u$, $w_k = v\}$. If $(w_1, \ldots, w_k)$ is a path in $[M, \sigma]$, then $(w_i, w_{i+1}) \in \sigma$ for $i = 1, 2, \ldots, k - 1$. We speak about the transitive closure operator T and Hasse's operator H. A partially ordered set is a graph $[M, \varrho]$, where $\varrho \subset \subset M \times M$ is an asymmetric and transitive relation (i.e. it is also irreflexive).

If M is a finite set, then $TH\varrho = \varrho$ and $[M, H\varrho]$ is said to be the Hasse's graph of the partially ordered set $[M, \varrho]$ (this is closely related to the well-known Hasse diagram of $[M, \varrho]$, see [2]). If M is an infinite set, the equality $TH\varrho = \varrho$ is not valid in general, but it always holds that $TH\varrho \subset \varrho$. Thus, if we put $x > y$ instead of $(x, y) \in \varrho$, we can define $[M, \varrho]$ as follows: $x_i \in M$ for $i = 0, 1, 2, \ldots$; $x_1 > x_2 > > \ldots > x_i > \ldots$ and $x_i > x_0$ for all $i = 1, 2, \ldots$ In this case $TH\varrho \neq \varrho$. On the other hand, if we add a new vertex w to M and define $u_i > w$ for all $i = 1, 2, \ldots$, but $w > u_0$, then for this new partially ordered set $[M', \varrho']$ we have $TH\varrho' = \varrho'$.

a) *Find necessary and sufficient conditions concerning ϱ for $TH\varrho = \varrho$, if $[M, \varrho]$ is an infinite partially ordered set. If $M = V^\infty$ and $\varrho = TC\mathfrak{R}(V^\infty$, C-operator and $\mathfrak{R}$ are defined in [3]), then ϱ is transitive, but need not be asymmetric.*

b) *Is it always true that $TC\mathfrak{R} = THTC\mathfrak{R}$? If not, what are necessary and sufficient conditions concerning $\mathfrak{R}$ that this equality holds?*

Remark. The vertices $w_1, \ldots, w_k$ need not be all different.

Here we shall give a solution of the problem a) and a partial solution of the problem b).

Before turning to the solution of the problem we shall define some concepts. If a partially ordered set $[M, \varrho]$ is given, then $N \subset M$ is a maximal chain of the set $[M, \varrho]$, if N is a chain (a totally ordered set) in the ordering induced by the ordering of the set M and there does not exist any subset of M which would contain N as a proper subset and would be a chain. If a, b are two elements of a partially ordered set $[M, \varrho]$ and $(a, b) \in \varrho$, then the closed interval $\langle a, b\rangle$ is by definition a set consisting of the elements a and b and all elements x for which simultaneously $(a, x) \in \varrho$ and $(x, b) \in \varrho$ holds.

From the above considerations it follows that we shall have to deal with directed graphs which do not contain multiple edges, but may contain loops.

Theorem 1. *Let $[M, \varrho]$ be an infinite partially ordered set. The equality $TH\varrho = \varrho$ holds if and only if for each two elements a, b of the set M such that $(a, b) \in \varrho$ there exists a finite maximal chain of the interval $\langle a, b\rangle$.*

Proof. Let the condition be fulfilled. Let a, b be arbitrary two elements of M for which $(a, b) \in \varrho$ holds. Therefore, there exists a finite maximal chain $N = \{a = x_1, x_2, \ldots, x_m = b\}$ of the interval $\langle a, b\rangle$ so that $(x_i, x_j) \in \varrho$ for $1 \leqq i < j \leqq m$. As N is a maximal chain of the interval $\langle a, b\rangle$, for no $i = 1, \ldots, m - 1$ there exists $y \in M$ such that $(x_i, y) \in \varrho$, $(y, x_{i+1}) \in \varrho$. In such a case $\{x_1, \ldots, x_i, y, x_{i+1}, \ldots, x_m\}$ would be a chain which would be a subset of $\langle a, b\rangle$ and contain N as a proper subset. Thus, $(x_i, x_{i+1}) \in H\varrho$ for all $i = 1, \ldots, m - 1$. If we now apply the transitive closure operator, we get $(a, b) = (x_1, x_m) \in TH\varrho$. As we have chosen a and b quite arbitrarily, we have proved that $\varrho \subset TH\varrho$ and therefore $\varrho = TH\varrho$ (because we know that the inverse inclusion holds).

Now let $\varrho = TH\varrho$ hold. Let us have two elements a, b of M such that $(a, b) \in \varrho$; therefore also $(a, b) \in TH\varrho$. According to the definition of the transitive closure operator there exists a finite subset $N = \{x_1, \ldots, x_m\}$ of the set M such that $a = x_1$, $b = x_m$, $(x_i, x_{i+1}) \in H\varrho$ for $i = 1, \ldots, m - 1$. This set is a maximal chain of the interval $\langle a, b\rangle$. Actually, if a set N' existed which would contain N as a proper subset and would be a chain, then there would exist an element y such that $(x_i, y) \in \varrho$, $(y, x_{i+1}) \in \varrho$ for some i. Then there would exist a path consisting of the vertices $w_1 = x_i$, $w_2 = y$, $w_3 = x_{i+1}$ and thus $(x_i, x_{i+1}) \notin H\varrho$; in such a manner we obtain a contradiction.

We shall now generalize Theorem 1.

Theorem 2. *Let σ be a relation on the set M. The equality $THT\sigma = T\sigma$ holds if and only if the graph $[M, \sigma]$ is acyclic and for its transitive closure $[M, T\sigma]$ the condition of Theorem 1 holds.*

Proof. If $[M, \sigma]$ is acyclic, its transitive closure $[M, T\sigma]$ is a partially ordered set and we can apply Theorem 1. Thus, let us suppose that there exists at least one directed circuit D in $[M, \sigma]$; let its vertices be $a_1, \ldots, a_k$ and let $(a_i, a_{i+1}) \in \sigma$ for $i = 1, \ldots, k - 1$ and $(a_k, a_1) \in \sigma$ hold (Fig. 1). Then evidently for arbitrary i, j from the numbers $1, \ldots, k$ we have $(a_i, a_j) \in T\sigma$, because a directed path from a_i to a_j exists which is a subgraph of the circuit D. The subgraph of the graph $[M, T\sigma]$ generated by the vertices $a_1, \ldots, a_k$ is therefore a complete directed graph. Further, for arbitrary i, j from the numbers $1, \ldots, k$ we have $(a_i, a_j) \notin HT\sigma$; for arbitrary l from the numbers $1, \ldots, k$ particularly $(a_i, a_l) \in T\sigma$, $(a_l, a_k) \in T\sigma$, i.e. there exists a directed path with the vertices $w_1 = a_i$, $w_2 = a_l$, $w_3 = a_j$. The subgraph of the graph $[M, HT\sigma]$ generated by the vertices $a_1, \ldots, a_k$ is therefore a graph without edges. If $(a_i, a_j) \in THT\sigma$ held for some i, j from the numbers $1, \ldots, k$, this would

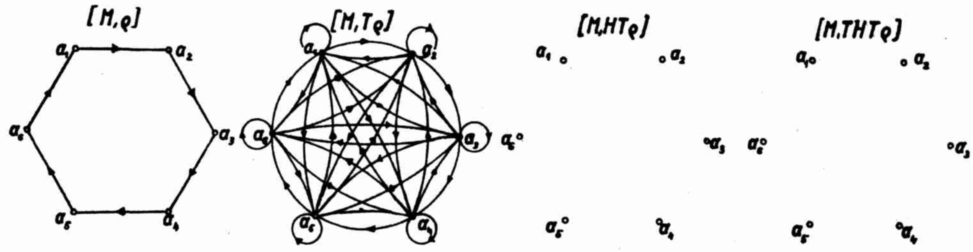


Fig. 1.

mean that there exist elements $b_1, \ldots, b_m$ of M such that $(a_i, b_1) \in HT\sigma$, $(b_m, a_j) \in HT\sigma$ and $(b_n, b_{n+1}) \in HT\sigma$ for $n = 1, \ldots, m - 1$. Let p be the least positive integer such that the element b_p is equal to some of the elements $a_1, \ldots, a_k$. Thus, $b_p = a_q$ for some q, $1 \leqq q \leqq k$, and none of the elements $b_1, \ldots, b_{p-1}$ is equal to any of the elements $a_1, \ldots, a_k$. Without loss of generality let $q > i$. The elements $a_1, \ldots, a_i$, $b_1, \ldots, b_{p-1}, a_q, \ldots, a_k$ therefore form a directed circuit in $[M, \sigma]$ (as $HT\sigma \subset \sigma$), so that the subgraph of the graph $[M, HT\sigma]$ generated by them will be without edges, which leads to a contradiction. Consequently, also the subgraph of the graph $[M, THT\sigma]$ generated by the vertices $a_1, \ldots, a_k$ is without edges. That is why $THT\sigma \neq T\sigma$.

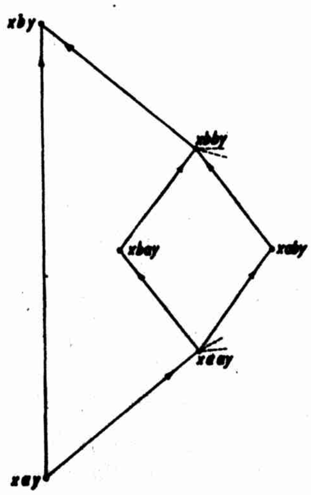


Fig. 2.

About the graph $[V^\infty, C\mathfrak{R}]$ we shall give only a few remarks. At first we shall give definitions. V is a finite set called the alphabet, V^∞ is the set of all words on this alphabet. $\mathfrak{R}$ is a certain finite relation on V^∞ and its elements are called rules. $C\mathfrak{R}$ is a relation consisting of all pairs (xay, xby), where $(a, b) \in \mathfrak{R}$ and x, y are arbitrary words from V^∞ (they may be empty).

The necessary condition for $THTC\mathfrak{R} = TC\mathfrak{R}$ is that $[V^\infty, C\mathfrak{R}]$ is acyclic. We can prove that this condition is not sufficient. Let us have $V = \{a, b\}$, $\mathfrak{R} = \{(a, aa), (a, b), (bb, b)\}$. Then $(a, b) \in TC\mathfrak{R}$ but $(a, b) \notin HTC\mathfrak{R}$, because the directed path with the vertices $w_1 = a$, $w_2 = aa$, $w_3 = ab$, $w_4 = bb$, $w_5 = b$ exists. However, at every inference of b from a we must apply the rule $(a, b) \in \mathfrak{R}$ as other two rules would not suffice. If we have an arbitrary directed path with the vertices $a = c_1, \ldots$

$\ldots, c_k = b$, where $(c_i, c_{i+1}) \in C\mathfrak{R}$ for $i = 1, \ldots, k-1$, we have $c_i = xay$, $c_{i+1} = xby$ for some i; therefore, $(c_i, c_{i+1}) \notin HTC\mathfrak{R}$, as also $(a, b) \notin HTC\mathfrak{R}$. Thus, there does not exist a path $a = d_1, \ldots, d_l = b$ such that we had $(d_i, d_{i+1}) \in HTC\mathfrak{R}$ for each $i = 1, \ldots, l-1$ (Fig. 2).

An open problem remains, what is the necessary and sufficient condition for $\mathfrak{R}$ under which the graph $[V^\infty, C\mathfrak{R}]$ might be acyclic and the graph $[V^\infty, TC\mathfrak{R}]$ might fulfill the condition of Theorem 1.

References

[1] Theory of Graphs and its Applications. Proceedings of the Symposium held in Smolenice in June 1963. Praha 1964.

[2] *G. Birkhoff:* Lattice Theory. New York 1948.

[3] *K. Čulík:* Applications of the graph theory in mathematical logic and linguistics. Theory of Graphs and its Applications. Proceedings of the Symposium held in Smolenice in June 1963. Praha 1964.

Author's address: Liberec, Studentská 5 (Vysoká škola strojní a textilní).

Výtah

HASSEŮV OPERÁTOR A ORIENTOVANÉ GRAFY

BOHDAN ZELINKA, Liberec

V článku se zkoumá orientovaný graf $[M, \sigma]$ jako množina M s binární relací σ. Uvažují se dva operátory, operátor transitivního uzávěru T a Hasseův operátor H, který je definován takto: platí $H\sigma = \{(u, v) \in \sigma$; neexistuje orientovaný tah $(w_1, \ldots, w_k)$ v $[M, \sigma]$ takový, že $k \geqq 3$ a $w_1 = u$, $w_k = v\}$. Dokazují se dvě věty, které jsou částečným řešením problému K. Čulíka.

Věta 1. *Budiž $[M, \sigma]$ nekonečná částečně uspořádaná množina. Platí $TH\varrho = \varrho$ právě tehdy, existuje-li ke každým dvěma prvkům a, b množiny M, pro něž $(a, b) \in \varrho$, konečný maximální řetězec, který je podmnožinou intervalu $\langle a, b \rangle$.*

Věta 2. *Budiž σ relace na množině M. Rovnost $THT\sigma = T\sigma$ platí právě tehdy, jestliže graf $[M, \sigma]$ je acyklický a pro jeho transitivní uzávěr $[M, T\sigma]$ platí podmínka z věty 1.*

Závěrem se výsledky aplikují na matematickou lingvistiku.

Резюме

ОПЕРАТОР ХАССЕ И НАПРАВЛЕННЫЕ ГРАФЫ

БОГДАН ЗЕЛИНКА (Bohdan Zelinka), Либерец

В статье исследуется направленный граф $[M, \sigma]$ как множество M с бинарным отношением σ. Рассматриваются два оператора — оператор транзитивного замыкания T и оператор Хассе H, который определен следующим способом: справедливо $H\sigma = \{(u, v) \in \sigma$; не существует направленного пути $(w_1, \ldots, w_k)$ в $[M, \sigma]$ такого, что $k \geqq 3$ и $w_1 = u, w_k = v\}$. Доказываются две теоремы, которые служат частичным решением проблемы К. Чулика.

Теорема 1. *Пусть $[M, \varrho]$ — бесконечное частично упорядоченное множество. Справедливо $TH\varrho = \varrho$ тогда и только тогда, если для всяких двух элементов a, b множества M, для которых $(a, b) \in \varrho$, существует конечная максимальная цепь, которая является подмножеством интервала $\langle a, b \rangle$.*

Теорема 2. *Пусть σ — отношение на множестве M. Равенство $THT\sigma = T\sigma$ имеет место тогда и только тогда, когда граф $[M, \sigma]$ ациклический и для его транзитивного замыкания $[M, T\sigma]$ выполнено условие из теоремы* 1.

В конце статьи применяются результаты к математической лингвистике.

ISOTONNÍ ROZŠÍŘENÍ ISOTONNÍCH ZOBRAZENÍ

TEO STURM, Praha

(Došlo 1. února 1966)

Základem článku je diplomová práce, kterou jsem konal v letech 1958—1959 u prof. NOVOTNÉHO DrSc; chtěl bych mu poděkovat i touto cestou za jeho tehdejší pomoc.

1. POMOCNÉ KONSTRUKCE A VĚTY

B buď množina uspořádaná relací $\leqq$, buď $A \subset B$ [1]), buď $x, y \in B$. Řekněme, že x, y *nejsou odděleny* A, existuje-li konečná posloupnost $\{x_i\}_{i=0}^n$ prvků z B taková, že je $x_0 = x$, $x_n = y$, pro každé $i = 0, \dots, n - 1$ je x_i non $\parallel$ x_{i+1} (symbol $\parallel$ značí relaci nesrovnatelnosti příslušnou relaci $\leqq$) a žádné $a \in A$ neleží mezi x_i, x_{i+1} [2]). Nejsou-li x, y odděleny A, pišme $x\mathrm{A}y$.

Relace A je zřejmě ekvivalencí na $B - A$ a vytváří tedy na $B - A$ rozklad, který označíme B_{A}. Pro $x \in B - A$ nechť symbol $S(x)$ značí ten prvek rozkladu B_{A}, do kterého x patří. K rozkladu B_{A} dospějeme i jinak, pro libovolnou množinu $E \subset B - A$ položme

$$D^0_{\mathrm{A}}(E) = \\ = \{x \mid x \in B - A;\ \text{existuje } y \in E \text{ tak, že je } x \leqq y \text{ a žádné } a \in A \text{ neleží mezi } x, y\},$$

$$H^0_{\mathrm{A}}(E) = \\ = \{x \mid x \in B - A;\ \text{existuje } y \in E \text{ tak, že je } y \leqq x \text{ a žádné } a \in A \text{ neleží mezi } x, y\}.$$

Pro $n \geqq 0$ celé položme dále

$$D^{2n+1}_{\mathrm{A}}(E) = H^0_{\mathrm{A}}[D^{2n}_{\mathrm{A}}(E)] \qquad D^{2n+2}_{\mathrm{A}}(E) = D^0_{\mathrm{A}}[D^{2n+1}_{\mathrm{A}}(E)]$$
$$H^{2n+1}_{\mathrm{A}}(E) = D^0_{\mathrm{A}}[H^{2n}_{\mathrm{A}}(E)] \qquad H^{2n+2}_{\mathrm{A}}(E) = H^0_{\mathrm{A}}[H^{2n+1}_{\mathrm{A}}(E)]$$

Takto jsou pro každé $n \geqq 0$ celé a každou $E \subset B - A$ definovány množiny

[1]) Inkluse $A \subset B$ v našem pojetí zahrnuje i případ množinové rovnosti $A = B$.

[2]) Prvek $x \in B$ leží mezi prvky $y, z \in B$ právě když platí $y \leqq x \leqq z$ nebo $z \leqq x \leqq y$ (viz BIRKHOFF [1], kde jsou uvedeny i četné jiné zde používané pojmy).

$H^n_A(E)$, $D^n_A(E)$ za předpokladu ovšem, že jsou dokázány inkluse $H^n_A(E) \subset B - A$, $D^n_A(E) \subset B - A$; to se však snadno nahlédne indukcí. Položme $\bar{S}(E) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} H^n_A(E)$, $\underline{S}(E) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} D^n_A(E)$.

Pro $x \in B - A$ množiny $H^n_A(\{x\})$, $D^n_A(\{x\})$, $\bar{S}(\{x\})$, $\underline{S}(\{x\})$ značme stručně $H^n_A(x)$, $D^n_A(x)$, $\bar{S}(x)$, $\underline{S}(x)$.

Lemma 1. *Buď $x \in B - A$, pak je $\bar{S}(x) = S(x) = \underline{S}(x)$.*

Důkaz. Je-li $y \in H^0_A(x)$, je zřejmě $y \in S(x)$; nechť pro $n \geqq 0$ celé platí inkluse $H^n_A(x) \subset S(x)$. Buď $y \in H^{n+1}_A(x)$, pak existuje $z \in H^n_A(x)$ takové, že platí y non $\parallel z$ a mezi y, z neleží žádný prvek z A, tedy je yAz. Dle indukčního předpokladu ale je xAz a tedy platí xAy. Pro každé $n \geqq 0$ proto platí inkluse $H^n_A(x) \subset S(x)$ a tedy i inkluse $\bar{S}(x) \subset S(x)$. Nechť je naopak $y \in S(x)$, pak existuje konečná posloupnost $\{x_i\}_{i=0}^n$ taková, že je $x_0 = x$, $x_n = y$, pro $i = 0, \ldots, n - 1$ je x_i non $\parallel x_{i+1}$ a mezi x_i, x_{i+1} neleží žádný prvek z A. Indukcí snadno ukážeme platnost vztahu $x_i \in H^{2i}_A(x)$ pro každé $i = 0, \ldots, n$ a speciálně tedy $y \in H^{2n}_A(x) \subset \bar{S}(x)$. Platí proto i inkluse opačná. Druhá rovnost se ukáže analogicky.

Lemma 2. *Nechť E je množina. Každému $x \in E$ buď přiřazena množina $Q_0(x)$, β buď prvé ze všech ordinálních čísel α splňujících nerovnosti* card $Q_0(x) \leqq \aleph_\alpha$ *pro každé $x \in E$,* card $E \leqq \aleph_\alpha$. *$\gamma \geqq \omega_{\beta+1}$ buď ordinální číslo, pro každé $x \in E$ buď definována posloupnost množin $\{Q_\nu(x)\}_{\nu<\gamma}$ taková, že pro každé $x \in E$ platí*

a) *je-li $\nu + 1 < \gamma$, pak je $Q_{\nu+1}(x) \subset Q_\nu(x)$,*

b) *je-li $\xi < \gamma$, ξ limitní, pak je $Q_\xi(x) \subset \bigcap_{\nu<\xi} Q_\nu(x)$.*

Pak platí tato tvrzení:

1. *Pro každé $x \in E$ a libovolná ordinální čísla ξ, ν, $\nu < \xi < \gamma$ je $Q_\xi(x) \subset Q_\nu(x)$.*

2. *Existuje ordinální číslo $\lambda < \omega_{\beta+1}$ takové, že pro každé $x \in E$ je $Q_\lambda(x) = Q_{\lambda+1}(x)$.*

Důkaz. ad 1. Buď $\nu + 1 < \gamma$, pak dle a. platí $Q_{\nu+1}(x) \subset Q_\nu(x)$. Buď $\xi > 0$ ordinální číslo takové, že je $\nu + \xi < \gamma$ a nechť pro všechna $\eta < \xi$ ordinální čísla platí inkluse $Q_{\nu+\eta}(x) \subsetneq Q_\nu(x)$; je-li ξ limitní, je limitní i $\nu + \xi$ a pak dle b. je $Q_{\nu+\xi}(x) \subset \bigcap_{\eta<\nu+\xi} Q_\eta(x) \subset Q_\nu(x)$. Je-li $\xi = \eta + 1$, je $Q_{\nu+\xi}(x) = Q_{(\nu+\eta)+1}(x) \subset Q_{\nu+\eta}(x) \subset Q_\nu(x)$ jednak dle a., jednak dle indukčního předpokladu. Indukcí jsme takto ukázali, že pro každé $\xi > 0$ takové, že je $\nu + \xi < \gamma$, a $x \in E$ libovolné je $Q_{\nu+\xi}(x) \subset Q_\nu(x)$. Tvrzení 1. tedy platí, neboť ke každému η, $\nu < \eta < \gamma$ existuje právě jedno ξ takové, že $\nu + \xi = \eta$.

ad 2. Nechť pro každé $\nu < \omega_{\beta+1}$ existuje prvek $x = x(\nu) \in E$ takový, že je $Q_\nu[x(\nu)] - Q_{\nu+1}[x(\nu)] \neq \emptyset$, z každé $Q_\nu[x(\nu)] - Q_{\nu+1}[x(\nu)]$ vybereme pak po jednom prvku, který označíme $y(x, \nu)$. Z tvrzení 1. plyne, že jsou-li pro $\eta < \nu < \gamma$

prvky $y(x, \eta)$, $y(x, \nu)$ definovány, pak jsou různé. Pro $x \in E$ položme $P(x) = \bigcup_{\nu < \omega_{\beta+1}} \{y(x, \nu)\}$, kde $\{y(x, \nu)\}$ znamená prázdnou množinu není-li $y(x, \nu)$ definován a množinu obsahující právě jen prvek $y(x, \nu)$, je-li $y(x, \nu)$ definován. Zřejmě je $P(x) \subset Q_0(x)$ a platí proto card $P(x) \leqq \aleph_\beta$; tedy je $\sum_{x \in E}$ card $P(x) \leqq \sum_{x \in E}$ card $Q_0(x) \leqq \aleph_\beta^2 = \aleph_\beta$. Z druhé strany ale je $\sum_{x \in E}$ card $P(x) = \sum_{x \in E}$ card $\bigcup_{\nu < \omega_{\beta+1}} \{y(x, \nu)\} = \sum_{x \in E, \nu < \omega_{\beta+1}}$ card $\{y(x, \nu)\} \geqq \sum_{\nu < \omega_{\beta+1}}$ card $\{y[x(\nu), \nu]\} = \aleph_{\beta+1}$, neboť je $\{y[x(\nu), \nu]\} \neq \emptyset$. To je ale spor, existuje tedy $\lambda < \omega_{\beta+1}$ takové, že pro každé $x \in E$ je $Q_\lambda(x) - Q_{\lambda+1}(x) = \emptyset$, z čehož plyne (spolu s užitím předpokladu a.) tvrzení 2.

2. NUTNÁ PODMÍNKA PRO EXISTENCI ISOTONNÍHO ROZŠÍŘENÍ

Všude dál budou symboly A, B, C značit množiny, pro které platí $A \subset B$, $\leqq$ je relace uspořádání B, $\preceq$ je relace uspořádání C. Symbol $\|$ značí jako obvykle relaci nesrovnatelnosti; z textu vždy vyplyne, značí-li relaci nesrovnatelnosti v B nebo v C. f bude označení isotonního zobrazení A do C, zobrazení $\bar{f}$ nazveme *isotonním rozšířením* zobrazení f z A na B, je-li $\bar{f}$ isotonní zobrazení B do C takové, že parciální zobrazení $\bar{f}_A$ je totožné s f.

Lemma 3. *X buď množina, pro každé $\nu \in X$ buď $a_\nu \in B_A$. Nechť pro každé $\nu \in X$ existuje zobrazení f_ν, které je isotonním rozšířením f z A na $A \cup a_\nu$, nechť pro $\eta, \nu \in X$, $\eta \neq \nu$ platí $a_\eta \neq a_\nu$. Položme $g(x) = f(x)$ pro $x \in A$; je-li $\nu \in X$ a $x \in a_\nu$, položme $g(x) = f_\nu(x)$. Pak g je zobrazení $A \cup \bigcup_{\nu \in X} a_\nu$ do C, které je isotonním rozšířením zobrazení f z A na $A \cup \bigcup_{\nu \in X} a_\nu$.*

Důkaz. Sjednocení $A \cup \bigcup_{\nu \in X} a_\nu$ je disjunktní[3]) a proto g je jednoznačně definováno. Zřejmě je parciální zobrazení g_A totožné s f, zbývá ukázat isotonii g.

