Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1966

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0091|log148

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

3

91

ACADEMIA

PRAHA

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 91 • Č. 3 • STR. 241—370 • PRAHA 22. 8. 1966

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(*Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky"*)

SVAZEK 91 (1966)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd

Redakční rada:

Vedoucí redaktor: J. Kurzweil, *výkonný redaktor:* Vl. Doležal

I. Babuška, J. Bečvář, I. Černý, J. Fuka, J. Mařík, L. Mišík, Z. Nádeník, J. Sedláček, M. Sova, K. Svoboda, A. Urban, V. Vilhelm, K. Winkelbauer, F. Zítek

Redakce:

Matematický ústav Československé akademie věd
Praha 1, Žitná 25

OBSAH

Články:

Úlohy a problémy:

Recense:

Zprávy:

ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В НАСТОЯЩИМ НОМЕРЕ

(Эти характеристики позволено репродуцировать)

LADISLAV BERAN, Praha: *The investigation of the existence of maximal subgroups of some simple groups.* (Исследование существования максимальных подгрупп некоторых простых групп.) Čas. pěst. mat. *91* (1966), 185 до 193 (Оригинальная статья.)

Статья посвещена изучению алтернирующих групп $\mathfrak{A}(\mathfrak{M})$, унимодулярных групп $PSL_n(k)$, проективных симплектических групп $PSp_n(k)$, фактор-гуппы группы O_n^+ по ее центру и в дальнейшем исследованию простых групп построенных из этих групп. Описывается класс максимальных подгрупп этих групп.

NADĚŽDA POLÁKOVÁ, Brno: *Systémy s vlastností α.* (Системы со свойством α.) Čas. pěst. mat. *91* (1966), 205–216. (Оригинальная статья.)

В статье исследуются системы паралельных n-кубов, выпуклых областей и некоторые разложения E_n в выпуклые многогранники.

JIŘÍ FIALA, Praha: *A note on the integrals involving product of Hermite's polynomials.* (Заметка об интегралах содержащих произведения полиномов Эрмита.) Čas. pěst. mat. *91* (1966), 217–220. (Оригинальная статья.)

В этой заметке предлагается метод для вычисления некоторых интегралов, содержащих произведение полиномов Эрмита. Вычисление основано на интегральном представлении этих полиномов.

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha: *O kostrách konečných grafů.* (Об основах конечных графов.) Čas. pěst. mat. *91* (1966), 221–227. (Оригинальная статья.)

Статья содержит четыре теоремы о числе основ конечного неориентированного графа и одну теорему о числе основ взаимо двойственных плоских мултиграфов.

VÁCLAV HAVEL, Brno: *On associated partitions.* (Об ассоциированных разложениях.) Čas. pěst. mat. *91* (1966), 241–245. (Оригинальная статья.)

Если $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$-множества, S-разложение в $\mathscr{A}$ и T-разложение в $\mathscr{B}$, то можно естественным способом определить ассоциированное разложение soc $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ в $S \times T$. В статье изучаются основные свойства верхних и нижних граней систем таких разложений.

VÁCLAV HAVEL, Brno: *Partitions in cartesian systems.* (Разложения в декартовых структурах.) Čas. pěst. mat. *91* (1966), 246–253. (Оригинальная статья.)

Обобщением алгебраической операции на данном множестве является сырьекция вида $\prod S_\alpha \to S_0$, где S_α, S_0-непустые множества. К таким обобщенным операциям приложены основания теории разложения множеств О. Борувки.

SUMMARIES OF ARTICLES PUBLISHED IN THIS ISSUE

(Publication of these summaries is permitted)

NADĚŽDA POLÁKOVÁ, Brno: *Systémy s vlastností α.* (Systems with property α.) Čas. pěst. mat. *91* (1966), 205–216. (Original paper.)

In this paper systems of paralell n-cubes, of convex domains and certain decompositions of E_n into convex polyhedrons are studied.

JIŘÍ FIALA, Praha: *A note on the integrals involving product of Hermite's polynomials.* Čas. pěst. mat. *91* (1966), 217–220. (Original paper.)

In this note a method for computing certain integrals involving the product of Hermite's polynomials is given. The method is based on the integral representation of these polynomials.

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha: *O kostrách konečných grafů.* (On the spanning trees of finite graphs.) Čas. pěst. mat. *91* (1966), 221–227. (Original paper.)

This paper contains four theorems on a number of spanning trees of finite non-directed graphs and a theorem on a number of spanning trees of mutually dual planar multigraphs.

VÁCLAV HAVEL, Brno: *On associated partitions.* Čas. pěst. mat. *91* (1966), 241–245. (Original paper.)

If $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, are decompositions of sets S, T respectively, then there is a naturally defined associated decomposition soc $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ of $S \times T$. In the paper there are studied the basic properties of l.n. and g.l. bounds of systems of such decompositions.

VÁCLAV HAVEL, Brno: *Partitions in cartesian systems.* Čas. pěst. mat. *91* (1966), 246–253. (Original paper.)

The generalization of an algebraic operation on a given set is the surjection in form of $\prod_{\alpha \in \Gamma} S_\alpha \to S_0$, where S_α, S_0 are non-void sets. Borůvka's theory of decomposition of sets is applied to such generalized operations.

VLADIMÍR DOLEŽAL, Praha, JAROMÍR HRONÍK, Brno: *O zobecněné Clairautově diferenciálni rovnici.* (Sur la généralisation de l'équation différentielle de Clairaut.) Čas. pěst. mat. *91* (1966), 254–260. (Mémoire scientifique original.)

Le travail présent étudie les propriétés de l'equation differentielle $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} (n!/k!) \, x^k y^{(k)} = f(y^{(n)})$.

VÁCLAV METELKA, Liberec: *Über ebene Konfigurationen* $(12_4, 16_3)$, *die mit einer irreduziblen Kurve dritter Ordnung inzidieren.* Čas. pěst. mat. *91* (1966), 261–307. (Originalartikel.)

Der Artikel bringt den Beweis der Existenz von genau acht ebenen Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ mit den Punkten auf einer irreduziblen kubischen Kurve, sowie die Berechnung ihrer Schemen und die Realisation mit Hilfe von Punkten und Geraden auf der projektiven Ebene über dem Körper der komplexen Zahlen.

JAROSLAV ZÁHORA, Brno: *Dotykové nomogramy s kružnicemi.* (Tangent nomograms with circles.) Čas. pěst. mat. *91* (1966), 308–319. (Original paper.)

The paper presents the form of the relation $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, represented by a tangent nomogram with three general systems of circles. As special cases there are presented some tangent nomograms with two systems of circles and one scale, and nomograms with one system of circles and two scales. The paper also shows the possibility of representing the Soreau canonic form and the canonic form of the 5th nomographic order, the Cauchy canonic form and the canonic form of the 3rd nomographic order by means of tangent nomograms with circles.

JIŘÍ VESELÝ, Praha: *O jedné smíšené okrajové úloze teorie analytických funkcí.* (On the mixed boundary problem of the theory of analytic functions.) Čas. pěst. mat. *91* (1966), 320–336. (Original paper.)

The paper is concerned with the following problem: Given a multiply-connected domain D with boundary $L = L' \cup L''$, where L', L'' are disjoint closed sets consisting of Jordan curves. To any given continuous real-valued function G on L determine a holomorphic function Φ on D and a real-valued h on L such that h is constant on each component of L and that $\lim_{z\to\zeta, z\in D} \operatorname{Re} \Phi(z) = G(\zeta) + h(\zeta)$ for $\zeta \in L'$, $\lim_{z\to\zeta, z\in D} \operatorname{Im} \Phi(z) = G(\zeta) + h(\zeta)$ for $\zeta \in L''$. Questions of existence and unicity are treated. For a quite extensive class of domains D it is shown that Φ may be expressed at $\Phi(z) = (\pi i)^{-1} \int_{L'} F(\zeta)/(\zeta - z)\, d\zeta + \pi^{-1} \int_{L''} F(\zeta)/(\zeta - z)\, d\zeta$ with F a suitaible continuous function on L.

PAVOL BRUNOVSKÝ, Bratislava: *A "bang-bang" principle in the problem of ε-stabilization of linear control systems.* Čas. pěst. mat. *91* (1966), 344–351. (Original paper.)

Such theorem is proved, a corollary of which may be in analogy to a similar statement in the time optimal control problem called as "bang-bang" principle: For every ε-stabilizing control there exists a "bang-bang" ε-stabilizing control which is in a certain sense not worse. In particular if a best ε-stabilizing control exists, then there exists a best ε-stabilizing control which is "bang-bang".

PETR HÁJEK, Praha: *Generalized interpretability in terms of models — Note to a paper of R. Montague.* Čas. pěst. mat. *91* (1966), 352–357. (Original paper.)

Montague defined semantically the syntactic concepts of interpretability and relative interpretability of an axiomatic theory in a finitely axiomatizable theory. Here there are given analogous semantic definitions of the more general concept of parametric interpretability (this concept has been employed in several relative consistency proofs). An example is given of finitely axiomatizable theories Φ, Ψ such that Ψ is parametrically interpretable but not relatively interpretable in Φ.

VLADIMÍR DOLEŽAL, Praha, JAROMÍR HRONÍK, Brno: *O zobecněné Clairautově diferenciální rovnici.* (Об обобщенном дифференцальном уравнении Клеро.) Čas. pěst. mat. *91* (1966), 254—260. (Оригинальная статья.)

В работе изучаются свойства дифференциального уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} (n!/k!)\, x^k y^{(k)} = f(y^{(n)})\,.$$

VÁCLAV METELKA, Liberec: *Über ebene Konfigurationen* $(12_4, 16_3)$, *die mit einer irreduziblen Kurve dritter Ordnung inzidieren.* (Плоские конфигурации $(12_4, 16_3)$, которые инцидентны с неприводимой кривой третьего порядка.) Čas. pěst. mat. *91* (1966), 261—307. (Оригинальная статья.)

В статье доказано существование точно восьми плоских конфигураций $(12_4, 16_3)$ с точками на неприводимой кривой третьего порядка; одновременно произведено вычисление их схем и их представление при помощи точек и прямых в проективной плоскости над полем комплексных чисел.

JAROSLAV ZÁHORA, Brno: *Dotykové nomogramy s kružnicemi.* (Тангенциальные номограммы с окружностями.) Čas. pěst. mat. *91* (1966), 308 до 319. (Оригинальная статья.)

В работе выведен вид уравнения $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, которое изображено тангенциальной номограммой с тремя общими системами окружностей. В качестве специальных случаев приведены некоторые тангенциальные номограммы с двумя системами окружностей и с одной шкалой и номограммы с одной системой окружностей и с двумя шкалами. Показаны также возможности изображения уравнений канонической формы Соро пятого номографического порядка, канонической формы Коши и канонической формы третьего номографического порядка тангенциальными номограммами с окружностями.

JIŘÍ VESELÝ, Praha: *O jedné smíšené okrajové úloze teorie analytických funkcí.* (Об одной смешанной краевой задаче теории аналитических функций.) Čas. pěst. mat. *91* (1966), 320—336. (Оригинальная статья.)

В статье решается следующая задача: пусть D многосвязная область с контуром $L = L' \cup L''$, где L', L'' непересекающиеся замкнутые множества, образованные кривыми Жордана. Требуется к заданной непрерывной действительной функции G на L установить голоморфную функцию Φ в D и действительную функцию h на L так, чтобы h было постоянным на любой компоненте множества L и чтобы $\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D}} \operatorname{Re} \Phi(z) = G(\zeta) + h(\zeta)$ для $\zeta \in L'$, $\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D}} \operatorname{Im} \Phi(z) = G(\zeta) + h(\zeta)$ для $\zeta \in L''$. Решаются вопросы существования и единственности решения этой задачи и для достаточно широкого класса областей D доказывается, что Φ можно выразить в виде $\Phi(z) = (\pi i)^{-1} \int_{L'} F(\zeta)/(\zeta - z)\, d\zeta + \pi^{-1} \int_{L''} F(\zeta)/(\zeta - z)\, d\zeta$ с подходящей непрерывной функцией F на L.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 91 * PRAHA 22. 8. 1966 * ČÍSLO 3

ON ASSOCIATED PARTITIONS

VÁCLAV HAVEL, Brno

(Received November 5, 1964)

1. Introduction. In [1], BORŮVKA studied those partitions in the cartesian square of any set S which are naturally induced by partitions in S, and more generally, he defined a partition in the cartesian product of two sets S_1, S_2 which is naturally induced by given partitions in S_1 and S_2. As the properties of such induced partitions are not investigated in [1], these will be the subject of our considerations. But first we recapitulate briefly some notions and results, in particular those of [1, chapter III].*)

2. Partitions in sets. Let S be a fixed non-void set. A *partition* $\boldsymbol{\mathscr{P}}$ *in* S is defined as a non-void set of pairwise disjoint non-void subsets (called the *blocks* of $\boldsymbol{\mathscr{P}}$ or the $\boldsymbol{\mathscr{P}}$*-blocks*) in S. If the set-union of all $\boldsymbol{\mathscr{P}}$-blocks is S, then $\boldsymbol{\mathscr{P}}$ is said to be a *partition on* S. If $\boldsymbol{\mathscr{P}} = (\mathscr{P}_\iota)_{\iota \in I}$ is a family of partitions in S, then we shall define the set of the so-called $\boldsymbol{\mathscr{P}}$-blocks as the set $\{X | X \in \mathscr{P}_\iota,\ \iota \in I\}$. In the set $\mathfrak{S}(S)$ of all partitions in S, one may introduce an ordering $\leqq$ as follows: if $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2$ are partitions in S then $\mathscr{P}_1 \leqq \mathscr{P}_2$ means that each $\mathscr{P}_1$-block is contained in some $\mathscr{P}_2$-block. Then $\mathfrak{S}(S)$ is a complete semi-lattice (in the sense of [2], pp. 20 and 33): to each family $\boldsymbol{\mathscr{P}} = (\mathscr{P}_\iota)_{\iota \in I}$ of partitions in S there exists its supremum, which may be characterised also by the notion of a *chaining* (cf. [1], p. 16) in $\boldsymbol{\mathscr{P}}$ between two $\boldsymbol{\mathscr{P}}$-blocks A, B; such a chaining is any finite sequence of $\boldsymbol{\mathscr{P}}$-blocks $A = A_0 \between A_1 \between \ldots \between A_n = B$ (the symbol $\between$ means here and in the following text the non-void intersecting of two sets.) Every sup $\boldsymbol{\mathscr{P}}$-block is then characterized as the set-join of the maximal set of $\boldsymbol{\mathscr{P}}$-blocks which are mutually chained in $\boldsymbol{\mathscr{P}}$. The infimum of a family $\boldsymbol{\mathscr{P}}$ need not exist; if it exists, then the corresponding inf $\boldsymbol{\mathscr{P}}$-blocks have the form $\bigcap_{\iota \in I} A_\iota \neq \emptyset$, where $A_\iota \in \mathscr{P}_\iota$ for all $\iota \in I$. All partitions on S form in $\mathfrak{S}(S)$ a complete sublattice (in the sense of [2], p. 34) which will be denoted by $\mathfrak{L}(S)$. In $\mathfrak{L}(S)$ there also exists the inf $\boldsymbol{\mathscr{P}}$ for each family $\boldsymbol{\mathscr{P}}$ of partitions on S. For all these results cf. [1, pp. 14–19].

*) The author wishes to express his gratitude to Prof. M. KOLIBIAR for his improvements of the first version of the text.

3. The associated mapping. If $\mathfrak{A}(\leqq_{\mathfrak{A}})$, $\mathfrak{B}(\leqq_{\mathfrak{B}})$ are ordered sets, then the corresponding cardinal product $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}(\leqq_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}})$ is ordered in the usual manner: $(\alpha, \beta) \leqq \leqq_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}(\gamma, \delta)$ means that both $\alpha \leqq_{\mathfrak{A}} \gamma$ and $\beta \leqq_{\mathfrak{B}} \delta$ for $\alpha, \gamma \in \mathfrak{A}$ and $\beta, \delta \in \mathfrak{B}$, [2, pp. 14–15]. In particular, if $\mathfrak{A}(\leqq_{\mathfrak{A}})$, $\mathfrak{B}(\leqq_{\mathfrak{B}})$ are (complete) semi-lattices or (complete) lattices, then also $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}(\leqq_{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}})$ is a (complete) semi-lattice or a (complete) lattice respetively. If $\mathfrak{A}(\leqq_{\mathfrak{A}})$, $\mathfrak{B}(\leqq_{\mathfrak{B}})$ are complete semi-lattices or complete lattices and if $\mathscr{F} = ((a_\iota, b_\iota))_{\iota\in I}$ is a family of elements in $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ and $\mathscr{A} = (a_\iota)_{\iota\in I}$, $\mathscr{B} = (b_\iota)_{\iota\in I}$, then $\sup \mathscr{F} = (\sup \mathscr{A}, \sup \mathscr{B})$, $\inf \mathscr{F} = (\inf \mathscr{A}, \inf \mathscr{B})$; cf. [2], pp. 51–52.

Let S, T be fixed non-empty sets. The mapping $\mathrm{soc} : \mathfrak{S}(S) \times \mathfrak{S}(T) \to \mathfrak{S}(S \times T)$ assigns to each $(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \in \mathfrak{S}(S) \times \mathfrak{S}(T)$ the partition $\mathrm{soc}\,(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \in \mathfrak{S}(S \times T)$ which consists of the blocks $A \times B$ with $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$. We shall speak about the associated mapping, and for the image in this mapping the term *socius* will be used; cf. [1], p. 25. If $\mathscr{F}$ is a family of elements $(\mathscr{A}_\iota, \mathscr{B}_\iota) \in \mathfrak{S}(S) \times \mathfrak{S}(T)$, $\iota \in I$ then we denote by $\mathrm{soc}\,\mathscr{F}$ the family of the partitions $\mathrm{soc}\,(\mathscr{A}_\iota, \mathscr{B}_\iota) \in \mathfrak{S}(S \times T)$, $\iota \in I$; cf. [1], p. 26.