Buď $x, y \in A \cup \bigcup_{\nu \in X} a_\nu$, $x \leqq y$, pak jsou možné právě tyto případy: $x, y \in A$; pak je $g(x) = f(x) \preceq f(y) = g(y)$, jak plyne z isotonie f. $x \in A$, $\nu \in X$, $y \in a_\nu$; pak je $g(x) = f_\nu(x) \preceq f_\nu(y) = g(y)$, jak plyne z předpokladu, že zobrazení f_ν je isotonním rozšířením f z A na $A \cup a_\nu$. $\eta \in X$, $x \in a_\eta$, $y \in A$; tento případ se řeší stejně jako případ předchozí. $\eta, \nu \in X$, $\eta \neq \nu$, $x \in a_\eta$, $y \in a_\nu$; pak musí mezi x, y existovat $a \in A$ (jinak by bylo xAy) a tedy je $g(x) = f_\eta(x) \preceq f_\eta(a) = f(a) = f_\nu(a) \preceq f_\nu(y)$, jak plyne z toho, že zobrazení f_η (f_ν) je isotonním rozšířením f z A na $A \cup a_\eta$ $(A \cup a_\nu)$. $\nu \in X$, $x \in a_\nu$, $y \in a_\nu$; pak je $g(x) = f_\nu(x) \preceq f_\nu(y) = g(y)$, jak plyne z isotonie f_ν.

Ve všech možných případech tedy z předpokladu $x, y \in A \cup \bigcup_{\nu \in X} a_\nu$, $x \leqq y$, plyne nerovnost $g(x) \preceq g(y)$ a g je tedy isotonní zobrazení $A \cup \bigcup_{\nu \in X} a_\nu$ do C.

---

[3]) tj. libovolné dva různé prvky systému množin $\{A, a_\nu\}_{\nu \in X}$ jsou disjunktní, a pro každé $\nu \in X$ je $A \neq a_\nu$.

Věta 1. *Zobrazení $\bar{f}$, které je isotonním rozšířením f z A na B, existuje právě když pro každé $a_\nu \in B_A$ existuje alespoň jedno zobrazení f_ν, které je isotonním rozšířením f z A na $A \cup a_\nu$.*

Důkaz. Postačitelnost podmínky plyne z lemmatu 3, její nutnost pak z toho, že pro každé $a_\nu \in B_A$ parciální zobrazení $\bar{f}_{A \cup a_\nu}$ je isotonním rozšířením f z A na $A \cup a_\nu$.

Pro $x \in B$ definujeme $X_1(x) = A \cap D^0_\emptyset(x)$, $X_2(x) = A \cap H^0_\emptyset(x)$; na systému všech podmnožin v C definujeme relaci $\dot{\lesssim}$ takto: je-li $D \subset C$, $E \subset C$, pak je $D \dot{\lesssim} E$ právě když existuje $u \in D$, $v \in E$ tak, že platí $u \lesssim v$.

Definice 1. Buď $x \in B - A$, pak položme

$$P_0(x) = \{u \mid u \in C;\ y \in X_1(x),\ z \in X_2(x) \Rightarrow f(y) \leqq u \leqq f(z)\} \quad \text{pro} \quad X_1(x) \neq \emptyset \neq X_2(x)\,,$$

$$P_0(x) = \{u \mid u \in C;\ y \in X_1(x) \Rightarrow f(y) \leqq u\} \quad \text{pro} \quad X_1(x) \neq \emptyset = X_2(x)\,,$$

$$P_0(x) = \{u \mid u \in C;\ z \in X_2(x) \Rightarrow u \leqq f(z)\} \quad \text{pro} \quad X_1(x) = \emptyset \neq X_2(x)\,,$$

$$P_0(x) = C \quad \text{pro} \quad X_1(x) = \emptyset = X_2(x)\,.$$ [4])

Buď ξ ordinální číslo, pro každé $y \in B - A$ buď množina $P_\xi(y)$ definována, pak pro $x \in B - A$ položme

$$P_{\xi+1}(x) = \{u \mid u \in P_\xi(x);\ y \in D^0_A(x),\ z \in H^0_A(x) \Rightarrow P_\xi(y) \dot{\lesssim} \{u\} \dot{\lesssim} P_\xi(z)\}\,.$$

Je-li ξ limitní a je-li pro každé $\eta < \xi$ množina $P_\eta(x)$ definována, položme $P_\xi(x) = \bigcap_{\eta<\xi} P_\eta(x)$. Pro $x \in A$ a ξ libovolné ordinální číslo klademe $P_\xi(x) = \{f(x)\}$.

Lemma 4. *Zobrazení $\bar{f}$ buď isotonním rozšířením f z A na B. Pak pro každé $x \in B$ a ξ libovolné ordinální číslo je $\bar{f}(x) \in P_\xi(x)$.*

Důkaz. Pro $x \in A$ je tvrzení zřejmé. Buď $x \in B - A$, $y \in X_1(x)$, $z \in X_2(x)$, pak je $f(y) = \bar{f}(y) \leqq \bar{f}(x) \leqq \bar{f}(z) = f(z)$ a tedy je $\bar{f}(x) \in P_0(x)$. Nechť tvrzení platí pro všechna $x \in B - A$ a pro $\xi \geqq 0$ dané ordinální číslo, pak pro $y \in D^0_A(x)$, $z \in H^0_A(x)$ libovolná je $\bar{f}(y) \in P_\xi(y)$, $\bar{f}(z) \in P_\xi(z)$, z isotonie $\bar{f}$ plyne $\bar{f}(y) \leqq \bar{f}(x) \leqq \bar{f}(z)$ a tedy je $P_\xi(y) \dot{\lesssim} \{\bar{f}(x)\} \dot{\lesssim} P_\xi(z)$; dle definice $P_{\xi+1}(x)$ je $\bar{f}(x) \in P_{\xi+1}(x)$. Je-li ξ limitní a je-li $\bar{f}(x) \in P_\eta(x)$ pro všechna $\eta < \xi$, je i $\bar{f}(x) \in \bigcap_{\eta<\xi} P_\eta(x) = P_\xi(x)$.

---

[4]) (*Důležitá poznámka*). α' buď nejmenší ze všech ordinálních čísel β, pro které jsou splněny nerovnosti

$$\operatorname{card} P_0(x) \leqq \aleph_\beta \quad \text{pro každé} \quad x \in B - A\,,$$

$$\operatorname{card}(B - A) \leqq \aleph_\beta\,.$$

O všech ordinálních číslech v dalších textu vystupujících předpokládáme, že jsou menší než $\omega_{\alpha'+3}$.

Lemma 5. *Buď $x \in B$, ξ, η buďte ordinální čísla, $\xi \leqq \eta$. Pak je $P_\eta(x) \subset P_\xi(x) \subset C$.*

Důkaz. Z definice plyne, že je $P_{\xi+1}(x) \subset P_\xi(x)$ a je-li ξ limitní, je $P_\xi(x) \subset \bigcap_{\eta<\xi} P_\eta(x)$ pro každé $x \in B$ a ξ libovolné ordinální číslo. Lemma je pak bezprostředním důsledkem lemmatu 2 (inkluse $P_\xi(x) \subset C$ vyplývá ze zřejmé inkluse $P_0(x) \subset C$ a z první inkluse v tvrzení lemmatu).

Lemma 6. *Buď $x \in B$ libovolné a $\xi \geqq 0$ buď ordinální číslo. Buďte $u, w \in P_\xi(x)$ a $v \in C$ takové, že $u \precsim v \precsim w$. Pak $v \in P_\xi(x)$.*

Důkaz. Tvrzení platí pro $x \in A$. Buď $x \in B - A$, $y \in X_1(x)$, $z \in X_2(x)$, pak je $f(y) \precsim u \precsim v \precsim w \precsim f(z)$ a tedy je $v \in P_0(x)$. Nechť pro $x \in B - A$ a $\xi \geqq 0$ platí, že tvrzení je správné pro všechna $\eta < \xi$, buď ξ limitní. Z lemmatu 5 plyne, že je $u, w \in P_\eta(x)$ pro každé $\eta < \xi$ a tedy z indukčního předpokladu vyplývá, že je i $v \in P_\eta(x)$; je pak $v \in \bigcap_{\eta<\xi} P_\eta(x) = P_\xi(x)$. Buď $\xi = \eta + 1$, dle lemmatu 5 je $u, w \in P_\eta(x)$ a dle indukčního předpokladu je $v \in P_\eta(x)$. Buď $y \in D^0_A(x)$, $z \in H^0_A(x)$, pak ze vztahu $u, w \in P_{\eta+1}(x)$ plyne existence $a \in P_\eta(y)$, $b \in P_\eta(z)$ takových, že je $a \precsim u \precsim v \precsim w \precsim b$ a tedy je $P_\eta(y) \mathrel{\dot{\precsim}} \{v\} \mathrel{\dot{\precsim}} P_\eta(z)$. Je proto $v \in P_\xi(x)$.

Lemma 7. *C buď svaz resp. σ – svaz, resp. úplný svaz. Pak pro každé $x \in B$ a ξ libovolné ordinální číslo je $P_\xi(x)$ podsvaz resp. σ – podsvaz, resp. úplný podsvaz v C.*

Důkaz. Pro $x \in A$ je tvrzení zřejmé, buď $x \in B - A$. Buď $u, v \in P_0(x)$, pak pro každý prvek $y \in X_2(x)$ je $u \precsim f(y)$, $v \precsim f(y)$ a tedy je i $u \cup v \precsim f(y)$, $u \cap v \precsim f(y)$. Opačné nerovnosti pro $z \in X_1(x)$ se odvodí stejně a proto platí implikace $u, v \in P_0(x) \Rightarrow u \cup v$, $u \cap v \in P_0(x)$. Nechť pro dané $\xi \geqq 0$ tvrzení platí pro každé $x \in B$, buď $u, v \in P_{\xi+1}(x)$. Pak je $u, v \in P_\xi(x)$ a dle indukčního předpokladu je i $u \cup v$, $u \cap v \in P_\xi(x)$. Je $u, v \in P_{\xi+1}(x)$ a proto pro $y \in D^0_A(x)$ existují $a, b \in P_\xi(y)$ takové, že je $a \precsim u$, $b \precsim v$. Dle indukčního předpokladu je $a \cap b \in P_\xi(y)$ a zřejmě je $a \cap b \precsim u$, $a \cap b \precsim v$; tedy je i $a \cap b \precsim u \cap v \precsim u \cup v$. Tedy pro $y \in D^0_A(x)$ platí $P_\xi(y) \mathrel{\dot{\precsim}} \{u \cap v\}$, $P_\xi(y) \mathrel{\dot{\precsim}} \{u \cup v\}$. Opačné vztahy odvodíme pro $z \in H^0_A(x)$ a tedy je $u \cup v$, $u \cap v \in P_{\xi+1}(x)$. Je-li ξ limitní a je-li pro každé $\eta < \xi$ $P_\eta(x)$ podsvaz v C, je zřejmě i $P_\xi(x) = \bigcap_{\eta<\xi} P_\eta(x)$ podsvaz v C. ($\emptyset$ považujeme též za podsvaz v C.) Podobně se lemma dokáže pro další dva případy.

Předpoklad, že C je svaz, resp. σ – svaz, resp. úplný svaz jsme potřebovali pouze proto, abychom tvrzení dokázali pro $P_0(x)$. Stejně jako v důkazu lemmatu 7 postupujeme při důkazu tvrzení:

$\bar{a}$ buď daný prvek systému B_A a $\bigcup_{y\in\bar{a}} P_0(y)$ buď svaz, resp σ – svaz, resp. úplný svaz; pro každé $x \in \bar{a}$ buď $P_0(x)$ podsvaz, resp. σ – podsvaz, resp. úplný podsvaz v $\bigcup_{y\in\bar{a}} P_0(y)$. Pak pro každé $\xi \geqq 0$ je $P_\xi(x)$ podsvaz, resp. σ – podsvaz, resp. úplný podsvaz v $\bigcup_{y\in\bar{a}} P_0(y)$.

Lemma 8. *Existuje-li ordinální číslo* ν *takové, že pro každé* x, $x \in \bar{a} \in B_A$, *platí* $P_\nu(x) = P_{\nu+1}(x)$, *pak pro každé ordinální číslo* $\xi \geqq \nu$ *a každé* $x \in A \cup \bar{a}$ *je* $P_\xi(x) = P_\nu(x)$.

Důkaz. Je-li $\xi \geqq \nu$, existuje právě jedno $\eta \geqq 0$ takové, že je $\nu + \eta = \xi$. Pro $x \in A$ a ξ libovolné je rovnost triviálně splněna. Nechť pro dané $\eta \geqq 0$ a pro každé $x \in \bar{a}$ platí $P_{\nu+\eta}(x) = P_\nu(x)$, pak je

$$P_{\nu+\eta+1}(x) = \{u \mid u \in P_{\nu+\eta}(x);\ y \in D_A^0(x),\ z \in H_A^0(x) \Rightarrow P_{\nu+\eta}(y) \mathrel{\dot{\leqq}} \{u\} \mathrel{\dot{\leqq}} P_{\nu+\eta}(z)\} = $$
$$= \{u \mid u \in P_\nu(x),\ y \in D_A^0(x),\ z \in H_A^0(x) \Rightarrow P_\nu(y) \mathrel{\dot{\leqq}} \{u\} \mathrel{\dot{\leqq}} P_\nu(z)\} = P_{\nu+1}(x) = P_\nu(x)$$

jednak dle indukčního předpokladu, jednak dle předpokladu lemmatu (dle lemmatu 1 je $H_A^0(x) \subset S(x) = \bar{a}$, $D_A^0(x) \subset S(x) = \bar{a}$). Je-li η limitní a platí-li rovnost $P_{\nu+\eta'}(x) = P_\nu(x)$ pro každé $\eta' < \eta$, je $P_{\nu+\eta}(x) = \bigcap_{\alpha<\nu+\eta} P_\alpha(x) = [\bigcap_{\alpha\leqq\nu} P_\alpha(x)] \cap [\bigcap_{\nu<\alpha<\nu+\eta} P_\alpha(x)] = P_\nu(x) \cap P_\nu(x) = P_\nu(x)$ jednak dle lemmatu 5, jednak dle indukčního předpokladu.

Lemma 9. *Buď* $\bar{a} \in B_A$. $\aleph_\alpha$ *buď prvý ze všech regulárních alefů, pro který platí nerovnost* card $P_0(x) < \aleph_\alpha$ *pro každé* $x \in \bar{a}$. *Pak pro každé* $x \in \bar{a}$ *platí* $P_{\omega_\alpha}(x) = P_{\omega_\alpha+1}(x)$.

Důkaz. Buď $x \in \bar{a}$, $u \in P_{\omega_\alpha}(x)$, $y \in D_A^0(x)$. Označme $U(y, u) = \{v \mid v \in P_0(y);\ v \mathrel{\dot{\leqq}} u\}$, zřejmě je card $U(y, u) < \aleph_\alpha$. Je-li $v \in U(y, u)$ takové, že je $v \in P_\xi(y) - P_{\xi+1}(y)$ ($\xi < \omega_\alpha$), položme $g(v) = \xi$. Označme G definiční obor funkce g; je $G \subset U(y, u)$ a tedy je card $G < \aleph_\alpha$. $g(G)$ je podmnožinou ve W_{ω_α} úseku ordinálních čísel menších než ω_α a je card $g(G) < \aleph_\alpha$. $\aleph_\alpha$ je regulární a tedy je regulární i ω_α a $g(G)$ není proto konfinální s W_{ω_α}; to znamená, že existuje $\xi < \omega_\alpha$ takové, že pro každé $\eta \in g(G)$ je $\eta < \xi$. Kdyby bylo $U(y, u) = G$, pak by bylo $U(y, u) \cap P_\xi(y) = \emptyset$ a platilo by $u \notin P_{\xi+1}(x) \supset P_{\omega_\alpha}(x)$, což je spor. Existuje tedy $v \in U(y, u) \cap P_\xi(y)$ a dle definice ξ pak musí být $v \in P_\eta(y)$ pro každé $\eta < \omega_\alpha$, tedy je i $v \in \bigcap_{\eta<\omega_\alpha} P_\eta(y) = P_{\omega_\alpha}(y)$. Je proto $P_{\omega_\alpha}(y) \mathrel{\dot{\leqq}} \{u\}$; pro $z \in H_A^0(x)$ se stejně dokáže opačná relace a tedy je $u \in P_{\omega_\alpha+1}(y)$. Z toho a z lemmatu 5 dostáváme rovnost $P_{\omega_\alpha}(x) = P_{\omega_\alpha+1}(x)$.

Lemma 10. *Nechť* ξ *je ordinální číslo, buď* $x \in \bar{a} \in B_A$, *buď* $P_\xi(x) = \emptyset$. *Pak pro každé* $y \in \bar{a}$ *je* $P_{\xi+\omega_0}(y) = \emptyset$.

Důkaz. Buď $y \in D_A^0(x)$, pak je $x \in H_A^0(y)$ a z $P_\xi(x) = \emptyset$ plyne $P_{\xi+1}(y) = \emptyset$. Nechť pro $y \in D_A^n(x)$ platí $P_{\xi+n+1}(y) = \emptyset$, buď $y \in D_A^{n+1}(x)$. Pak existuje $z \in [H_A^0(y) \cup D_A^0(y)] \cap D_A^n(x)$; dle indukčního předpokladu je $P_{\xi+n+1}(z) = \emptyset$ a tedy platí i $P_{\xi+n+2}(y) = \emptyset$. Dle lemmat 1 a 5 tedy tvrzení platí.

Lemma 11. *Buď* $\bar{a} \in B_A$, $\xi \geqq 0$ *ordinální číslo. Nechť platí*

a. *je-li* $x \in \bar{a}$ *libovolné, je* $P_\xi(x) \neq \emptyset$,

b. *je-li* $x \in \bar{a}$, $y \in H_A^0(x)$, $x \neq y$, $u \in P_\xi(x)$, $v \in P_\xi(y)$, *je* u non $\|$ v.

Pak pro každé $x \in \bar{a}$ *je* $P_\xi(x) = P_{\xi+1}(x)$.

Důkaz. Buď $x \in \bar{a}$, $u \in P_\xi(x)$, budiž $y \in H_A^0(x)$ libovolné. Nechť existuje $v \in P_\xi(y)$ tak, že je $v \lesssim u$. Je-li $a \in X_1(y)$, je $f(a) \lesssim v \lesssim u$ (neboť je $v \in P_\xi(y) \subset P_0(y)$), je-li $b \in X_2(y)$, je též $b \in X_2(x)$ (neboť je $x \leqq y$) a tedy je $u \lesssim f(b)$. Tedy je $u \in P_0(y)$, nechť pro $\eta < \xi$ je $u \in P_\eta(y)$. Je-li $z \in D_A^0(y)$, existuje $w \in P_\eta(z)$ takové, že je $w \lesssim$ $\lesssim v \lesssim u$ a tedy je $P_\eta(z) \dot{\lesssim} \{u\}$; je-li $z \in H_A^0(y)$, je buď $z \in H_A^0(x)$ a pak je $\{u\} \dot{\lesssim} P_\eta(z)$, nebo $z \notin H_A^0(x)$ a pak existuje $c \in A$ takové, že je $x \leqq c \leqq z$, pak ovšem pro každé $w \in P_\eta(z)$ je $u \lesssim w$ a z neprázdnosti $P_\eta(z)$ plyne opět $\{u\} \dot{\lesssim} P_\eta(z)$. V každém případě je $u \in P_{\eta+1}(y)$. Je-li $\eta \leqq \xi$ limitní a pro každé $\eta' < \eta$ je $u \in P_{\eta'}(y)$, je také $u \in \bigcap_{\eta' < \eta} P_{\eta'}(y) =$ $= P_\eta(y)$. Z předpokladu existence $v \in P_\xi(y)$ takového, že $v \lesssim u$ plyne tedy $u \in P_\xi(y)$ a tedy je $\{u\} \dot{\lesssim} P_\xi(y)$. Neexistuje-li takové v, plyne z předpokladů a., b. opět $\{u\} \dot{\lesssim}$ $\dot{\lesssim} P_\xi(y)$; pro $z \in D_A^0(x)$ se opačná relace dokáže analogicky a tedy je $u \in P_{\xi+1}(x)$.

Lemma 12. *Buď $\bar{a} \in B_A$, nechť pro každé $x \in \bar{a}$ existuje v C $\sup f[X_1(x)]$, $\inf f[X_2(x)]$. Pak pro každé $x \in \bar{a}$ je $P_0(x) = P_1(x)$ a platí*

$$P_0(x) = \{u \mid u \in C, \sup f[X_1(x)] \lesssim u \lesssim \inf f[X_2(x)]\} \neq \emptyset .$$

Důkaz. Zřejmě platí inkluse $\{u \mid u \in C; \sup f[X_1(x)] \lesssim u \lesssim \inf f[X_2(x)]\} \subset$ $\subset P_0(x)$, buď $u \in P_0(x)$. Pak pro každé $y \in X_1(x)$ je $f(y) \lesssim u$ a tedy $\sup f[X_1(x)] \lesssim u$, podobně vyplyne nerovnost $u \lesssim \inf f[X_2(x)]$ a platí tedy i inkluse opačná. Z relací $\sup f[X_1(x)] \in P_0(x)$, $\inf f[X_2(x)] \in P_0(x)$ plyne $P_0(x) \neq \emptyset$. Buď $u \in P_0(x)$, $y \in$ $\in H_A^0(x)$. Je $x \leqq y$ a proto je i $X_2(y) \subset X_2(x)$, z toho plyne $\inf f[X_2(x)] \lesssim \inf f[X_2(y)]$ a tedy platí $\{u\} \dot{\lesssim} P_0(y)$. Podobně se dokáže opačná relace pro $z \in D_A^0(x)$; proto je $P_0(x) = P_1(x)$.

Z lemmat 2 a 9 vyplývá, že pro daná f a $\bar{a} \in B_A$ existuje takové ordinální číslo ξ, že pro každé $x \in \bar{a}$ je $P_\xi(x) = P_{\xi+1}(x)$. Z lemmatu 8 pak ovšem plyne od takového ξ stacionárnost všech posloupností $\{P_\nu(x)\}_{\nu<\eta}$ $(\xi < \eta)$ pro každé $x \in \bar{a}$; prvé takové ξ označme λ (měli bychom vlastně psát $\lambda_{\bar{a}f}$, ovšem věta 1 nám dovoluje omezovat se jen na množinu $A \cup \bar{a}$). V některých speciálních případech je $\lambda = 0$, např. je-li C řetězec a $P_0(x) \neq \emptyset$ pro každé $x \in \bar{a}$ (lemma 11) nebo A nebo C úplný svaz (lemma 12). V obecném případě nelze odhady lemmat 2 a 9 už zlepšit, platí totiž toto tvrzení:

1. $\aleph_\alpha$ *buď prvý alef, pro který platí nerovnosti* card $P_0(x) \leqq \aleph_\alpha$ *pro každé* $x \in \bar{a}$, card $\bar{a} \leqq \aleph_\alpha$. *Pak λ může nabýt kterékoliv hodnoty menší než $\omega_{\alpha+1}$.*

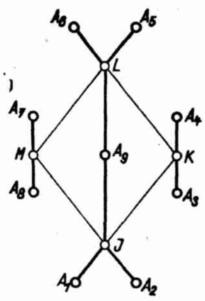
2. $\aleph_\alpha$ *buď prvý regulární alef, pro který platí nerovnosti* card $P_0(x) < \aleph_\alpha$ *pro každé $x \in \bar{a}$. Je-li* card $\bar{a} \geqq \aleph_\alpha$, *může být i $\lambda = \omega_\alpha$.*

3. *Prvý alef pro který platí nerovnosti* card $P_0(x) < \aleph_\alpha$ *pro každé $x \in \bar{a}$ buď iregulární $\aleph_\alpha$. Jestliže je* card $\bar{a} \leqq \aleph_\alpha$, *může λ nabýt kterékoliv hodnoty menší než $\omega_{\alpha+1}$, je-li* card $\bar{a} > \aleph_\alpha$, *pak může být i $\lambda = \omega_{\alpha+1}$.*

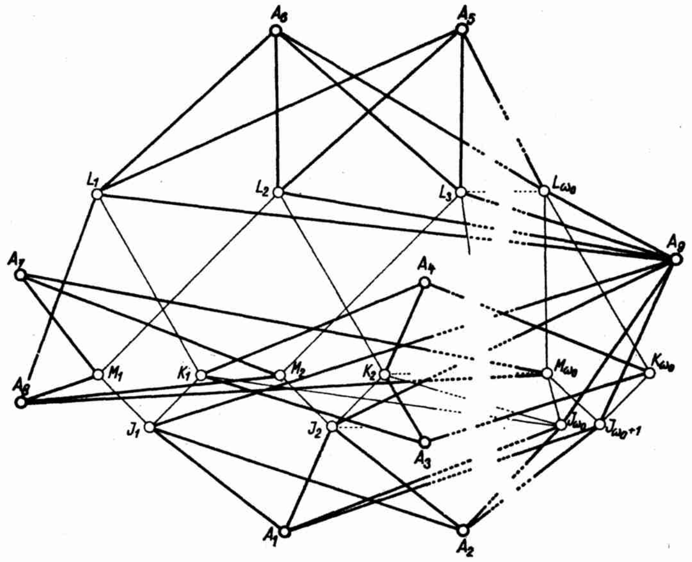
Důkazy těchto tvrzení se provedou konstrukcí, platnost tvrzení 1 ukažme na speciálním případu $\alpha = 0$, $\lambda = \omega_0 + 1$; zobecnění činí potíže jen formální. Na obr. 1

je Hasseův diagram množiny B, na obr. 2 je Hasseův diagram množiny C, prvky množin A a $f(A)$ označme výrazněji a navzájem si odpovídající prvky v A a v $f(A)$ popišme stejnými písmeny ($A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9\}$).