4. Fundamental properties of the associated mapping. In the sequel, S and T will be fixed non-void sets, and $\mathscr{A} = (\mathscr{A}_\iota)_{\iota\in I}$ and $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_\iota)_{\iota\in I}$ arbitrary families of partitions in S and T respectively, with a common index set I. The corresponding family $\mathscr{F} = ((\mathscr{A}_\iota, \mathscr{B}_\iota))_{\iota\in I}$ will be termed *admissible.*

A. *The associated mapping is not surjective, but it is injective and both-sided isotone.*

One can easily find a partition of $\mathfrak{S}(S \times T)$ which is not a socius of any $(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \in \in \mathfrak{S}(S) \times \mathfrak{S}(T)$. Let $(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \leqq (\mathscr{C}, \mathscr{D})$ for $(\mathscr{A}, \mathscr{B},) (\mathscr{C}, \mathscr{D}) \in \mathfrak{S}(S) \times \mathfrak{S}(T)$. Thus to arbitrary $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$ there exist $C \in \mathscr{C}$, $D \in \mathscr{D}$ such that $A \subseteq C$, $B \subseteq D$, and consequently $A \times B \subseteq C \times D$, $\mathrm{soc}\,(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \leqq \mathrm{soc}\,(\mathscr{C}, \mathscr{D})$. Conversely, if $\mathrm{soc}\,(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \leqq \leqq \mathrm{soc}\,(\mathscr{C}, \mathscr{D})$, then to each $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$-block $A \times B$ there exists a $\mathrm{soc}\,(\mathscr{C}, \mathscr{D})$-block $C \times D \supseteq A \times B$, which implies $A \subseteq C$, $B \subseteq D$, $(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \leqq (\mathscr{C}, \mathscr{D})$.

B$_1$. *For every admissible family $\mathscr{F}$ there is*

$$\sup \mathrm{soc}\, \mathscr{F} \leqq \mathrm{soc} \sup \mathscr{F} . \tag{1}$$

Let $A \times B \in \sup \mathrm{soc}\,\mathscr{F}$; then $A \times B$ is a set-union of a maximal set of mutually chained (in $\mathrm{soc}\,\mathscr{F}$) $\mathrm{soc}\,\mathscr{F}$-blocks. If $A_0 \times B_0$ is a $\mathrm{soc}\,\mathscr{F}$-block contained in $A \times B$, then any other $\mathrm{soc}\,\mathscr{F}$-block $A_* \times B_*$ contained in $A \times B$ is characterized by the existence of a chaining $A_0 \times B_0 \between A_1 \times B_1 \between \ldots \between A_n \times B_n = A_* \times B_*$ in $\mathrm{soc}\,\mathscr{F}$, where $A_i \times B_i$, $i = 1, \ldots, n - 1$ are, of course, suitable $\mathrm{soc}\,\mathscr{F}$-blocks. Consequently there are chainings $A_0 \between A_1 \between \ldots \between A_n = A_*$ in $\mathscr{A}$ and $B_0 \between B_1 \between \ldots \between B_n = B_*$ in $\mathscr{B}$. But $A_0 \in \mathscr{A}_0$, $B_0 \in \mathscr{B}_0$, $(\mathscr{A}_0, \mathscr{B}_0) \leqq \sup \mathscr{F} = (\sup \mathscr{A}, \sup \mathscr{B})$, so that there exist $F \in \sup \mathscr{A}$, $G = \sup \mathscr{B}$ with $A_0 \subseteq F$, $B_0 \subseteq G$. From the existence of preceding two chainings one obtains that $A_* \subseteq F$, $B_* \subseteq G$; hence $A \times B \subseteq F \times G$, proving (1). An admissible family $\mathscr{F}$ will be termed *regular* if to any two elements (a_0, b_0), (a, b)

of an arbitrary soc sup $\mathscr{F}$-block, there exists a chaining $A_0 \times B_0 \between A_1 \times B_1 \between \dots \between A_n \times B_n$ in soc $\mathscr{F}$ such that $(a_0, b_0) \in A_0 \times B_0$, $(a, b) \in A_n \times B_n$. A simple example of a non-regular admissible family $\mathscr{F}$ is given in [1], p. 27.

B$_2$. *If $\mathscr{F}$ is an admissble family, then*

$$\text{sup soc } \mathscr{F} \geqq \text{soc sup } \mathscr{F} \tag{2}$$

iff $\mathscr{F}$ is regular.

Let (2) hold, so that according to $\mathbf{B}_1$ there is sup soc $\mathscr{F}$ = soc sup $\mathscr{F}$. Let $F \times G$ be a soc sup $\mathscr{F}$-block, $(a_0, b_0), (a, b) \in F \times G$. Since $F \times G \in$ sup soc $\mathscr{F}$, it follows from the definition of suprema that there exists the chaining in soc $\mathscr{F}$ required by the definition of regularity. Conversely, let $\mathscr{F}$ be regular and $F \times G \in$ soc sup $\mathscr{F}$. Choose $(a_0, b_0) \in F \times G$. Then, from the regularity of the family $\mathscr{F}$, it follows that for each $(a, b) \in F \times G$, the couples (a_0, b_0), (a, b) lie in the same sup soc $\mathscr{F}$-block. Thus (2) holds.

C. *If $S = T$ and $\mathscr{A}_\iota = \mathscr{B}_\iota$ (for all $\iota \in I$) in an admissible family $\mathscr{F}$, then $\mathscr{F}$ is regular if and only if, to each pair of* sup $\mathscr{A}$*-blocks and to each choice of elements a_0, b_0 in the first block and of elements a, b in the second block, there exist chainings $A_0 \between A_1 \between \dots \between A_n$, $B_0 \between B_1 \between \dots \between B_n$ in $\mathscr{A}$ of the same length and such that $a_0 \in A_0$, $b_0 \in B_0$, $a \in A_n$, $b \in B_n$ and $A_i, B_i \in \mathscr{A}_i$ in $\mathscr{A}$ for $i = 0, 1, \dots, n$.*

The proof follows on using the characteristic property of regular families given preceding theorem $\mathbf{B}_2$ for the special case considered. Hence one obtains as corollaries some results of [1], pp. 26–28.

D. *If $\mathscr{F}$ is an admissible family with the family $\mathscr{A}$ of partitions on S and with the family $\mathscr{B}$ of partitions on T, then $\mathscr{F}$ is regular.*

First note that the assumptions imply that, for each $\iota \in I$, there exists a soc $\mathscr{A}_\iota$-block containing a given element of S, and also a soc $\mathscr{B}_\iota$-block containing a given element of T. Choose arbitrary elements (a_0, b_0), (a, b) in any $F \times G$ = soc sup $\mathscr{F}$. We know that sup $\mathscr{F}$ = (sup $\mathscr{A}$, sup $\mathscr{B}$), so that $F \in$ sup $\mathscr{A}$, $G \in$ sup $\mathscr{B}$. Thus there exist chainings $A_0 \between A_1 \between \dots \between A_n$ in $\mathscr{A}$ and $B_0 \between B_1 \between \dots \between B_m$ in $\mathscr{B}$ such that $a_0 \in A_0$, $a \in A_m$, $b_0 \in B_0$, $b \in B_m$; it may be supposed without the loss of generality that the length of these two chainings is the same. Using the remark at the beginning of this proof one may construct easily enlarged chainings

$$A_0 \between A_1 \between A_1^* \between A_2 \between A_2^* \between \dots \between A_m ,$$

$$B_0 \between B_1^* \between B_1 \between B_2^* \between B_2 \between \dots \between B_m$$

such that $A_0 \times B_0$, $A_1 \times B_1^*$, $A_1^* \times B_1$, $A_2 \times B_2^*$, $A_2^* \times B_2, \dots, A_m \times B_m$ are all the soc $\mathscr{F}$-blocks. Thus $\mathscr{F}$ is regular. Cf. [1], p. 29.

E. *Let $\mathscr{F}$ be an admissible family. Then* inf $\mathscr{F}$ *exists iff* soc inf $\mathscr{F}$ *exists. If* inf $\mathscr{F}$

exists then

(3) $$\inf \operatorname{soc} \mathscr{F} = \operatorname{soc} \inf \mathscr{F} .$$

The first assertion is obvious. As for the second, note only that if $\inf \mathscr{F}$ exists then both $\operatorname{soc}\inf \mathscr{F}$-blocks and $\inf\operatorname{soc} \mathscr{F}$-blocks have the common form $A \times B$, $A \in \inf \mathscr{A}$, $B \in \inf \mathscr{B}$.

Corollary to B_{1-2}, D, E. $\operatorname{soc}(\mathfrak{L}(S) \times \mathfrak{L}(T)) \subseteq \mathfrak{L}(S \times T)$, *and the portion of the associated mapping with the domain* $\mathfrak{L}(S) \times \mathfrak{L}(T)$ *is a lattice-monomorphism.*

References

[1] *O. Borůvka,* Theory of partitions in the set I (Czech), Publ. Pac. Sci. Univ. Brno 1946, No. 278, pp. 1—37.

[2] *M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur, R. Croisot:* Leçons sur la théorie des treillis, des structures ordonnées et des treillis géométriques, Paris 1953.

Author's address: Brno, Barvičova 85 (VUT Brno).

Výtah

O ASOCIOVANÝCH ROZKLADECH

VÁCLAV HAVEL, Brno

Jsou-li S, T pevné neprázdné množiny, pak označíme $\mathfrak{S}(S)$, $\mathfrak{S}(T)$, $\mathfrak{S}(S \times T)$ polosvazy všech rozkladů v S, v T a v $S \times T$. V článku jsou studovány základní vlastnosti zobrazení, přiřazujícího každému páru $(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \in \mathfrak{S}(S) \times \mathfrak{S}(T)$ rozklad $\operatorname{soc}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$, jehož bloky jsou tvaru $A \times B$, $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$. Je ukázáno, že jde o injektivní oboustranně isotonní zobrazení úplného polosvazu $\mathfrak{S}(S) \times \mathfrak{S}(T)$ do úplného polosvazu $\mathfrak{S}(S \times T)$, které zachovává infimum (pokud toto infimum existuje), avšak supremum zachovává pouze pro tzv. regulární rodiny dvojic $(\mathscr{A}_\iota, \mathscr{B}_\iota) \in \mathfrak{S}(S) \times \mathfrak{S}(T)$, $\iota \in I$. Jsou uvedeny některé postačující podmínky proto, aby rodina dvojic $(\mathscr{A}_\iota, \mathscr{B}_\iota) \in \mathfrak{S}(S) \times \times \mathfrak{S}(T)$, $\iota \in I$, byla regulární. Jde o tématiku, jejíž základy položil prof. O. Borůvka ([1]).

Резюме

ОБ АССОЦИИРОВАННЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ

ВАЦЛАВ ГАВЕЛ (Václav Havel), Брно

Если S, T – фиксированные непустые множества, то символами $\mathfrak{S}(S)$, $\mathfrak{S}(T)$, $\mathfrak{S}(S \times T)$ обозначим полуструктуры всех разложений в S, в T и в $S \times T$. В статье изучаются основные свойства отображения, которое каждой паре $(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \in \mathfrak{S}(S) \times \mathfrak{S}(T)$ ставит в соответствие разложение $\mathrm{soc}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$, блоки которого имеют вид $A \times B$, $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$. Показано, что имеем дело с инъекционным двусторонне изотонным отображением полной полуструктуры $\mathfrak{S}(S) \times \mathfrak{S}(T)$ в полную полуструктуру $\mathfrak{S}(S \times T)$, которое сохраняет инфимум (если оно существует), но супремум (верхнюю грань) оно сохраняет только для т. наз. регулярных семейств пар $(\mathscr{A}_\iota, \mathscr{B}_\iota) \in \mathfrak{S}(S) \times \mathfrak{S}(T)$, $\iota \in J$. Приведены некоторые достаточные условия для того, чтобы семейство пар $(\mathscr{A}_\iota, \mathscr{B}_\iota) \in \mathfrak{S}(S) \times \mathfrak{S}(T)$, $\iota \in J$ было регулярным. Эти проблемы касаются тематики, основоположником которой является проф. О. Борувка (1).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

PARTITIONS IN CARTESIAN SYSTEMS

VÁCLAV HAVEL, Brno

(Received December 4, 1964)

In the opening part of [2], O. BORŮVKA described his theory of set partitions which he enriched in the sequel of [2] by a study of one binary operation in a given set.

Analogously, it is possible to apply this theory of set pertitions to the case of a set with one ν-ary operation (ν any ordinal) or, more generally, to the case of a map of a cardinal product of a family of sets onto a given set. This last topic forms the object of study in the present paper.

1. Chainings and bindings. Let S be a fixed non-void set and $\mathfrak{S}(S)$ the semilattice of all partitions in S with the usual ordering. If $\mathscr{P} = (\mathscr{P}^\iota)_{\iota \in I}$ is a family of partitions in S then we define a *chaining* in $\mathscr{P}$ between two $\mathscr{P}$-blocks A, B as any finite sequence of $\mathscr{P}$-blocks $A = A_0 \between A_1 \between \ldots \between A_{n-1} \between A_n = B$. If n is even and each member with even index is a $\mathscr{P}^\tau$-block for a fixed $\tau \in I$, then the sequence $A = A_0, A_2, \ldots, A_n = B$ will be called a *binding* of $\mathscr{P}^\tau$-blocks between A, B with cementing $\mathscr{P}$-blocks $A_1, A_3, \ldots, A_{n-1}$. We shall also say that A, B are *chained* or *bound*, respectively.

We begin with two elementary lemmas.

Lemma 1. *Let $\mathscr{P} = (\mathscr{P}^1, \mathscr{P}^2)$ be a pair of partitions in S. Then every chaining in $\mathscr{P}$ between two $\mathscr{P}^1$-blocks A, B becomes a binding of $\mathscr{P}^1$-blocks between A, B if the $\mathscr{P}^2$-blocks are omitted.*

Lemma 2. *Let $\mathscr{P} = (\mathscr{P}^\iota)_{\iota \in I}$ be a family of partitions on S. Then to each chaining between $A, B \in \mathscr{P}^\tau$ (for a fixed $\tau \in I$) there exists a binding of $\mathscr{P}^\tau$-blocks between A, B with cementing blocks belonging to the initial chaining.*

The proof of lemma 1 is clear. For the proof of lemma 2 it suffices to insert a $\mathscr{P}^\tau$-block $B_l \between A_l \cap A_{l+1}$ between all consecutive $A_l \between A_{l+1}$ of a given chaining. Such a $B_l \in \mathscr{P}^\tau$ must exist because now the partitions are *on* S. In such an enlarged chaining between A, B omit all $\mathscr{P}$-blocks not in $\mathscr{P}^\tau$ to obtain the required binding between A, B.

---

[1]) Cf. [9] for the notions used. The set of $\mathscr{P}$-blocks is $\{P \mid P \in \mathscr{P}^\iota, \iota \in I\}$. By $\between$ we denote the non-empty intersecting of two sets.

Let $\mathscr{P} = (\mathscr{P}^\iota)_{\iota \in I}$ be a family of partitions in S. Then the partition $\sup \mathscr{P} \in \mathfrak{S}(S)$ has the following characteristic property [3, pp. 16–17]: Each $\sup \mathscr{P}$-block is a union of a maximal set of $\mathscr{P}$-blocks chained in $\mathscr{P}$. The partition $\inf \mathscr{P} \in \mathfrak{S}(S)$ exists iff for each $\iota \in I$ there exist $A_\iota \in \mathscr{P}^\iota$ such that $\bigcap_{\iota \in J} A_\iota \neq \emptyset$. If $\inf \mathscr{P}$ exists, then every $\inf \mathscr{P}$-block has the form $\bigcap_{\iota \in J} B_\iota \neq \emptyset$ with $B_\iota \in \mathscr{P}^\iota$, $\iota \in I$.

2. Cartesian systems. Let Γ be a fixed index set. Put $\Gamma_0 = \Gamma \cup \{o\}$ where $o \notin \Gamma$. [2]) Let $(S_\alpha)_{\alpha_0}$ be a family of non-void sets and $f : \prod_\alpha S_\alpha \to S_0$ a surjection.[3]) Then $\mathbf{C} = ((S_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$ will be called a *Cartesian system* or briefly a *system* (cf. [12], pp. 38–39).

If $\emptyset \neq S'_{\alpha_0} \subseteq S_{\alpha_0}$ for all α_0 and if f' is a restriction of f with domain $\prod S'_\alpha$, where $S'_0 = f'(\prod_\alpha S'_\alpha)$, then $\mathbf{C}' = ((S'_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f')$ will be called a *subsystem* of $\mathbf{C}$.

A *map* σ between two systems $\mathbf{C} = ((S_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f_0)$, $\mathbf{C}^* = ((S^*_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f^*)$ is a family $(\sigma_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ of maps $\sigma_{\alpha_0} : S_{\alpha_0} \to S^*_{\alpha_0}$ for all α_0; σ will be called *regular* if $\sigma_{\alpha_0} a = \sigma_{\beta_0} a$ for all $a \in S_{\alpha_0} \cap S_{\beta_0}$; σ will be called a *homomorphism* if $\sigma_0 f((a_\alpha)_\alpha) = f^*((\sigma_\alpha a_\alpha)_\alpha)$ for every choice $a_\alpha \in S_\alpha$ for all α.

A *partition* $\mathscr{P}$ in a system $\mathbf{C}$ is defined as a family $(\mathscr{P}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ where $\mathscr{P}_{\alpha_0}$ is a partition in S_{α_0} for all α_0. If, moreover, $\mathscr{P}_{\alpha_0}$ is a partition on S_{α_0} for all α_0, then we speak about a partition *on* $\mathbf{C}$.

Let $\sigma = (\sigma_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ be an epimorphism between the systems $\mathbf{C} = ((S_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$, $\mathbf{C}^* = (S^*_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f^*)$. We say that the partition $\mathscr{P} = (\mathscr{P}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ on $\mathbf{C}$ is *induced* by σ if for each α_0 the $\mathscr{P}_{\alpha_0}$-blocks are $\sigma^{-1}_{\alpha_0} a$ for all $a \in S^*_{\alpha_0}$.

A partition $\mathscr{P} = (\mathscr{P}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ in a system $\mathbf{C}$ is said to be *generating* if, for each choice $A_\alpha \in \mathscr{P}_\alpha$ for all α, there exists a $\mathscr{P}_0$-block A_0 containing $f(\prod_\alpha A_\alpha)$.