Nechejme k uvážení čtenáři, že je $P_0(M) = \{M_1, M_2, \ldots, M_{\omega_0}\}$, $P_0(K) = \{K_1, \ldots$ $\ldots, K_{\omega_0}\}$, $P_0(L) = \{L_1, \ldots, L_{\omega_0}\}$, $P_0(J) = \{J_1, \ldots, J_{\omega_0}, J_{\omega_0+1}\}$ a že je $\lambda = \omega_0 + 1$.



Obr. 1.



Obr. 2.

Tvrzení 2 a 3 dokážeme opět konstrukcí B a C, kterou dostaneme vhodným skládáním základních konstrukcí z důkazu tvrzení 1.

3. SPECIÁLNÍ PŘÍPADY

V této části studujeme, kdy je neprázdnost množin $P_\lambda(x)$ pro každé x, $x \in \bar{a} \in B_A$, podmínkou dostačující pro existenci zobrazení $\bar{f}$, které je isotonním rozšířením zobrazení f z A na $A \cup \bar{a}$ – dle lemmatu 4 je to podmínka nutná.

Všude v dalším textu symbol λ značí to ordinální číslo, které je dle závěru předchozí části přiřazeno množinám $\bar{a}$ a C a zobrazení f. Buď $X \subset C$; existuje-li v X prvek největší (nejmenší) označme jej max X (min X).

Věta 2. *Buď $\bar{a} \in B_A$, pro každé $x \in \bar{a}$ nechť platí*

(1) *buď existuje prvek* max $P_\lambda(y)$ *pro každé* $y \in H^0_\emptyset(x) \cap \bar{a}$ *nebo existuje* min $P_\lambda(y)$ *pro každé* $y \in D^0_\emptyset(x) \cap \bar{a}$.

Pak existuje zobrazení $\bar{f}$, které je isotonním rozšířením f z A na $A \cup \bar{a}$.

Důkaz. Buď $x \in \bar{a}$; splňuje-li x prvou část podmínky (1), položme $\bar{f}(x) = \max P_\lambda(x)$, nesplňuje-li ji, pak dle druhé části (1) existuje $\min P_\lambda(x)$ a definujeme $\bar{f}(x) = \min P_\lambda(x)$. Pro $x \in A$ položme $\bar{f}(x) = f(x)$, tedy $\bar{f}_A = f$ a zbývá ukázat isotonii $\bar{f}$. Buďte $x, y \in A \cup \bar{a}$, $x \leqq y$. Je-li $x \in A$, $y \in \bar{a}$, je $\bar{f}(y) \in P_\lambda(y) \subset P_0(y)$ a tedy je $\bar{f}(x) = f(x) \leqq \bar{f}(y)$, případ $x \in \bar{a}$, $y \in A$ je analogický; je-li $x, y \in A$, je $\bar{f}(x) = f(x) \leqq f(y) = \bar{f}(y)$, neboť f je isotonní. Buď $x, y \in \bar{a}$, pro x buď splněna prvá část podmínky (1). Je-li $y \in H^0_\Lambda(x)$, pak dle definice λ existuje $u \in P_\lambda(y)$ takové, že je $\bar{f}(x) \leqq u$. Ježto prvá část (1) je splněna pro x, je splněna i pro y a tedy je $\bar{f}(y) = \max P_\lambda(y) \geqq u \geqq \bar{f}(x)$. Jestliže $y \notin H^0_\Lambda(x)$, pak existuje $a \in A$ tak, že je $x < a < y$ a ze vztahů $\bar{f}(x) \in P_0(x)$, $\bar{f}(y) \in P_0(y)$ plyne $\bar{f}(x) \leqq f(a) \leqq \bar{f}(y)$.

Platí-li prvá část (1) pouze pro y a pro x nikoliv, nebo neplatí-li ani pro y, je důkaz nerovnosti $\bar{f}(x) \leqq \bar{f}(y)$ stejný. $\bar{f}$ je tedy isotonní zobrazení.

Korolár 1. *f buď isotonní zobrazení A do C, C buď úplný svaz a B libovolná uspořádaná nadmnožina A. Pak vždy existuje zobrazení $\bar{f}$, které je isotonním rozšířením f z A na B.*

Důkaz. Důsledek lemmatu 12 a věty 2.

Korolár 2. *Vzhledem k uspořádání $\leqq$ buď A úplný podsvaz v (uspořádané množině) B. Pak vždy existuje zobrazení $\bar{f}$, které je isotonním rozšířením f z A na B.*

Důkaz. Důsledek lemmatu 12 a věty 2.

Věta 3. *Buď $\bar{a} \in B_\Lambda$, nechť je $P_\lambda(z) \neq \emptyset$ alespoň pro jedno $z \in \bar{a}$. Pro $\xi = \lambda$ buď splněna podmínka b. lemmatu 11. Pak existuje zobrazení $\bar{f}$, které je isotonním rozšířením zobrazení f z A na $A \cup \bar{a}$.*

Důkaz. Z definice λ, z lemmatu 10 a z předpokladu $P_\lambda(z) \neq \emptyset$ plyne neprázdnost $P_\lambda(x)$ pro každé $x \in \bar{a}$. Prvky množiny $A \cup \bar{a}$ srovnejme v prostou posloupnost $\{x_\nu\}_{\nu<\alpha}$. Volme $u_0 \in P_\lambda(x_0)$ libovolně, definujme M_0 jako množinu všech $x \in A \cup \bar{a}$, pro které je $u_0 \in P_\lambda(x)$ a pro každé $x \in M_0$ položme $\bar{f}(x) = u_0$. Buď $\gamma < \alpha$, nechť pro každé $\nu < \gamma$ je sestrojena M_ν a $\bar{f}(x)$ definováno pro každé $x \in M_\nu$. Není-li $A \cup \bar{a} - \bigcup_{\nu<\gamma} M_\nu$ prázdná, buď x_ξ prvý prvek této množiny vzhledem k dobrému uspořádání $A \cup \bar{a}$ v posloupnost $\{x_\nu\}_{\nu<\alpha}$; volme $u_\gamma \in P_\lambda(x_\xi)$ libovolně. Definujme $M_\gamma = \{x \mid x \in (A \cup \bar{a}) - \bigcup_{\nu<\gamma} M_\nu,\ u_\gamma \in P_\lambda(x)\}$ a pro každé $x \in M_\gamma$ položme $\bar{f}(x) = u_\gamma$. Zřejmě existuje $\beta \leqq \alpha$ takové, že pro každé $\nu < \beta$ je M_ν definována a platí $A \cup \bar{a} = \bigcup_{\nu<\beta} M_\nu$ — sjednocení vpravo je zřejmě disjunktní. Každému $x \in A \cup \bar{a}$ je tak přiřazen prvek $\bar{f}(x) \in P_\lambda(x)$; z posledního vyplývá, že pro $x \in A$ je $\bar{f}(x) = f(x)$. Buď $x, y \in A \cup \bar{a}$, $x \leqq y$. Pak existují ordinální čísla $\mu, \nu < \alpha$ taková, že platí $x = x_\mu$, $y = x_\nu$, $x_\mu \in M_\xi$, $x_\nu \in M_\eta$. Je-li $\xi = \eta$, je $\bar{f}(x_\mu) = u_\xi = \bar{f}(x_\nu)$; nechť je $\xi \neq \eta$. Vztah $\xi < \eta$ znamená, že $u_\xi \notin P_\lambda(x_\nu)$; předpokládáme-li $P_\lambda(x_\nu) \leqq \{u_\xi\}$, dostáváme z definice λ

a lemmatu 6 $u_\xi \in P_\lambda(x_\nu)$. Za předpokladu $\xi < \eta$ je tedy relace $P_\lambda(x_\nu) \dot{\lesssim} \{u_\xi\}$ vyloučena a použitím předpokladu b. dostáváme relaci $f(x_\mu) = u_\xi \lesssim u_\eta = \bar{f}(x_\nu)$ V případě $\eta < \xi$ se vztah $u_\xi \prec u_\eta$ dokáže analogicky.

Korolár 3. *C buď řetězec. Pak podmínkou nutnou a postačující k existenci zobrazení $\bar{f}$, které je isotonním rozšířením f z A na $A \cup \bar{a}$, je neprázdnost množin $P_0(x)$ pro každé $x \in \bar{a}$.*

Důkaz vyplývá z lemmatu 11 a věty 3.

Z důkazu věty 3 vyplývá: *zvolíme-li $x \in \bar{a}$ a $u \in P_\lambda(x)$, pak za podmínek věty 3 existuje $\bar{f}$ takové, že je $\bar{f}(x) = u$ — v důkazu volíme $x = x_0$, $u = u_0$.*

Věta 4. *Buď $\bar{a} \in B_A$. Nechť $\bar{a}$ splňuje podmínku klesajících řetězců, nechť pro každé $x \in \bar{a}$ je $P_\lambda(x) \neq \emptyset$ a platí*

(2) $\mathfrak{b}$ *buď prvá ze všech mohutností podmnožin v $D^0_A(x) - \{x\}$, které jsou s $D^0_A(x) - \{x\}$ konfinální*[5]*). Pak pro každou množinu $U \subset P_\lambda(x)$, pro kterou je* card $U \leqq \mathfrak{b}$, *existuje prvek $u \in P_\lambda(x)$ splňující nerovnost $v \lesssim u$ pro každé $v \in U$.*

Pak existuje zobrazení $\bar{f}$, které je isotonním rozšířením zobrazení f z A na $A \cup \bar{a}$.

Důkaz. M_0 buď množina všech minimálních prvků v $\bar{a}$, nechť pro každé $\nu < \eta$ jsou množiny M_ν definovány. Není-li $\bar{a} - \bigcup_{\nu<\eta} M_\nu$ prázdná, bude M_η značit množinu všech jejích minimálních prvků. (Je splněna podmínka klesajících řetězců a tedy je $M_\eta \neq \emptyset$.) Je-li card $\bar{a} \leqq \aleph_\alpha$, pak existuje $\gamma < \omega_{\alpha+1}$ takové, že pro každé $\nu < \gamma$ je M_ν definována, $\bar{a} = \bigcup_{\nu<\gamma} M_\nu$ a sjednocení vpravo je zřejmě disjunktní. Rovněž je zřejmé, že libovolné dva různé prvky z téže množiny M_ν jsou nesrovnatelné. Pro $x \in M_0$ volme $\bar{f}(x) \in P_\lambda(x)$ libovolně, buď $\eta < \gamma$ a nechť pro každé $\nu < \eta$ a $x \in M_\nu$ libovolné je $\bar{f}(x) \in P_\lambda(x)$ definováno. Buď $y \in M_\eta$ libovolné; mezi všemi podmnožinami v $D^0_A(y) - \{y\}$ které jsou s $D^0_A(y) - \{y\}$ konfinální uvažme ty, které mají nejmenší mohutnost $\mathfrak{b}(y)$ a z těch vybereme jednu, kterou označíme $M(y)$. Je-li $x \in M(y) \subset D^0_A(y) - \{y\}$, je $x < y$ a proto není $x \in M_\xi$ pro žádné $\xi \geqq \eta$. Jest tedy $M(y) \subset \bigcup_{\nu<\eta} M_\nu$, a proto je $\bar{f}(x) \in P_\lambda(x)$ definováno pro každé $x \in M(y)$. Z definice P_λ plyne, že pro každé $\bar{f}(x) \in P_\lambda(x)$ existuje prvek $u(x) \in P_\lambda(y)$ tak, že je $\bar{f}(x) \lesssim u(x)$; pro každé $x \in M(y)$ zvolme právě jeden $u(x) \in P_\lambda(y)$ a u je pak zobrazení $M(y)$ do $P_\lambda(y)$. Jest card $M(y) = \mathfrak{b}(y)$ a tedy je card $u[M(y)] \leqq \mathfrak{b}(y)$. Dle (2) existují prvky v, které jsou za všemi prvky z $u[M(y)]$, jeden z nich zvolme a označme $\bar{f}(y)$. Takto je $\bar{f}$ definováno pro každé $x \in \bar{a}$, pro $x \in A$ položme $\bar{f}(x) = f(x)$. $\bar{f}$ je isotonní zobrazení na M_0, nechť pro $\eta < \gamma$ platí, že $\bar{f}$ je isotonní zobrazení na $\bigcup_{\nu<\eta} M_\nu$. Buď $y \in M_\eta$, $x < y$, pak je nutně

[5]) D buď podmnožinou v B; řekneme, že D *je konfinální s* B, jestliže pro každé $x \in B$ existuje alespoň jedno $y \in D$ tak, aby byla splněna relace $x \leqq y$ (v poněkud jiném významu viz např. Birkhoff [1], str. 13 ruského překladu).

$x \in \bigcup_{\nu<\eta} M_\nu$. Nechť je $x \in D^0_A(y)$, pak je buď $x \in M(y)$ – a pak je dle definice $\bar{f}$ $\bar{f}(x) \leqq \leqq \bar{f}(y)$ – nebo $x \notin M(y)$. $M(y)$ je konfinální s $D^0_A(y) - \{y\}$ a proto existuje $z \in M(y)$, $x < z < y$. Dle indukčního předpokladu je $\bar{f}(x) \leqq \bar{f}(z)$ a z definice $\bar{f}$ plyne $\bar{f}(z) \leqq \leqq \bar{f}(y)$, tedy je opět $\bar{f}(x) \leqq \bar{f}(y)$. Je-li $x \notin D^0_A(y)$, pak existuje $a \in A$ tak, že je $x < a < y$ a proto pro každé $r \in P_\lambda(x)$, $s \in P_\lambda(y)$ platí $r \leqq s$, speciálně je $\bar{f}(x) \leqq \bar{f}(y)$. Tedy $\bar{f}$ je isotonní i na $\bigcup_{\nu\leqq\eta} M_\nu$. Ježto je $\bar{a} = \bigcup_{\nu<\gamma} M_\nu$, je $\bar{f}$ isotonní na $\bar{a}$. Pro každé $x \in A \cup \bar{a}$ je $\bar{f}(x) \in P_\lambda(x) \subset P_0(x)$ a z definice P_0 plyne, že $\bar{f}$ je isotonní zobrazení i na $A \cup \bar{a}$, které na A zřejmě zachovává f, tj. pro každé $x \in A$ platí rovnost $f(x) = \bar{f}(x)$.

Snadno lze vyslovit i větu duální.[6])

Je-li $x, y \in \bar{a}$, pak nazveme posloupnost $\{x_i\}_{i=1}^n$ *xy – posloupností*, platí-li

a. pro $i = 0, \dots, n$ je $x_i \in \bar{a}$ a $x_0 = x$, $y = x_n$,

b. $\{x_i\}_{i=0}^n$ je prostá nebo $\{x_i\}_{i=1}^n$ je prostá a $x_0 = x_n$,

c. x_i pokrývá nebo je pokryto x_{i+1} pro každé $i = 0, \dots, n - 1$ [7]).

Lemma 13. *V $\bar{a} \in B_A$ buď splněna podmínka*

(3) *je-li $x \in \bar{a}$, $y \in H^0_A(x)$, pak existuje konečný maximální řetězec s největším prvkem y a nejmenším x.*

Pak pro libovolné prvky $x, y \in \bar{a}$ existuje xy-posloupnost.

Důkaz. Dle lemmatu 1 je $\bar{a} = \bigcup_{j=0}^{+\infty} H^j_A(x)$. Pro $y \in H^0_A(x)$ je řetězec ze (3) xy-posloupností; nechť pro každé $z \in H^j_A(x)$ existuje xz-posloupnost. Buď $y \in H^{j+1}_A(x) - H^j_A(x)$, pak existuje $z \in [H^0_A(y) \cup D^0_A(y)] \cap H^j_A(x)$ a dle (3) a indukčního předpokladu existují yz- a xz-posloupnost. Jejich vhodným složením dostaneme xy-posloupnost.

Lemma 14. *V $\bar{a} \in B_A$ buď splněna podmínka*

(4) *pro žádné $x \in \bar{a}$ neexistuje xx-posloupnost s více než dvěma různými prvky.*

Pak pro libovolné prvky $x, y \in \bar{a}$, $x \neq y$, existuje nejvýš jedna xy-posloupnost.

Důkaz. Buď $x \neq y$, $x, y \in \bar{a}$, nechť $\{x_i\}_{i=0}^m$, $\{y_i\}_{i=0}^n$ jsou dvě různé xy-posloupnosti. Buď j prvé přirozené číslo, pro které je $x_{j+1} \neq y_{j+1}$ – takové j zřejmě existuje a je $0 \leqq j < \min(m, n)$. V $\{x_i\}_{i=j+1}^m$ buď k prvý index, pro který $x_k \in \{y_i\}_{i=j}^n$, l buď prvý index, pro který $y_l = x_k$. Jest $j + 1 \leqq k$, $l \leqq \min(m, n)$ a obě čísla existují.

[6]) O duálnosti viz Birkhoff [1], § 4 kap. I. V našem případě to znamená, že ve větě 4 nahradíme podmínku klesajících řetězců podmínkou řetězců rostoucích (Birkhoff [1], kap. III, § 4) a konfinalitu „koniniciálností“: $D \subset B$ je s B *koniniciální* právě když pro každé $x \in B$ existuje alespoň jedno $y \in D$ tak, že je splněna relace $y \leqq x$.

[7]) x, y buďte prvky z B; řekneme, že x pokrývá y (též: y je pokryto x) právě když platí relace $y < x$ a pro žádné $z \in B$ neplatí současně relace $y < z < x$.

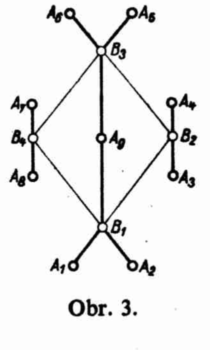
Pak $\{x_i\}_{i=j}^k$, $\{y_i\}_{i=j}^l$ jsou x_jx_k- a y_jy_l-posloupnosti a $x_j, \ldots, x_k, y_{l-1}, \ldots, y_j$ je x_jx_j posloupnost alespoň trojprvková, obsahuje totiž tři různé prvky x_j, x_{j+1} a y_{j+1}.

Věta 5. *Buď $\bar{a} \in B_A$, v $\bar{a}$ buďte splněny podmínky (3) a (4) a pro každé $x \in \bar{a}$ buď $P_\lambda(x) \neq \emptyset$. Pak existuje zobrazení $\bar{f}$, které je isotonním rozšířením f z A na $A \cup \bar{a}$.*

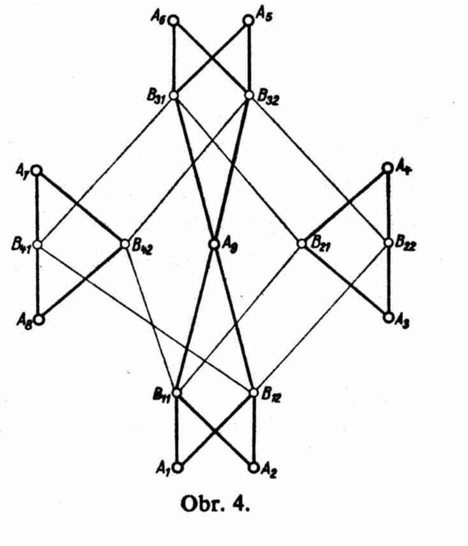
Důkaz. Buďte $x, y \in \bar{a}$, $x \neq y$ libovolné prvky, pak dle lemmat 13 a 14 existuje právě jedna xy-posloupnost $\{x_i\}_{i=0}^n$; položme $n = n(x, y)$ a definujme ještě $n(x, x) = 0$. Zvolme $x \in \bar{a}$ a $u \in P_\lambda(x)$ a položme $\bar{f}(x) = u$. Buď $k \geqq 0$ celé a nechť pro každé $z \in \bar{a}$, $z \neq x$, pro které je $n(x, z) \leqq k$, je $\bar{f}(z)$ definováno tak, že platí $\bar{f}(z) \in P_\lambda(z)$; buď $y \in \bar{a}$, $y \neq x$, $n(x, y) = k + 1$. Buď $\{x_i\}_{i=0}^{k+1}$ příslušná xy-posloupnost, pak $\{x_i\}_{i=0}^k$ je xx_k-posloupnost a $\bar{f}(x_k) \in P_\lambda(x_k)$ je definováno. x_k pokrývá nebo je pokryto y, buď $x_k < y$. Pak $x_k \in D_A^0(y)$ a dle definice λ existují takové prvky $v \in P_\lambda(y)$, že je $\bar{f}(x_k) \leqq v$; jeden z nich vyberme a označme $\bar{f}(y)$. Podobně definujeme $\bar{f}(y)$, je-li $y < x_k$. Z jedinečnosti xy-posloupnosti plyne, že $\bar{f}(y)$ definujeme právě jednou a $\bar{f}$ máme takto definováno na celé množině $\bar{a}$. Pro $x \in A$ položme $\bar{f}(x) = f(x)$. Buď $y, z \in \bar{a}$, $y < z$. Je-li $y \notin D_A^0(z)$, pak existuje $a \in A$ tak, že je $y < a < z$, a je ovšem $\bar{f}(y) \leqq f(a) \leqq \bar{f}(z)$; buď $y \in D_A^0(z)$. Pak dle (3) a lemmatu 14 je jediná yz-posloupnost $\{y_i\}_{i=0}^m$ maximální konečný řetězec mající y jako nejmenší a z jako největší prvek. Buď $n_0 = \min \{n(x, y_j)\}_{j=0,\ldots,m}$; pak dle lemmatu 14 existuje právě jedno y_i, pro které je $n_0 = n(x, y_i)$. Z definice $\bar{f}$ pak plyne, že je $\bar{f}(y_i) \leqq \ldots \leqq \bar{f}(y_m) = \bar{f}(z)$, $\bar{f}(y_i) \geqq \ldots \geqq \bar{f}(y_0) = \bar{f}(y)$. Pro $y \in \bar{a}$, $z \in A$ nebo $y \in A$, $z \in \bar{a}$ nebo $y, z \in A$ vyplývá nerovnost $\bar{f}(y) \leqq \bar{f}(z)$ snadno z inklusí $P_\lambda(y) \subset P_0(y)$, $P_\lambda(z) \subset P_0(z)$.

Korolár 4. *Je-li $\bar{a}$ konečný řetězec a $P_\lambda(x) \neq \emptyset$ pro každé $x \in \bar{a}$, pak existuje zobrazení $\bar{f}$, které je isotonním rozšířením f z A na $A \cup \bar{a}$.*

Důkaz plyne bezprostředně z věty 5, lze jej ale snadno vyvodit i z věty 4.



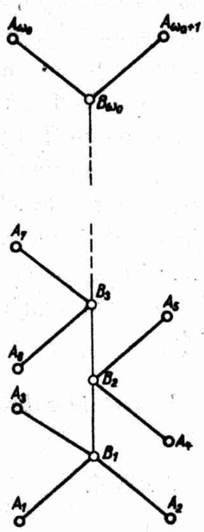
Obr. 3.



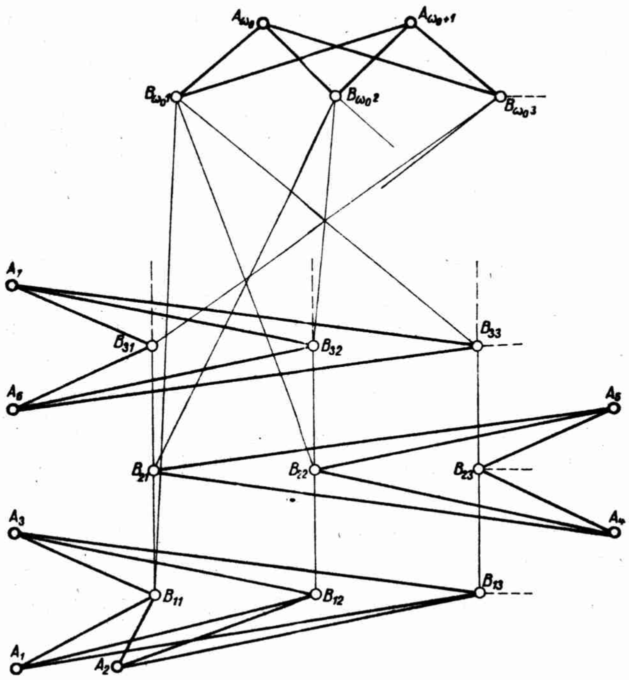
Obr. 4.

Nakonec ještě ukažme, že splnění nerovností $P_\lambda(x) \neq \emptyset$ pro každé $x \in \bar{a}$ není pro existenci $\bar{f}$ obecně podmínkou postačující:

1. Na obr. 3 je Hasseův diagram množiny B, na obr. 4 je Hasseův diagram množiny C. Prvky množin A a $f(A)$ označme výrazněji a navzájem si odpovídající prvky v A a $f(A)$ označme stejnými písmeny. ($A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9\}$.) Nechť čtenář uváží sám, že $\lambda = 0$, $P_0(B_i) = \{B_{i1}, B_{i2}\}$ pro $i = 1, 2, 3, 4$ a že $\bar{f}$ neexistuje. Pro tento případ je charakteristické, že není splněna podmínka (4).