If $\mathscr{P} = (\mathscr{P}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ is a generating partition in a system $\mathbf{C}$, then we define a subsystem $\mathbf{C}' = ((S'_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f')$ in $\mathbf{C}$ *corresponding* to $\mathscr{P}$ as a system such that, for every α_0, S'_{α_0} is is the union of all $\mathscr{P}_{\alpha_0}$-blocks, and that f' is the portion of f with domain $\prod_\alpha S'_\alpha$.

The results for regular partitions in a Cartesian system may be specialized to the most customary case of any $\mathbf{C}$ with all S_α equal to a fixed set S and $S_0 \subseteq S$.

3. Generating partitions in Cartesian systems. We shall denote by $\mathscr{P} = (\mathscr{P}^\iota)_{\iota \in I}$ an arbitrary family of partitions in a given system $\mathbf{C} = ((S_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$, and put $\mathscr{P}^\iota = (\mathscr{P}^\iota_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ for all ι and $\mathscr{P}_{\alpha_0} = (\mathscr{P}^\iota_{\alpha_0})_\iota$ for all α_0. [4])

The set $\mathfrak{S}(\mathbf{C})$ of all partitions in $\mathbf{C}$ will be ordered $\mathbf{C}$ as follows: For $\mathscr{P}^1 = (\mathscr{P}^1_{\alpha_0})_{\alpha_0}$, $\mathscr{P}^2 = (\mathscr{P}^2_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ in $\mathfrak{S}(\mathbf{C})$ set $\mathscr{P}^1 \leqq \mathscr{P}^2$ iff $\mathscr{P}^1_{\alpha_0} \leqq \mathscr{P}^2_{\alpha_0}$ in $\mathfrak{S}(S_{\alpha_0})$ for all α_0. Then $\mathfrak{S}(\mathbf{C})$ becomes a complete semilattice: For each family $\mathscr{P}$ of partitions in $\mathbf{C}$ there is a parti-

[2]) In the following text, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ vary over Γ, while $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \ldots$ vary over Γ_0.

[3]) $\prod$ denotes the cardinal product in the sense of [6, p. 15].

[4]) ι varies over the same index set I.

tion $\sup \mathscr{P} = (\sup \mathscr{P}_{\alpha_0})_{\alpha_0} \in \mathfrak{S}(\mathbf{C})$; on the other hand, the partition $\inf \mathscr{P}$ need not exist. The existence of the partition $\inf \mathscr{P}$ is equivalent to the existence of $\inf \mathscr{P}_{\alpha_0}$ for all α_0; then $\inf \mathscr{P} = (\inf \mathscr{P}_{\alpha_0})_{\alpha_0} \in \mathfrak{S}(\mathbf{C})$.

Theorem 1. *Let σ be an epimorphism between systems $\mathbf{C} = ((S_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$, $\mathbf{C}^* = ((S^*_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f^*)$. Then the partition $\mathscr{P} = (\mathscr{P}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ in $\mathbf{C}$, induced by σ, is necessarily generating.*

Proof. Let $A_\alpha \in \mathscr{P}_\alpha$ for all α. Then for each α there is an element $a^*_\alpha \in S^*_\alpha$ such that $A_\alpha = \sigma_\alpha^{-1} a^*_\alpha$. Each element $b \in f(\prod_\alpha A_\alpha)$ has the form $f((a_\alpha)_\alpha)$ for some $a_\alpha \in A_\alpha$. Thus $\sigma_0 b = \sigma_0 f((a_\alpha)_\alpha) = f^*((\sigma_\alpha a_\alpha)_\alpha) = f^*((a^*_\alpha)_\alpha)$, and $b \in S_0$ is contained in $\sigma_0^{-1} f^*((a^*_\alpha)_\alpha) = B$. This yields $f(\prod_\alpha A_\alpha) \subseteq B$.

Theorem 2. *Let $\mathbf{C}^* = ((S^*_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f^*)$ be a subsystem in a given system $\mathbf{C} = ((S_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$, and $\mathscr{P} = (\mathscr{P}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ a generating partition in $\mathbf{C}$ with corresponding subsystem $\mathbf{C}' = ((S'_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f')$ such that $S^*_{\alpha_0} \between S'_{\alpha_0}$ for all α_0. If one puts $\overline{\mathscr{P}}_{\alpha_0} = \mathscr{P}_{\alpha_0} \rceil S^*_{\alpha_0}$ for all α_0 then $\overline{\mathscr{P}} = (\overline{\mathscr{P}}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ is a generating partition in $\mathbf{C}$.* [5])

Proof. Let $A_\alpha \in \mathscr{P}_\alpha$, $A_\alpha \between S^*_\alpha$ for all α. The partition is generating, so that a $\mathscr{P}_0$-block $A_0 \supseteq f(\prod_\alpha A_\alpha)$ exists. If $a_\alpha \in S^*_\alpha \cap A_\alpha$ for all α, then $f((a_\alpha)_\alpha) \in f(\prod_\alpha S^*_\alpha) \cap f(\prod_\alpha A_\alpha \subseteq \subseteq S^*_0 \cap A_0$ because $\mathbf{C}^*$ is a subsystem of $\mathbf{C}$. Thus $S^*_0 \between A_0$, and consequently $\overline{\mathscr{P}}$ must be generating.

Theorem 3. *Let $\mathscr{P} = (\mathscr{P}^\iota)_\iota$ be a family of generating partitions in $\mathbf{C} = ((S_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$ and $\mathbf{C}^\iota = ((S^\iota_{\alpha_0})_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f^\iota)$ the corresponding subsystem with regard to $\mathscr{P}^\iota$ (for all ι). Then $\bigcap_\iota S^\iota_{\alpha_0} \neq \emptyset$ for all α_0 implies the existence of the partition in $\mathscr{P} \in \mathfrak{S}(\mathbf{C})$, and this partition is generating.*

Proof. The assumption $\bigcap_\iota S^\iota_{\alpha_0} \neq \emptyset$ for all α_0 implies the existence of $\inf \mathscr{P} \in \mathfrak{S}(\mathbf{C})$. Let $A_{\alpha_0} \in \inf \mathscr{P}_{\alpha_0}$ for all α_0. Then for all α_0, ι there exist $A^\iota_{\alpha_0} \in \mathscr{P}^\iota_{\alpha_0}$ such that $A_{\alpha_0} = \bigcap_\iota A^\iota_{\alpha_0}$. As $\mathscr{P}^\iota$ is generating, there is a $\mathscr{P}^\iota_0$-block $A^\iota_0 \supseteq f(\prod_\alpha A^\iota_\alpha)$ for each ι. Therefore $f(\prod_\alpha A_\alpha) \subseteq \bigcap_\iota f(\prod_\alpha A^\iota_\alpha) \subseteq \bigcap_\iota A^\iota_0 \in \inf \mathscr{P}_0$, so that the partition $\mathscr{P}$ is generating.

Theorem 4. *Let $\mathscr{P} = (\mathscr{P}^\iota)_\iota$ be a family of generating partitions in a given system $\mathbf{C} = ((S_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$ with $\Gamma = \{1, \ldots, n\}$. Then $\sup \mathscr{P}$ is generating.*

Proof.[6]) Choose $x_\alpha, y_\alpha \in S_\alpha$ in the same $\sup \mathscr{P}_\alpha$-block for all α. The existence of

[5]) The symbol $\mathscr{A} \lceil B$ is used to denote a *packing* in the sense of Borůvka, i.e. for a partition consisting of those blocks of a given partition $\mathscr{A}$ which intersect a given set B. Cf. [2, p. 23].

[6]) Cf. [11, pp. 190–191].

a chaining in $\mathscr{P}_\alpha$ between two $\mathscr{P}_\alpha$-blocks, of which the first contains x_α and the second y_α, may be expressed as the existence of a sequence

$$(*) \qquad x_\alpha = z_{\alpha,0}, z_{\alpha,1}, \ldots, z_{\alpha,r_\alpha} = y_\alpha$$

of elements in S_α. The elements $z_{\alpha,k-1}, z_{\alpha,k}$ must be contained in the same $P^{\alpha,k}$-block for some $\mathscr{P}^{\alpha,k} \in \mathscr{P}_\alpha$ (for all $k = 1, \ldots, r_\alpha$ and all α). From this one deduces, in turn that there exist $\mathscr{P}_0$-blocks such that

$f(z_{10}, z_{20}, \ldots, z_{n0}), f(z_{11}, z_{20}, \ldots, z_{n0})$ belong to the same $\mathscr{P}_0^{1,1}$-block, $\mathscr{P}_0^{1,1}$ from $\mathscr{P}_0$,
$f(z_{11}, z_{20}, \ldots, z_{n0}), f(z_{12}, z_{20}, \ldots, z_{n0})$ belong to the same $\mathscr{P}_0^{1,2}$-block, $\mathscr{P}_0^{1,2}$ from $\mathscr{P}_0$,
$\vdots$
$f(z_{1,r_1-1}, z_{20}, \ldots, z_{n0}), f(z_{1r_1}, z_{20}, \ldots, z_{n0})$ belong to the same $\mathscr{P}_0^{1,r_1}$-block, $\mathscr{P}_0^{1,r_1}$ from $\mathscr{P}_0$.

These and analogous relations for further sequences $(*)$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ yield that

$f(z_{10}, z_{20}, \ldots, z_{n0}), f(z_{1r_1}, z_{20}, \ldots, z_{n0})$ belong to the same $\sup\limits_{k=1,\ldots,r_1} \mathscr{P}_0^{1,k}$-block
$f(z_{1r_1}, z_{20}, \ldots, z_{n0}), f(z_{1r_1}, z_{2r_2}, \ldots, z_{n0})$ belong to the same $\sup\limits_{k=1,\ldots,r_2} \mathscr{P}_0^{2,k}$-block
$\vdots$
$f(z_{1r_1}, z_{2r_2}, \ldots, z_{n-1,r_{n-1}}, z_{n0}), f(z_{1r_1}, z_{2r_2}, \ldots, z_{n-1,r_{n-1}}, z_{nr_n})$ belong to the same $\sup\limits_{k=1,\ldots,r_n} \mathscr{P}_0^{n,k}$-block

Thus, finally, $f(x_1, \ldots, x_n), f(y_1, \ldots, y_n)$ both belong to the same block of the partition $\sup\limits_{\alpha=1,\ldots,n} \left(\sup\limits_{k=1,\ldots,r_\alpha} \mathscr{P}_0^{n,k} \right) \leqq \sup \mathscr{P}_0$, as it was required to prove.

Remark. I do not know under what further conditions theorem 4 holds also for infinite index set Γ.

Now we shall investigate the possibly less familiar notion of the *Goldie composition* $\diamond$ of two partitions. Let $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathfrak{S}(S)$. Then $\mathscr{A} \diamond \mathscr{B}$ is a partition from $\mathfrak{S}(S)$ defined as follows: The elements $a, a' \in S$ belong to the same $\mathscr{A} \diamond \mathscr{B}$-block iff there exists a finite sequence $a = a_0, a_1, \ldots, a_r, a_{r+1} = a'$ of elements in S such that $a_0, a_1; a_2, a_3; \ldots; a_r, a_{r+1}$ belong to common $\mathscr{B}$-blocks, and $a_1, a_2; a_3, a_4; \ldots; \ldots; a_{r-1}, a_r$ belong to common $\mathscr{A}$-blocks. Another formulation is that the $\mathscr{A} \diamond \mathscr{B}$-blocks are the maximal unions of mutually bound $\mathscr{B}$-blocks with cementing $\mathscr{A}$-blocks (cf. § 1).

Now return to a system $\mathbf{C} = ((S_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$, and for partitions $\mathscr{P}^i = (\mathscr{P}^i_{\alpha_0})_{\alpha_0}$; $i = 1, 2$ in $\mathbf{C}$ define the composition $\diamond$ by $\mathscr{P}^2 \diamond \mathscr{P}^1 = (\mathscr{P}^2_{\alpha_0} \diamond \mathscr{P}^1_{\alpha_0})_{\alpha_0}$.

Theorem 5. *Let $\mathscr{P}^1, \mathscr{P}^2$ be generating partitions in a system $\mathbf{C} = ((S_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$ with $\Gamma = \{1, \ldots, n\}$. Then $\mathscr{P} = \mathscr{P}^2 \diamond \mathscr{P}^1$ is also generating.*

Proof.[7]) For each α choose two elements a_α, a'_α in the same $\mathscr{P}_\alpha$-block. Then for each α there is a finite sequence $\alpha_\alpha = a_{\alpha,0}, a_{\alpha,1}, \dots, a_{\alpha,r}, a_{\alpha,r+1} = a'_\alpha$ of elements in S_α such that consecutive members belong to common $\mathscr{P}^1$-blocks or $\mathscr{P}^2$-blocks. As Γ is finite, it may be supposed without the loss of generality that all considered sequences have the same length not depending on α. Therefore $f(a_{10}, \dots, a_{n0})$, $f(a_{11}, \dots, a_{n1})$ are in the same $\mathscr{P}_0^1$-block, $f(a_{11}, \dots, a_{n1})$, $f(a_{12}, \dots, a_{n2})$ are in the same $\mathscr{P}_0^2$-block, ..., $f(a_{1r}, \dots, a_{nr})$, $f(a_{1,r+1}, \dots, a_{n,r+1})$ are in the same $\mathscr{P}_0^1$-block. By definition of $\diamond$, $f(a_1, \dots, a_n)$, $f(a'_1, \dots, a'_n)$ must lie in the same $\mathscr{P}_0$-block, as required.

Remark. I do not know the modifications of Theorem 5 necessary to make it apply to the case of an infinite index set Γ.

4. Factor systems. Let $\mathscr{P} = (\mathscr{P}_{\alpha 0})_{\alpha 0}$ be a generating partition on a given system $\mathbf{C} = ((S_{\alpha 0})_{\alpha 0}, f)$. A factor system $\mathbf{C}/\mathscr{P}$ is defined as a system $((\mathscr{P}_{\alpha 0})_{\alpha 0}, f/\mathscr{P})$ where $f/\mathscr{P}$ is a surjection of $\prod_\alpha \mathscr{P}_\alpha$ onto $\mathscr{P}_0$, determined by $f/\mathscr{P}((A_\alpha)_\alpha) = A_0$ where $A_\alpha \in \mathscr{P}_\alpha$ for all α and A_0 is a $\mathscr{P}_0$-block which contains $f(\prod_\alpha A_\alpha)$.

The concepts of a cover, refinement, cut, pairing, etc. (in the sense of Borůvka, [2], § 15.2-4) may be extended to Cartesian systems if they are simultaneously imposed on all $S_{\alpha 0}$.

Theorem 6. *Let $\mathscr{P} = (\mathscr{P}_{\alpha 0})_{\alpha 0}$ be a generating partition on a system $\mathbf{C} = ((S_{\alpha 0})_{\alpha 0}, f)$ with $\mathbf{C}/\mathscr{P} = \mathbf{C}' = ((S'_{\alpha 0})_{\alpha 0}, f')$. Let $\mathscr{P}' = (\mathscr{P}'_{\alpha 0})_{\alpha 0}$ be a partition on $\mathbf{C}'$ and $\mathscr{P}^* = (\mathscr{P}^*_{\alpha 0})_{\alpha 0}$ the cover of $\mathscr{P}$ enforced by $\mathscr{P}'$. Then $\mathscr{P}'$ is generating iff $\mathscr{P}^*$ is generating.*[8])

Proof. Let $\mathscr{P}'$ be generating. Choose $A^*_\alpha \in \mathscr{P}^*_\alpha$ for each α, and show that there exists a $\mathscr{P}^*$-block $A^*_0 \supseteq f(\prod_\alpha A^*_\alpha)$. Each $A^*_{\alpha 0}$ consists of all $\mathscr{P}_{\alpha 0}$-blocks contained in some $\mathscr{P}'_{\alpha 0}$-block $A''_{\alpha 0}$ (for each α_0). As $\mathscr{P}'$ is generating, for $A''_\alpha \in \mathscr{P}'_\alpha$ there must exist a $\mathscr{P}'_0$-block A''_0 which contains $f'(\prod_\alpha A''_\alpha)$. If A^*_α consists of all $\mathscr{P}'_0$-blocks contained in A''_0, then $f'\prod_\alpha A''_\alpha) \subseteq A''_0$ implies $f\prod_\alpha A^*_\alpha) \subseteq A^*_0$. Conversely, let $\mathscr{P}^*$ be generating. If $A''_\alpha \in \mathscr{P}'_\alpha$ for all α, it is necessary to find a $\mathscr{P}'_0$-block $A''_0 \supseteq f'(\prod_\alpha A''_\alpha)$. Because $\mathscr{P}^*$ is generating, there exists a $\mathscr{P}^*_0$-block $A^*_0 \supseteq f(\prod_\alpha A^*_\alpha)$ where again A^*_α is the union of all $\mathscr{P}_\alpha$-blocks contained in A''_α (for each α). From $f(\prod_\alpha A''_\alpha) \subseteq A^*_0$ it follows again $f'(\prod_\alpha A''_\alpha) \subseteq A''_0$.

Theorem 7. *Between the systems $\mathbf{C} = ((S_{\alpha 0})_{\alpha 0}, f)$, $\mathbf{C}^* = ((S^*_{\alpha 0})_{\alpha 0}, f^*)$ there exists an epimorphism $\sigma = (\sigma_{\alpha 0})_{\alpha 0}$ iff there is an isomorphism $\varrho = (\varrho_{\alpha 0})_{\alpha 0}$ between a certain*

[7]) Cf. [7, § 1].

[8]) Let $\mathscr{A} \in \mathfrak{S}(S)$, $\mathscr{B} \in \mathfrak{S}(\mathscr{A})$. If $\mathscr{C} \in \mathfrak{S}(S)$ has the blocks which are unions of all $\mathscr{A}$-blocks contained in the same $\mathscr{B}$-block, then $\mathscr{C}$ will be termed a cover of $\mathscr{A}$ enforced by $\mathscr{B}$. — If $\mathscr{P} \in \mathfrak{S}(C)$, $\mathscr{P}' \in \mathfrak{S}(C/\mathscr{P})$ (cf. § 4) then $\mathscr{P}''$ will be termed a cover of $\mathscr{P}$ enforced by $\mathscr{P}'$ if each $\mathscr{P}''_{\alpha 0}$ is the cover of $\mathscr{P}_{\alpha 0}$ enforced by $\mathscr{P}'_{\alpha 0}$.

factor system $\mathbf{C}' = \mathbf{C}/\mathscr{P}$ *and* $\mathbf{C}^*$. *This* ϱ *is such that* ϱ_{α_0} *maps each* $\mathscr{P}_{\alpha_0}$*-block* A'_{α_0} *onto* $\sigma_{\alpha_0}A'_{\alpha_0} \in S^*_{\alpha_0}$ *(for all* α_0*).*

Proof. Let σ be an epimorphism between $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}^*$. The partition $\mathscr{P}$ on $\mathbf{C}$ induced by σ is necessarily generating (theorem 1). Now determine a surjection ϱ: $\mathbf{C}/\mathscr{P} \to \mathbf{C}^*$. For each α_0, ϱ_{α_0} sends $A_{\alpha_0} \in \mathscr{P}_{\alpha_0}$ onto $a^*_{\alpha_0} \in S^*_{\alpha_0}$ with $\sigma^{-1}_{\alpha_0}A^*_{\alpha_0} = A_{\alpha_0}$. Thus $\varrho_{\alpha_0}A_{\alpha_0} = \sigma_{\alpha_0}a_{\alpha_0}$ for all $a_{\alpha_0} \in A_{\alpha_0}$. Choose $a_\alpha \in A_\alpha \in \mathscr{P}_\alpha$ for all α. Then $f((a_\alpha)_\alpha) \in f(\prod_\alpha A_\alpha) \subseteq f/\mathscr{P}(A_\alpha)_\alpha) \in \in \mathscr{P}$, so that $\varrho_0 f/\mathscr{P}((A_\alpha)_\alpha) = \sigma_0\, f((a_\alpha)_\alpha) = f/\mathscr{P}(\varrho_\alpha A_\alpha)_\alpha)$ and ϱ is even an isomorphism between $\mathbf{C}/\mathscr{P}$, $\mathbf{C}^*$. Conversely, let $\mathbf{C}/\mathscr{P}$ be an arbitrary factor system of $\mathbf{C}$ modulo the generating partition $\mathscr{P}$ on $\mathbf{C}$. Let σ be the surjection between $\mathbf{C}$ and $\mathbf{C}/\mathscr{P}$ such that $a_{\alpha_0} \in \sigma_{\alpha_0}a_{\alpha_0} = A_{\alpha_0} \in \mathscr{P}_{\alpha_0}$ for all α_0. According to $f((a_\alpha)_\alpha) \in f(\prod_\alpha A_\alpha) \subseteq f/\mathscr{P}((A_\alpha)_\alpha) \in \mathscr{P}_0$, there is also $\sigma_0\ f((a_\alpha)_\alpha) = f/\mathscr{P}((A_\alpha)_\alpha) = f/\mathscr{P}((\sigma_\alpha a_\alpha)_\alpha)$, so that σ is an epimorphism between $\mathbf{C}$ and $\mathbf{C}/\mathscr{P}$. If there is an isomorphism between $\mathbf{C}/\mathscr{P}$ and $\mathbf{C}^*$, then there is also an epimorphism between $\mathbf{C}$ and $\mathbf{C}^*$.

Theorem 8. *Let* $\mathscr{P}^i = (\mathscr{P}^i_{\alpha_0})_{\alpha_0}$; $i = 1, 2$ *be generating partitions in a given system* $\mathbf{C} = ((S_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$. *If* $\mathscr{P}^1, \mathscr{P}^2$ *are paired,*[10]) *then there exists an isomorphism* $\varrho = (\varrho_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ *between* $\mathbf{C}/\mathscr{P}_1$*and* $\mathbf{C}/\mathscr{P}_2$ *such that, for all* α_0, *to each* $\mathscr{P}^1_{\alpha_0}$*-block* $A^1_{\alpha_0}$ *there corresponds by* ϱ_{α_0} *the* $\mathscr{P}^2_{\alpha_0}$*-block* $A^2_{\alpha_0} \between A^1_{\alpha_0}$.

Proof. Let $\mathbf{C}/\mathscr{P}^1$, $\mathbf{C}/\mathscr{P}^2$ be paired factor systems. This means that, for all α_0, each $A^1_{\alpha_0} \in \mathscr{P}^1_{\alpha_0}$ intersects exactly one $A^2_{\alpha_0} \in \mathscr{P}^2_{\alpha_0}$. Thus for each α_0 one has a surjection ϱ_{α_0} under which $A^1_{\alpha_0} \to A^2_{\alpha_0}$ as before. Set $B_\alpha = A^1_\alpha \cap A^2_\alpha$ for each α. Thus $f(\prod_\alpha B_\alpha) \subseteq \subseteq f(\prod_\alpha A^i_\alpha) \subseteq f/\mathscr{P}^i((A^i_\alpha)_\alpha) \in \mathscr{P}^i_0$; $i = 1, 2$. It follows that $f(\prod_\alpha B_\alpha) \subseteq f/\mathscr{P}^1((A^1_\alpha)_\alpha \cap \cap f/\mathscr{P}^2((A^2_\alpha)_\alpha)$, so that $f/\mathscr{P}^1((A^1_\alpha)_\alpha) \between f/\mathscr{P}^2((A^2_\alpha)_\alpha) = \varrho_0 f/\mathscr{P}^1((A^1_\alpha)_\alpha) = f/\mathscr{P}^2((\varrho_\alpha A^1_\alpha)_\alpha)$ as required.

Theorem 9. *Let* $\mathscr{P} = (\mathscr{P}_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ *be a generating partition on a given system* $\mathbf{C} = (S_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f)$, *and* $\mathscr{P}' = (\mathscr{P}'_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ *a generating partition on* $\mathbf{C}' = \mathbf{C}/\mathscr{P} = ((S'_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f')$. *Then there is an isomorphism* $\varrho = (\varrho_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ *between* $\mathbf{C}'/\mathscr{P}'$ *and the cover* $\mathbf{C}^* = ((S^*_{\alpha_0})_{\alpha_0}, f^*)$ *of* $\mathbf{C}'$ *enforced by* $\mathscr{P}'$: [11]) *For all* α_0, *each* $A''_{\alpha_0} \in \mathscr{P}'_{\alpha_0}$ *is mapped onto the union of all* $\mathscr{P}_{\alpha_0}$*-blocks contained in* A''_{α_0}.

Proof. Let $\mathbf{C}, \mathscr{P}, \mathscr{P}'$ be given and $\mathbf{C}^*$ be the cover of $\mathbf{C}'$ enforced by $\mathscr{P}'$. Each $A^*_{\alpha_0} \in S^*_{\alpha_0}$ consists of all $\mathscr{P}_{\alpha_0}$-blocks contained in the same $A''_{\alpha_0} \in \mathscr{P}'_{\alpha_0}$. Map each $A''_{\alpha_0} \in \mathscr{P}'_{\alpha_0}$ into the preceding $A^*_{\alpha_0} \in S^*_{\alpha_0}$ by a surjection $\varrho_{\alpha_0} : \mathscr{P}'_{\alpha_0} \to S^*_{\alpha_0}$ (for each α_0). The map $\varrho = (\varrho_{\alpha_0})_{\alpha_0}$ is necessarily an isomorphism between $\mathbf{C}'/\mathscr{P}'$ and $\mathbf{C}^*$. Indeed,

---

[9]) We speak about a factor system *induced* by σ.

[10]) Two partitions $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathfrak{S}(S)$ are said to be *paired* if to each $\mathscr{A}$-block A ($\mathscr{B}$-block B) there exists exactly one $\mathscr{B}$-block $A' \between A$ ($\mathscr{A}$-block $B' \between B$). Two partitions $\mathscr{P}^1$, $\mathscr{P}^2$ in $\mathbf{C}$ are said to be *paired* if $\mathscr{P}^1_{\alpha_0}, \mathscr{P}^2_{\alpha_0}$ are paired for all α_0.

[11]) This is to mean that $\mathbf{C}^* = \mathbf{C}/\mathscr{P}^*$, where $\mathscr{P}^*$ is the cover of $\mathscr{P}$ enforced by $\mathscr{P}'$.

choose $A''_\alpha \in \mathscr{P}'_\alpha$ for all α so that $f'/\mathscr{P}'((A''_\alpha)_\alpha) = A''_0 \in \mathscr{P}'_0$. For each $A'_\alpha \in \mathscr{P}_\alpha$ with $A'_\alpha \subseteq A''_\alpha$ there is $f'((A'_\alpha)_\alpha = A'_0 \subseteq A''_0$, and consequently $f^*((A^*_\alpha)_\alpha) = A^*_0, f^*((\varrho_\alpha A''_\alpha)_\alpha) = = \varrho_0 A''_0$, as required.

References

[1] *G. Birkhoff:* Lattice Theory, New York 1948.
[2] *O. Borůvka:* Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie, Berlin 1960.
[3] *O. Borůvka:* Theory of partitions in sets, I (in Czech); Publ. Sci. Univ. Brno 1946, No. 278, pp. 1–37.
[4] *O. Borůvka:* Über Ketten von Faktoroiden, Math. Ann. *118*, (1949), 41–46.
[5] *P. Dubreil:* Algèbre, Paris 1954.
[6] *M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur, R. Croisot:* Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonées et des treillis géométriques, Paris 1953.
[7] *A. W. Goldie:* The Jordan-Hölder theorem for general abstract algebras, Proc. Lond. Math. Soc., 2nd series, *52* (1951), 107–131.
[8] *A. W. Goldie:* The scope of the Jordan-Hölder theorem in abstract algebra, Proc. Lond. Lond. Math. Soc., 3rd series, *2* (1952), 349–368.
[9] *V. Havel:* On associated partitions, Čas. pěst. mat.
[10] *H. Hermes:* Einführung in die Verbandstheorie, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1955.
[11] *G. Szász:* Einführung in die Verbandstheorie, Leipzig 1962.
[12] *V. A. Uspenskij:* Lectures on recursive functions (in Russian), Moscow 1960.

Author's address: Brno, Barvičova 85 (VUT Brno).

Výtah

ROZKLADY V KARTÉZSKÝCH STRUKTURÁCH

VÁCLAV HAVEL, Brno

Zobecněním algebraické operace na dané množině je surjekce tvaru $\prod_{\alpha \in \Gamma} S_\alpha \to S_0$, kde S_α, S_0 jsou neprázdné množiny. Je provedena aplikace Borůvkovy teorie rozkladů množin na takovéto zobecněné operace (do nové situace jsou přeneseny pojmy vytvořujícího rozkladu a homomorfismu a jsou nalezeny příslušné teorémy). Speciálně pro $S_\alpha = S\,(\alpha \in \Gamma)$, $S_0 \subseteq S$, dávají nalezené výsledky obecnější teorii než je obvyklá teorie rozkladů množin s algebraickou operací.

Резюме

РАЗЛОЖЕНИЯ В ДЕКАРТОВЫХ СТРУКТУРАХ

ВАЦЛАВ ГАВЕЛ (Václav Havel), Брно

Обобщением алгебраической операции на данном множестве является сырьекция вида $\prod_{\alpha \in \Gamma} S_\alpha \to S_0$, где S_α, S_0 – непустые множества. К таким обобщенным операциям приложены основания теории разложения множеств О. Борувки (на новых началах определены понятия образующего разложения и гомоморфизма и выведены соответствующие теоремы). В частности, для $S_\alpha = S$ $(\alpha \in \Gamma)$, $S_0 \subseteqq S$, дают найденные результаты более общую теорию, чем обычная теория разложений множеств с алгебраической операцией.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

O ZOBECNĚNÉ CLAIRAUTOVĚ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICI

VLADIMÍR DOLEŽAL, Praha a JAROMÍR HRONÍK, Brno

(Došlo dne 20. března 1965)

I

Vyšetřujme vlastnosti diferenciální rovnice n-tého řádu

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k y^{(k)} = f(y^{(n)}) . \tag{1}$$

Uvedenou rovnici můžeme nazvat zobecněnou Clairautovou diferenciální rovnicí, neboť zřejmě pro $n = 1$ obdržíme Clairautovu rovnici. Ukážeme dále, že vlastnosti rovnice (1) jsou velmi obdobné vlastnostem rovnice Clairautovy.

Věta 1. *Nechť funkce f je definována na nějakém intervalu I. Potom má rovnice (1) řešení vyjádřené vztahem*

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k x^k + \frac{(-1)^n}{n!} f(n!\, C_n) , \tag{2}$$

kde C_k $(k = 1, 2, \ldots, n - 1)$ jsou libovolné konstanty, kdežto $n!\, C_n \in I$.

Důkaz této věty je zřejmý.

Pro Clairautovu rovnici je to jednoparametrická soustava přímek, pro rovnici druhého řádu dvouparametrická soustava parabol, pro $n = 3$ je to tříparametrická soustava kubických parabol atd.

Splňuje-li funkce f v rovnici (1) některé další předpoklady jak dále uvedeme, má rovnice (1) ještě druhé tzv. singulární řešení.

Nechť funkce f má v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ spojitou derivaci. Buď Φ funkce definovaná v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ taková, že $\Phi^{(n)}$ je funkce absolutně spojitá a $t_1 \leqq \Phi^{(n)}(x) \leqq t_2$. Pak též funkce $L(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} (n!/k!)\, x^k\, \Phi^{(k)}(x)$ je absolutně spojitá a platí tudíž v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ skoro všude $L'(x) = x^n \Phi^{(n+1)}(x)$. Také funkce $P(x) = f(\Phi^{(n)}(x))$ je absolutně spojitá a platí $P'(x) = f'(\Phi^{(n)}(x))\, \Phi^{(n+1)}(x)$ pro skoro všechna $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$.

Je zřejmé, že jestliže $\Phi^{(n+1)}(x) = 0$ pro skoro všechna $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$, pak $L'(x) = P'(x)$ skoro všude v $\langle x_1, x_2 \rangle$. Odtud vyplývá, že $\Phi(x) + D$, kde D je nějaká určitá konstanta je řešením rovnice (1). To však již víme z věty 1, dokonce za obecnějších předpokladů o funkci f a můžeme v dalším předpokládat, že $\Phi^{(n+1)}(x)$ není pro skoro všechna $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ rovna 0.

Podobně, jestliže pro skoro všechna $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ je

$$x^n = f'(\Phi^{(n)}(x)) \tag{3}$$

pak $L'(x) = P'(x)$ skoro všude v $\langle x_1, x_2 \rangle$ a opět dojdeme k tomu, že funkce $\Phi(x) + D$, kde

$$(-1)^n\, n!\, D = f(\Phi^{(n)}(x_0)) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x_0^k\, \Phi^{(k)}(x_0)\,, \quad x_0 \in \langle x_1, x_2 \rangle \tag{4}$$

je řešením rovnice (1).

Hledejme tedy takovou funkci Φ a takový interval $\langle x_1, x_2 \rangle$, aby platil vztah (3).

Nechť je nejprve n liché číslo. Jestliže je f' rostoucí [klesající] funkce v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$, pak existuje funkce φ definovaná v intervalu $\langle f'(t_1), f'(t_2) \rangle$ [$\langle f'(t_2), f'(t_1) \rangle$], která je inversní funkcí k funkci f'. Definujeme-li nyní funkci $\Phi^{(n)}$ předpisem

(5)

$$\Phi^{(n)}(x) = \varphi(x^n) \quad \text{pro} \quad x \in \langle \sqrt[n]{[f'(t_1)]}, \sqrt[n]{[f'(t_2)]} \rangle \; [x \in \langle \sqrt[n]{[f'(t_2)]}, \sqrt[n]{[f'(t_1)]} \rangle]\,,$$

pak zřejmě platí vztah (3). Protože potřebujeme absolutní spojitost funkce $\Phi^{(n)}$ je nutno předpokládat, že též funkce φ je absolutně spojitá.

Podobně nechť n je sudé a nechť f' je rostoucí [klesající] nezáporná funkce v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$. Potom obdobně jako v předcházejícím případě nalezneme funkci φ a definujeme funkci $\Phi^{(n)}$. Tentokráte můžeme definovat tuto funkci $\Phi^{(n)}$ jednak v intervalu $\langle \sqrt[n]{[f'(t_1)]}, \sqrt[n]{[f'(t_2)]} \rangle$ [$\langle \sqrt[n]{[f'(t_2)}, \sqrt[n]{[f'(t_1)]} \rangle$], jednak v intervalu $\langle -\sqrt[n]{[f'(t_2)]}, -\sqrt[n]{[f'(t_1)]} \rangle$ [$\langle -\sqrt[n]{[f'(t_1)]}, -\sqrt[n]{[f'(t_2)]} \rangle$].

Je vidět, že když n je sudé a platí $f'(t) < 0$, pak nelze nalézt x a Φ tak, aby platil vztah (3), neboť vždy bude $x^n - f'[\Phi^{(n)}(x)] > 0$. Můžeme tedy vyslovit tuto větu:

Věta 2. *Nechť funkce f má v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ spojitou a rostoucí [klesající] derivaci f'. Nechť inversní funkce k funkci f' je absolutně spojitá.*

Je-li n liché přirozené číslo, pak pro $x \in \langle \sqrt[n]{[f'(t_1)]}, \sqrt[n]{[f'(t_2)]} \rangle$ [$\langle \sqrt[n]{[f'(t_2)]}, \sqrt[n]{[f'(t_1)]} \rangle$] existuje singulární řešení rovnice (1) dané vztahem

$$\tilde{y}(x) = \Phi(x) + D\,, \tag{6}$$

kde $\Phi^{(n)}(x) = \varphi(x^n)$ a φ je inversní funkce k funkci f'. Konstanta D je daná vztahem

$$(-1)^n\, n!\, D = f(\Phi^{(n)}(x_0)) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x_0^k\, \Phi^{(k)}(x_0)\,, \tag{4}$$

kde x_0 je bod definičního oboru funkce Φ.

Je-li n sudé přirozené číslo a je-li $f'(t) \geqq 0$ pro $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, pak existuje řešení rovnice (1) *vyjádřené vztahem* (6) *jednak v intervalu* $\langle \sqrt[n]{[f'(t_1)]}, \sqrt[n]{[f'(t_2)]} \rangle$ $[\langle \sqrt[n]{[f'(t_2)]}, \sqrt[n]{[f'(t_1)]} \rangle]$, *jednak v intervalu* $\langle -\sqrt[n]{[f'(t_2)]}, -\sqrt[n]{[f'(t_1)]} \rangle$ $[\langle -\sqrt[n]{[f'(t_1)]}, -\sqrt[n]{[f'(t_2)]} \rangle]$.