Obr. 5.



Obr. 6.

2. Není-li splněna podmínka (3), může nastat tento případ: na obr. 5 je „Hasseův diagram" množiny B, na obr. 6 je Hasseův diagram množiny C. Prvky množin A a $f(A)$ opět označíme výrazněji a popíšeme je stejnými písmeny. ($A = \{A_1, A_2, \ldots, \ldots, A_{\omega_0}, A_{\omega_0+1}\}$.) Čtenář uváží, že je $\lambda = 0$, $P_0(B_i) = \{B_{i1}, B_{i2}, \ldots\}$ kde je $i = 1, 2, \ldots, \omega_0$ a že $\bar{f}$ neexistuje.

Literatura

[1] *G. Birkhoff:* Lattice Theory, New York 1948 (ruský překlad: Теория структур, Изд. иностранной лит., Москва 1952).
[2] *M. Novotný:* Über isotone Funktionale geordneter Mengen, Zeitschrift für Math. Logik und Grundlagen d. Math. *5* (1959), 9—28.
[3] *M. Novotný:* Isotone Funktionale geordneter Mengen, tamtéž *6* (1960), 109—133.

Adresa autora: Praha 1, Spálená 51, (Nakladatelství technické literatury).

Резюме

ИЗОТОННОЕ РАСШИРЕНИЕ ИЗОТОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

ТЕО ШТУРМ (Teo Sturm), Прага

При помощи определенной трансфинитной множественной конструкции выводится условие, необходимое для существования изотонного расширения. В дальнейшем приводится доказательство, что это условие для существования изотонного расширения в некоторых важных случаях является также достаточным (например, в том случае когда множество, содержащее область изменения отображения, является цепью или же полной структурой; это условие достаточно даже тогда, когда множество прообразов удовлетворяет определенным общим условиям, принятым в теории упорядоченных множеств, или же условиям комбинаторического характера).

Zusammenfassung

ISOTONE ERWEITERUNG DER ISOTONEN ABBILDUNGEN

TEO STURM, Praha

Mit Hilfe einer transfiniten Mengenkonstruktion leitet man die für die Existenz der isotonen Erweiterung notwendige Bedingung ab. Weiter wird ein Beweis gegeben, dass diese Bedingung für die Existenz der isotonen Erweiterung in einigen wichtigeren Fällen auch als hinreichend anzusehen ist (wenn z. B. die die Menge von Bildern enthaltende Menge eine Kette oder ein vollständiger Verband ist; wenn die Menge von Urbildern einigen allgemeinen Bedingungen genügt, die in der Theorie der geordneten Mengen üblich oder vom kombinatorischen Charakter sind).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

ÜBER DIE SPHÄRISCHE ABBILDUNG DER ABGESCHLOSSENEN SPHÄRISCHEN KURVE

VLADIMÍR KOHOUT, Praha

(Eingegangen am 17. März 1966)

In diesem Aufsatz soll es sich um folgende bekannte Eigenschaft der sphärischen Abbildung der abgeschlossenen sphärischen Kurve handeln. Wenn sich die sphärische Abbildung einer abgeschlossenen sphärischen Kurve nicht selbst schneidet, halbiert sie die Sphäre. Diese Verallgemeinung wird mit Hilfe des Begriffes, der als Analogie des Gauss'schen Masses an der Sphäre angesehen werden kann gemacht.

1. Es sei $\mathscr{K}$ eine Einheitssphäre mit dem Zentrum Q im gerichteten eukleidischen Raum E_3. Wir werden uns mit sphärischen Kurven in $\mathscr{K}$ und mit ebenen Kurven in der Tangentenebene der Fläche $\mathscr{K}$, die eine Parameterdarstellung $X = X(t)$ mit $X'(t) \neq 0$ für $t \in (a, b)$ haben, befassen. Wenn die Kurve abgeschlossen ist, setzen wir voraus, dass die Punktfunktion $X(t)$ im Intervall $(-\infty, +\infty)$ definiert wird und dass sie periodisch ist. Für alle Kurven, die mit dem Buchstaben C bezeichnet sind, werden wir weiter auch die Stetigkeit der zweiten Ableitung X'' in (a, b), bzw. $(-\infty, +\infty)$ voraussetzen, für die Kurven, die $\tilde{C}$ bezeichnet sind, werden wir die Stetigkeit der dritten Ableitung X''' voraussetzen.

2. Zunächst wollen wir an einen bekannten Satz über den Index des Punktes in der gerichteten eukleidischen Ebene gegenüber der gerichteten abgeschlossenen Kurve C erinnern. Für uns ist die Vorassetzung hinreichend, dass diese sich selbst in einer endlichen Anzahl der Punkte schneidet und die Ebene in eine endliche Anzahl der Gebiete $O_1, \ldots, O_r$ teilt, deren Grenze die Kurvenvielecke sind. Dann gilt der:

Satz 1. *Es sei Y der Punkt auf der Grenze zweier Gebiete O_i, O_j $(i \neq j)$, der von allen Ecken der Kurvenvielecke verschieden ist. Es sei $\mathbf{t}$ ein Tangentenvektor der Kurve C im Punkt Y und $\mathbf{m}$ ein Normalvektor der Kurve C im Punkt Y, wobei $[\mathbf{t}, \mathbf{m}] = 1$ (hier bezeichnen die Klammern das äussere Produkt). Dann existiert $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $\alpha \in (0, \varepsilon)$*

$$\operatorname{ind}_C (Y + \alpha m) = \operatorname{ind}_C (Y - \alpha m) + 1$$

gilt.

Es sei nun C eine abgeschlossene sphärische Kurve in $\mathscr{K}$, die sich selbst in einer endlichen Anzahl der Punkte schneidet, die die Sphäre $\mathscr{K}$ in eine endliche Anzahl der Gebiete $O_1, \ldots, O_r$ teilt und deren Grenze die sphärischen Kurvenvielecke sind. Wählen wir $S \in O_1$ und projizieren aus dem Punkt S die Kurve C in die Tangentenebene τ im Punkt J, wobei S und J diametral sind. Orientieren wir $\mathscr{K}$ mittels der äusseren Normale, die Ebene τ orientieren wir dann so wie die Tangentenebene der gerichteten Fläche. Es sei $Y \neq S$, Y liegt nicht auf C. Bezeichnen wir C_1, Y_1 die Projektionen der Kurve C und des Punktes Y in τ. Legen wir $\operatorname{ind}_C Y = \operatorname{ind}_{C1} Y_1$, $\operatorname{ind}_C S = 0$. Damit übertragen wir den Begriff des Indexes des Punktes gegenüber einer Kurve auf die Kugelfläche, $\operatorname{ind}_C Y$ hängt natürlich von der Numerierung der Gebiete $O_i (S \in O_1)$ ab. Der Index ist auf jedem Gebiet O_i konstant. Legen wir also $\operatorname{ind}_C O_i = \operatorname{ind}_C Y$, wo $Y \in O_i$. Aus dem Satz 1 folgt gleich der

Satz 2. *Die Indexe zweier benachbatren Gebiete O_i, O_j auf $\mathscr{K}$ unterscheiden sich um 1, den grösseren Index hat jenes Gebiet, in das der Normalvektor der Kurve zeigt. Dabei setzen wir voraus, das dieser Normalvektor mit dem Tangentenvektor der Kurve C eine positive Basis des Vektorraumes der Tangentenebene der Kugelfläche $\mathscr{K}$ bildet (in Reihenfolge: Tangentenvektor, Normalvektor).*

3. Wählen wir in der Ebene τ ein positives kartesisches Koordinatensystem $\{J, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$, durch stereographische Projektion aus dem Punkt S gewinnen wir auf der $\mathscr{K} - (S)$ ein ortogonales Koordinatensystem. Die Einheitstangentenvektoren $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ der Koordinatenkurven im Punkt $A \in \mathscr{K} - (S)$ bildet eine positive Basis des Vektorraumes der Tangentenebene der Kugelfläche im Punkt A : $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{r})$, wo $\boldsymbol{r} = A - Q$, eine positive Basis ist.

4. Es gilt

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad \mathrm{d}A &= \omega_1 \boldsymbol{a}_1 + \omega_2 \boldsymbol{a}_2 , \\
\mathrm{d}\boldsymbol{a}_1 &= \omega_{12} \boldsymbol{a}_2 + \omega_1 \boldsymbol{r} , \\
\mathrm{d}\boldsymbol{a}_2 &= -\omega_{12} \boldsymbol{a}_1 + \omega_2 \boldsymbol{r} , \\
\omega_1 \wedge \omega_2 &= -\mathrm{d}\omega_{12} .
\end{aligned}
$$

Bezeichnen wir V_i den Flächeninhalt des Gebietes O_i $(i \neq 1)$, dann ist

$$
(2) \qquad V_i = \int_{O_i} \omega_1 \wedge \omega_2 = - \int_{O_i} \mathrm{d}\omega_{12} = - \int_{\partial O_i} \omega_{12} ,
$$

wo ∂O_i die positiv gerichtete Grenze des Gebietes O_i (des Kurvenvieleckes) ist, das heisst der Tangentenvektor bildet in regulären Punkten der Kurve ∂O_i mit dem Normalvektor, der in das Innere des O_i gerichtet ist, eine positive Basis des Vektorraumes der Tangentenebene der Kugelfläche $\mathscr{K}$.

5. Bezeichnen wir $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$ die gerichteten Bogen der Kurve C, die die Seiten der Grenze O_i sind und die Beziehung $\gamma_1 + \ldots + \gamma_q = C$ erfüllen (das heisst mittels der Anstückelung aller Bogen γ_i bekommen wir die Kurve C). Weiter sei es γ_{ij} die Kante des Kurvenvieleckes, die der gemeinsame Teil der Grenz der Gebiete O_i, O_j ist und die Orientation der γ_{ij} sei übereinstimmend mit der positiven Orientation auf ∂O_i; γ_{ij} ist also höchstens durch die Orientation von irgendeinem Bogen γ_i abweichend. Wir setzen voraus, dass die Grenze des Gebietes O_i aus s (i) Bogen $\gamma_{ij_1}, \ldots, \gamma_{ij_{s(i)}}$ besteht: $\partial O_i = \gamma_{ij_1} + \ldots + \gamma_{ij_{s(i)}}$ und dass $\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_{s(i)}}$ die Bogen sind, die sich höchstens durch Orientation von $\gamma_{ij_1}, \ldots, \gamma_{ij_{s(i)}}$ unterscheiden. Nach dem Satz 2 gilt

$$\int_{\gamma_{i_1}} \omega_{12} + \ldots + \int_{\gamma_{i_{(s)}}} \omega_{12} = \left(\operatorname{ind}_C O_i - \operatorname{ind}_C O_{j_1}\right) \int_{\gamma_{i_1}} \omega_{12} + \ldots$$
$$\ldots + \left(\operatorname{ind}_C O_i - \operatorname{ind}_C O_{j_{s(i)}}\right) \int_{\gamma_{ij_{s(i)}}} \omega_{12} ,$$

wo $O_{j_1}, \ldots, O_{j_s}$ die zu O_i benachbarten Gebiete sind. Daraus folgt

$$\int_{\gamma_{i_1}} \omega_{12} + \ldots + \int_{\gamma_{i_{s(i)}}} \omega_{12} = \operatorname{ind}_C O_{i_1} \int_{\partial O_i} \omega_{12} - \operatorname{ind}_C O_{j_1} \int_{\gamma_{ij_1}} \omega_{12} - \ldots$$
$$\ldots - \operatorname{ind}_C O_{j_{s(i)}} \int_{\gamma_{ij_{s(i)}}} \omega_{12} = \operatorname{ind}_C O_i \int_{\partial O_i} \omega_{12} + \operatorname{ind}_C O_{j_1} \int_{\gamma_{j_1 i}} \omega_{12} + \ldots$$
$$\ldots + \operatorname{ind}_C O_{j_{s(i)}} \int_{\gamma_{j_{s(i)} i}} \omega_{12} .$$

Wenn wir alle diesen Gleichungen für $i = 1, \ldots, r$ summieren, bekommen wir

$$2 \int_C \omega_{12} = 2 \left(\operatorname{ind}_C O_1 \int_{\partial O_1} \omega_{12} + \ldots + \operatorname{ind}_C O_r \int_{\partial O_r} \omega_{12} \right) .$$

Da $\operatorname{ind}_C O_1 = 0$, folgt daraus nach (2)

$$\int_C \omega_{12} = - \sum_{i=1}^{r} V_i \operatorname{ind}_C O_i . \tag{3}$$

6. Bezeichnen wir $\mathbf{t}$ den Einheitstangentenvektor der gerichteten Kurve C. Legen wir $\mathbf{t} = \cos \alpha \mathbf{a}_1 + \sin \alpha \mathbf{a}_2$, $\mathbf{m} = - \sin \alpha \mathbf{a}_1 + \cos \alpha \mathbf{a}_2$. Nach (1) folgt daraus $\mathbf{m}\, \mathrm{d}\mathbf{t} = \mathrm{d}\alpha + \omega_{12}$. Bezeichnen wir

$$p = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}\alpha , \tag{4}$$

gibt die ganze Zahl p an, wievielmal sich der Tangentenvektor der Kurve C gegenüber dem Vektor $\mathbf{a}_1$ bei einem Umlauf der Kurve C umdreht, oder wievielmal sich der Tangentenvektor der Kurve C_1 bei einem Umlauf umdreht. Das bedeutet, dass $2\pi p$ die globale Krümmung der Kurve C_1 ist. Die Zahl p hängt natürlich von der Numerierung der Gebiete O_i, $i = 1, \ldots, r$, ab (wir setzen $S \in O_1$ voraus). Von einer Auswahl des Punktes S in dem Gebiet O_1 hängt sie aber nicht ab. Nach (3), (4) kann man

$$2\pi p - \int_C \boldsymbol{m}\,\mathrm{dt} = \sum_{i=1}^{r} V_i \operatorname{ind}_C O_i \,. \tag{5}$$

schreiben.

7. Es sei C die sphärische Abbildung einer gerichteten abgeschlossenen sphärischen Kurve $\tilde{C}$; $\tilde{C}$ sei durch Parameterdarstellung $\tilde{X}(t) = Q + \tilde{\boldsymbol{r}}(t)$ gegeben, dann wird also C durch die Punktfunktion

$$X(t) = Q + \frac{\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}(t)}{|\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}(t)|} = Q + \boldsymbol{r}(t) \tag{6}$$

dargestellt. Bezeichnen wir $\tilde{\boldsymbol{n}}$ den Vektor der Hauptnormale der Kurve $\tilde{C}$, $\tilde{\boldsymbol{b}}$ den Vektor der Binormale der Kurve $\tilde{C}$, $\tilde{k}$ die Krümmung der Kurve $\tilde{C}$ und ähnlich für die Kurve C : $\boldsymbol{n}$ sei der Vektor der Hauptnormale, $\boldsymbol{b}$ der Vektor der Binormale, k die Krümmung.

Legen wir

$$\tilde{\boldsymbol{r}} + \cos\tilde{\beta}\tilde{\boldsymbol{n}} + \sin\tilde{\beta}\tilde{\boldsymbol{b}} = 0\,, \quad \boldsymbol{r} + \cos\beta\boldsymbol{n} + \sin\beta\boldsymbol{b} = 0\,, \tag{7}$$

$\tilde{\beta}$, bzw. β ist also der Winkel, den die Hauptnormale der Kurve $\tilde{C}$ bzw. C und die innere Normale der Kugelfläche bildet. Aus (6), (7) folgt

$$\boldsymbol{m}\,\mathrm{dt} = \mathrm{d}\tilde{\beta}\,, \quad \frac{1}{\tilde{k}} = \cos\tilde{\beta}\,. \tag{8}$$

Daraus folgt $\cos\tilde{\beta} > 0$. Wenn wir uns auf das Intervall $\langle -\pi, \pi)$ beschränken, gilt notwendig $-\frac{1}{2}\pi < \beta < \frac{1}{2}\pi$. Da $\tilde{C}$ geschlossen ist, gilt also

$$\int_C \mathrm{d}\tilde{\beta} = 0$$

und aus (5) bekommen wir

$$2\pi p = \sum_{i=1}^{r} V_i \operatorname{ind}_C O_i \,. \tag{9}$$

Wir sagen dieses Ergebnis in folgendem Satz aus:

Satz 3. *Wenn C eine sphärische Abbildung der abgeschlossenen sphärischen Kurve ist, gilt* (9).

8. Bezeichnen wir $\tilde{s}$ einen Bogen der $\tilde{C}$; dann gilt $\tilde{k} = \mathrm{d}s/\mathrm{d}\tilde{s}$, wo s ein Bogen der C ist; daraus

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}\tilde{s}}\frac{\mathrm{d}\tilde{s}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\tilde{k}}\boldsymbol{r} = \cos\tilde{\beta}\boldsymbol{r}\,. \tag{10}$$

Aus (7), (8) folgt $\mathrm{d}\tilde{\beta}/\mathrm{d}s = \operatorname{tg}\beta$, also $\tilde{\beta}(s) = \int_0^s \operatorname{tg}\beta(s)\,\mathrm{d}s + K$, $K = \text{konst.}$ Aus der Bedingung $\cos\tilde{\beta} > 0$ folgt, dass $\max\tilde{\beta}(s) - \min\tilde{\beta}(s) < \pi$. Umgekehrt: Wenn die Kurve C gegeben wird, können wir nach (7) die Funktion β auf C feststellen. Es sei X_0 ein beliebiger Punkt der Kurve C. Konstruiren wir die Funktion $\tilde{\beta}^*$ auf C durch die Vorschift

$$\tilde{\beta}^*(X) = \int_{\widehat{X_0X}} \operatorname{tg}\beta\,\mathrm{d}s\,, \tag{11}$$

wo $\widehat{X_0X}$ der Bogen der Kurve C mit Endpunkten X_0, X (in dieser Reihenfolge gegenüber der Orientation der Kurve C) ist. Wenn auf C die Bedingung

$$\max\tilde{\beta}^*(X) - \min\tilde{\beta}^*(X) < \pi \tag{12}$$

erfüllt ist, kann man eine Konstante K so finden, dass $\tilde{\beta}^* + K = \tilde{\beta}$, $-\frac{1}{2}\pi < \tilde{\beta} < \frac{1}{2}\pi$ ist. Wir können also die Vektorfunktion (nach (10)) konstruiren:

$$\tilde{\boldsymbol{r}}^*(s) = \int_0^s \cos\tilde{\beta}(s)\,\boldsymbol{r}(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

$\tilde{\beta}(s)$ bedeutet da natürlich die Darstellung der Funktion $\tilde{\beta}$ mittels des Bogens der Kurve C.

Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{r}}^*}{\mathrm{d}s} = \cos\tilde{\beta}(s)\,\boldsymbol{r}(s)\,,$$

also $\tilde{C}^*$ ist das sphärische Original der Kurve C. Wir stellen leicht fest, dass $\tilde{\boldsymbol{r}}^* + \tilde{\boldsymbol{n}}\cos\tilde{\beta} + \tilde{\boldsymbol{b}}\sin\tilde{\beta} = \boldsymbol{v}$ gilt, wo $\boldsymbol{v} = \text{konst.}$; legen wir $\tilde{\boldsymbol{r}}(s) = \boldsymbol{r}^*(s) - \boldsymbol{v}$, dann ist die Kurve $\tilde{C}$ mit der Parameterdarstellung

$$\tilde{X}(s) = Q + \tilde{\boldsymbol{r}}(s) \tag{13}$$

die Kurve auf der Kugelfläche $\mathscr{K}$.

9. Die sphärische Kurve $\tilde{C}$, die im letzten Abschnitt konstruiert wird, muss nicht abgeschlossen sein. Setzen wir voraus, dass C die Bedingung (9) erfüllt. Dann ist nach (5), (8) $\int_C \mathrm{d}\tilde{\beta} = 0$, dass heisst, wenn wir mit l die Länge der Kurve C bezeichnen: $\tilde{\beta}(0) = \tilde{\beta}(l)$. Weiter gilt offenbar

$$\tilde{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{t}\,, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = \tilde{\boldsymbol{t}} \times \tilde{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{t}$$

also

$$\tilde{\boldsymbol{n}}(0) = \tilde{\boldsymbol{n}}(l)\,, \quad \tilde{\boldsymbol{b}}(0) = \tilde{\boldsymbol{b}}(l)\,;$$

hier treten natürlich die Darstellungen der Vektorfunktionen $\tilde{\mathbf{n}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$ auf $\tilde{C}$ mittels des Bogens der C auf. Also nach (7) gilt $\tilde{\mathbf{r}}(0) = \tilde{\mathbf{r}}(l)$, das heisst, dass die Kurve $\tilde{C}$ abgeschlossen ist. Wir fassen zusammen:

Satz 4. *Es sei C eine abgeschlossene sphärische Kurve. Konstruiren wir die Funktion β auf C (nach (7)) und die Funktion β^* auf C (nach (11)). Wenn auf C die Ungleichung (12) gilt, so existiert ein sphärisches Original $\tilde{C}$ der sphärischen Kurve C. Die Kurve $\tilde{C}$ ist dann und nur dann abgeschlossen, wenn (9) gilt.*

Bemerkung. Im Falle, dass C die sphärische Kurve ist, die sich selbst nicht schneidet, übergeht (9) in die Gleichung $V_1 = V_2$. Wir bekommen also die bekannte Eigenschaft einer sphärischen Kurve, die nicht sich selsbt schneidet: sie halbiert die Kugelfläche.

Anschrift des Verfassers: Praha 6 - Dejvice, Technická 1902 (fakulta elektrotechnická ČVUT).

Výtah

O SFÉRICKÉM OBRAZU UZAVŘENÉ SFÉRICKÉ KŘIVKY

VLADIMÍR KOHOUT, Praha

Jestliže sférický obraz uzavřené sférické křivky neprotíná sám sebe, půlí kulovou plochu. V článku je vyšetřeno zobecnění této známé věty pro případ, že sférický obraz sám sebe protíná. Je nalezena nutná a postačující podmínka existence a uzavřenosti sférického originálu uzavřené sférické křivky.

Резюме

О СФЕРИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ ЗАМКНУТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

ВЛАДИМИР КОГОУТ (Vladimír Kohout), Прага

Эсли сферическое отображение замкнутой сферической кривой не пересекает себя, то оно делит сферу иополам. В статье рассматривается обобщение этой известной теоремы для случая, когда сферическое отображение пересекает себя. Найдено необходимое и достаточное условие для существования и земкнутости сферического оригинала замкнутой сферической кривой.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

FINITE GRAPHS AND THEIR SPANNING TREES

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

(Received March 28, 1966)

Let us begin with the formula

$$\sum_{i=0}^{n-4} i! \binom{n-4}{i} (i+4)\, n^{n-i-5} = n^{n-4}, \tag{1}$$

valid for every integer $n \geqq 4$. This formula can be obtained as a by-product in solving the following problem concerning the graphs: Let a complete graph $\mathcal{U}_n$ with n vertices $(n \geqq 4)$ and two of its edges h_1, h_2 without common vertices be given. We are to determine the number of all spanning trees of the graph $\mathcal{U}_n$ which contain both h_1 and h_2. Under a *spanning tree* we understand the maximal tree subgraph of a given graph. Some authors (for example O. ORE, [5]) use the term *skeleton* or *scaffolding* for denoting this concept, others use *frame* etc. Note also that the notation $\mathcal{G} = [U, H]$ means that the graph $\mathcal{G}$ has the vertex set U and the edge set H.

Theorem 1. *For every integer $n \geqq 4$, equality* (1) *holds.*

Proof. Let us choose a complete graph $\mathcal{U}_n$ with n vertices and two of its edges h_1 and h_2 which do not have a common vertex. Using two different procedures we are going to determine the number of those spanning trees of the graph $\mathcal{U}_n$ each of which contains both edges h_1 and h_2.

In the first consideration, let us proceed as follows: Obviously, each such spanning tree contains a unique simple path $C(h_1, h_2)$ with h_1 as the first edge and h_2 as the last one. Denote $i + 4$ the number of vertices on $C(h_1, h_2)$. Thus, let us first inquire how many simple paths $C(h_1, h_2)$ can be constructed in $\mathcal{U}_n$. There are four ways of choosing the first two and last two vertices on $C(h_1, h_2)$. In the graph $\mathcal{U}_n$ there still remain $n - 4$ vertices which are to be ordered in a sequence with i terms; this can be accomplished in $i! \binom{n-4}{i}$ ways. Consequently, the simple path $C(h_1, h_2)$ can be constructed in $4i! \binom{n-4}{i}$ ways. The vertices and edges of the simple path

$C(h_1, h_2)$ constitute a tree, and from the paper [7] it is known in how many ways it can be completed to a spanning tree[1]) of the graph $\mathscr{U}_n$. It turns out that this can be done in $(i + 4)\, n^{n-i-5}$ ways. Thus, we see that the number $4 \sum_{i=0}^{n-4} i! \binom{n-4}{i} (i + 4)\, .$ $.\, n^{n-i-5}$ is the amount of the sought spanning trees.