Je-li n sudé přirozené číslo, avšak $f'(t) < 0$ v celém definičním oboru, pak uvažovaná rovnice (1) *nemá řešení typu* (6).

II

Je dobře známo, že v případě $n = 1$ obdržíme singulární řešení (6) jako obálku jednoparametrické soustavy řešení tvaru (2). Obdobný výsledek platí i pro zobecněnou rovnici.

Věta 3. *Nechť funkce f má v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ spojitou a ryze monotonní derivaci a nechť inversní funkce k funkci f' je absolutně spojitá. Nechť existuje řešení uvažované rovnice* (1) *tvaru* (6). *Nechť dále c je bod definičního oboru funkce $\Phi(x)$.*

Utvořme funkci

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \Phi^{(i)}(c) (x - c)^i + D . \tag{7}$$

Potom $y(x)$ je řešení rovnice (1) *tvaru* (2) *a platí $y(c) = \Phi(c) + D$ a rovněž $y^{(k)}(c) = \Phi^{(k)}(c)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Žádný další společný bod integrální křivky $y(x)$ a $\Phi(x) + D$ nemají.*

Je-li n liché přirozené číslo a funkce $\Phi^{(n)}$ je rostoucí, pak platí pro všechna $x \neq c$ vztah $y(x) < \Phi(x) + D$; je-li $\Phi^{(n)}$ klesající, pak je $y(x) > \Phi(x) + D$ pro všechna $x \neq c$.

Je-li n sudé přirozené číslo a $\Phi^{(n)}$ rostoucí, pak je $y(x) < \Phi(x) + D$ pro $x > c$ a $y(x) > \Phi(x) + D$ pro $x < c$. Je-li funkce $\Phi^{(n)}$ klesající, pak je $y(x) > \Phi(x) + D$ pro $x > c$ a $y(x) < \Phi(x) + D$ pro $x < c$.

Důkaz. Nejdříve ukážeme, že funkce $y(x)$ definovaná vztahem (7) je skutečně řešení rovnice (1) tvaru (2). Následujícím výpočtem obdržíme

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \Phi^{(i)}(c) \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} x^j c^{i-j} + D = \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{(-1)^{i-j}}{i!} \binom{i}{j} \Phi^{(i)}(c)\, x^j c^{i-j} + D = \\ &= \sum_{j=1}^{n} x^j \left[\sum_{i=j}^{n} \frac{(-1)^{i-j}}{j!\,(i-j)!} c^{i-j} \Phi^{(i)}(c) \right] + \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} c^i \Phi^{(i)}(c) + D . \end{aligned}$$

Protože $\Phi(x) + D$ je řešením rovnice (1), můžeme psát

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} c^i \Phi^{(i)}(c) + D = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{n!}{i!} c^i \Phi^{(i)}(c) + D = \frac{(-1)^n}{n!} f(\Phi^{(n)}(c)).$$

Položíme-li

$$C_j = \sum_{i=j}^{n} \frac{(-1)^{i-j}}{j!\,(i-j)!} c^{i-j} \Phi^{(i)}(c) \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

pak

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j x^j + \frac{(-1)^n}{n!} f(n!\, C_n).$$

Zřejmě $C_n = \Phi^{(n)}(c)/n!$ a tedy $y(x)$ je řešením rovnice (1) tvaru (2).

Dále z definice (7) plyne ihned, že $y(c) = \Phi(c) + D$. Poněvadž

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{(i-k)!} \Phi^{(i)}(c)\,(x-c)^{i-k} \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

platí tudíž $y^{(k)}(c) = \Phi^{(k)}(c)$; $y^{(n+1)}(x)$ je identicky rovno nule.

Rozviňme konečně podle Taylorova vzorce funkci Φ. Obdržíme

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \Phi^{(i)}(c)\,(x-c)^i + \frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(\xi)\,(x-c)^n,$$

kde bod ξ leží mezi body x a c. Z monotonnosti funkce $\Phi^{(n)}$ vyplývá ihned tvrzení věty.

Důsledkem věty 3 je pak následující věta:

Věta 4. *Nechť funkce f má ryze monotonní spojitou derivaci v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$. Nechť inversní funkce k funkci f' je absolutně spojitá. Buď $\tilde{y}$ singulární řešení rovnice* (1) *tvaru* (6). *Nechť c probíhá definiční interval funkce Φ. Potom funkce $\tilde{y}$ je obálkou jednoparametrické soustavy křivek y definovaných vztahem* (7).

Vyšetřujme opět nejprve případ lichého n. Mějme dány koeficienty C_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), součin $n!\, C_n$ je z definičního oboru funkce f. Ze vztahu $C_n = \Phi^{(n)}(c)/n!$ nalezneme hodnotu $c = \sqrt[n]{[f'(n!\, C_n)]}$; c je zřejmě z definičního oboru funkce $\tilde{y}$ a je právě jedno. Ze soustavy (8) určíme jednoznačně hodnoty $\Phi^{(i)}(c)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, neboť determinant soustavy je různý od nuly, a tyto hodnoty spolu s podmínkou $y(c) = \tilde{y}(c)$ nám určí jednoznačně funkci $\tilde{y}$.

V případě sudého n obdržíme ze vztahu $C_n = \Phi^{(n)}(c)/n!$ pro c dvě hodnoty $c = \pm \sqrt[n]{[f'(n!\, C_n)]}$. Ke každé z nich můžeme vypočíst hodnoty $\Phi^{(i)}(c)$, případně $\Phi^{(i)}(-c)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a spolu s podmínkou $y(c) = \tilde{y}(c)$ [případně $y(-c) = \tilde{y}(-c)$] obdržíme při f rostoucím [klesajícím] jak v intervalu $\langle \sqrt[n]{[f'(t_1)]}, \sqrt[n]{[f'(t_2)]} \rangle$

$[\langle\sqrt[n]{[f'(t_2)]}, \sqrt[n]{[f'(t_1)]}]$ tak v intervalu $\langle -\sqrt[n]{[f'(t_2)]}, -\sqrt[n]{[f'(t_1)]}\rangle$ $[\langle -\sqrt[n]{[f'(t_1)]}, -\sqrt[n]{[f'(t_2)]}\rangle]$ právě jedno řešení požadované vlastnosti. Přitom nebude obecně platit $\tilde{y}(x) = \tilde{y}(-x)$ a také dvě řešení y_1, y_2 tvaru (2) „příslušející" v jednom intervalu témuž řešení $\tilde{y}$ tvaru (6), nebudou obecně „příslušet" v druhém intervalu jednomu řešení tvaru (6).

Tyto výsledky můžeme shrnout do následující věty:

Věta 5. *Nechť funkce f má ryze monotonní spojitou derivaci v intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ a nechť inversní funkce k funkci f' je absolutně spojitá. Nechť existuje singulární řešení rovnice* (1) *tvaru* (6).

Potom pro n liché lze ke každému řešení y rovnice (1) *tvaru* (2) *nalézti právě jedno $c = \sqrt[n]{[f'(n!\, C_n)]}$ a právě jedno řešení $\tilde{y}$ tvaru* (6) *takové, že $y^{(i)}(c) = \tilde{y}^{(i)}(c)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $y(x) \not\equiv \tilde{y}(x)$.*

Pro n sudé lze ke každému řešení y rovnice (1) *tvaru* (2) *nalézt v intervalu $\langle\sqrt[n]{[f'(t_1)]}, \sqrt[n]{[f'(t_2)]}\rangle$ $[\langle\sqrt[n]{[f'(t_2)]}, \sqrt[n]{[f'(t_1)]}\rangle]$ právě jedno c a právě jedno řešení $\tilde{y}$ tvaru* (6) *takové, že $y^{(i)}(c) = \tilde{y}^{(i)}(c)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $y(x) \not\equiv \tilde{y}(x)$. Podobně v intervalu $\langle -\sqrt[n]{[f'(t_2)]}, -\sqrt[n]{[f'(t_1)]}\rangle$ $[\langle -\sqrt[n]{[f'(t_1)]}, -\sqrt[n]{[f'(t_2)]}\rangle]$.*

Můžeme tedy podle vět 4 a 5 rozdělit množinu všech řešení rovnice (1) tvaru (2) na disjunktní třídy podle „příslušnosti" k řešení tvaru (6). Zřejmě v případě sudého n to lze provést dvěma obecně různými způsoby.

III

Na závěr ještě poznamenejme, že dovedeme nalézt i řešení lineární rovnice

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k y^{(k)} = f_1(x)\, y^{(n)} + f_2(x)\,. \tag{9}$$

Přitom musíme vyloučit případ $f_1(x) \equiv x^n$, kdy rovnice (9) přejde v rovnici Eulerovu

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k y^{(k)} = f_2(x)\,.$$

Za předpokladu, že funkce f_1 a f_2 mají všude spojitou derivaci a $f_1(x) \not\equiv x^n$, obdržíme $y^{(n)}$ jako řešení lineární rovnice

$$z' = \frac{f_1'(x)}{x^n - f_1(x)} \,.\, z + \frac{f_2'(x)}{x^n - f_1(x)}\,. \tag{10}$$

Adresa autorů: Vladimír Doležal, Žitná 25, Praha 1 (Matematický ústav ČSAV), Jaromír Hroník, Barvičova 85, Brno (Vysoké učení technické).

Резюме

ОБ ОБОБЩЕННОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ КЛЕРО

ВЛАДИМИР ДОЛЕЖАЛ (Vladimír Doležal), Прага
и ЯРОМИР ГРОНИК (Jaromír Hroník), Брно

В работе изучаются свойства дифференциального уравнения n-го порядка

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k y^{(k)} = f(y^{(n)}) \tag{1}$$

общее решение которого можно представить в виде

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k x^k + \frac{(-1)^n}{n!} f(n!\, C_n)\,. \tag{2}$$

Если функция f не является линейной и если выполнены еще некоторые условия, то уравнение (1) имеет еще одно (особое) решение $\tilde{y}(x) = \Phi(x) + D$ которое можно вывести из соотношения (3).

Во главе II. доказывается, что особое решение $\tilde{y}(x)$ является оболочкой одно-параметрической системы кривых y, определенных соотношением (7).

Во главе III. сказано, что решение уравнения (9) можно получить как решение линейного уравнения (10), где $y^{(n)} = z$.

Résumé

SUR LA GÉNÉRALISATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE CLAIRAUT

VLADIMÍR DOLEŽAL, Praha, JAROMÍR HRONÍK, Brno

Le travail présent étudie les propriétés de l'équation différentielle d'ordre n

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k y^{(k)} = f(y^{(n)})\,, \tag{1}$$

dont la solution générale peut être exprimée par la relation

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k x^k + \frac{(-1)^n}{n!} f(n!\, C_n)\,. \tag{2}$$

Si la fonction f n'est pas linéaire et qu'elle remplisse certaines suppositions, l'équation (1) peut avoir encore une seconde solution (singulière) $\tilde{y}(x) = \Phi(x) + D$, que l'on peut déduire de la relation (3).

Le chapitre II démontre que la solution singulière $\tilde{y}(x)$ est l'enveloppe du système uniparamétrique de courbes y définies par la relation (7).

Le chapitre III renseigne que la solution de l'équation (9) peut être trouvée comme solution de l'équation linéaire (10), où $y^{(n)} = z$.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

ÜBER EBENE KONFIGURATIONEN $(12_4, 16_3)$, DIE MIT EINER IRREDUZIBLEN KURVE DRITTER ORDNUNG INZIDIEREN

VÁCLAV METELKA, Liberec

(Eingegangen am 27. April 1965)

EINLEITUNG

Eine bedeutungsvolle Klasse der ebenen Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ bilden diejenigen interessanten Fälle, in welchen die Konfigurationspunkte mit einer irreduziblen Kurve dritter Ordnung inzidieren. In der Literatur sind bisher nur vier von diesen Konfigurationen beschrieben worden und die Hauptaufgabe meiner Arbeit besteht darin alle übrigen zu finden.

Zuerst aber erlaube ich mir noch im Kurzen den Leser über einige Grundbegriffe und Definition zu informieren.

Man sagt, dass zwei Konfigurationspunkte P, Q verbunden sind (kurz $P-Q$), wenn sie miteinander auf einer von den Konfigurationsgeraden liegen. Wenn R ein dritter Konfigurationspunkt dieser Geraden ist, dann können wir diese als $P-Q-R$ Gerade bezeichnen. Im anderen Falle, wenn zwei Konfigurationspunkte P, Q nicht verbunden sind, können wir kurz diesen Umstand als $P : Q$ bezeichnen und man spricht von zwei separierten (*getrennten*) Punkten.

Es ist auch möglich (und wie wir weiter sehen werden, ist es nicht nur rein theoretischer Fall), dass drei separierte Konfigurationspunkte in einer Geraden liegen. Diese Gerade gehört selbstverständlich nicht zur Menge der Konfigurationsgeraden und aus diesem Grunde wird sie auch als eine „fremde“ Gerade bezeichnet. Die Bezeichnung $P-Q-R$ Gerade wird ausschliesslich nur für eine Konfigurationsgerade benützt, dagegen wird in allen übrigen Fällen (namentlich bei fremden Geraden, oder wenn wir nicht ganz bestimmt wissen, ob es sich um eine Konfigurationsgerade handelt), diese Gerade als PQR bezeichnet.

Nach der Definition der Konfiguration $(12_4, 16_3)$ inzidiert jeder Punkt mit vier Geraden und auf jeder von diesen Geraden liegen noch zwei andere Konfigurationspunkte. Jeder Konfigurationspunkt ist also mit acht anderen verbunden und eben deswegen von den drei übrigen separiert.

Wenn ein Punkt P von den Punkten Q, R, S separiert ist, dann können wir diesen Umstand auch kurz in der Form $P : Q, R, S$ ausdrücken und sind nun schon imstande alle Konfigurationspunkte zu klassifizieren:

Definition. Es sei $P : Q, R, S$. Es ergeben sich dann folgende Möglichkeiten. Den Punkt P bezeichnen wir als:

1. A-Punkt, wenn $Q : R$, $Q : S$, $R : S$ ist;
2. B-Punkt, wenn $Q - R$, $Q - S$, $R - S$, aber nicht $Q - R - S$ ist;
3. C-Punkt, wenn nur zwei von den Punkten Q, R, S separiert sind;
4. D-Punkt, wenn nur zwei von den Punkten Q, R, S verbunden sind; und endlich
5. E-Punkt, wenn $Q - R - S$ ist, d.h. wenn diese Punkte eine Konfigurationsgerade bilden.

Bemerkung. Wie ich schon vorher angeführt habe, wurden bisher vier von den Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ beschrieben, die mit einer irreduziblen Kubik inzidieren. Alle diese Konfigurationen haben wenigstens einen A-Punkt. Ausserdem hat J. Metelka in der Arbeit [13] alle Konfigurationen mit den A-Punkten systematisch untersucht und in meiner Arbeit [15] habe auch ich alle Fälle mit D-Punkten beschrieben. Dass keine der letztgenannten Konfigurationen mit einer irreduziblen Kubik inzidiert, habe ich noch nicht bewiesen und muss mich daher mit diesen Fällen beschäftigen.

Für unsere Aufgabe ist die obenangeführte Klassifikation der Konfigurationspunkte ungenügend und es ist daher notwendig eine feinere und ausdruckvolle Klassifikation einzuführen, besonders bei den Konfigurationen, die B-, C- und E-Punkte haben.

Wir betrachten vorerst einen B-Punkt P (der von den Punkten Q, R, S getrennt ist, d. h. $P : Q, R, S$), dann sehen wir fast auf den ersten Blick, dass aus der Mengen der sechzehn Konfigurationsgeraden nur dreizehn mit Punkten P, Q, R, S inzidieren. Mit den Schnittpunkten der drei übrigen Geraden werden wir uns jetzt näher beschäftigen:

Definition. Unter der Voraussetzung, dass diese Geraden drei verschieden Schnittpunkte haben, können folgende Möglichkeiten vorkommen:

1. Entweder ein, oder zwei, oder alle drei Schnittpunkte sind Konfigurationspunkte, dann ist der betrachtete Punkt P entweder vom Type B^1, oder B^2, oder B^3.
2. In den übrigen Fällen, wo alle drei Geraden nur einen Schnittpunkt haben, ist dieser Punkt P vom Type B^4.

Bemerkung. Dazu bemerke ich, dass in diesem letzten Falle der einzige Schnittpunkt ein Konfigurationspunkt sein muss. Im gegenteiligen Falle inzidieren diese drei Geraden mit neun verschiedenen Konfigurationspunkten, die mit den Punkten P, Q, R, S die Gesamtzahl von dreizen Konfigurationspunkten ergeben, was begreiflich nicht möglich ist.

Analogisch könnte man auch für die C- und E-Punkte eine feinere Klassifikation einführen. In diesen Fällen kommen aber nur folgende zwei Möglichkeiten vor:

Definition. Wenn wir einen C-Punkt (bzw. einen E-Punkt) P haben, der von den Punkten Q, R, S getrennt ist, dann inzidieren vierzehn Konfigurationsgeraden mit diesen vier Punkten und je nach dem Schnittpunkt der zwei übrigen Geraden – ist dieser ein Konfigurationspunkt, oder nicht – können wir den C-Punkt (bzw. E-Punkt) P weiter klassifizieren:

Im ersten Falle (der Schnittpunkt ist ein Konfigurationspunkt) bezeichnen wir P als einen Punkt vom Typ C^1(bzw. E^1), im zweiten Falle als C^2 (bzw. E^2).

Es sei *1, 2, …, 12* eine Menge von zwölf Konfigurationspunkten. Bekanntlich nur im Falle, wenn drei Punkte (z. B. *1, 2, 3*) auf einer Konfigurationsgeraden liegen, kann man diese als *1–2–3* Gerade bezeichnen. Wenn man alle Konfigurationsgeraden in diesem Sinne bezeichnet, bekommt man ein sogenanntes Totalschema und man sagt, dass dieses Schema eine Konfiguration $(12_4, 16_3)$ definiert, wenn es mit zwölf Punkten und sechzehn Geraden in der Projektionsebene über dem Körper der komplexen Zahlen verwirklicht werden kann.