Next, let us turn to the second consideration. As known, the graph $\mathscr{U}_n$ has totally n^{n-2} spanning trees. Denote $k(h_1, h_2)$ and $k(\text{non } h_1, h_2)$ and $k(h_1, \text{non } h_2)$ and $k(\text{non } h_1, \text{non } h_2)$ the number of these spanning trees each of which contains both h_1 and h_2, does not contain h_1 but contains h_2, contains h_1 but does not contain h_2, contains neither h_1 nor h_2. Thus, we have $n^{n-2} = k(h_1, h_2) + k(\text{non } h_1, h_2) + k(h_1, \text{non } h_2) + k(\text{non } h_1, \text{non } h_2)$. Because $\mathscr{U}_n$ is complete, we have $k(\text{non } h_1, h_2) = k(h_1, \text{non } h_2)$. Consequently,

$$(2) \qquad k(h_1, h_2) = n^{n-2} - 2k(\text{non } h_1, h_2) - k(\text{non } h_1, \text{non } h_2)\, .$$

The numbers $k(\text{non } h_1, h_2)$ and $k(\text{non } h_1, \text{non } h_2)$ may be found by a well known determinant method (see [1] and [3]). We assume here that the vertices of the graph $\mathscr{U}_n$ have been enumerated by integers $1, 2, 3, \ldots, n$ so that, for example, h_1 joins 1 and 2 while h_2 joins $n - 1$ and n.

In order to establish $k(\text{non } h_1, h_2)$, denote $\mathscr{G}_1$ the graph obtained from $\mathscr{U}_n$ by removing the edge h_1. Next, replace each undirected edge xy of the graph $\mathscr{G}_1$ by a pair of edges $\overrightarrow{xy}$ and $\overrightarrow{yx}$; thereby, we get a directed graph $\overrightarrow{\mathscr{G}_1}$. It is clear that $k(\text{non } h_1, h_2)$ is equal to the number of W-bases[2]) of the graph $\overrightarrow{\mathscr{G}_1}$ with sources $n - 1$ and n. Thus, we construct an $n \times n$ square matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ such that $a_{12} = a_{21} = 0$, while $a_{ij} = -1$ for the remaining $i \neq j$. The elements of the main diagonal are $n - 1$ with exception of $a_{11} = a_{22} = n - 2$. The principal minor obtained by deleting the last two columns and rows of the matrix $\mathbf{A}$ is then equal to the number $k(\text{non } h_1, h_2)$. The computation yields $k(\text{non } h_1, h_2) = 2(n - 2)\, n^{n-4}$.

The determining of the number $k(\text{non } h_1, \text{non } h_2)$ is analogous. Let $\mathscr{G}_2$ arise from $\mathscr{G}_1$ by removing the edge h_2. Replacing again each edge of the graph $\mathscr{G}_2$ by a pair of directed edges we get a graph $\overrightarrow{\mathscr{G}_2}$. It can be readily seen that $k(\text{non } h_1, \text{non } h_2)$ is equal to the number of connected W-bases of the graph $\overrightarrow{\mathscr{G}_2}$, where the source of these W-bases can be chosen arbitrarily in $\overrightarrow{\mathscr{G}_2}$. Thus, the consideration reduces to the computation of an $(n - 1)$-st degree determinant as in the preceding paragraph. Following this trend of thought, we get $k(\text{non } h_1, \text{non } h_2) = (n - 2)^2\, n^{n-4}$.

Substituting now into equation (2), we obtain $k(h_1, h_2) = 4n^{n-4}$. A comparison with the result obtained above yields relation (1) after cancelling a common factor. This finishes the proof.

---

[1]) Theorem 4 in paper [7] reads as follows: Let $\mathscr{U}_n$ be a complete graph with n vertices, and let $\mathscr{S} = [U, H]$ be its subgraph with $|U| = s$. Furthermore, let $\mathscr{S}$ be a tree. Then the graph $\mathscr{U}_n$ contains exactly sn^{n-s-1} spanning trees each of which contains $\mathscr{S}$ as its subgraph.

[2]) The concept of a *W-base* is defined in paper [3].

It is evident that the method described above permits us to derive a series of further formulas analogous to (1), if we replace $\mathcal{U}_n$ by a different type of graph or if we require that the spanning trees contain some other chosen elements instead of h_1 and h_2. The author wishes also to note that formula (1) may easily be proved by elementary methods. An elementary proof, originated by J. Kaucký, was communicated to him by A. Rosa. Here, we consider the function

$$f(i) = -\binom{n-4}{i} i!\, n^{n-i-4}$$

defined for $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$, and construct the difference

$$\Delta f(i) = f(i+1) - f(i) = i! \binom{n-4}{i} (i+4)\, n^{n-i-5}.$$

Thus, we have

$$\sum_{i=0}^{n-4} i! \binom{n-4}{i} (i+4)\, n^{n-i-5} = \sum_{i=0}^{n-4} \Delta f(i) = f(n-3) - f(0) = n^{n-4}.$$

Now, let us turn our attention to further problems. First, let us prove an auxiliary theorem.

Lemma 1. *Let x be a vertex of a finite connected graph $\mathcal{G} = [U, H]$ with $H \neq \emptyset$. Let $\mathcal{G}_i = [U_i, H_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ be all lobe graphs*[3]) *of $\mathcal{G}$ such that $x \in U_i$. Furthermore, let A be a set of edges ending in x such that $A \cap H_i \neq \emptyset$ for all $i = 1, 2, \ldots, r$, and let B be the set of all remaining edges ending in x. Then the graph $\mathcal{G}^{(1)} = [U, H - B]$ is connected.*

Proof. Suppose that $\mathcal{G}^{(1)}$ is not connected. Thus, there exist two vertices u, v which cannot be connected by a path. However, in the graph $\mathcal{G}$ there exists a path S beginning at u and ending at v. Let $\varphi(S, B)$ be the number of edges from the path S which belong to B. Choose S such that $\varphi(S, B)$ is minimal. If several such paths exist choose an arbitrary one from them and denote it by $S_{\min}$. In $S_{\min}$ we choose an edge $h_1 \in B$ (assume that it is the m-th edge of this path) and find the lobe graph $\mathcal{G}_i$ containing h_1. Because we have $A \cap H_i \neq \emptyset$ we can find an edge $h_2 \in A$ such that $h_2 \in H_i$. Since both h_1 and h_2 belong to the same lobe graph $\mathcal{G}_i$, we can construct a circuit $\mathcal{C}$ containing these two edges. Obviously, the circuit $\mathcal{C}$ contains a unique edge from B. Next, construct a new path S^* between u and v as follows: We remove the m-th edge of the path $S_{\min}$ and instead of it we introduce into S^* the edges and vertices of the circuit $\mathcal{C}$ (except h_1). It is clear that $\varphi(S^*, B) = \varphi(S_{\min}, B) - 1$, which is a contradiction. This concludes the proof.

[3]) The definition of a lobe graph may be found in the book [5].

Now, let us still introduce two notations. Let $\varrho(x, \mathscr{G})$ denote the degree of a vertex x in the graph $\mathscr{G}$, and let $\alpha(x, \mathscr{G})$ be the number of all lobe graphs of $\mathscr{G}$ which contain the vertex x. In the bibliography the lobe graph concept is usually defined only for connected graphs with at least one edge. Then it is clear that $\alpha(x, \mathscr{G}) \leqq \varrho(x, \mathscr{G})$.

Theorem 2. *Let x be a vertex of a finite connected graph $\mathscr{G} = [U, H]$ with $H \neq \emptyset$. Furthermore, let s be a given positive integer. The necessary and sufficient condition for the existence of a spanning tree $\mathscr{K}$ of the graph $\mathscr{G}$ satisfying the condition $\varrho(x, \mathscr{K}) = s$ is*

$$\alpha(x, \mathscr{G}) \leqq s \leqq \varrho(x, \mathscr{G}) . \tag{3}$$

Proof. It can be easily verified that (3) is necessary. Actually, $\varrho(x, \mathscr{K}) > \varrho(x, \mathscr{G})$ cannot be true for any spanning tree $\mathscr{K} = [U, H^*]$. If we had $\varrho(x, \mathscr{K}) < \alpha(x, \mathscr{G})$, denote M the set of all edges from $\mathscr{K}$ ending in x. Then we could find a lobe graph $\mathscr{G}_0 = [U_0, H_0]$ such that $x \in U_0$ and $M \cap H_0 = \emptyset$. However, it is clear that $H^* \cap H_0$ is the set of edges of a spanning tree $\mathscr{K}_0$ of the graph $\mathscr{G}_0$, so that we can find an edge $h \in M$ satisfying simultaneously the condition $h \in H_0$ (contradiction).

Next, let us prove that condition (3) is sufficient. We construct an arbitrary set A described in Lemma 1 such that $|A| = s$. By Lemma 1 it follows that the graph $\mathscr{G}^{(1)}$ is connected. Thus, it remains to construct its spanning tree $\mathscr{K}_1 = [U, H_1]$ such that $A \subset H_1$. The construction can be carried out as follows: From all trees $\mathscr{S} = [U', H']$, where $U' \subset U$ and $A \subset H' \subset H$, we choose that which maximizes $|U'|$, and denote it by $\mathscr{S}_{\max} = [U'_{\max}, H'_{\max}]$. We are going to show that $U'_{\max} = U$. Actually, if a $y_1 \in U - U'_{\max}$ existed, choose $y_2 \in U'_{\max}$ and construct in $\mathscr{G}$ a path S between y_1 and y_2. On S we can find the last vertex belonging to $U - U'_{\max}$, say y_3. Consequently, the vertex y_4 following y_3 on S belongs to $U'_{\max}$. The graph $[U'_{\max} \cup \{y_3\}, H'_{\max} \cup \{y_3y_4\}]$ is obviously a tree having more vertices than $S_{\max}$ (contradiction). Hence, the proof.

Finally, let us illustrate Theorem 2 by an example. If we choose a complete graph with n vertices ($n \geqq 2$) for $\mathscr{G}$, then, by Theorem 2, for every integer $s \in \langle 1, n - 1 \rangle$ and every vertex x a spanning tree $\mathscr{K}$ exists such that $\varrho(x, \mathscr{K}) = s$. A calculation shows that here there exist exactly $\binom{n-2}{s-1}(n-1)^{n-s-1}$ such spanning trees — see also [2].

References

[1] *C. Berge:* Théorie des graphes et ses applications. Paris 1958.
[2] *L. E. Clarke:* On Cayley's formula for counting trees. J. London Math. Soc. *33* (1958), 471—474.
[3] *M. Fiedler - J. Sedláček:* O W-basích orientovaných grafů. (On W-bases of directed graphs.) Časopis pro pěstování matematiky *83* (1958), 214—225.
[4] *T. Gallai:* Elementare Relationen bezüglich der Glieder und trennenden Punkte von Graphen. Publ. math. Inst. Hungar. Acad. Sci., Ser. A, *9* (1964), 235—236.
[5] *O. Ore:* Theory of graphs. Providence 1962.
[6] *J. Sedláček:* Kombinatorika v teorii a praxi (Úvod do teorie grafů). Praha 1964.
[7] *J. Sedláček:* O kostrách konečných grafů. (On the spanning trees of finite graphs.) Časopis pro pěstování matematiky *91* (1966), 221—227.

Author's address: Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Výtah

KONEČNÉ GRAFY A JEJICH KOSTRY

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

V práci se nejprve ukazuje, že rovnici (1) a rovnice obdobné je možno dostat jako vedlejší výsledek, řeší-li se tato úloha: Je dán graf (vhodného typu) s n uzly a dvě jeho hrany h_1, h_2 bez společných uzlů; máme určit počet těch koster, jež obsahují h_1 i h_2. Dále je odvozena nutná a postačující podmínka k tomu, aby v konečném souvislém grafu $\mathcal{G}$ s daným uzlem x existovala kostra, ve které se stupeň uzlu x rovná danému přirozenému číslu s.

Резюме

КОНЕЧНЫЕ ГРАФЫ И ИХ ОСНОВЫ

ЙИРЖИ СЕДЛАЧЕК (Jiří Sedláček), Прага

В работе сначала показано, что уравнение (1) и аналогичные ему уравнения можно получить как второстепенный результат при решении следующей задачи: Дан граф (подходящего типа) с n вершинами и его два ребра h_1, h_2 без общих вершин. Требуется определить число всех основ, содержащих h_1 и h_2. Затем выведено необходимое и достаточное условие для того, чтобы в конечном связном графе $\mathcal{G}$ с данной вершиной x существовала основа, в которой степень вершины x равна заданному натуральному числу s.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

ЗАМЕТКА О КОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $u'' + a(t)\,|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$

И. Т. КИГУРАДЗЕ, Тбилиси

(Поступило в редакцию 4/IV 1966 г.)

Рассмотрим уравнение

(1) $$u'' + a(t)\,|u|^n \operatorname{sgn} u = 0\,,$$

где $n > 1$, а функция $a(t)$ – суммируема на каждом конечном отрезке положительной полуоси.

Решение $u(t)$ уравнения (1) называется продолжаемым, если оно определено на некотором бесконечном промежутке $[t_0, \infty)$ и называется непродолжаемым, если оно определено на некотором конечном промежутке $[t_0, t_1)$ и $\limsup_{t \to t_1} |u(t)| = \infty$.

Продолжаемое решение $u(t)$ уравнения (1) называется колеблющимся если оно имеет бесконечное множество нулей, а в противном случае – неколеблющимся.

Ф. В. Аткинсоном [1] доказано, что если $a(t) \geqq 0$, то для колеблемости всех продолжаемых решений уравнения (I) необходимо и достаточно, чтобы $\int_0^\infty t\, a(t)\, dt = \infty$.

В настоящей заметке мы рассматриваем случай, когда функция $a(t)$ – знакопеременная. Ранее этот случай был исследован П. Уолтменом [2], который показал, что для колеблемости всех продолжаемых решений уравнения (I) достаточно условие $\int_0^\infty a(t)\, dt = \infty$.

Оказывается, что имеет место следующая

Теорема 1. *Если для некоторой положительной, непрерывной и вогнутой функции $\varphi(t)$ соблюдается условие*

(2) $$\int_0^\infty \varphi(t)\, a(t)\, dt = \infty\,,$$

то все продолжаемые решения уравнения (1) *– колеблющиеся.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что $\varphi(t)$, как непрерывная вогнутая функция, является абсолютно непрерывной,

$$\varphi'(t) \geqq 0 \quad \text{при} \quad t \geqq 0 \tag{3}$$

и $\varphi'(t)$ не возрастает.

Допустим теперь, что уравнение (1) обладает неколеблющимся продолжаемым решением $u(t)$. Без ограничения общности можем считать, что

$$u(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \geqq t_0 . \tag{4}$$

Ясно, что

$$\varphi(t)\frac{u'(t)}{u^n(t)} - \int_{t_0}^{t} \varphi'(\tau)\frac{u'(\tau)}{u^n(\tau)}\,\mathrm{d}\tau + n\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\frac{u'^2(\tau)}{u^{n+1}(\tau)}\,\mathrm{d}\tau = \tag{5}$$

$$= \varphi(t_0)\frac{u'(t_0)}{u^n(t_0)} - \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,a(\tau)\,\mathrm{d}\tau .$$

Согласно второй теореме о среднем значении, отсюда получаем

$$\varphi(t)\frac{u'(t)}{u^n(t)} + \frac{\varphi'(t_0)}{n-1}u^{1-n}(\xi) + n\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\frac{u'^2(\tau)}{u^{n+1}(\tau)}\,\mathrm{d}\tau = \tag{6}$$

$$= c_0 - \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,a(\tau)\,\mathrm{d}\tau ,$$

где

$$c_0 = \varphi(t_0)\frac{u'(t_0)}{u^n(t_0)} + \frac{\varphi'(t_0)}{n-1}u^{1-n}(t_0), \quad t_0 \leqq \xi \leqq t .$$

Согласно (2) найдется такое число t_1, $t_0 \leqq t_1 < \infty$, что

$$c_0 - \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\,a(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leqq -1 \quad \text{при} \quad t \geqq t_1 . \tag{7}$$

Согласно (3) и (7) из (6) имеем

$$\varphi(t)\frac{u'(t)}{u^n(t)} + n\int_{t_1}^{t} \varphi(\tau)\frac{u'^2(\tau)}{u^{n+1}(\tau)}\,\mathrm{d}\tau \leqq -1 \quad \text{при} \quad t \geqq t_1 . \tag{8}$$

Следовательно,

$$u'(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \geqq t_1 . \tag{9}$$

Поэтому неравенству (8) можно придать следующий вид

$$\varphi(t)\frac{|u'(t)|}{u^n(t)} \geqq 1 + n\int_{t_1}^{t}\varphi(\tau)\frac{u'^2(\tau)}{u^{n+1}(\tau)}\,\mathrm{d}\tau \quad \text{при } t \geqq t_1\,. \tag{10}$$

Умножая обе части неравенства (10) на

$$n\frac{|u'(t)|}{u(t)}\left(1 + \int_{t_1}^{t}\varphi(\tau)\frac{u'^2(\tau)}{u^{n+1}(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right)^{-1}$$

и интегрируя от t_1 до t, найдем

$$\ln\left(1 + n\int_{t_1}^{t}\varphi(\tau)\frac{u'^2(\tau)}{u^{n+1}(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right) \geqq n\int_{t_1}^{t}\frac{|u'(\tau)|}{u(\tau)}\,\mathrm{d}\tau \quad \text{при} \quad t \geqq t_1\,.$$

Отсюда, согласно (9) и (10), получаем

$$-\varphi(t)\frac{u'(t)}{u^n(t)} \geqq \frac{u^n(t_1)}{u^n(t)} \quad \text{при} \quad t \geqq t_1\,.$$

Следовательно,

$$u'(t) \leqq -\frac{u^n(t_1)}{\varphi(t)} \quad \text{при} \quad t \geqq t_1\,. \tag{11}$$

Так как $\varphi(t) \leqq \delta t$ при $t \geqq t_1$, где $\delta > 0$, поэтому, из (11) находим

$$u(t) \leqq u(t_1) - \delta\, u^n(t_1)\ln\frac{t}{t_1} \to -\infty \quad \text{при} \quad t \to \infty\,,$$

что противоречит условию (4). Полученное противоречие доказывает теорему.

Из доказанной теоремы непосредственно получается такое

Следствие. *Если*

$$\int_0^\infty a(t)\,t^\alpha\,\mathrm{d}t = \infty\,, \tag{12}$$

где $0 \leqq \alpha \leqq 1$, *то все продолжаемые решения уравнения* (I) — *колеблющиеся.*

При $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$ из условия (12), соответственно, получаются упомянутые выше условия Аткинсона и Уолтмена.

Замечание. Если $a(t) \geqq 0$ и условие (12) соблюдается при некотором $\alpha < 1$, то оно соблюдается и при $\alpha = 1$. Когда $a(t)$ знакопеременная функция, что этот факт не имеет места. В самом деле, пусть $a(t) = (1 - \gamma)\, t^{-1-\gamma} + 2t^{-\gamma} \sin t$ где $0 \leqq \gamma < 1$. Тогда

$$\int_{t_0}^{t} \tau^{\gamma}\, a(\tau)\, \mathrm{d}\tau = c_1 + (1 - \gamma) \ln t - 2 \cos t \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty\,.$$

С другой стороны, так как

$$\int_{t_0}^{t} \tau\, a(\tau)\, \mathrm{d}\tau = c_2 + t^{1-\gamma} - 2t^{1-\gamma} \cos t + 2(1 - \gamma)\, t^{-\gamma} \sin t + {}$$

$$+ 2\gamma(1 - \gamma) \int_{t_0}^{t} \tau^{-1-\gamma} \sin \tau\, \mathrm{d}\tau\,,$$

поэтому имеем

$$\limsup_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} \tau\, a(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \infty\,, \quad \liminf_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} \tau\, a(\tau)\, \mathrm{d}\tau = -\infty\,.$$

Следовательно, условие (12) соблюдается при $\alpha = \gamma$, но не соблюдается при $\alpha = 1$.

В работе [3] доказывается, что если

$$\int_{0}^{\infty} t|a(t)|\, \mathrm{d}t < \infty\,, \tag{13}$$

то уравнение (1) имеет неколеблющиеся продолжаемые решения. С учетом этого легко докажем справедливость следующего утверждения

Теорема 2. *Пусть* $a(t) = b(t) + \beta(t)$, *где*

$$b(t) \geqq 0 \quad \text{при} \quad t \geqq 0 \quad \text{и} \quad \int_{0}^{\infty} t|\beta(t)|\, \mathrm{d}t < \infty\,. \tag{14}$$

Тогда для колеблемости всех продолжаемых решений уравнения (I) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_{0}^{\infty} t\, b(t)\, \mathrm{d}t = \infty\,. \tag{15}$$

Доказательство. Если соблюдается условие (15), то, согласно (14), будем иметь $\int_0^\infty t\, a(t)\, \mathrm{d}t = \infty$. Поэтому, согласно следствия теоремы 1, все продолжаемые решения уравнения (1) будут колеблющиеся.

Если же $\int_0^\infty t\, b(t)\, \mathrm{d}t < \infty$, то, в силу (14), соблюдается (13) и следовательно, как уже отметили выше, уравнение (1) будет иметь неколеблющиеся продолжаемые решения. Теорема доказана.

Естественно, возникает вопрос — при каких ограничениях наложенных на функцию $a(t)$ имеет уравнение (1) продолжаемые решения. На этот вопрос частично отвечает следующая

Теорема 3. *Если $a(t) = b(t) + \beta(t)$, где $b(t)$ — абсолютно непрерывная положительная функция, а $\beta(t)$ удовлетворяет условию*

$$\int_0^\infty \frac{|\beta(t)|}{\sqrt{b(t)}} \exp\left[\frac{n-1}{n+1}\int_0^t \frac{b'_-(\tau)}{b(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t < \infty\,, \tag{16}$$

где $b'_-(t) = \frac{1}{2}(|b'(t)| - b'(t))$, то уравнение (I) имеет продолжаемые решения.

Доказательство. Согласно (16) ясно, что

$$\int_0^\infty \frac{|\beta(t)|}{\sqrt{b(t)}} \exp\left[\frac{n-1}{n+1}\int_0^t \left(\frac{b'_-(\tau)}{b(\tau)} + \frac{|\beta(\tau)|}{\sqrt{b(\tau)}}\right)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\tau = M < \infty\,. \tag{17}$$

Покажем, что любое решение $u(t)$ уравнения (1), которое удовлетворяет условию

$$\varrho^{(1-n)/(1+n)}(0) - \frac{n^2(n-1)}{n+1} M = \delta > 0\,, \tag{18}$$

где

$$\varrho(t) = \left[\frac{u'^2(t)}{b(t)} + \frac{2}{n+1}|u(t)|^{n+1}\right]\exp\left[-\int_0^t\left(\frac{b'_-(\tau)}{b(\tau)} + \frac{|\beta(\tau)|}{\sqrt{b(\tau)}}\right)\mathrm{d}\tau\right], \tag{19}$$

будет продолжаемым. Допустим противное. Тогда найдется такое число t_0, $0 < t_0 < \infty$, что $\varrho(t)$ будет абсолютно непрерывной функцией внутри промежутка $[0, t_0)$ и

$$\lim_{t\to t_0} \varrho(t) = \infty\,. \tag{20}$$

Из (19) имеем

$$\varrho'(t) = -\left[\frac{b'_-(t)}{b(t)} + \frac{|\beta(t)|}{\sqrt{b(t)}}\right]\varrho(t) + \tag{21}$$
$$+\left[-\frac{b'(t)}{b^2(t)}u'^2(t) - \frac{2\beta(t)}{b(t)}u'(t)\,|u(t)|^n \operatorname{sgn} u(t)\right]\exp\left[-\int_0^t\left(\frac{b'_-(\tau)}{b(\tau)} + \frac{|\beta(\tau)|}{\sqrt{b(\tau)}}\right)\mathrm{d}\tau\right].$$

Так как $-b'(t) \leqq b'_-(t)$ и

$$2\frac{|\beta(t)|}{b(t)}|u'(t)|\,|u(t)|^n \leqq \frac{|\beta(t)|}{\sqrt{b(t)}}\frac{u'^2(t)}{b(t)} + \frac{|\beta(t)|}{\sqrt{b(t)}}|u(t)|^{2n},$$

поэтому, согласно (19), из (21) найдем

$$\varrho'(t) \leqq -\left[\frac{b'_-(t)}{b(t)} + \frac{|\beta(t)|}{\sqrt{b(t)}}\right]\varrho(t) +$$

$$+\left[\frac{b'_-(t)}{b(t)} + \frac{|\beta(t)|}{\sqrt{b(t)}}\right]\frac{u'^2(t)}{b(t)}\exp\left[-\int_0^t\left(\frac{b'_-(\tau)}{b(\tau)} + \frac{|\beta(\tau)|}{\sqrt{b(\tau)}}\right)d\tau\right] +$$

$$+\frac{|\beta(t)|}{\sqrt{b(t)}}|u(t)|^{2n}\exp\left[-\int_0^t\left(\frac{b'_-(\tau)}{b(\tau)} + \frac{|\beta(\tau)|}{\sqrt{b(\tau)}}\right)d\tau\right] \leqq$$

$$\leqq n^2\frac{|\beta(t)|}{\sqrt{b(t)}}\exp\left[\frac{n-1}{n+1}\int_0^t\left(\frac{b'_-(\tau)}{b(\tau)} + \frac{|\beta(\tau)|}{\sqrt{b(\tau)}}\right)d\tau\right]\varrho^{2n/(n+1)}(t)\,.$$

Следовательно,

$$\varrho'(t)\,\varrho^{-2n/(n+1)}(t) \leqq n^2\frac{|\beta(t)|}{\sqrt{b(t)}}\exp\left[\frac{n-1}{n+1}\int_0^t\left(\frac{b'_-(\tau)}{b(\tau)} + \frac{|\beta(\tau)|}{\sqrt{b(\tau)}}\right)d\tau\right] \quad \text{при} \quad 0 \leqq t < t_0\,.$$

Интегрирование этого неравенства дает

$$\varrho^{(1-n)/(1+n)}(0) - \varrho^{(1-n)/(1+n)}(t) \leqq \frac{n^2(n-1)}{n+1}M \quad \text{при} \quad 0 \leqq t < t_0\,.$$

Отсюда, согласно (18), получаем

$$\varrho(t) \leqq \delta^{(n+1)/(1-n)} \quad \text{при} \quad 0 \leqq t < t_0\,,$$

что противоречит условию (20). Полученное противоречие доказывает, что $u(t)$ является продолжаемым решением. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы ясно, что если $a(t) \equiv b(t)$, то все решения уравнения (1) — продолжаемы. Если же $a(t)$ знакопеременная функция, то уравнение (1) наряду с продолжаемыми решениями имеет и непродолжаемые решения. В самом деле, пусть

(22) $$a(t) < 0 \quad \text{при} \quad t_1 \leqq t \leqq t_2\,.$$

Подстановка

(23) $$x = \frac{1}{t_2 - t}\,, \quad u(t) = x^{-1}\,W(x)$$

преобразует уравнение (1) в уравнение

(24) $$W'' = A(x)\,|W|^n \operatorname{sgn} W\,,$$

где $A(x) = -(t_2 - t)^{n+3} a(t)$. Из (22) ясно, что

(25) $$A(x) > 0 \quad \text{при} \quad x_0 \leqq x < \infty ,$$

где $x_0 = 1/(t_2 - t_1)$. Но как это доказывается в работе [4] (см. [4], теорема 1), уравнение (24) при условии (25) имеет непродолжаемые решения. Пусть $W(x)$ – решение уравнения (24) определенное на некотором конечном отрезке $[x_0, x_1]$ и удовлетворяющее условию $\lim_{x \to x_1} |W(x)| = \infty$. Тогда для решения $u(t)$ уравнения (1) определенным формулами (23) будем иметь $\lim_{t \to t_0} |u(t)| = \infty$, где $t_0 = t_2 - x_1^{-1}$. Следовательно, $u(t)$ является непродолжаемым решением уравнения (I).

Литература

[1] *F. V. Atkinson:* On second-order non-linear oscillations. Pacif. J. Math. *5* (1955), 643–647.

[2] *P. Waltman:* An oscillation criterion for a nonlinear second order equation. J. Math. Analysis and Applic. *10* (1965), 2, 439–441.

[3] *И. Т. Кигурадзе:* О колеблемости решений уравнения $d^m u/dt^m + a(t) |u|^n \operatorname{sgn} u = 0$. Матем. сборник. *65* (1964), 2. 172–187.

[4] *И. Т. Кигурадзе:* Асимптотические свойства решений одного нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена-Фаулера. Изв. АН СССР, серия математическая, *29* (1965), 5, 965–986.

Адрес автора: Тбилиси, СССР (Математический институт им. А. М. Размадзе АН Грузинской ССР).

Výtah

O OSCILACÍCH ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE $u'' + a(t)|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$

I. Kiguradze (И. Т. Кигурадзе), Tbilisi

V této poznámce se vyšetřuje diferenciální rovnice

(1) $$u'' + a(t) |u|^n \operatorname{sgn} u = 0$$

kde $n > 1$ a funkce $a(t)$ je v každém konečném intervalu $[0, t_0]$ integrovatelná. Jsou dokázány tyto věty:

Věta 1. *Buď* $\int_0^\infty \varphi(\tau)\, a(\tau)\, d(\tau) = \infty$ *kde* $\varphi(t)$ *je daná kladná spojitá konkávní funkce. Pak je každé, v nekonečném intervalu určené řešení diferenciální rovnice* (1) *oscilující.*

Věta 2. *Buď $a(t) = b(t) + \beta(t)$, kde $b(t) \geqq 0$ a $\int_0^\infty t\,|\beta(t)|\,dt < \infty$. Pak nutná a postačující podmínka proto, aby každé řešení diferenciální rovnice (1), které je určené na nekonečném intervalu, bylo oscilující je $\int_0^\infty t\,b(t)\,dt = \infty$.*

V poznámce jsou dány také podmínky, které zaručují existenci řešení diferenciální rovnice (1), určeného na nekonečném intervalu.

Zusammenfasung

ÜBER DIE OSZILLATION DER LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $u'' + a(t)|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$

I. Kiguradze (И. Т. Кигурадзе), Tbilisi

In dieser Bemerkung wird die Differentialgleichung

$$u'' + a(t)\,|u|^n \operatorname{sgn} u = 0 \tag{1}$$

behandelt, wo $n > 1$ und die Funktion $a(t)$ in jedem endlichen Intervall $[0, t_0]$ summierbar ist. Es werden folgende Sätze bewiesen:

Satz 1. *Es sei $\int_0^\infty \varphi(\tau)\,a(\tau)\,d\tau = \infty$, wo $\varphi(t)$ eine bestimmte, positive, stetige, konkave Funktion ist. Dann ist jede in einem unendlichen Intervalle bestimmte Lösung der Differentialgleichung (1) oszillierend.*

Satz 2. *Es sei $a(t) = b(t) + \beta(t)$ mit $b(t) \geqq 0$ und $\int_0^\infty t\,|\beta(t)|\,dt < \infty$. Dann, dafür, daß jede in einem unendlichen Intervalle bestimmte Lösung der Differentialgleichung (1) oszillierend ist, ist notwendig und hinreichend, daß $\int_0^\infty t\,b(t)\,dt = \infty$.*

In der Bemerkung werden auch Bedingungen, die die Existenz einer in einem unendlichen Intervalle bestimmten Lösung der Differentialgleichung (1) sichern, festgestellt.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

ЗАМЕЧАНИЕ О ПРОИЗВЕДЕНИИ РЯДОВ ЛЕЙБНИЦА

FRANTIŠEK ŠTĚPÁNEK (Франтишек Штепанек), Прага

(Поступило в редакцию 30/V 1966 г.)

Определение 1. Рядом Лейбница называем бесконечный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n$, где $c_n \geqq c_{n+1} > 0$ для $n = 0, 1, \ldots$ и $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$.

Очевидно, всякий ряд Лейбница сходится.

В. Демидович в работе [2] привел новое элегантное доказательство следующей классической теоремы, доказанной впервые Г. Прингсхеймом (G. Pringsheim) в 1883 году.

Теорема 1. *Пусть* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_n$ *– два ряда Лейдница и пусть сходится ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n . \tag{1}$$

Тогда сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\alpha_0 \beta_n + \alpha_1 \beta_{n-1} + \ldots + \alpha_n \beta_0)$, *т.е. произведение рядов* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_n$ *по правилу Коши.*

Легко убедимся (см. впрочем [2]), что из предположений теоремы 1 следует непосредственно

$$\lim_{n \to \infty} (\alpha_0 \beta_n + \alpha_1 \beta_{n-1} + \ldots + \alpha_n \beta_0) = 0 . \tag{2}$$

Дальше показывается, что условие (1) в тексте теоремы 1 можно даже прямо заменить условием (2). Именно справедлива следующая более общая теорема, происходящая тоже от Г. Прингсхейма.

Теорема 2. *Пусть* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_n$ *– два ряда Лейдница; пусть конкретно* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n = r$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_n = s$. *Пусть ещё выполняется* (2). *Тогда* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\alpha_0 \beta_n + \alpha_1 \beta_{n-1} + \ldots + \alpha_n \beta_0) = rs$.

Г. Х. Харди (G. H. Hardy) упростил в 1908 году оригинальное доказательство теоремы 2, данное Прингсхеймом. Это доказательство Харди приведено в [1], стр. 94–95, где цитирована дальнейшая литература и где тоже (на стр. 102, упражнение 19) детально исследована роль условия (1).

Цель настоящего замечания — показать, что теорема 2 является и прямым следствием двух элементарных теорем (см. дальше теорему A и теорему B) из теории расходящихся рядов.

Прежде всего введем ещё одно общее определение.

Определение 2. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ — ряд вещественных чисел; положим $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $t_n = (n+1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} s_k$, $n = 0, 1, \ldots$ Если $\lim_{n\to\infty} t_n = u \in E_1$ то говорим, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ суммируется методом средних арифметических (методом $(C, 1)$) к сумме u; в этом случае пишем $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u\ (C, 1)$.

Теорема A. *Пусть* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *— два сходящихся ряда вещественных чисел; пусть* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$. *Тогда* $\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) = ab(C, 1)$.

Доказательство. См. [3], стр. 104, теорема 41.

Теорема B. *Пусть* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u(C, 1)$ *и пусть*

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=n}^{\infty} u_k/k = 0\,. \tag{3}$$

Тогда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u$.

Доказательство. Имеем $s_n - t_n = (n+1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} k u_k$, $n = 0, 1, \ldots$ Итак, достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k u_k = 0\,. \tag{4}$$

Положим теперь для простоты $z_n = \sum_{k=n}^{\infty} k^{-1} u_k$, $n = 1, 2, \ldots$; следовательно, вместо (3) можно писать

$$\lim_{n\to\infty} n z_n = 0\,. \tag{3'}$$

Для $n = 2, 3, \ldots$ получаем тогда

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} ku_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k^2(z_k - z_{k+1}) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 z_k - \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)^2 z_k\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n}(2k-1)\, z_k +$$

$$+ \frac{z_1}{n+1} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 (n+1)\, z_{n+1}$$

и отсюда уже легко вытекает (4) при помощи (3'). Доказательство теоремы B закончено.

Доказательство теоремы 2. Прежде всего положим для краткости $\alpha_0\beta_n + \alpha_1\beta_{n-1} + \ldots + \alpha_n\beta_0 = \gamma_n$ для $n = 0, 1, \ldots$ Из теоремы A следует, что $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \gamma_n = rs$ $(C, 1)$. Далее для произвольных $j, n = 0, 1, \ldots$ имеем $\gamma_n \geqq \gamma_{n+1} - \alpha_j\beta_{n+1-j}$ и, следовательно, $(n+1)\,\gamma_n \geqq n\gamma_{n+1}$. Итак, принимая во внимание (2), получаем, что бесконечный ряд $2\gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-1}\gamma_n$ является рядом Лейбница. Но тогда очевидно, что

$$\left|n\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k \frac{\gamma_k}{k}\right| \leqq \gamma_n\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Если теперь положим в теореме B $u_n = (-1)^n \gamma_n$, $n = 0, 1, \ldots$, то выполнены все предположения этой теоремы, так как (3) вытекает непосредственно из (2) и (5). Имеем, следовательно, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \gamma_n = rs$, что и требовалось доказать.

Литература

[1] *T. J. Bromwich:* An Introduction to the Theory of Infinite Series. London 1926.
[2] *B. Демидович:* О произведении рядов Лейбница. Čas. pro pěst. mat. *90* (1965), 471—473.
[3] *V. Jarník:* Diferenciální počet II. Praha 1956.

Адресс автора: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

Výtah

POZNÁMKA O SOUČINU LEIBNIZOVÝCH ŘAD

FRANTIŠEK ŠTĚPÁNEK, Praha

Leibnizovou řadou nazýváme nekonečnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n$, kde $c_n \geqq c_{n+1} > 0$ pro $n = 0, 1, \ldots$ a $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. G. Pringsheim dokázal r. 1883 následující větu o součinu Leibnizových řad.

Věta. *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \alpha_n$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \beta_n$ *jsou dvě Leibnizovy řady, nechť* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \alpha_n = r$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \beta_n = s$. *Jestliže dále platí* (2), *potom* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (\alpha_0\beta_n + \alpha_1\beta_{n-1} + \ldots + \alpha_n\beta_0) = rs$.

V této poznámce je ukázáno, že zmíněná Pringsheimova věta je jednoduchým důsledkem dvou následujících elementárních vět z teorie divergentních řad.

Věta A. *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *jsou dvě konvergentní řady (reálných) čísel, nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$. *Potom řada* $\sum_{n=0}^{\infty}(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0)$ *je sčítatelná metodou aritmetických průměrů (metoda* $(C, 1)$*) k součtu* ab.

Věta B. *Jestliže řada* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *je sčítatelná metodou aritmetických průměrů k součtu* u *a jestliže dále platí* (3), *potom* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u$.

Summary

A NOTE ON THE PRODUCT OF LEIBNIZ SERIES

FRANTIŠEK ŠTĚPÁNEK, Praha

By a Leibniz series we understand an infinite series $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n$, where $c_n \geqq c_{n+1} > 0$ for $n = 0, 1, \ldots$ and $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. In 1883 G. Pringsheim proved the following theorem on the product of Leibniz series.

Theorem. Let $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \alpha_n$ and $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \beta_n$ be two Leibniz series, let $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \alpha_n = r$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \beta_n = s$. If further (2) holds, then $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (\alpha_0\beta_n + \alpha_1\beta_{n-1} + \ldots + \alpha_n\beta_0) = rs$.

In the present note the author points out that this Pringsheim's theorem is a simple corollary of the two following elementary theorems from the theory of divergent series.

Theorem A. Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ and $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ be two convergent series of (real) numbers, let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$. Then the series $\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0)$ is summable by the method of arithmetic means (method (C, 1)) to the sum ab.

Theorem B. If the series $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ is summable by the method of arithmetic means to the sum u and if further (3) holds, then $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u$.

ÚLOHY A PROBLÉMY

1. Najděte konvergentní řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ takové, že $\lim_{n\to\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) = 0$, ale řada $\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0)$ nekonverguje.

Poznámka: Tuto úlohu klade nepřímo vlastně již G. H. HARDY na konci § 11 své práce The multiplication of conditionally convergent series, Proc. London Math. Soc. (2) *6* (1908), 410—423, když podotýká, že konstrukce řad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ s požadovanými vlastnostmi není příliš zřejmá a žádný příklad takových řad neuvádí. Úloha nebyla, jak se zdá, vyřešena doposud.

František Štěpánek, Praha

Řešení úlohy č. 2. (autor *Jan Mařík*) z roč. *81* (1956), str. 247. (Elementární důkaz věty o substituci pro Riemannův integrál)

J. MAŘÍK předložil v Časopise pro pěstování matematiky roč. *81* (1956), str. 247 následující úlohu:

Úloha. Dokažte elementárními prostředky, že platí tato věta:

Nechť funkce f má (vlastní) Riemannův integrál v intervalu $\langle c, d\rangle$. Nechť funkce φ má spojitou derivaci v intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $c \leqq \varphi(t) \leqq d$ pro každé $t \in \langle a, b\rangle$. Potom existuje Riemannův integrál $\int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t$ a rovná se $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, \mathrm{d}x$.

Poznámka: Důkaz lze provést dosti jednoduše pomocí některých ne zcela triviálních vět z teorie reálných funkcí.

Poměrně nedávno dokázal H. KESTELMAN v práci [3] následující obecnější větu o substituci pro Riemannův integrál.

Věta 1. *Nechť funkce g má Riemannův integrál v intervalu $\langle a, b\rangle$. Zvolme $s \in \langle a, b\rangle$ pevně a položme $G(t) = \int_s^t g(w)\, \mathrm{d}w$ pro všechna $t \in \langle a, b\rangle$. Nechť funkce f má Riemannův integrál v intervalu $G(\langle a, b\rangle) = E[G(t);\ t \in \langle a, b\rangle]$. Potom existuje Riemannův integrál $\int_a^b f(G(t))\, g(t)\, \mathrm{d}t$ a rovná se $\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\, \mathrm{d}x$.*

Přitom H. Kestelman při důkazu této věty užil z teorie Lebesqueova integrálu pouze pojmu množiny míry nula.

Vzápětí na to však ROY O. DAVIES v práci [1] ukázal, užívaje základních myšlenek práce [3], že větu 1 lze dokázat zcela elementárně jen s použitím aparátu teorie

Riemannova integrálu. Provedeme si zde nyní elementární důkaz věty 1 a to v podstatě tak, jak je uveden v práci [1]. V některých místech však originální důkaz Roy O. Daviese poněkud zpřesníme a naznačené úvahy provedeme podrobně.

Úmluva. Základních pojmů z teorie Riemannova integrálu užíváme (včetně označení) tak jako ve [2]. Je-li z funkce omezená v intervalu I, pak číslo $\sup_{x\in I} z(x) - \inf_{x\in I} z(x)$ nazýváme oscilací funkce z v intervalu I a značíme je $\operatorname{osc}[z, I]$ resp. i jen krátce $\operatorname{osc}[z]$, vysvětlíme-li blíže slovy, o který interval se jedná. Slova „integrace", „integrál" a p. pak v dalším značí výhradně „Riemannovu integraci", „Riemannův integrál" a p. Přitom předpokládáme, že integrál je definován t. zv. součtovou definicí. (Viz [2], str. 35.)

Při důkazu věty 1 užijeme následujících dvou kriterií pro existenci integrálu.

Věta A. *Budiž funkce u definována v $\langle\alpha, \beta\rangle$, budiž C (reálné) číslo. Potom u má integrál od α do β rovný C právě tehdy, když k libovolnému $\eta > 0$ existují čísla $\alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = \beta$ taková, že pro každou volbu hodnot $\zeta_j \in \langle x_{j-1}, x_j\rangle$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ je*

$$\left|C - \sum_{j=1}^{n} u(\zeta_j)(x_j - x_{j-1})\right| < \eta .$$

Věta B. (Srov. [4], str. 217–218.) *Budiž v funkce omezená v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$. Potom v má integrál od α do β právě když k libovolným číslům $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ existuje rozdělení D intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$, takové, že součet délek všech intervalů rozdělení D, v kterých* $\operatorname{osc}[v] > \eta_1$, *je menší než η_2.*

Důkaz věty 1. Položme $M = \max\left(\sup_{x\in G(\langle a,b\rangle)} |f(x)|, \sup_{t\in\langle a,b\rangle} |g(t)|\right)$. Budiž dále $\omega > 0$. Položme ještě $\varepsilon = \omega(4M^2 + 6(b - a) M)^{-1}$.

Jelikož funkce g má integrál od a do b, existuje k číslu ε dle věty B ($\eta_1 = \eta_2 = \varepsilon$) rozdělení $\bar{D}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že součet délek všech intervalů rozdělení $\bar{D}$, v kterých $\operatorname{osc}[g] > \varepsilon$, je menší než ε. Tyto intervaly rozdělení $\bar{D}$ nazveme intervaly typu 1. Zbývající intervaly rozdělení $\bar{D}$ (tj. ty, v kterých $\operatorname{osc}[g] \leqq \varepsilon$) jsou dvojího druhu:

1) Intervaly, ve kterých pro jisté t je $|g(t)| < \varepsilon$. Tyto intervaly nazveme intervaly typu 2. V každém intervalu typu 2 je pak zřejmě pro všechna t z tohoto intervalu $|g(t)| < 2\varepsilon$.

2) Intervaly, ve kterých je všude $|g(t)| \geqq \varepsilon$. Tyto intervaly nazveme intervaly typu 3.

V případě, že množina všech intervalů typu 3 je neprázdná, označíme písmenem N počet prvků této množiny. V tomto případě pak budeme intervaly typu 3 dále dělit. Vezměme proto jeden z intervalů typu 3, budiž to např. interval $\langle s_1, s_2\rangle$. Potom v intervalu $\langle s_1, s_2\rangle$ platí, že buďto je v něm všude $g(t) \geqq \varepsilon$ nebo všude $g(t) \leqq -\varepsilon$.

Předpokládejme např., že $g(t) \geqq \varepsilon$ pro všechna $t \in \langle s_1, s_2 \rangle$. (V druhém případě bychom totiž postupovali zcela analogicky.) Potom dostáváme pro libovolná t', t'', pro která platí $s_1 \leqq t' < t'' \leqq s_2$, že

$$(1) \qquad \frac{G(t'') - G(t')}{t'' - t'} \geqq \varepsilon .$$

Jelikož f je integrabilní v intervalu $G(\langle s_1, s_2 \rangle)$, existuje dle věty B ($\eta_1 = \varepsilon$, $\eta_2 = \varepsilon^2 N^{-1}$) rozdělení D' intervalu $G(\langle s_1, s_2 \rangle)$ takové, že součet délek všech intervalů rozdělení D', ve kterých $\operatorname{osc}[f] > \varepsilon$, je menší než $\varepsilon^2 N^{-1}$. Jelikož, dle (1), funkce G je rostoucí v $\langle s_1, s_2 \rangle$, jsou intervaly rozdělení D' tvaru $\langle G(\tau_{j-1}), G(\tau_j) \rangle$, $j = 1, 2, \ldots, l$, kde $s_1 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_l = s_2$. Položíme-li nyní ještě pro jednoduchost $h(t) = f(G(t))$, $t \in \langle a, b \rangle$, dostáváme tedy, že $\operatorname{osc}[f]$ v intervalu $\langle G(\tau_{j-1}), G(\tau_j) \rangle$ je rovna $\operatorname{osc}[h]$ v intervalu $\langle \tau_{j-1}, \tau_j \rangle$ pro všechna $j = 1, 2, \ldots, l$.

Intervaly $\langle \tau_{j-1}, \tau_j \rangle$, $j = 1, 2, \ldots, l$ jsou opět dvojího druhu:

a) Intervaly, ve kterých $\operatorname{osc}[h] > \varepsilon$; tyto intervaly nazveme intervaly typu 3.1. Podle (1) je součet délek všech intervalů typu 3.1 menší než $\varepsilon^{-1}\varepsilon^2 N^{-1} = \varepsilon N^{-1}$.

b) Intervaly, ve kterých $\operatorname{osc}[h] \leqq \varepsilon$; tyto intervaly nazveme intervaly typu 3.2.

Rozdělíme-li tedy ještě každý z intervalů typu 3 právě popsaným způsobem, obdržíme tak celkem jisté rozdělení D^* intervalu $\langle a, b \rangle$, jež se skládá ze všech intervalů typu 1, 2, 3.1 a 3.2. Nechť toto rozdělení D^* má dělicí body $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$. Všimněme si ještě, že součet délek všech intervalů typu 1 a 3.1 z rozdělení D^* je menší než $\varepsilon + N\varepsilon N^{-1} = 2\varepsilon$.

Celkem snadno dále zjistíme, že

$$(2) \quad \int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{G(t_{i-1})}^{G(t_i)} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} [G(t_i) - G(t_{i-1})]\,\lambda_i = \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1})\,\lambda_i \mu_i ,$$

kde $\lambda_i \in \langle \inf\limits_{t \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle} h(t), \sup\limits_{t \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle} h(t) \rangle$, $\mu_i \in \langle \inf\limits_{t \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle} g(t), \sup\limits_{t \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle} g(t) \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Buďte nyní $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ libovolná čísla taková, že $t_{i-1} \leqq \xi_i \leqq t_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, m$. Potom jest dle (2)

$$(3) \quad \left| \int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1})\,h(\xi_i)\,g(\xi_i) \right| \leqq \sum_{i=1}^{m} (t_i - t_{i-1})\,|\lambda_i \mu_i - h(\xi_i)\,g(\xi_i)| .$$

Nyní budeme odhadovat velikost součtu na pravé straně nerovnosti (3).

Součet délek všech intervalů typu 1 a 3.1 rozdělení D^* je, jak už bylo řečeno, menší než 2ε a tudíž celkový příspěvek těchto intervalů v právě zmíněném součtu je menší než $2\varepsilon \,.\, 2M^2$.

V každém intervalu typu 2 rozdělení D^* jest $|g(t)| < 2\varepsilon$ pro všechna t z tohoto intervalu a tudíž i $|\mu_i| \leqq 2\varepsilon$ pro příslušná i. Tedy celkový příspěvek intervalů typu 2 do uvažovaného součtu z nerovnosti (3) je nejvýše roven $(b - a)\,4\varepsilon M$.

Konečně pak v každém z intervalů typu 3.2 rozdělení D^* je osc $[g] \leqq \varepsilon$ a zároveň i osc $[h] \leqq \varepsilon$, takže pro příslušné indexy i máme

$$|\lambda_i \mu_i - h(\xi_i)\, g(\xi_i)| = |\lambda_i[\mu_i - g(\xi_i)] + [\lambda_i - h(\xi_i)]\, g(\xi_i)| \leqq$$
$$\leqq |\lambda_i|\, |\mu_i - g(\xi_i)| + |\lambda_i - h(\xi_i)|\, |g(\xi_i)| \leqq 2\varepsilon M\,.$$

Tedy celkový příspěvek intervalů typu 3.2 v uvažovaném součtu je nejvýše roven $(b - a)\, 2\varepsilon M$.

Shrneme-li nyní výsledky právě provedené úvahy, dostaneme celkem

$$\left| \int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\, \mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{m} h(\xi_i)\, g(\xi_i)\, (t_i - t_{i-1}) \right| <$$
$$< 2\varepsilon\,.\, 2M^2 + (b - a)\, 4\varepsilon M + (b - a)\, 2\varepsilon M = 4\varepsilon M^2 + 6(b - a)\, \varepsilon M = \omega\,.$$

Podle věty A tedy zřejmě $\int_a^b h(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\, \mathrm{d}x$ cbd.

Literatura

[1] *Roy O. Davies:* An Elementary Proof of the Theorem on Change of Variable in Riemann Integration. Math. Gazette *45* (1961), 23—25.

[2] *V. Jarník:* Integrální počet I. Praha 1956.

[3] *H. Kestelman:* Change of Variable in Riemann Integration. Math. Gazette *45* (1961), 17—23.

[4] *K. Petr:* Počet integrální. Praha 1931.

František Štěpánek, Praha

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

RECENSE

Günter Pickert: EBENE INZIDENZGEOMETRIE, Otto Salle Verlag, Frankfurt am Main—Hamburg 1958, vyšlo jako osmý sešit sbírky „Schriftreihe zur Mathematik"; 92 stran, 14 obrazců.