Eine einzige Konfiguration kann auch durch verschiedene totale Schemen definiert werden. Dann aber geht bei der Benützung einiger Permutationen der Zahlen *1, 2, …, 12* ein Schema in das andere über. Solche Schemen nennt man äquivalente Schemen.

Eine Konfiguration ist also nicht nur durch ein Schema definiert, sondern durch die ganze Klasse äquivalenter Schemen. Dazu bemerke in noch, dass zwei Schemen nur in dem Falle äquivalent sind, wenn sie die gleiche Anzahl von A-, B-, …, u. s. w. Punkten haben und wenn diese Punkte in den beiden Schemen auch vom gleichen Typus sind.

Jetzt bezeichnen wir mit P_i $(i = 1, 2, 3)$ drei Schnittpunkte der Geraden p (und analogisch mit Q_i drei Schnittpunkte der Geraden q) mit der Kubik. Bekanntlich liegen auch die dritten Schnittpunkte R_i der Geraden P_iQ_i (mit der Kubik) auf einer Geraden. Diesen Grundsatz kann man auch symbolisch als

$$P_1P_2P_3 - Q_1Q_2Q_3 - R_1R_2R_3 \tag{1}$$

ausdrücken.

Ausserdem wissen wir schon, dass auch die Punkte mit dem gleichen Index, d. h. P_i, Q_i, R_i $(i = 1, 2, 3)$ eine Gerade bilden.

Die Tangente im Punkte P schneidet die Kubik zum drittenmal im Punkte, den wir $\bar{P}$ bezeichnen werden und nun kann man schon die übrigen drei Grundsätzte symbolisch folgendermassen ausdrücken:

$$P_1P_2P_3 - P_1Q_2Q_3 - \bar{P}_1R_2R_3\,. \tag{2}$$

$$PQR - PQR - \bar{P}\bar{Q}\bar{R}\,, \tag{3}$$

(4) Im Falle, dass $\bar{A} \equiv \bar{B} \equiv T$ ist, dann impliziert $AB\bar{C} - ABC - TT\bar{C}$ die Identität $\bar{T} \equiv \bar{C}$.

Wenn P ein Inflexionspunkt ist, dann ist $\bar{P} \equiv P$ und die Tangente des Punktes P kann man als PPP Gerade bezeichnen.

Zu diesen Grundsätzen bemerke ich noch, dass sie nicht nur für die elliptische Kubik gelten, sondern auch für alle irreduziblen Kubiken gültig sind.

Bei der Lösung dieser Aufgabe werden wir nach diesem Arbeitsplan vorgehen:

Mit Hilfe der symbolisch oben beschriebenen Grundsätze suchen wir systematisch alle miteinander nicht äquivalente Schemen der ebenen Konfigurationen, die mit einer irreduziblen Kubik inzident sind.

Es sei $p > 0$. In den ersten neun Kapiteln werden wir folgende Konfigurationen suchen:

1. $B_p^4 B_q C_r D_s E_t$; 2. $B_p^3 B_q^2 B_r^1 C_s D_t E_u$; 3. $B_p^1 B_q^2 C_r D_s E_t$; 4. $B_p^2 C_q D_r E_s$; 5. $D_p C_q E_r$; 6. $E_p^1 E_q^2 C_r$ 7. $E_p^2 C_q$; 8. $C_p^2 C_q^1$; 9. C_{12}^1.

Im zehten Kapitel zeigen wir, welche von den Schemen realisierbar sind. Wir berechnen die Koordinaten der Konfigurationspunkte und schreiben die Gleichungen der Kubiken an.

Mit diesem Arbeitsplan schliessen wir auch unser Einleitungskapitel.

1. KAPITEL

In diesem Kapitel werden wir uns mit Konfigurationen beschäftigen – oder besser gesagt mit Schemen – die wenigstens einen B^4-Punkt haben.

Es sei 1 ein B^4-Punkt, der von den Punkten $2, 3, 4$ separiert ist. Bekanntlich existieren drei Geraden, die nur einen Schnittpunkt haben (der ein Konfigurationspunkt ist), und ausserdem inzidieren sie nicht mit den Punkten $1, 2, 3, 4$.

Diese Konfigurationsgeraden können wir als $5-6-7$, $5-8-9$, $5-0-P$ bezeichnen. Der Punkt 1 ist mit dem Punkte 5 verbunden und auf der Geraden $1-5$ muss schon der übriggebliebene Konfigurationspunkt (Q) liegen. D. h. $1-5-Q$ ist die erste Gerade, die mit dem Punkte 1 inzidiert. Als die drei übrigen Geraden, die den Punkt 1 enthalten, können wir die Geraden $1-8-0$, $1-P-6$, $1-7-9$ wählen. Der zwölfte Konfigurationspunkt Q ist schon mit den Punkten $2, 3, 4$ verbunden, kann aber nicht auf den Geraden $2-3$, $2-4$, $3-4$ liegen. Anderenfalls inzidiert der Punkt Q höchstens mit den drei verschiedenen Konfigurationsgeraden. Des besseren Überblicks halber führen wir diese Ergebnisse wie folgt an:

$$(1)\qquad \begin{array}{cccccc} \underline{\;\;1\;\;} & \underline{\;\;5\;\;} & \underline{\;2\;} & \underline{\;3\;} & \underline{\;4\;} & 2-3-. \\ 5\;0\;6\;7 & 6\;8\;0 & a\;Q & c\;Q & e\;Q & 2-4-. \\ Q\;8\;P\;9 & 7\;9\;P & b\;. & d\;. & f\;. & 3-4-. \end{array}$$

Wir beziechnen jetzt mit X den dritten Punkt auf der Geraden $5\bar{1}$. Dann besteht $0P5-11\bar{1}-86X$, $895-11\bar{1}-07X$, $675-11\bar{1}-P9X$. Deswegen gelten für den Punkt X folgende Relationen:

$$(2)\qquad 5\bar{1}X,\ 86X,\ 07X,\ P9X\,.$$

Im Falle, dass $X \equiv 1$ ist, folgt aus (1) und (2) die Relation $16P \equiv 168$, wobei aber die Punkte P und 8 verschieden sein müssen. Analogisch beweisen wir auch, dass der Punkt X von den Punkten $5, 6, 7, 8, 9, 0, P$ verschieden ist. Es können also folgende Möglichkeiten vorkommen:

Entweder ist $X \equiv 2, 3, 4, Q$, oder ist X kein Konfigurationspunkt.

Unter der Voraussetzung, dass der Punkt X ein Konfigurationspunkt ist und zu der Menge $(2, 3, 4)$ gehört, sind wenigstens zwei von den Geraden $86X, 07X, P9X$ fremde Geraden und der Punkt X wäre deswegen mindestens von vier verschiedenen Punkten getrennt, was nicht möglich ist.

Wenn $X \equiv Q$ ist, sind alle drei Geraden $8Q6, 07Q, P9Q$ – siehe (1) – fremde Geraden und der Punkt Q ist von den Punkten $6, 8, 0, 7, P, 9$ getrennt.

Der Punkt X kann also nicht ein Konfigurationspunkt sein, und nach der unter (2) angeführten Beziehung folgt die Separierung:

$$(3) \qquad 8:6; \; 0:7; \; P:9\,.$$

Unser Teilschema (1) und das Resultat (3) ändern sich nicht bei Benützung der Permutationen:

$$(0P), (68), (79); \; (07), (6P), (89); \; (P9), (67), (08)\,;$$
$$(15), (60), (78); \; (15), (69), (8P); \; (15), (09), (7P)\,.$$

Für drei Geraden $a-b, c-d, e-f$ (siehe 1) kommen nur folgende Möglichkeiten vor:

$$6-9, 6-0, \; 7-8, \; 7-P, \; 8-P, \; 9-0\,.$$

Auf den ersten Blick sehen wir, dass wenigstens ein Punkt der Menge $(6, 7, 8, 9, 0, P)$ auf zwei von den Geraden $a-b, c-d, e-f$ liegt.

Nach den oben beschriebenen Permutationen können wir voraussetzen, dass diese Eigenschaft der Punkt 6 hat. Es existieren deswegen zwei Geraden $6-0-x$, $6-9-y$, wobei $x, y \equiv 2, 3, 4$ sind.

Es ist gleichgültig, welche zwei Punkte der Menge $(2, 3, 4)$ wir für x und y einsetzen, z. B. können wir $x \equiv 2$ und $y \equiv 3$ wählen.

Aus den Beziehungen $07X-61P-299$, $9PX-657-300$ folgt $2:9$; $3:0$. Bezeichnet man mit $4-9-Y$ und $4-0-Z$ die letzten Geraden, die mit den Punkten 9 und 0 inzidieren, dann ist $Y \equiv Q, 0$ und $Z \equiv Q, 9$. Sogleich sehen wir, dass der Punkt Z von dem Punkte Q verschieden sein muss, und bekommen so die Konfigurationsgerade $4-0-9$.

Wenn man mit V den dritten Punkt auf der Geraden $2-4$ bezeichnet (d. h. $2-4-V$ und $V \equiv 7, 8, P$ ist), dann ist $3-Q-V$ die letzte Gerade, mit welcher der Punkt V inzidiert.

In diesem Falle folgt aus der Relation $904-602-33V$ die Separierung $V:3$ und es ist auch $3-Q-V$ die übriggebliebene Konfigurationsgerade, die durch den Punkt V gehen kann.

Da der Punkt V mit dem Punkte 3 nicht gleichzeitig getrennt und verbunden sein kann, können wir dieses Kapitel mit der Festlegung des folgenden Hilfssatzes schliessen:

Lemma 1. *Eine Konfiguration mit B^4-Punkten kann nicht mit einer irreduziblen Kurve dritter Ordnung inzidieren.*

2. KAPITEL

Nach dem zweiten Punkte unseres Arbeitsplanes werden wir uns jetzt mit solchen Schemen beschäftigen, die wenigstens einen B^3-Punkt, aber schon keine A- und B^4-Punkte haben.

Es sei 1 ein B^3-Punkt, der wieder von den Punkten $2, 3, 4$ getrennt ist. Drei Geraden, die nicht mit den Punkten $1, 2, 3, 4$ inzidieren, kann man in diesem Falle als $5-6-7$, $7-8-9$, $9-0-5$ bezeichnen, (siehe die Definition der B^3-Punkte). Die zwei übrigen Konfigurationspunkte P und Q können nicht auf den Geraden $2-3$, $2-4$, $3-4$ liegen und sind auch mit den Punkten $1, 2, 3, 4$ verbunden. Im anderen Falle liegen diese zwei Punkte nicht auf vier Konfigurationsgeraden.

Für die Geraden, welche den Punkt 1 schneiden, kommen nur folgende drei Möglichkeiten vor:

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{1} \\ \hline 5 & 7 & 9 & P \\ 8 & 0 & 6 & Q \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{1} \\ \hline 5 & 7 & 9 & 0 \\ Q & P & 6 & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{1} \\ \hline 5 & 7 & 9 & P \\ Q & 0 & 6 & 8 \end{array},$$

wenn wir selbstverständlich alle äquivalenten Möglichkeiten ausschliessen.

In diesen letzten zwei Möglichkeiten kann noch entweder $P-Q$, oder $P:Q$ sein. Im Falle, dass $P-Q$ ist, kann schon der dritte Punkt dieser Geraden nur ein Punkt der Menge $(2, 3, 4)$ sein. Wir setzen voraus, dass diese Eigenschaft der Punkt 2 hat (was zulässig ist).

Übersichtlich bekommen wir also folgende fünf Teilschemen:

(I)
$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{1} \\ \hline 5 & 7 & 9 & P \\ 8 & 0 & 6 & Q \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{2} \\ \hline 3 & P & Q & 6 \\ . & a & . & . \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{3} \\ \hline 4 & P & Q \\ . & . & b \end{array} \quad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{4} \\ \hline P & Q \\ . & . \end{array} \quad \begin{array}{c} 5-6-7 \\ 7-8-9 \\ 9-0-5, \end{array}$$

(II)
$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{1} \\ \hline 5 & 7 & 9 & 0 \\ Q & P & 6 & 8 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{2} \\ \hline 3 & P & Q & 4 \\ . & . & . & . \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{3} \\ \hline 4 & P & Q \\ . & . & . \end{array} \quad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{4} \\ \hline P & Q \\ . & . \end{array} \quad \begin{array}{c} 5-6-7 \\ 7-8-9 \\ 9-0-5, \end{array}$$

(III)
$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{1} \\ \hline 5 & 7 & 9 & 0 \\ Q & P & 6 & 8 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{2} \\ \hline 3 & P & 4 & a \\ . & Q & . & b \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{3} \\ \hline 4 & P & Q \\ . & . & . \end{array} \quad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{4} \\ \hline P & Q \\ . & . \end{array} \quad \begin{array}{c} 5-6-7 \\ 7-8-9 \\ 9-0-5, \end{array}$$

(IV)	1	2	3	4	$5-6-7$
	$5\ 7\ 9\ P$	$3\ P\ Q\ 4$	$4\ P\ Q$	$P\ Q$	$7-8-9$
	$Q\ 0\ 6\ 8$	$.\ .\ .\ .$	$.\ .\ .$	$.\ .$	$9-0-5$
(V)	1	2	3	4	$5-6-7$
	$5\ 7\ 9\ P$	$3\ P\ 4\ a$	$4\ P\ Q$	$P\ Q$	$7-8-9$
	$Q\ 0\ 6\ 8$	$.\ Q\ .\ b$	$.\ .\ .$	$.\ .$	$9-0-5.$

Zuerst werden wir uns mit dem ersten Schema beschäftigen:

Wenn die drei Punkte $5, 7, 9$ mit den Geraden $2-3$, $2-4$, $3-4$ inzidieren, dann sind die zwei Punkte P und Q gleichzeitig von den Punkten $5, 7, 9$ getrennt und wir sehen, dass diese Punkte P und Q vom Type B^4-sind. Bekanntlich schliessen wir diesen Fall aus und setzen voraus, dass auf den Geraden $2-3$, $2-4$ und $3-4$ wenigstens ein Punkt der Menge $(6, 8, 0)$ liegt.

Nach den Permutationen (68), (59); (60), (79); (80), (57) können wir die Gerade $2-3$ und den Punkt 6 wählen. So bekommen wir eine weitere Konfigurationsgerade $2-3-6$.

Die letzte Gerade, welche mit dem Punkte 6 inzidiert, muss dann eine Gerade $4-6-t$ $(t \equiv P, Q)$ sein. Der Permutation (PQ) halber können wir diese Gerade als $4-6-P$ bezeichnen und deswegen ist $6 : 0, 8, Q$. Aus dem Teilschema (I) sehen wir, dass auch $8 : 0$ ist und diese Ergebnisse führen wir der besseren Übersicht halber folgendermassen an:

$$2-3-6,\ 4-6-P;\ 6 : 0, 8, Q;\ 8 : 0\,. \tag{1}$$

Wir setzen für einen Augenblick voraus, dass auf einer der Geraden $2-4$, $3-4$ ein Punkt der Menge $(0, 8)$ liegt, und nach den zulässigen Permutationen

$$(8, 0), (5, 7) \quad \text{bzw.} \quad (8, 0), (5, 7), (2, 3)$$

können wir voraussetzen, dass die Gerade $3-4$ mit dem Punkte 0 inzidiert (also $3-4-0$), Dann besteht $196-756-00\bar{6}$, $\bar{6}66-034-02P$. Weil der Punkt 2 mit dem Punkte P verbunden ist, bekommen wir die weitere Konfigurationsgerade $0-2-P$ und die Bedingung $0 : 6, 8, Q$. Aus der Beziehung $619-2PO-3Q5$ folgt die letzte Gerade $3-Q-5$, auf der ein Punkt 5 liegt, und die Separierung $5 : 2, 4, P$.

Im Falle, dass mit der Geraden $2-4$ ein Punkt 8 inzidiert, muss auch $3-P-8$ eine Konfigurationsgerade sein und unser Punkt 8 $(8 : 6, 0, Q)$ wäre vom Type A. Das ist begreiflich ausgeschlossen und deswegen kann auf der Geraden $2-4$ nur ein Punkt der Menge $(7, 9)$ liegen. Mit Rücksichtauf die Permutation (24), (06), (79), kann man diese Gerade als $2-4-7$ wählen. Dann besteht $765-430-229$, $701-236-449$, also $9 : 4, 2$ und die letzte Gerade, die durch den Punkt 9 geht, ist die Gerade $3-P-9$.

Nun sind wir aber zu einen Widerspruch gekommen, denn die letzten zwei Konfigurationsgeraden, die mit dem Punkte 8 inzidieren – nach diesen Resultaten – können nicht $2-Q-8$ und $4-Q-8$ sein.

Daraus folgt offensichtlich, dass auf den Geraden $2-4$, $3-4$ keiner von den Punkten 8, 0 liegen kann und dass im Gegenteil diese Geraden mit zwei Punkten der Menge $(5, 7, 9)$ inzidieren müssen.

a) Diese Punkte können nicht gleichzeitig die Punkte 5 und 9 sein. In diesem Falle können wir wieder zwei Geraden $2-4-5$, $3-4-9$ wählen und aus den Beziehungen $349-657-228$, $245-691-338$ ergibt sich $8 : 2, 3$. Ausserdem ist noch $8 : 6, 0$ (siehe 1).

b) Es können auch nicht gleichzeitig die Punkte 7 und 9 sein. Da man wieder $2-4-7$, $3-4-9$ wählen könnte, folgt $0 : 2, 3, 6, 8$ aus $675-349-220$, $691-247-$ -330 und aus dem Resultate (1).

Auf den Geraden $2-4$, $3-4$ liegen also die Punkte 5 und 7 und mit Hilfe der Permutation (23) ist es zulässig diese als

$$(2) \qquad 2-4-5, \ 3-4-7$$

zu bezeichnen. Deswegen besteht $5 : 3, P, Q$; $7 : 2, P, Q$.

Aus der Anführung (1) sehen wir, dass $236-PQ1-ab9$ und $a, b \equiv 0, 8, 9$ sind.