Jde o spis napsaný s úmyslem vyložit podstatu deduktivní metody na jednoduché axiomatické soustavě rovinné incidenční geometrie. Jak je popsáno v Úvodu, nepřímý podnět ke vzniku spisu dal autorovi posluchač filosofie, který se na něj obrátil o pomoc při přípravě svého seminárního výstupu o Spinozovi: posluchačovi šlo o objasnění metody „more geometrico". Pickertova knížka je vlastně odpovědí na tuto otázku. Vzhledem k tomu, že soustava axiomů rovinné incidenční geometrie je zvláště jednoduchá (je nesporně jednodušší než soustava axiomů eukleidovské geometrie anebo Peanova soustava axiomů pro přirozená čísla), je pro předvedení deduktivní metody velmi vhodná.

Autorův výklad je veden s neobyčejným vkusem i citem pro demonstraci matematické přesnosti a demonstraci jednotlivých logických obratů na zvoleném objektu. A tak jsou zde logická pravidla uplatňována nejprve přímo v akci, aby posléze v závěrečné páté kapitole byla rozebrána sama o sobě (takže pátá kapitola je úvodem do vlastní formální logiky). Autor je přední světový odborník v současné problematice algebraických a topologických metod základů geometrie a též v problematice matematické metodologie. Jeho výklad je vrcholně znaleckým pohledem na věc, takže je požitkem knížku číst. Domnívám se však, že přes elementárnost obsahu knížky nelze její četbu označit za záležitost elementární (či dokonce rekreační). Spis je na čtenáře poněkud náročný.

V první kapitole je studována rovinná afinní incidenční geometrie: je uveden příslušný systém, axiomů s primitivními pojmy *bod, přímka* a *incidence,* popsáno spojování bodů a protínání přímek, zavedena rovnoběžnost, zkoumán minimální počet bodů a přímek; dále se hovoří o důkazu bezespornosti užitím modelů, o isomorfismu mezi modely, o úplnosti a nezávislosti. V druhé kapitole se obdobně studuje rovinná projektivní incidenční geometrie, kdežto třetí kapitola je věnována konečným afinním rovinám: jde zde o ortogonální latinské čtverce a jejich souvislosti s konečnými afinními rovinami a o konečné afinní roviny s nejvýše čtyřmi body na přímce. Ve čtvrté kapitole se za předpokladu platnosti Desarguesovy věty studují homotetie a translace a zavádí se souřadnicový systém; sčítání a násobení souřadnic zavede se vpodstatě užitím Hallovy metody a po odvození příslušných algebraických zákonů jsou na závěr uvedeny souvislosti s pojmem nekomutativního a komutativního tělesa a analytickou geometrií. Připojme poznámku, že sám pojem rovinné incidenční geometrie (afinní i projektivní) spadá pod obecnější pojem „*incidenční geometrie*", kde se vychází opět ze dvou množin B, P (množiny *bodů* a množiny *přímek*) a binární relace $I \subset B \times P$ (*incidenční relace*), splňující vhodnou další podmínku, kupř. $b_i I p_j$ pro $i, j = 1,2$ $\Rightarrow b_1 = b_2$ nebo $p_1 = p_2$ anebo některou podmínku slabší.

Pátá kapitola je, jak již bylo řečeno, úvodem do formální logiky (i když si autor zde nečiní nároků na úplnější výklad a spíše provádí vhodný výběr látky, aby nepřekročil vytčený rámec stručnosti). Po úvodních poznámkách filosofického rázu s případnou citací z Goethova Fausta (jde o Mefistovy úvahy o collegiu logicu) je rozebrán pojem konjunkce, disjunkce a implikace a pojem negace, dále pak se přejde k (volným a vázaným) logickým proměnným a k predikátovému kalkulu. Vše je podáno originálně, bez zdůrazňování formalismu jsou studovány různé logické figury (kupř. pravidlo „exportace" a „importace", „tertium non datur", pravidlo nepřímého důkazu ap.) s ukázkami intuicionistických postupů. Pojem rovnosti pokládá autor za spojení logické a vyšetřuje tedy pravidla pro rovnost v rámci pravidel logiky. Následuje zajímavý výklad o definici (definiens a definiendum, Russelova „definition in use" a „definice popisem"), poznámky k pojmu množiny a množinovým operacím, k pojmu binární relace a pojmu funkce. Zde poukažme též na článek *G. Pickert:* Der Mengen- und Funktionsbegriff in der Anfängervorlesung, Math. Phys. Semesterberichte *5* (1956), 71—79, resp. na článek *G. Pickert:* Fragen der mathematischen Syntax im Unterricht, Intern. Symp. on the Coord. of Instr. in Math. and Phys., Belgrade 1962, 87—92. Úplně na závěr hovoří autor o syntaktickém a sémantickém odvození v souvislosti s Gödelovou větou o existenci modelu ke každému bezespornému systému axiomů.

Václav Havel, Brno

Rafael Artzy: LINEAR GEOMETRY, Addison-Wesley, Reading—Massachusetts 1965 ix + 273 stran, 52 obrazců. Vyšlo v knižnici „Addison-Wesley Series in Mathematics", redigované L. H. Loomisem.

Autor je profesorem matematiky na State University of Rutgers (USA) a je význačným odborníkem v geometrické algebře a specialistou v teorii abstraktních tkání. Recensovaná kniha je vysokoškolskou učebnicí „lineární" geometrie; tato disciplina má podle koncepce z Úvodu při universitní výuce plný nárok na samostatnost.

První kapitola zabývá se studiem transformací a transformačních grup eukleidovské roviny, a to užitím Gaussovy roviny komplexních čísel. Potřebné algebraické pojmy jsou průběžně zaváděny v té míře, v jaké se při výkladu potřebují. Je též vyšetřen Poincarého model hyperbolické roviny a její transformační grupa. Druhá kapitola začíná rekapitulací pojmů o vektorových prostorech konečné dimense nad obecným tělesem, o lineárních transformacích vektorových prostorů, determinantech a o duálním vektorovém prostoru. Následuje výklad afinní a eukleidovské geometrie včetně kvadratických útvarů (při omezení na dimensi 2 resp. 3). Je též zařazen paragraf o konečných afinních rovinách. Třetí kapitola jedná o projektivní a neeukleidovské geometrii při kombinaci analytické a syntetické metody. Vychází se opět z obecného tělesa, jsou zavedeny projektivní souřadnice, vyšetřen pojem dvojpoměru, studovány projektivity, kuželosečky, korelace a polarity při demensi 2. Konečně je zkoumán Cayley-Kleinův model neeukleidovských geometrií. Na závěr kapitoly je užit prostor kvaternionů k representaci eliptického trojrozměrného prostoru, zatímco pojmu Cayley-Dicksonovy divisionální algebry a teorémům Hurwitzovu (o výčtu všech unitárních normovaných algeber konečné hodnosti nad reálnými čísly), Frobeniovu (o výčtu všech alternativních divisionálních algeber konečné hodnosti nad reálnými čísly) a Bruck-Ryserovu (o neexistenci jistých konečných projektivních rovin) je věnována jen zmínka.

Tyto tři kapitoly tvoří podle autorových slov z Úvodu celoroční pensum běžného kursu pro mladší i starší studenty; při jejich lepší algebraické vybavenosti je do celoroční náplně zařazována i následující kapitola čtvrtá, která je jinak přednášena odděleně. V ní se vykládá axiomatická rovinná geometrie v podání navazujícím na Halla, Brucka, Pickerta a další. Toto podání liší se od Hilbertova standartu známého z jeho díla „Grundlagen der Geometrie" prohloubením tématiky: různé geometrie vyskytující se u Hilberta v podobě protipříkladů jsou povýšeny na vlastní předmět studia. Přitom jde především o obecné nedesarguesovské geometrie. Koordinatisace takových „rudimentárních" rovin (u nichž se splnění jiných axiomů než incidenčních nežádá) je provedena Hallovou metodou ternárních okruhů. V rámci koordinatisace si autor všímá trojtkání a jejich „souřadnicových" lup v souvislosti s jejich úlohou při zavedení odvozeného sčítání a násobení v ternárních okruzích. Dodatečnými požadavky kladenými na rudimentární rovinu dochází se k rovinám Veblen-Wedderburnovým (neboli translačním), k rovinám Moufangové, k desarguesovským a k pappovským rovinám. Jsou zkoumány různé konfigurační podmínky a jejich algebraické ekvivalenty, jakož i kolineace v jednotlivých typech rovin. Po zavedení pojmu oddělování a uspořádání se postupně dojde až k reálné rovině. Je prokázána ekvivalence mezi Cayley-

Kleinovým a Poincaréovým modelem hyperbolické roviny. Závěrečné poznámky týkají se historie vzniku neeukleidovských geometrií a současného stavu prohlubování klasické Hilbertovy fundace geometrie.

Na konci každé kapitoly je uveden výběr učebnic a kompendií týkajících se vyložené látky, vždy s charakteristikou v několika slovech. Kniha končí soupisem označení, axiomů a zavedených grup a indexem (str. 261—273).

Autor dovedl dát knize jednotný charakter. Výklad je místy až zcela elementární, avšak po mém soudu dostatečně „moderní". Některé hlubší teorémy jsou uvedeny okrajově bez důkazů. Učebnice tedy výborně splňuje své poslání poskytnout první úvod do pojmů a výsledků „rovné" geometrie. Pokud jde o novější výsledky z axiomatické geometrie rudimentárních rovin, neexistoval dosud kromě přehledného článku Bruckova (Amer. Math. Monthly *62*, 2, 1955) elementární výklad, takže čtvrtá kapitola knihy se dá pokládat za průkopnickou. Při zvolené koncepci je v učebnici vykládaná „rovná" geometrie spjata pouze s algebraickými vlastnostmi těles resp. ternárních okruhů a jen na některých místech se dochází k topologickým souvislostem. Přesto však výkladový přechod k difeotopologickým strukturám může následovat zcela plynule, kupř. tak jak je to provedeno ve známé učebnici Auslandera a Mackenzieho (Introduction to Differentiable Manifolds, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York—San Francisco—Toronto—London 1963). Stálo by snad zato vzít knihy toho typu jako je učebnice Artzyho v úvahu při apologii zachování základních kursů geometrie na našich universitách.

Václav Havel, Brno

M. E. Munroe: INTRODUCTORY REAL ANALYSIS. Addison-Wesley Publishing Company, INC., Reading, Massachusetts, U.S.A. 1965, 198 stran, obr. 31, cena $ 8.50.

Recensovaná kniha je další z řady knih prof. M. E. Munroe, které jsou vydány v edici Addison-Wesley Series in Mathematics. Podobně jako jeho dřívější knihy vyniká jasným slohem a maximální snahou usnadnit čtenáři dokonalé pochopení látky.

Prvých šest kapitol knihy obsahuje základy teorie funkcí reálné proměnné. Autor vychází z elementárních logických pojmů a základů teorie množin (kapitola 1). V druhé kapitole pojednává o reálných číslech. Zavádí pojem tělesa, uspořádaného a archimedovsky uspořádaného a úplného tělesa, suprema a infima množiny čísel. Na závěr uvádí Bolzano-Weierstrassovu větu. Následující — třetí — kapitola obsahuje definici funkce, limity funkce, limes superior a inferior, posloupnosti (Cauchyova podmínka) a základní vlastnosti spojitých funkcí. V posledním paragrafu této kapitoly je dokázána ekvivalence věty o supremu s některými známými základními větami. Ve čtvrté kapitole jsou obsaženy základní definice a věty o řadách (srovnávací a podílové kriterium, parciální sumace, Leibnitzovo kriterium, přerovnávání a násobení řad.).

Další dvě kapitoly nemají už tak elementární charakter. Pátá kapitola je věnována základům teorie metrických prostorů (kompaktnost, separabilita, úplnost, husté a dokonalé množiny, množiny prvé kategorie). Pro ilustraci jsou probrány vlastnosti základních známých metrických prostorů (v označení u nás obvyklém E_n, $C(0,1)$, $M(0,1)$, m, s, l_2, Hilbertův kvádr a Cantorovo diskontinuum). Šestá kapitola obsahuje studium stejnoměrnosti. Autor vychází nejprve z kartézského součinu dvou metrických prostorů a rozebírá rozdíl mezi limitou dvojnou a postupnou. Na základě toho definuje stejnoměrnou limitu, stejnoměrně Cauchyovskou posloupnost, stejnoměrnou konvergenci řad (spolu s uvedením obvyklých kriterií) a stejnoměrnou spojitost. Přechází potom k (Moore-Osgoodově) větě o záměně limitních přechodů při zobrazení do úplného metrického prostoru. Jakýmsi vyvrcholením celé knihy jsou poslední dva paragrafy této kapitoly, obsahující Osgoodovu větu o limitě posloupnosti spojitých funkcí na úplném metrickém prostoru, věty Diniho, Askoliho a větu Stone-Weierstrassovu.

Poslední — sedmá — kapitola se svým charakterem odlišuje od předchozích. Obsahuje důkazy základních vět o derivaci funkcí jedné i dvou reálných proměnných (Rolleova věta, věta o střední hodnotě, Taylorova věta), základní věty o n-rozměrných varietách, větu o implicitních funkcích, diferenciály a integrály (definice Riemannova integrálu, množiny Lebesgueovy míry nula a věta o existenci Riemannova integrálu). Na závěr jsou zavedeny integrály křivkové a plošné (Stookesova věta).

Z uvedeného výčtu je i vidět, že prvých šest kapitol obsahuje — dle autorových vlastních slov — anatomii pojmu limity. Poslední kapitola (nazvaná případně Calculus) obsahuje důkazy, které nebyly pojaty do autorovy dřívější knihy Modern Multidimensional Calculus a současně ukazuje jisté použití výsledků prvých šesti kapitol. Proto také tato kapitola nemá přirozeně vůbec vyčerpávající ráz, není psaná již s takovou podrobností a některé důkazy jsou pouze naznačeny.

Celkem lze říci, že recensovaná kniha je zajímavým pokusem (zajímavým zejména výběrem a uspořádáním látky) o výklad základních pojmů. Je určena především pro čtenáře, který se chce seznámit s logicky přesnou výstavbou této části matematiky. Důkazy jsou formulovány jasně a stručně. K ulehčení studia zavádí autor řadu vhodných označení. Každý paragraf je ukončen řadou pozorně zvolených cvičení, které vhodným způsobem doplňují a rozšiřují probíranou látku. Kniha je vypravena pečlivě bez patrných nedostatků.

Břetislav Novák, Praha

Rudolf Piska, Václav Medek: DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE II. Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1966, 1. vyd., nákl. 5200 výt., str. 316, obr. 315, cena Kčs 22,— váz.

Obsahem druhého dílu celostátní učebnice deskritptivní geometrie pro stavební fakulty[1]), který je rozdělen do osmi částí, je vytvoření a vlastnosti křivek a ploch s některými technickými aplikacemi. Číslování částí, kapitol a odstavců navazuje průběžně na první díl knihy.

Všimneme si stručně obsahu jednotlivých částí.

Nejdříve jsou uvedeny některé základní vlastnosti rovinných a prostorových čar, využité pak při zobrazení šroubovice. Po obecných vlastnostech ploch jsou probrány rotační plochy — vytvoření, vlastnosti a jejich použití. Výsledků je využito při výkladu o rotačních kvadrikách, kdy je zvlášť uveden rotační zborcený hyperboloid se svými vlastnostmi a příklady z praxe. Nerotační plochy druhého stupně jsou vytvořeny afinitou v prostoru, s výjimkou hyperbolického paraboloidu, který je odvozen z rotačního hyperboloidu pomocí kolineace v prostoru. V uvedených aplikacích není správná citace na str. 108.

V další části je nejdříve zmínka o základech přímkové geometrie a pak jsou probrány rozvinutelné a po nich zborcené plochy. Vždy jsou uvedeny základní vlastnosti ploch plynoucí z jejich vytvoření, zvláště pak konstrukce tečné roviny v daném bodě plochy. U zborcených ploch jsou pak důsledkem těchto konstrukcí vlastnosti strikční čáry a parametru distribuce, které na mnohých fakultách nebyly dříve pro nedostatek času probírány. Speciální zborcené plochy jsou většinou uváděny příkladem, který má praktické použití.

Ze šroubových ploch jsou znovu probrány vlastnosti rozvinutelné a zborcené šroubové plochy a cyklické šroubové plochy. Z ploch technické praxe pak vytvoření a základní vlastnosti translačních ploch, klínové plochy, součtové a obalové plochy.

Následuje velmi pěkná část s doplňky k teorii ploch, kdy se čtenář seznámí s některými větami diferenciální geometrie (věta Eulerova, Meusnierova) a jejich důsledky a použitím v deskriptivní geometrii.

V tomto dílu je vyložen jediný promítací způsob a to kótované promítání a jeho použití při teoretickém řešení střech a v topografických plochách.

[1]) Recenze prvního dílu učebnice byla uveřejněna v tomto časopise roč. *92* (1967) na str. 116—117.

Výklad v knize je ukončen aplikací deskriptivní geometrie ve stereotomii (kamenořezu). Tato část aplikací deskriptivní geometrie byla dříve velmi pěstována, stále větší použití betonu ve stavebnictví však vytlačuje její použití, takže dnes jen některé stavby, zvláště pokud je v blízkosti vhodný kámen, se provádějí z tesaného kamene podle zásad stereotomie.

Je nepochopitelné, proč byly vynechány, ač už napsané, některé části z aplikací geometrie, zejména základy kartografie a konstruktivní fotogrammetrie. Stránkový rozsah nemohl přec tuto okolnost ovlivnit, neboť druhý díl má méně stran než první.

Rovněž v tomto dílu je vedle mnoha řešených úloh přímo v textu připojena řada velmi pěkných cvičení. Přitom bude vhodné v dalším vydání učebnice opatřit většinu příkladů, i řešených v průběhu výkladu, kótami, aby byl zaručen vhodný výsledek řešené úlohy.

Jinak je potěšitelné, že pravděpodobně vlivem nedobré situace v prvním díle, byly korektury v tomto dílu provedeny velmi pečlivě. Až na několik drobných nedopatření, s výjimkou nesrozumitelné věty v odst. 123.2, může být každý čtenář spokojen. Také obrázky, jinak velmi pěkně provedené, působí mnohem příznivěji než v prvním dílu, neboť tloušťka výsledných čar je přiměřenější síle popisu.

Tento druhý díl učebnice v koncepci spojení analytické geometrie s deskriptivní, je velmi pěknou a užitečnou knihou. Pro mnoho našich studentů bude však poměrně obtížnou učebnicí, zejména pak pro studenty při zaměstnání. Bude proto záležet na učiteli, aby provedl výběr v látce vzhledem ke studovanému směru a aby neustále sledoval práci studenta s knihou.

Karel Drábek, Praha

FESTBAND ZUM 70. GEBURSTAG VON ROLF NEVANLINNA. Herausgegeben von H. P. Künzi und A. Pfluger. Springer Verlag, Berlin, Heildelberg, New York, 1966, str. 149.

Ve dnech 4. až 6. 9. 1965 se konalo na universitě v Curychu mezinárodní kolokvium k oslavě 70-tých narozenin vynikajícího finského matematika R. Nevanlinny, tvůrce proslulé teorie rozložení hodnot meromorfních funkcí.

Recenzovaná kniha přináší text třinácti přednášek, přednesených na tomto kolokviu, doplněný Nevanlinnovým životopisem (H. P. Künzi a I. S. Louhivaara) a úplným seznamem jeho prací (I. S. Louhivaara). Přednášky se týkají buď přímo teorie funkcí komplexní proměnné nebo těch partií analýzy, v nichž se jejích metod užívá, nebo konečně některých partií funkcionální analýzy, do nichž R. Nevanlinna průkopnickým způsobem zasáhl. Všimněme si jen velmi stručně jejich problematiky. V přednášce L. V. Ahlforse „*Kleinovy grupy v rovině a v prostoru*“ se studují Kleinovy grupy Möbiusových transformací v prostoru v analogii pro lineární transformace v komplexní rovině. Přednáška má charakter badatelského programu a jsou tu odhaleny nečekané souvislosti studované teorie např. s kvasikonformními zobrazeními nebo s rovnicemi rovnováhy pro pružné deformace v prostoru. O. Lehto referuje v práci „*Homeomorfní řešení Beltramiho diferenciální rovnice*“ o některých nových metodách užitých k důkazu jejich existence a ke studiu jejich vlastností. K. Strebel podává v práci „*O kvadratických diferenciálech s uzavřenými trajektoriemi a extremálních kvasikonformních zobrazeních*“ novou metodu k důkazu Teichmüllerovy věty o struktuře extremálních kvasikonformních zobrazení kompaktních Riemannových ploch, která nepoužívá metod reálné analýzy (jako všechny dosud známé důkazy). Práce W. K. Haymana „*Nevanlinnova charakteristika meromorfních funkcí a jejich integrálů*“ je věnována studiu vztahů mezi řádem růstu Nevanlinnovy charakteristiky funkce a její derivace a konstrukci příkladů funkcí, připouštějících jisté výjimečné množiny. H. Wittich studuje v práci „*O charakterizaci lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty*“ pomocí Nevanlinnovy teorie rozložení hodnot tento problém: Je dán lineární diferenciální homogenní operátor n-tého řádu

$$L_n(w) = w^{(n)} + a_{n-1}(z)\, w^{(n-1)} + \ldots + a_1(z)\, w' + a_0(z)\, w\,, \quad a_0(z) \not\equiv 0\,,$$

s celistvými koeficienty. Jaké vlastnosti celistvých řešení rovnice $L_n(w) = 0$ zaručují, že L_n je operátor s konstantními koeficienty. V práci M. HEINSE „*Vlastnosti maximality Hardyho tříd*" jde zhruba o tento problém (problém je studován na Riemannových plochách, pro jednoduchost uvádíme zde formulaci pro jednotkový kruh): Je dána třída D funkcí z $L_p(\Gamma)$ (Γ — jednotková kružnice), s jistými algebraickými vlastnostmi, obsahující třídu $H_p^*(\Gamma)$ všech funkcí z $L_p(\Gamma)$, jež jsou hraničními hodnotami holomorfních funkcí z Hardyho třídy H_p. Za jakých podmínek o D platí $D = H_p^*(\Gamma)$? A. STEINER řeší v práci „*Jednostranná nekonečná Fourierova transformace a dvě třídy kvasianalytických funkcí*" tento problém: Budiž Δ (omezený či neomezný) interval na reálné ose, budiž $f \in L_2(\Delta)$. Jest najít nutné a postačující podmínky na f, aby f skoro všude na Δ splývala s hraniční hodnotou nějaké funkce $g(z)$ holomorfní v horní (dolní) polorovině, patřící do Hardyho třídy H_2 v horní (dolní) polorovině, a sestrojit pomocí f příslušnou funkci g. Práce A. HUBERA „*O vyjádření úplných otevřených ploch pomocí konformních metrik*" je shrnující referát o diferenciálně geometrických vlastnostech „v celém" ploch, studovaných pomocí funkčně teoretických metod. H. HUBER dokazuje v práci „*O konformním modulu jistých prstencových oblastí*" nerovnost, zjemňující nerovnost, kterou dokázali Pólya a Szegö. J. HERSCH odvozuje v práci „*Užití konformního zobrazení na isoperimetrické věty pro vlastní hodnoty*" pomocí metody „konformního prodloužení" isoperimetrické nerovnosti pro první vlastní číslo kmitající nehomogenní membrány v různých třídách rovinných oblastí. A. PFLUGER zobecňuje v práci „*Analytické funkce s operátorovými hodnotami a Juliovo lemma*" klasické Juliovo lemma na funkce komplexní proměnné jejichž hodnoty jsou operátory v daném Hilbertově prostoru H, a jež jsou holomorfní ve smyslu operátorové normy. V práci H. KELLERA „*O problémech vznikajících při zavadění diferencování v topologických vektorových prostorech*" je podán přehled o některých nových výsledcích teorie diferencování vektorových funkcí na lokálně konvexních topologických lineárních prostorech. V práci I. S. LOUHIVAARY „*Nové směry vývoje teorie lineárních prostorů s indefinitní bilineární formou*" jsou referovány některé nové výsledky z diferenciálně geometrické problematiky teorie Hilbertových prostorů, v nichž je dána indefinitní bilineární forma (nikoliv nutně hermitovská).

Všechny přednášky mají vysokou vědeckou úroveň a ve většině z nich jsou formulovány neřešené problémy, dávající podnět k dalšímu bádání. Kniha je tak důstojným darem velkému matematikovi k jeho životnímu jubileu.

Jaroslav Fuka, Praha

F. Tölke: PRAKTISCHE FUNKTIONENLEHRE, Dritter Band, Jacobische elliptische Funktionen, Legendresche Normalintegrale und spezielle Weierstrassche Zeta- und Sigma-Funktionen, Springer Verlag, Berlin, Heildelberg, New York, 1967; str. 180, 95 obr.

V tomto dílu Tölkeho kompendia je studováno 12 Jacobiho eliptických funkcí a jejich 6 logaritmických derivací, eliptické integrály prvního až třetího druhu v Legendreově a Jacobiho tvaru a konečně Weierstrassovy ζ — funkce a σ — funkce. Kniha představuje patrně ojedinělý podrobný soubor nejrůznějších vzorců pro tyto funkce a vztahy mezi nimi. Je koncipována s ohledem na požadavky výpočtové a konstrukční techniky a fyziky, kde se těchto funkcí používá. Představa, že by existovala formule pro tyto funkce, která má aplikaci ve shora uvedených vědách a není obsažena v některým ze vzorců 776 až 1082 knihy (z nichž každý se většinou skládá zhruba z 10 formulí) se zdá recenzentu absurdní. Kniha je skvěla graficky vypravena a 95 dokonalých obrázků přibližuje čtenáři průběh těchto funkcí.