Aus den Geraden $0-9-5$ (siehe I) folgt, dass der Punkt 0 von den Punkten a, b verschieden sein muss (denn im Falle $a, b \equiv 0$ wäre $5 \equiv b, a$). Analogisch ergibt sich aus $7-8-9$, dass im Falle $8 \equiv a, b$; $7 \equiv b, a$ wäre, was unmöglich ist. Es ist nur noch eine Möglichkeit übriggeblieben: $a \equiv b \equiv 9$. Dann aber gehen durch den Punkt 9 fünf verschiedene Geraden, was begreiflich unzulässig ist.

Damit haben wir bewiesen, dass die erste Möglichkeit (I) nicht zu einer Konfiguration führt, und können uns der Möglichkeit II widmen.

II. Der Punkt 6 muss auf zweien von den drei Geraden $2-3$, $2-4$, $3-4$ liegen und deswegen muss er wenigstens mit einem der Punkte P und Q verbunden sein. Im Hinblick auf eine zulässige Permutation (57), (80), (PQ) kann man voraussetzen, dass $6-Q$ ist und man kann auch den Punkt 2 für den dritten Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kubik halten. Es ist also $2-6-Q$.

Dann ergibt sich die Relation $657-Q51-2\bar{5}P$, und da auch die zwei Punkte P und 2 verbunden sind, bekommen wir eine weitere Konfigurationsgerade $2-P-\bar{5}$. Unmittelbar aus dem Teilschema (II) folgt, dass $0 : 6, 7$; $8 : 5, 6$ und $P : Q$ sein muss. Wir führen diese Teilerfolge an:

$$(1) \qquad 2-6-Q, \ 2-P-\bar{5}; \ 8 : 5, 6; \ 0 : 6, 7; \ P : Q\,.$$

Wir nehmen zuerst an, dass der Punkt 5 ein Inflexionspunkt ist, d. h. $\bar{5} \equiv 5$, 555, $2-P-5$.

Aus der Beziehung $555-691-70Q$ sehen wir, dass die Gerade $70Q$ eine fremde Gerade sein muss, d. h. $Q : 7, 0, P$.

Dann müssen auf den übrigen zwei Konfigurationsgeraden, die durch den Punkt Q gehen, die Punkte 8 und 9 liegen. Die zulässige Permutation (34) ermöglicht uns diese letzten zwei Geraden als $3-Q-8$ und $4-Q-9$ zu bezeichnen. Da auch der

Punkt 3 mit dem Punkte P verbunden ist, bekommen wir aus der Relation $Q15-$ $-879-3P0$ eine weitere Konfigurationsgerade $3-P-0$. Folglich ist $0 : 7, 6, Q$ und die letzte (d. h. vierte) Gerade, die mit dem Punkte 0 inzidiert, muss schon die Gerade $2-4-0$ sein. In diesem Falle ergibt sich aber $240-691-Q08$, d. h. $Q : 8$, und der Punkt Q wäre von den vier Punkten $7, 0, P, 8$ getrennt.

Daraus ist ersichtlich, dass der Punkt 5 kein Inflexionspunkt sein kann und dass unsere Voraussetzung – siehe oben – falsch ist.

Der Punkt $\bar{5}$ muss aber ein Konfigurationspunkt sein (siehe die Konfigurationsgerade $2-P-\bar{5}$) und daraus folgt, dass $\bar{5} \equiv 8$ ist. (Anderenfalls stossen wir auf einen Widerspruch zwischen den Geraden $55\bar{5}$ und $5-0-9$, resp. auf einen Widerspruch der Geraden $2-P-\bar{5}$ mit den Geraden $2-Q-6$, $1-P-7$.) Es ist also:

(2) $$558, \quad 2-P-8\,.$$

Wir konzentrieren uns auf die Beziehung $558-691-700$ und $081-095-77Q$.

Im Falle, dass $6-P$ ist, könnte der dritte Schnittpunkt dieser Geraden (mit der Kubik) nur ein Punkt $T \equiv 3{,}4$ sein und aus der Relation $576-17P-QQT$ wäre $Q : T$, was der Verbindung $Q-T$ widerspricht.

Es ist also $6 : P$ und insgesamt $6 : P, 0, 8$.

Die letzte Konfigurationsgerade, die durch den Punkt 6 geht, muss deswegen die Gerade $3-4-6$ sein und die übrige durch den Punkt 8 gehende Gerade kann nur noch eine Gerade $8-Q-X$ sein (wobei $X \equiv 3, 4$ ist). Dann aber ergibt sich $879-$ $-Q51-X66$ und gleichzeitig $3-4-6$, was begreiflich nicht möglich ist.

Alle Möglichkeiten sind schon ausgeschöpft und wir sehen, dass auch das zweite Teilschema keine neue Konfiguration geben kann.

III. Nun werden wir uns mit dem Falle III beschäftigen.

Aus der Relation $15Q-17P-\bar{1}62$ folgt, dass die Punkte $\bar{1}, 2, 6$ auf einer Geraden liegen. Wir setzen für einen Augenblick voraus, dass der Punkt a (siehe III) mit dem Punkte 6 identisch ist. Dann folgt aus der Geraden $2-a-b$, $\bar{1}62$, dass $b \equiv \bar{1}$ sein muss. Anderenseits aber sehen wir, dass auf den Geraden $2-6-b$ nur $b \equiv 8, 0$ sein kann, und deswegen sind die Punkte b und 1 verbunden, was dem Resultate $b \equiv \bar{1}$ (d. h. $11b$) widerspricht.

Unsere Voraussetzung ($a \equiv 6$) ist also falsch und analogisch kann nicht $b \equiv 6$ sein.

Für die Gerade $2-a-b$ kommen deswegen nur die Möglichkeiten $2-5-8$, $2-7-0$ vor. Der Permutation $(57), (80), (PQ)$ halber sind diese Möglichkeiten äquivalent und wir können voraussetzen, dass $2-5-8$ ist.

Mit Hilfe der Beziehung $\bar{1}62$ gilt auch $11\bar{1}-852-0Q6$, und da die Gerade $0-Q-6$ nicht unter der Anführung III vorkommt, muss es eine fremde Gerade sein. Es ist also $6 : 0, Q$ und $0 : Q$.

Die dritte Konfigurationsgerade, welche durch den Punkt 6 geht, können wir als $6-P-T$ bezeichnen (wobei $T \equiv 2, 4$ ist), und können begreiflich $T \equiv 3$ wählen.

So haben wir die Gerade $6-P-3$ bekommen und die übrige Konfigurationsgerade, die mit dem Punkte 6 inzidiert, muss schon die Gerade $2-4-6$ sein. Anderenfalls würden durch den Punkt 6 nur drei Geraden gehen.

Die weitere Konfigurationsgerade $4-Q-7$ bekommt man aus der Beziehung $258-619-4Q7$ (mit Hinsicht auf die Verbindung $4-Q$). Analogisch gewinnen wir aus $675-PQ3-348$ die Gerade $3-4-8$ und gleichzeitig sehen wir, dass $Q : 6, 0, 8$ ist.

Die übrige Gerade, welche mit dem Punkte Q inzidiert, muss also die Gerade $3-9-Q$ sein. So kommen wir aber zu einem Widerspruch zwischen der Relation $5Q1-897-23P$ und der Geraden $2-P-Q$, weil diese zwei Geraden nicht identisch sein können.

IV. Auch im vorletzten Falle (IV) werden wir beweisen, dass keine neue Konfiguration entstehen kann.

Aus der Anführung (IV) sehen wir vorerst, dass der Punkt 8 von den Punkten $5, 6, 0$ separiert ist, also $8 : 5, 6, 0$. In Bezug auf die Existenz der Konfigurationsgeraden $1-P-8$ kann man die letzten zwei Geraden, die durch den Punkt 8 gehen, als $8-Q-a$, $8-b-c$ bezeichnen (wobei $a, b, c \equiv 2, 3, 4$ sind) und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a \equiv 2$, $b \equiv 3$, $c \equiv 4$ wählen, d. h. $8-Q-2$, $8-3-4$.

Der Punkt 2 muss von dem Punkte 0 separiert sein (siehe $897-Q51-200$), deswegen können die letzten letzten zwei Geraden, die durch den Punkt 0 gehen, nur die Geraden $0-P-T$ und $0-Q-V$ sein (wobei $T, V \equiv 3, 4$ sind). Der Permutation (34) halber, können wir $T \equiv 3$ und $V \equiv 4$ ansetzen. Dann muss aber der Punkt X auf der Geraden $2-3-X$ mit dem Punkte 1 verbunden sein und wir stossen auf einen Widerspruch mit der Relation $2Q8-30P-X41$ (weil $1 : 4$ und deswegen auch $1 : X$ ist).

Im Gegenteil zu diesen vier oben beschriebenen Fällen, die ein negatives Resultat ergeben haben, führt der letzte Fall (V) zu einer realisierbaren Konfiguration, wie sich aus dem folgenden ergibt.

V. Wir setzen für einen Augenblick voraus, dass der Punkt 8 mit dem Punkte Q verbunden ist.

In diesem Falle können wir den Punkt 3 auf die Gerade $8-Q$ legen. So bekommen wir die Gerade $3-Q-8$ und aus den Relationen $879-Q51-366$, $576-916-003$ die Bedingung $3 : 1, 0, 6$. Mühelos beweisen wir, dass der Punkt 0 mit dem Punkte 6 verbunden sein muss (anderenfalls gehen durch den Punkt 6 oder 0 nur drei verschiedene Konfigurationsgeraden), und der dritte Schnittpunkt der Geraden $6-0$ mit der Kubik kann nur der Punkt 2 sein, d. h. $2-0-6$ ist eine weitere Konfigurationsgerade. Nach dem Resultate $3 : 1, 0, 6$ muss auch schon $3-P$ sein und mit dieser Geraden kann nur der Punkt 5 inzidieren. (Siehe $260-Q15-P99$, $169-059-77P$, d. h. $P : 7, 9$). Es ist also $3-P-5$.

Aus der Beziehung $8P1-950-737$ folgt ein Widerspruch, da der Punkt 3 schon (der Separierung $3 : 1, 0, 6$ nach) mit dem Punkte 7 verbunden sein muss.

So haben wir bewiesen, dass unsere Voraussetzung $8-Q$ falsch ist und deswegen ergibt sich:

$$(1) \qquad Q:8 .$$

In diesem Falle muss aber die dritte durch den Punkt 8 gehende Konfigurationsgerade die Gerade $3-4-8$ sein und in der Anführung (V) kann man für a den Punkt 8 setzen. Deswegen ist $b \equiv 5, 6, 0$ (siehe die Gerade $2-a-b$). Nach der zulässigen Permutation (79), (60) kann man weiterhin voraussetzen, dass für den Punkt b nur die Möglichkeiten $b \equiv 5, 6$ vorkommen.

Wäre der Punkt 0 mit beiden Punkten P, Q verbunden, dann könnte man $3-P-0$, $4-Q-0$ zulassen und der Relation $3P0-4Q0-82\bar{0}$ nach wäre auch der Punkt b mit dem Punkte $\bar{0}$ identisch. Weil $x \equiv 5, 6$ ist, ist auch $\bar{0} \equiv 5, 6$ und im Falle, dass $\bar{0} \equiv 5$ ist, stossen wir auf einen Widerspruch 005 mit der Geraden $0-5-9$. Auch im Falle, dass $\bar{0} \equiv 6$ ist (d. h. $2-8-6$, 006) widerspricht die Gerade $5-1-Q$ der Beziehung $006-978-512$.

Daraus ist ersichtlich, dass der Punkt 0 mindenstens von einem der Punkte P, Q separiert sein muss, und da durch den Punkt 0 vier Konfigurationsgeraden gehen müssen, muss gleichzeitig $3-0$ und $4-0$ (aber $3-4-0$) sein. Begreiflich inzidiert der Punkt 0 nur mit einer der Geraden $2-3$ oder $2-4$ und der zulässigen Permutation (34) halber kann man diese Gerade als $2-4-0$ bezeichnen.

Diese Ergebnisse fassen wir (zur besseren Übersicht) folgenderweise zusammen:

$$(2) \qquad Q:8,\ 3-4-8,\ 2-4-0,\ 3-0,\ 2-8-b\ (b \equiv 5, 6) .$$

Aus der Relation $81P-402-37Q$ bekommt man die Gerade $3-7-Q$ und der dritte Schnittpunkt der Geraden $3-0$ (mit der Kubik) kann nur der Punkt P sein, also $3-0-P$.

Wir überzeugen uns leicht, dass der Punkt 6 mit dem Punkte 4 verbunden ist und dass auf der Geraden $4-6$ entweder der Punkt P, oder Q liegen muss (siehe V).

Im Falle $4-6-P$ bekommt man aus der Beziehung $46P-071-258$ die Gerade $2-5-8$ (siehe 2) und die Separierung $8 : Q, 0, 6$; $Q : 0, 6$; $0 : 6$ d. h. der Punkt 8 wäre vom Type A.

Deswegen muss $4-6-Q$ sein und aus $071-4Q6-239$ bekommen wir die Gerade $2-3-9$.

Dann ergibt sich $4 : 1, 7, 9$ und die übrige durch den Punkt 4 gehende Konfigurationsgerade kann nur die Gerade $4-P-5$ sein. Mühelos finden wir die letzte (sechzehnte) Konfigurationsgerade $2-8-6$ und können dieses Kapitel mit folgendem Hilfsatz schliessen:

Lemma 2. *Wenn sich auf einer irreduziblen Kubik wenigstens ein B^3-Punkt (aber schon kein A-Punkt) befindet, dann ist das Schema dieser Konfiguration:*

	1	*2*	*3*	*4*	$5-6-7$
S_1	*5 7 9 8*	*P 6 3 4*	*P Q 4*	*P Q*	$7-8-9$
	Q 0 6 P	*Q 8 9 0*	*0 7 8*	*5 6*	$9-0-5$.

Bemerkung. In dem zehnten Kapitel wird bewiesen, dass dieses Schema wirklich realisierbar ist.

3. KAPITEL

Es sei *1* der B^1-Punkt, der von den Punkten *2, 3, 4* getrennt ist. Nach der Definition existieren drei Konfigurationsgeraden, die mit keinem der Punkte *1, 2, 3, 4* inzidieren; diese Geraden kann man als $5-8-9$, $5-6-7$, $0-P-Q$ bezeichnen. Wenn wir alle äquivalenten Möglichkeiten ausschliessen, bekommen wir nur folgendes Teilschema:

	1	$5-6-7$	*2*	*3*	*4*	$2-3$
(R)	*5 6 7 8*	$5-8-9$	. .	. .	. .	$2-4$
	P Q 9 0	$0-P-Q$	. .	. .	. .	$3-4$.

Wir setzen voraus, dass

(P$_1$) der Punkt $\bar{1}$ ein Konfigurationspunkt ist.

In diesem Falle kann begreiflich nur $\bar{1} \equiv 1, 2, 3, 4$ sein, weil der Punkt *1* mit den übrigen Konfigurationspunkten verbunden (und von dem Punkte $\bar{1}$ getrennt) ist. Aus der Relation $5P1-6Q1-70\bar{1}$ sehen wir, dass $\bar{1}$ von dem Punkte *1* verschieden sein muss (anderenfalls fallen die Geraden *701, 791* zusammen).

Aus diesem Grunde kann man $\bar{1} \equiv 2$ wählen. Weiter erhält man aus $5P1-6Q1-$ -702, $791-0QP-225$, $5P1-801-9Q2$ vor allem die Separierung $2:5, 1$ und deswegen müssen schon $7-0-2$, $9-Q-2$ die Konfigurationsgeraden sein.

Auf der Geraden $3-4$ können nicht gleichzeitig beide Punkte *0* und *Q* liegen; und der zulässigen Permutation (*68*), (*79*), (*0Q*) nach kann man voraussetzen, dass diese Eigenschaft der Punkt *0* hat. Die letzte Gerade, die durch den Punkt *0* geht, ist also $3-0-a$ (wobei $a \equiv 5, 6, 9$ ist), d. h. $0:4$ und wir können jetzt das Schema R mit den vorangeführten Ergebnissen vervollständigen:

	1	$5-6-7$	*2*	*3*	*4*	$2-3-X$;	*112, 225, 0 : 4*
(R$_1$)	*5 6 7 8*	$5-8-9$	*0 Q*	. *0*	. .	$2-4-Y$	
	P Q 9 0	$0-P-Q$	*7 9*	. *a*	. .	$3-4-Z$	$a \equiv 5, 6, 9$.

Wir nehmen zuerst den Fall

$$a \equiv 5, \quad \text{d.h.} \quad 3-0-5$$

in Betracht.

Direkt aus R_1 sehen wir, dass *4 : 1, 0, 5* ist. Weil durch den Punkt Z (auf der Geraden *3—4—Z*) vier Konfigurationsgeraden gehen müssen, muss Z ≡ *7, 9, Q* sein.

Im Falle Z ≡ *7* ist die Relation *305—719—488* mit der Verbindung *4—8* im Widerspruch (siehe oben *4 : 1, 0, 5*). Im Falle Z ≡ *9*, d. h. *3—4—9* bekommt man aus *305—917—486* die Konfigurationsgerade *4—8—6* und aus der Relation *081—765——24P* die Gerade *2—4—P*. Der Punkt *P* muss zwar mit dem Punkte *3* verbunden sein, kann aber nicht auf der Geraden *2—3* liegen, d. h. *3—P—t* (*t* ≡ *6, 7, 8*) und daraus ergibt sich die letzte durch den Punkt *Q* gehende Konfigurationsgerade *4—Q—7*; ausserdem haben wir die vierte Gerade, auf welcher der Punkt *7* liegt, erhalten, d. h. *7 : 3, 8, P*. Aus der Relation *350—47Q—96P* fogt, dass *P* : 6, 9, *7* ist, und auf der Geraden *3—P—t* muss nur *t* ≡ *8* sein. Dann aber widerspricht die ursprüngliche Voraussetzung *2—3* der Beziehung *958—Q0P—233*.

Daraus ist ersichtlich, dass nur Z ≡ *Q* sein kann und wir können diese Teilergebnisse festlegen:

(1) $$3-0-5,\ 3-4-Q,\ 4:1,0,5\,.$$

Direkt aus der Relation *530—6Q1—748* bekommt man die Gerade *7—4—8*. Wäre *2—4—P*, dann widerspricht *24P—985—Q71* der Geraden *Q—6—1* und deswegen muss *2—4—6* sein.