Jaroslav Fuka, Praha

ZPRÁVY

PROFESOR JAN BÍLEK ŠEDESÁTNÍKEM

KAREL KARTÁK a VÁCLAV VILHELM, Praha

Dne 15. 5. 1967 se dožil šedesáti let vedoucí katedry matematiky na Vysoké škole chemicko-technologické v Praze prof. RNDr. JAN BÍLEK.

Profesor Bílek se narodil ve Žďáru u Mnichova Hradiště. V letech 1919–1926 studoval na reálce v Turnově. Po maturitě vstoupil na přírodovědeckou fakultu Karlovy university, kde studoval matematiku a fyziku. Po ukončení studií v r. 1931 působil v letech 1931–1935 pro nedostatek míst jako učitel na obecných a měšťanských školách; zde také vypracoval svou doktorskou disertační práci „Degenerace Bertiniho involuce". Teprve od roku 1935 pracoval jako středoškolský profesor, a to na gymnasiích v Plzni, Karlových Varech a Praze.

V roce 1946 začal působit na VŠCHT v Praze, a to nejprve jako asistent, od r. 1952 jako docent, a od r. 1959 jako profesor matematiky.

Na vědeckou dráhu vešel prof. Bílek jako žák akademika BYDŽOVSKÉHO. O tom dobře svědčí i jeho práce [1], [2], [3], [5], [6], psané v duchu italské školy algebraické geometrie. Jejich společným tématem je studium rovinných Cremonových transformací. Výjimku tvoří jen práce [3], která ukazuje, jak lze jednoduše odvodit některé základní vlastnosti kubické plochy pomocí jisté involutorní prostorové Cremonovy transformace.

Rovinných Cremonových transformací lze často výhodně použít při studiu rovinných algebraických křivek. Na této myšlence spočívá Bílkova práce [1] o sextikách s dvojnásobnými body. O sextikách s dvojnásobnými body v obecné poloze pojednal B. Bydžovský (Rozpravy II. tř. Č. ak. *21* (1912), č. 42, 1–12) a jeho výsledků použil B. MACHYTKA (Čas. pěst. mat. fys. *58* (1929), 219–225) při studiu Bertiniho involuce určené komplexem S_6^3 sextik majících v daných osmi bodech $A_1, \ldots, A_8$ obecné dvojnásobné body. Ve své práci [1] postupuje prof. Bílek obráceně: nezávisle na teorii sextik studuje vlastnosti Bertiniho involuce a jejích degenerací při speciálních volbách base $A_1, \ldots, A_8$, a odtud pak už jednoduchým způsobem dostává řadu nových zajímavých vlastností rovinných sextik, jejichž dvojnásobné body jsou v některé speciální poloze.

V pracích [2], [5], [6] vyšetřuje prof. Bílek určité speciální involutorní rovinné Cremonovy transformace. V práci [2] je to transformace vytvořená svazkem S_2^1 kuželoseček a svazkem S_3^1 kubik, které mají společné čtyři body base. Bodu P pak odpovídá bod P', který je zbývajícím průsečíkem kuželosečky svazku S_2^1 a kubiky svazku S_3^1 jdoucími bodem P. Práce [5] je věnována studiu involutorní transformace 14. stupně určené sítí S_4^2 eliptických kvartik procházejících danými osmi body, z nichž dva jsou pro každou kvartiku sítě dvojnásobnými body. Pomocí svazku kubik, do jehož base patří zmíněných osm bodů, je ukázáno, že všechny kvartiky sítě procházející daným bodem P procházejí dalším společným bodem P'; bod P' je pak bodem odpovídajícím bodu P ve zkoumané transformaci, o níž je ukázáno, že ji lze také vytvořit z Geiserovy involuce kvadratickou transformací. Analogicky v práci [6] uvažuje prof. Bílek komplex S_4^3 kvartik jdoucích danými devíti body base svazku kubik, přičemž jeden z těchto bodů je pro každou kvartiku komplexu dvojnásobným, ostatní jednoduchými body. Stejnou úvahou jako v práci [5] se zjistí, že všechny kvartiky z S_4^3 jdoucí daným bodem P procházejí kromě bodů base ještě dalším společným bodem P'. Takto sestrojená involutorní transformace je 5. stupně; při speciální volbě bodů base přejde v Jonquièresovu involuci.

Potřeba řádně fundovat rozsáhlé výsledky klasické algebraické geometrie vedla koncem třicátých let ke vpádu abstraktní algebry do této oblasti; to přineslo prudký další rozvoj algebraické geometrie. Práce [4] a [7] patří už do tohoto abstraktního směru algebraické geometrie. V nich prof. Bílek vyšetřuje algebraickou korespondenci T mezi dvěma varietami V a W nad tělesem k jakožto podvarietu součinu $V \times W$ takovou, že její projekce na V resp. W je opět V resp. W. Zobecněním metody, jíž užil A. Weil ke studiu biracionálních korespondencí, ukazuje, že známé základní vlastnosti těchto algebraických korespondencí mezi varietami definovanými nad tělesem charakteristiky 0 (např. princip sčítání konstant) lze přenést na algebraické korespondence mezi varietami nad tělesem libovolné charakteristiky.

Spojení algebraických metod s metodami topologickými přineslo algebraické geometrii v současné době další rozmach a bylo takto dosaženo nových znamenitých výsledků (např. rozřešení klasického problému singularit algebraické variety). Ani zde nezůstává prof. Bílek stranou. Ve svém semináři o algebraické geometrii, který obětavě a úspěšně vede už řadu let, studuje tyto metody a dává tak účastníkům semináře dobrou příležitost se seznámit se současným stavem této discipliny.

O svých výsledcích i o jiné problematice algebraické geometrie proslovil prof. Bílek řadu přednášek jak u nás, tak i v zahraničí (Berlín, Halle, Merseburg).

Vedle činnosti vědecké věnuje prof. Bílek mnoho zájmu a energie činnosti pedagogické. Je především nadšeným a obětavým učitelem a patří k těm vysokoškolským pracovníkům, kteří učí opravdu rádi. Pozorně sleduje současné diskuse o modernizaci výuky matematiky na vysokých školách technického směru a snaží se o uplatnění nových koncepcí i při výuce matematiky na VŠCHT. Prof. Bílek je členem komise pro vyučování matematice na technikách při JČMF a měl na dvou konferencích JČMF věnovaných této problematice (Žilina 1965, Seč 1966) zajímavé referáty.

Výsledkem dlouholeté učitelské činnosti prof. Bílka je, kromě spoluautorství na Aritmetice pro střední školy, také řada vysokoškolských skript, užívaných i na jiných vysokých školách než VŠCHT. Jejich charakteristickým rysem je především snaha řádně motivovat smysl vykládaných teorií, a na mnoha příkladech a cvičeních dát studentům možnost látku ovládnout.

Životní jubileum zastihuje prof. Bílka v plné svěžesti. Přejeme mu – jistě i jménem jeho přátel, spolupracovníků a naší matematické veřejnosti – aby si svůj nynější životní elán plně zachoval do dalších let k prospěchu našeho školství i matematiky.

SEZNAM PUBLIKACÍ PROF. BÍLKA

A. VĚDECKÉ PRÁCE

[1] Některé vlastnosti sextik s dvojnásobnými body odvozené pomocí Cremonových transformací. Věstník Král. č. spol. nauk 1947, čís. *5*, 1–10.

[2] O jedné rovinné involuci J_{11} 2. třídy a její degeneraci. Čas. pěst. mat. fys. *73* (1948), 17–30.

[3] O jedné kubické involuci v prostoru a jejím použití k stanovení počtu přímek na obecné kubické ploše. Čas. pěst. mat. fys. *73* (1948), D 37–D 42.

[4] Algebraické korespondence na abstraktních varietách (výtah sdělení předneseného na sjezdu čs. a polských matematiků v r. 1949). Čas. pěst. mat. fys. *74* (1949), 247–249.

[5] Jedna Cremonova involuce 14. stupně a její degenerace. Čas. pěst. mat. fys. *75* (1950), D 282–D 287.

[6] O jednom vytvoření Jonquièresovy involuce 5. stupně. Čas. pěst. mat. *76* (1951), 141–144.

[7] Algebraické korespondence. Čas. pěst. mat. *83* (1958), 33–40.

B. OSTATNÍ PUBLIKACE

[1] Aritmetika I–IV pro střední školy (jako spoluautor). Praha 1949.

[2] Matematika I., 1. část (skripta); 1. vydání 1950, 2. přepracované 1960.

[3] B. Segre: Lezioni di geometria moderna (recense). Čas. pěst. mat. fys. *75* (1950), D 203–D 208.

[4] Matematika I., 2. část (skripta); 1951.

[5] Příklady z matematiky (skripta); 1. vydání 1955, 2. přepracované 1960 (společně s J. Míčkou a O. Schmidtem).

[6] Úvod do analytické geometrie (skripta); 1956.

[7] Akademik B. Bydžovský osmdesátníkem. Čas. pěst. mat. *85* (1960), 226–227.

[8] Vektorové prostory I. Sborník VŠCHT, oddíl fakulty anorg. a org. technologie *4*, část 2 (1960), 411–435.

[9] Základy vektorové analýzy a tenzorového počtu (skripta); 1964 (společně s K. Kartákem).

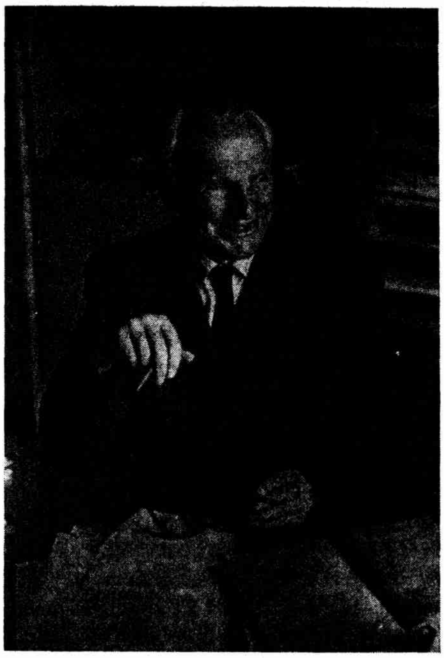
[10] Matematika I., 3. část (skripta); 1965.

[11] Základy teorie funkcí komplexní proměnné (skripta); 1966 (společně s O. Schmidtem).

PROF. DR. MILOSLAV HAMPL, ČLEN KORESPONDENT ČSAV, SEDMDESÁTNÍKEM

IVO BABUŠKA, Praha

Snadno a často byste mohli vidět v létě i za studené zimy, na slunci i za sněhu jet červenou oktavii, řízenou elegantním šedovlasým pánem, na silnici Praha – Plzeň. Téhož šedovlasého pána byste mohli pak vidět jet na mopedu po polních cestách na Rokycansku, nebo sekat dříví před malým domkem nedaleko Mirošova u Rokycan. Přivstanete-li si, mohli byste vidět za ranního šera tohoto šedovlasého pána, jak se s rybářským prutem brouzdá studenou vodou. (Přátelé tohoto rybáře vědí, že občas užije studené vody potoka podstatně více než zamýšlel.) Těžko uvěříte, že tento šedovlasý elegantní pán může být sedmdesátník prof. dr. MILOSLAV HAMPL. Ale nemýlíte se. Je to prof. dr. M. Hampl, doktor fyzikálně matematických věd, laureát státní ceny Klementa Gottwalda, zakladatel čs. aplikované matematiky v průmyslu, učitel a rádce mnoha našich vědeckých pracovníků. Prof. dr. M. Hampl se narodil 10. srpna 1897 v Netolicích v jižních Čechách. Gymnasium studoval v Českých Budějovicích, kde v r. 1915 maturoval. Pak odešel z jižních Čech do Prahy, jak se ukázalo později, na trvalo. Atmosféru jižních Čech, bodrost a houževnatost včetně trochy toho známého jihočeského patriotismu vyčtete však při každém setkání s prof. Hamplem dodnes.



V Praze nejprve studoval v letech 1915 – 1920 na Karlově universitě obor matematiky a fyziky. Tím začal jeho styk s vysokými školami, který trvá dosud. Po absolvování university působil M. Hampl jako asistent na Ústavu matematiky na ČVUT. V roce 1930 a 1931 se habilitoval na vysoké škole strojního a elektrotechnického inženýrství a na vysoké škole inženýrského stavitelství. V roce 1963 byl jmenován presidentem republiky profesorem pro obor aplikované matematiky. Na Matematicko-fyzikální fakultě Karlovy university pracuje dosud.

Matematika byla a je prof. Hamplovi povoláním, aplikovaná matematika jeho láskou.

Již brzy po ukončení studia matematiky na KU rozhodl se studovat strojní a elektroinženýrskou fakultu ČVUT, kde složil I. státní zkoušku. Stal se tak matematikem, který rozuměl inženýrským problémům a který uměl používat moderní matematiky k jejich řešení. V r. 1930, když bylo založeno matematické oddělení Škodových závodů, stal se nejprve jeho pracovníkem, později jeho vedoucím. Již na začátku svého působení ve Škodových závodech ukázal, jak vysoce užitečné a efektivní může být matematické pracoviště velkého průmyslového podniku. Po znárodnění čs. průmyslu byla působnost matematického oddělení Škodových závodů vedeného prof. Hamplem rozšířena na celé čs. těžké strojírenství. Toto oddělení pod názvem Teoretický výzkum pracuje dnes v rámci Státního výzkumného ústavu pro stavbu strojů.

Je zcela přirozené, že prof. Hampl jako jeden z prvých u nás pochopil význam moderní výpočtové techniky. Stal se jejím propagátorem a je typické, že jeho oddělení bylo jako jedno z prvých pracovišť v ČSSR vybaveno samočinným počítačem.

Prof. Hampl stal se naším uznávaným nestorem aplikované matematiky v průmyslu. Vynikající činnost prof. Hampla byla po zásluze mnohokrát vysoce oceněna. Uvedu jen některá. V r. 1955 byl poctěn státní cenou Klementa Gottwalda. V r. 1956 mu byla bez obhajoby udělena hodnost doktora fyzikálně matematických věd, v r. 1962 byl zvolen členem korespondentem ČSAV a další.

Nelze v krátkosti zhodnotit vhodným způsobem vynikající činnost prof. Hampla*) Uvedených několik řádek, doufám, dostatečně podtrhuje a charakterizuje činnost prof. Hampla, milého a taktního člověka, člověka s velkým Č, kterého si všichni jeho přátelé, spolupracovníci a ti, kteří s ním přišli do styku, vysoce váží.

Přejeme prof. Hamplovi do dalších let mnoho zdraví a pohody.

ŽIVOTNÍ JUBILEUM PROF. DR. WACŁAWA SIERPIŃSKÉHO

Letos se dožil vzácného životního jubilea slavný polský matematik prof. dr. WACŁAW SIERPIŃSKI, vicepresident Polské akademie věd a profesor varšavské university, který má úzké vztahy i k naší československé matematice. Dne 14. března 1967 mu bylo 85 let. Jubilant je znám na celém světě a dostalo se mu často významných vědeckých poct a titulů. My si připomínáme, že je čestným doktorem Karlovy university v Praze a Československá akademie věd jej počítá mezi své zahraniční členy.

Jménem čs. matematiků přejeme prof. dr. W. Sierpińskému pevné zdraví a další úspěchy v jeho práci.

Jiří Sedláček, Praha

EQUADIFF II

ČESKOSLOVENSKÁ KONFERENCE O DIFERENCIÁLNÍCH ROVNICÍCH A JEJICH APLIKACÍCH

Ve dnech 1.—7. září 1966 byla v Bratislavě Československá konference o diferenciálních rovnicích a jejich aplikacích — EQUADIFF II. Konferenci uspořádala Katedra matematické analýzy Přírodovědecké fakulty Komenského university při příležitosti 500. výročí založení Academie

*) Srv. také: Doc. Dr. M. Hampl šedesátníkem, Apl. mat. *3* (1958), str. 75—78 a K sedmdesátým narozeninám prof. Dr. Miloslava Hampla, Dr. Sc., člena korespondenta ČSAV, Apl. mat. *12* (1967), str. 324—326. V prvém z těchto článků je uveden seznam prací prof. Hampla s jejich stručným rozborem.

Istropolitany a 25. výročí založení Přírodovědecké fakulty UK. Konference se zúčastnilo kolem 300 matematiků a odborníků z praxe, z toho asi polovina účastníků byla ze zahraničí. Jednání konference probíhala v plénu a v sekcích. V plénu bylo předneseno 13 hlavních referátů, z toho 6 domácími a 7 zahraničními odborníky. Byly to tyto referáty:

I. Babuška, Praha: O problémech optimalizace numerických metod.

O. Borůvka, Brno: Algebraické elementy v teorii transformací oscilatorických lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu.

J. H. Bramble, College Park: O konvergenci diferenčních schemat pro klasické a slabé řešení Dirichletovy úlohy.

F. E. Browder, Chicago: Nelineární parciální diferenciální rovnice a funkcionální analýza.

E. A. Coddington, Los Angeles: Formálně normální obyčejné diferenciální operátory.

R. Conti, Firenze: Úlohy v lineární teorii regulace.

M. Greguš, Bratislava: O lineárních diferenciálních rovnicích vyšších lichých řádů.

J. Kurzweil, Praha: Invariantní variety diferenciálních soustav.

J. Nečas, Praha: O existenci a regulárnosti řešení nelineárních rovnic eliptického typu.

S. M. Nikolskij, Moskva: Některé okrajové úlohy pro rovnice se silnou singularitou.

G. Stampacchia, Pisa: Prostory $L^{p,\lambda}$ a aplikace na teorii parciálních diferenciálních rovnic.

M. Švec, Bratislava: Vyšetřování řešení diferenciální rovnice na neohraničeném intervalu a věta o pevném bodě.

T. Ważewski, Kraków: Několik zobecnění Arzelova lemmatu a jejich aplikace.

V těchto přednáškách byly zahrnuty nejen výsledky autorů, ale byl též uveden přehled výsledků, kterých bylo dosaženo v této problematice v posledních letech.

Kromě toho v každé sekci na začátku jednání přednesl význačný domácí nebo zahraniční matematik půlhodinový referát. Byly to tyto referáty:

A. D. Alexandrov, Novosibirsk: Obecná metoda majorizace řešení Dirichletovy úlohy.

G. Fichera, Roma: Struktura Greenových operátorů a odhady pro odpovídající vlastní čísla.

O. Hájek, Praha: Axiomatická teorie diferenciálních rovnic.

A. Halanay, Bucuresti: Invariantní variety diskrétních soustav.

H. Hornich, Wien: Obyčejné lineární diferenciální rovnice vyšších řádů.

Z. Hustý, Brno: Transformace homogenních lineárních diferenciálních rovnic *n*-tého řádu.

O. A. Ladyženskaja, Leningrad: O lineárních a kvasilineárních rovnicích parabolického typu.

T. Popoviciu, Cluj: O jistých funkcích vyhovujících diferenciální nerovnosti.

M. Práger, *E. Vitásek*, Praha: Stabilita numerických procesů.

M. Ráb, Brno: Asymptotické rozvoje řešení lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu.

V. Šeda, Bratislava: Aplikace Greenovy funkce v teorii diferenciálních rovnic.

O. Vejvoda, Praha: Nejnovější výsledky týkající se periodických řešení nelineárních parciálních diferenciálních rovnic.

I. Vrkoč, Praha: Rozšíření metody průměru na stochastické diferenciální rovnice.

M. Zlámal, Brno: Numerické řešení a odhad chyby pro eliptickou okrajovou úlohu.

Všechny hlavní a půlhodinové referáty vyjdou tiskem ve zvláštním sborníku konference, jako mimořádné číslo Acta Facultatis Rerum Naturalium Universitatis Comenianae.

Každý účastník konference měl možnost přednést svoje výsledky v jedné ze tří sekcí:

1. obyčejné diferenciální rovnice,
2. parciální diferenciální rovnice,
3. aplikace a numerické metody.

Pro velký zájem o přednášky, musely sekce probíhat paralélně.

Ve čtvrtek 1. září 1966 se konal v hotelu Carlton přátelský seznamovací večer pro účastníky konference. V sobotu 3. září 1966 se převážná většina účastníků zúčastnila jednoho ze tří celodenních výletů. Také pro doprovázející osoby připravil organisační výbor řadu výletů a exkursí.

Na konferenci EQUADIFF II byly předneseny nejnovější výsledky dosažené československými i zahraničními matematiky pracujícími v oboru diferenciálních rovnic a jejich aplikací. Konference proběhla ve velmi srdečném a přátelském duchu a zájem a početná účast zahraničních matematiků jednoznačně svědčí o jejím úspěchu.

Redakce

VĚDECKÁ KONFERENCE MATEMATICKÉ SPOLEČNOSTI NDR

Ve dnech 13. až 18. února 1967 se konala v Berlíně IV. výroční vědecká konference Matematické společnosti Německé demokratické republiky. Konference se zúčastnilo asi 800 matematiků nejen z NDR, ale i z NSR, Švýcarska, Sovětského svazu, Maďarska, Polska, Rumunska a Československa.

Na konferenci bylo předneseno asi 15 širších referátů, dále probíhala jednání v jednotlivých sekcích (algebra, matematická analýza, geometrie, mechanika, numerická matematika, vyučování a vzdělání, počet pravděpodobnosti a matematická statistika, aplikace matematiky v ekonomii, kybernetika, biometrie, matematická logika, matematická fyzika), kde byla přednesena stručná vědecká sdělení.

Z československých matematiků měl hlavní přednášku *F. Nožička* na téma „O význačných vztažných systémech v Minkowskiho prostoru, ostatní přednesli tato sdělení:

L. Boček: Globální diferenciální geometrie podvariet E_n.
K. Havlíček: O jedné geometrické interpretaci tetraedrické grupy.
K. Chobot: Statický význam metod řešení algebraických lineárních soustav rovnic.
F. Krňan: Určení Jordanova tvaru matice bez vyšetřování elementárních dělitelů.
J. Mikulčák: Projektor Belsazar ve vyučování matematice.
J. Mikulčák: Poměr není zlomek.
Z. Nádeník: O globální geometrii kanálových ploch.
B. Pondělíček: Průměr grafu pologrupy.

Leo Boček, Praha

JMENOVÁNÍ

Ministr školství a kultury jmenoval s účinností od 1. června 1966 zást. doc. Miladu Švábovou docentkou pro obor metodiky matematiky a s účinností od 1. srpna 1966 RNDr. Bedřicha Pondělíčka CSc., RNDr. Ivo Rosenberga CSc., a zást. doc. RNDr. Sylvu Šantavou CSc. docenty pro obor matematiky.

Redakce

OBHAJOBY A DISERTAČNÍ PRÁCE DOKTORŮ A KANDIDÁTŮ VĚD

Před komisí pro obhajoby doktorských disertačních prací obhájili dne 12. ledna 1967 RNDr. Ladislav Mišík CSc. práci na téma: „O Darbouxovej vlastnosti funkcií a o niektorych triedach funkcií" a RNDr. Petr Vopěnka CSc. práci na téma: „Nedokazatelnost hypotézy kontinua V Gödel-Bernaysově teorii množin".

Před komisí pro obhajoby kandidátských disertačních prací obhájili dne 12. ledna 1967 Karel Karták práci na téma: „Zobecnění Caratheodoryho teorie diferenciálních rovnic" a dne 16. února 1967 Miroslav Maňas práci na téma: „Minimum nekonvexní kvadratické formy na konvexním polyedru" a Jitka Žáčková práci na téma: „Dva příspěvky k matematickému programování".

Redakce

Úlohy a problémy:

Úloha č. 1 (*F. Štěpánek*) 356
Řešení úlohy č. 2 z roč. *81* (1956), 247. (*F. Štěpánek*) 356

Recense:

G. Pickert: Ebene Inzidenzgeometrie (*V. Havel*) 360
R. Artzy: Linear geometry (*V. Havel*) 361
M. E. Munroe: Introductory real analysis (*B. Novák*) 362
R. Piska, V. Medek: Deskriptivní geometrie II (*K. Drábek*) 363
Festband zum 70. Geburstag von Rolf Nevanlinna (*J. Fuka*) 364
F. Tölke: Praktische Funktionenlehre (*J. Fuka*) 365

Zprávy:

Profesor Jan Bílek šedesátníkem (*K. Karták, V. Vilhelm*) 366
Seznam publikací profesora Bílka 368
Profesor dr. Miloslav Hampl, člen korespondent ČSAV, sedmdesátníkem (*I. Babuška*) 369
Životní jubileum prof. dr. Wacława Sierpińského (*J. Sedláček*) 370
Equadiff II — Československá konference o diferenciálních rovnicích a jejich aplikacích 370
Další zprávy 372

Časopis pro pěstování matematiky. Ročník 92 (1967). — Vydává Československá akademie věd v Academii, nakladatelství Československé akademie věd, Vodičkova 40, Praha 1 — Nové Město, dod. pú 1. — Redakce: Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1, dod. pú 1, telefon 226601-03. — Vychází čtvrtletně. — Roční předplatné Kčs 48,—, cena jednotl. sešitu 12,— Kčs (cena pro Československo); $ 8,—; £ 2/17/ — (cena v devisách). — Tiskne Knihtisk, n. p., závod 5, Rudé armády 171, Praha 8 — Libeň-Kobylisy, dod. pú 8. — Rozšiřuje Poštovní novinová služba, objednávky a předplatné přijímá PNS — Ústřední expedice tisku, administrace odborného tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Lze také objednat u každé pošty nebo doručovatele. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — Ústřední expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1.

Toto číslo vyšlo v srpnu 1967

A-05*71642