Durch den Punkt *4* geht noch die letzte Gerade *4—P—9* und daraus ist ersichtlich, dass *3 : 1, 7, 9* ist.

Zu einem weiteren Widerspruch kommen wir, wenn wir voraussetzen, dass *2—3—8* ist (*225—847—366* und deswegen *3 : 6, 1, 7, 9*). Es ist also *2—3—P* die vorletzte und *3—6—8* die letzte Konfigurationsgerade. In diesem Falle ist aber der Punkt *2* (*2 : 1, 5, 8*) vom Type B^3, was begreiflich ausgeschlossen ist.

Unter der Voraussetzung, dass *a* ≡ *5* ist, kann keine neue Konfiguration entstehen und wir können den Fall

$$a \equiv 6, \quad \text{d. i.} \quad 3-0-6$$

untersuchen.

Aus der Relation *567—801—939* sehen wir, dass die Punkte *3* und *9* separiert sind, und für den Punkt *X* auf der Geraden *2—3—X* sind nur zwei Alternativen *X* ≡ *8, P* möglich.

Der Fall *X* ≡ *P* führt aber zum Widerspruch der Beziehung *993—522—8QP* mit der Geraden *0—Q—P* und deswegen muss *X* ≡ *8* sein, d. h. *2—3—8* ist die weitere Konfigurationsgerade.

Durch den Punkt *9* geht noch die letzte Gerade *4—9—t* (wobei *t* ≡ *6, P* ist). Begriflich kann nur *t* ≡ *P* sein, weil anderenfalls aus der Beziehung *496—29Q—Y31* und der Separierung *1 : 3* folgt, dass der Punkt *Y* von dem Punkte *1* separiert ist. Der Schnittpunkt *Y* (der Geraden *2—4—Y* mit der Kubik) muss aber schon mit dem Punkte *1* verbunden sein.

Es ist also *4—9—P* und die weiteren Konfigurationsgeraden *4—2—6* und *3—P—7* bekommen wir aus der Beziehungen $P51-92Q-426$, $2Q9-801-3P7$ (wenn wir die Verbindung $3-P$ erwägen). Deswegen sind die letzten Konfigurationsgeraden $4-8-Q$ und $3-4-5$, was aber der Relation $993-522-8Q8$ widerspricht.

Damit ist auch der Fall $a \equiv 6$ ausgeschlossen und aus dem Teilschema (R_1) bleibt – unter der Voraussetzung (P_1) – nur die Möglichkeit

$$a \equiv 9, \quad \text{d. i.} \quad 3-0-9$$

zu lösen.

Daraus folgt unmittelbar, dass $9 : 4, 6, P$ ist, und im Falle $2-3-8$ wäre der Punkt 9 vom Type B^3. Deswegen bekommen wir für den Punkt X auf der Geraden $2-3$ nur die drei Möglichkeiten $X \equiv 5, 6, P$.

Wegen der Relation $225-309-X78$ sehen wir, dass nicht $X \equiv 5, 6$ sein kann (mit Rücksicht auf die Gerade $5-6-7$) und daraus ergibt sich die Gerade $2-3-P$ und die Separierung $P : 7, 8, 9$ (siehe $225-309-P78$). Die letzte Konfigurationsgerade, die durch den Punkt P gehen kann, muss schon die Gerade $4-6-P$ sein. Leicht finden wir nun die zwei letzten Geraden $3-6-8$, $2-4-8$, die mit den Punkten 6 und 2 inzidieren.

Dann aber widerspricht die Beziehung $702-6P4-5Q8$ der Geraden $5-9-8$.

Die Voraussetzung (P_1) führt also nicht zu einer neuen Konfiguration und wir werden weiterhin erwägen, dass der Punkt $\bar{1}$ kein Konfigurationspunkt ist. Wenn wir uns über die Beziehungen $5P1-6Q1-70\bar{1}$ und $5P1-801-9Q\bar{1}$ klar werden, bekommen wir die Separierung $7 : 0$ und $9 : Q$.

Diese Ergebnisse fassen wir folgendermassen zusammen:

$$(\mathrm{V}_1) \qquad 7:0, \ 9:Q\,.$$

Der Punkt $\bar{1}$ ist nicht konfigurationell.

Wir setzen weiter voraus, dass

(P_2) mindestens einer der Punkte 0, Q nicht mit den Geraden $2-3$, $2-4$, $3-4$ inzidiert.

Der zulässigen Permutation (68), (79), $(0Q)$ nach könnte man diese Eigenschaft dem Punkte 0 zuschreiben und das Teilschema (R) – ohne Beschränkung der Allgemeinheit – folgendermassen erweitern:

$$(\mathrm{R}_2) \quad \begin{array}{llllll} \underline{1} & 5-6-7 & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & 2-3-X\,; \quad 7:0; 9:Q \\ 5\ 6\ 7\ 8 & 5-8-9 & .\ 0 & .\ 0 & .\ r & 2-4-Y \\ P\ Q\ 9\ 0 & 0-P-Q & .\ a & .\ b & .\ s & 3-4-Z\,. \end{array}$$

Auch die Permutation (23) ist zulässig und deswegen bekommen wir für die zwei Konfigurationspunkte a, b folgende drei Möglichkeiten:

$$(\mathrm{M}_{ab}) \qquad a \equiv 5,\ b \equiv 6\,; \quad a \equiv 5,\ b \equiv 9\,; \quad a \equiv 6,\ b \equiv 9\,.$$

Nehmen wir zuerst die Möglichkeit:

(M_{56}) d. i. $2-0-5,\ 3-0-6$

in Betracht, dann sehen wir (der Relation $657-081-399$ nach), dass $3:9$ ist, und wir überzeugen uns leicht von der Separierung $9:3,\ 0,\ Q$. Die letzten zwei Konfigurationsgeraden, die durch den Punkt 9 gehen, können also nur die Geraden $2-9-c$ und $4-9-d$ sein, wobei $c, d \equiv 6, P$ sind. Daraus ist ersichtlich, dass keiner der Punkte $7, 8, Q$ auf der Geraden $3-4$ liegen kann, wenn wir natürlich voraussetzen, dass durch diese Punkte vier Konfigurationsgeraden gehen müssen.

Für den Punkt Z auf der Geraden $3-4$ kommt also nur die Möglichkeit $Z \equiv P$ vor, d. h. $3-4-P$ ist die Konfigurationsgerade. Dann folgt aus den obenangeführten Ergebnissen, dass $c \equiv P$ und $d \equiv 6$ ist (also $3-4-P$, $4-9-6$), was aber der Verbindung $2-3$ widerspricht (wenn wir die Relationen $993-15P-784$, $801-756-42Q$, $P0Q-964-232$ berücksichtigen).

In der weiteren Möglichkeit

(M_{59}), d. i. $2-0-5,\ 3-0-9$

setzen wir für einen Augenblick voraus, dass $Q-7$ ist, wobei begreiflich $T \equiv 2, 3, 4$ der dritte Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kubik ist. Aus der Beziehung $791-Q0P-T35$ folgt, dass nur $T \equiv 3$ sein kann (anderenfalls wäre $T-3$ und gleichzeitig $3:5$), d. h. $Q-7-3$ ist die vorletzte Konfigurationsgerade, auf der der Punkt Q liegt, und die letzte – durch diesen Punkt gehende-Gerade muss (der Separierung $Q:8, 9, 5$ nach) die Gerade $2-4-Q$ sein.

Folglich $Q73-250-469$, $3Q7-469-Z11$, was aber der Verbindung $Z-1$ widerspricht.

Die Voraussetzung $Q-7$ führt also auf einen Widerspruch und deswegen muss $Q:7$ sein. Leicht überzeugen wir uns, dass $Q:5, 7, 9$ ist.

Suchen wir nur den Punkt $T \equiv 2, 3, 4$ auf der Geraden $8-Q-T$.

Die Voraussetzung $T \equiv 4$ kann man ausschliessen, weil in diesem Falle $16Q-958-774$, d. h. $4:7, 1, 5, 0$ wäre.

Auch die Möglichkeit $T \equiv 2$ führt sogleich zu einem Widerspruch. In diesem Falle würden aus der Beziehungen $16Q-958-772$ und $16Q-052-878$ die unzulässige Separierung $7:2, 0, 8, Q$ folgen.

Es ist also nur die letzte Möglichkeit $T \equiv 3$, d. h. $8-Q-3$ übriggeblieben.

Die Separierung $7:3$ (und daraus $7:3, 0, Q$) bekommt man aus der Relation $16Q-958-773$ und deswegen können die letzten zwei Konfigurationsgeraden, die durch den Punkt 7 gehen, nur die Geraden $2-7-u$ und $4-7-v$ sein (wobei $u, v \equiv P, 8$ sind).

Den Fall $u \equiv 8$, $v \equiv P$ führt aber (der Beziehung $278-390-X11$ nach) auf einen Widerspruch mit der Verbindung $X-1$. In dem übriggebliebenen Falle $u \equiv P$, $v \equiv 8$ kommen wir zu der unzulässigen Separierung $3:1, 5, 7, P$. Diese erhalten wir sofort aus der Beziehung $052-917-3PP$, wenn wir uns darüber klar werden, dass der Punkt 3 schon von den Punkten $1, 5, 7$ getrennt ist.

Daraus ergibt sich, dass nicht einmal die Möglichkeit M_{59} zu einer Konfiguration führt und wir können uns dem letzten Falle

$$(M_{69}), \quad \text{d. h.} \quad 2-0-6,\ 3-0-9$$

zuwenden.

Vor allem folgt aus der Relation $567-801-929$ die Separierung $9:2$ und daraus die letzte Konfigurationsgerade $4-9-t$, die durch den Punkt 9 gehen kann (wobei $t \equiv 6, P$ ist).

Nehmen wir zuerst an, dass $t \equiv 6$, d. h. $903-964-22Z$ ist. Deswegen kann nicht $Z \equiv 7, 8, P, Q$ sein (weil anderenfalls $3-4-Z$, $Z:2$ wäre und durch den Punkt Z keine vier Konfigurationsgeraden gehen können). Die letzte zulässige Möglichkeit für den Punkt Z ist also $Z \equiv 5$ und die daraus folgende Gerade $3-4-5$ impliziert die Relation $309-589-412$. Dies aber widerspricht den Bedingungen $2-4$ und $1:2$.

Es ist deswegen $t \equiv P$ und die entsprechende Konfigurationsgerade ist $4-9-P$.

Der Beziehung $971-P51-46\bar{1}$ nach bekommt man die Separierung $4:6$ (oder in Zusammenfassung $4:1, 0, 6$) und die letzte Konfigurationsgerade, auf der der Punkt 6 liegt, muss schon die Gerade $3-6-v$ sein (wobei $v \equiv 8, P$ ist).

Um durch den Punkt Y auf der Geraden $2-4$ vier Konfigurationsgeraden legen zu können, muss $Y \equiv 5, 8$ sein und im Falle $Y \equiv 5$ wäre $4: Q, 1, 0, 6$, wie wir sofort aus der Relation $206-5P1-4QQ$ ersehen. Es muss also $Y \equiv 8$, d. h. $2-4-8$ sein. Daraus folgt $v \equiv 8$ und $3-6-8$ ist die letzte Gerade, die noch durch den Punkt 8 gehen kann.

Die vorletzte und letzte – durch den Punkt 7 gehende – Konfigurationsgerade erhält man aus der Beziehungen $299-801-437$ resp. $903-9P4-2Q7$. Es ist also $3-4-7$, $2-Q-7$ und die übriggebliebene Gerade, auf der der Punkt P liegt, kann nur die Gerade $2-3-P$ sein; dies aber widerspricht der Relation $791-Q0P-235$.

Es ist also notwendig aus den weiteren Erwägungen die Voraussetzung (P_2) auszuschalten und wir sehen, dass die beiden Punkte 0 und Q auf den Geraden der Menge $2-3$, $2-4$, $3-4$ liegen müssen. Es ist begreiflich gleichgültig, welche zwei Geraden wir aus dieser Menge wählen, und deswegen können wir das letzte Teilschema aus diesem Kapitel folgendermassen festlegen:

$$(R_3) \quad \begin{array}{cccccl} \underline{\quad 1 \quad} & 5-6-7 & \underline{\ 2\ } & \underline{\ 3\ } & \underline{\ 4\ } & 2-3-0\,; \\ 5\ 6\ 7\ 8 & 5-8-9 & .\ . & .\ Q & .\ 0 & 2-4-Q \\ P\ Q\ 9\ 0 & 0-P-Q & .\ . & .\ b & .\ a & 3-4-Z \end{array} \qquad \begin{array}{l} 7:0;\ 9:0 \\ \text{Der Punkt } \bar{1} \text{ ist kein} \\ \text{Konfigurationspunkt.} \end{array}$$

Für das Paar ab, wobei $a \equiv 5, 6, 9$ und $b \equiv 5, 7, 8$ ist, kann man – in Hinblick auf die zulässige Permutation $(68), (79), (0Q), (34), (ab)$ – nur folgende Möglichkeiten in Betracht ziehen:

$$(M_{ab}), \qquad ab \equiv 57, 58, 97, 67, 68\,.$$

Jede dieser Möglichkeiten werden wir jetzt getrennt erwägen. Zuerst:

(M_{57}), d. h. $4-0-5$, $3-Q-7$.

Wegen den Beziehungen $Q61-450-278$, $37Q-081-226$ erhält man die Separierung $2:6, 1, 5$ und die Konfigurationsgerade $2-7-8$. Daraus muss die letzte Gerade, die mit dem Punkte 2 inzidiert, $2-9-P$ sein. Dann aber widerspricht $0-P-Q$ der Relation $226-791-8PQ$.

(M_{58}), d. i. $4-0-5$, $3-Q-8$.

Aus $Q16-895-377$ folgt $7:3, 0, Q$ und die übrigen zwei Geraden, die durch den Punkt 7 gehen, können nur die Geraden $7-8-c$, $7-P-d$ sein (wobei $c, d \equiv 24$ ist). Im Falle, dass $c \equiv 2$ ist, stossen wir auf einen Widerspruch der Relation $782-PQ0-d33$ mit der Verbindung $d-3$. Analogisch widerspricht die übriggebliebene Möglichkeit $c \equiv 4$ der Beziehung $773-810-492$ (wenn wir die Geraden $2-4-Q$ vor Augen halten).

(M_{97}), d. i. $4-0-9$, $3-Q-7$.

Es ist zu erwägen, dass sich $3-4-5$ und 221 ergibt (aus den Beziehungen $971-0QP-435$, $345-0QP-221$).

Unter der Voraussetzung, dass $7-8$ ist, muss der dritte Punkt dieser Geraden der Punkt T sein, wobei $T \equiv 2, 4$ ist, und die Gerade $1-Q-6$ führt zu einem Widerspruch mit der Relation $782-904-11Q$, resp. $784-302-Q1Q$.

Der Punkt 7 muss deswegen von dem Punkte 8 getrennt sein und die letzte Gerade, die durch den Punkt 7 geht, ist die Gerade $7-P-T$ (wobei $T \equiv 2, 4$ ist). Der Fall $T \equiv 2$ widerspricht (wie oben) der Relation $7P2-302-QQ1$ (siehe die Verbindung $1-Q$) und daraus folgt, dass $T \equiv 4$, d. h. $7-P-4$ sein muss.

Dann aber ergibt sich $5P1-801-9Q\bar{1}$, $719-42Q-P2\bar{1}$, und da $\bar{1}$ kein Konfigurationspunkt ist, muss ausser der Separierung $2:1, 5, 7$ noch $2:P$ eintreten, was begreiflich unzulässig ist.

(M_{67}), d. i. $4-0-6$, $3-Q-7$.

Der Widerspruch folgt augenblicklich aus der Relation $765-Q0P-341$ (denn wir wissen, dass $3-4$ und $1:3, 4$ ist).

(M_{68}), d. i. $4-0-6$, $3-Q-7$ zu lösen,

wobei wir augenblicklich auf einen Widerspruch zwischen der Relation $6Q1-081-43\bar{1}$ und der Verbindung $3-4$ stossen, wenn wir stets voraussetzen, dass $\bar{1}$ kein Konfigurationspunkt ist.

Die Teilergebnisse dieses Kapitels kann man also im folgenden Nebensatz zusammenfassen:

Lemma 3. *Unter der Vorassetzung, dass eine Konfiguration mit B^1-Punkten (aber ohne B^3- und B^4-Punkte) existiert, können die Punkte dieser Konfiguration nicht auf einer irreduziblen Kubik liegen.*

4. KAPITEL

Es sei *1* der Konfigurationspunkt vom Typ B^2, der von den Punkten *2, 3, 4* getrennt ist. Die drei Konfigurationsgeraden, welche nicht mit den Punkten *1, 2, 3, 4* inzidieren, kann man als die Geraden $0-5-P$, $6-0-7$, $P-8-9$ bezeichnen. Einfach begreifen wir auch, dass für die Geraden, welche durch den Punkt *1* gehen, nur folgende drei Möglichkeiten entstehen können:

M_1 $\quad 1-5-Q,\ 1-0-8,\ 1-P-6,\ 1-7-9\,,$

M_2 $\quad 1-0-Q,\ 1-P-6,\ 1-5-8,\ 1-7-9\,,$

M_3 $\quad 1-7-Q,\ 1-P-6,\ 1-5-8,\ 1-0-9\,.$

Ausserdem muss der Punkt *Q* mit allen drei Punkten *2, 3, 4* verbunden sein, kann aber nicht auf den Geraden $2-3$, $2-4$, $3-4$ liegen.

Weil wir für die Geraden, die durch den Punkt *1* gehen, so viele Möglichkeiten erhalten haben, wird dieses Kapitel im Vergleich mit den vorangegangenen umfangreicher sein.

Wir konzentrieren uns zuerst auf den Fall M_1 und erwägen die Beziehungen $067-8P9-111$, $111-5P0-Q68$. Daraus folgen die Separierungen $Q:6,8$ und $8:6$.

Der Punkt *Q* ist deshalb mindestens von einem der Punkte *7, 9, 0* getrennt und mit den drei übrigen Punkten dieser Menge muss er schon verbunden sein.

Der zulässigen Permutation (*79*), (*68*), (*0P*) nach kann man voraussetzen, dass die drei Punkte, mit denen der Punkt *Q* verbunden ist, entweder eine Menge *7, 9, P* oder *7, 0, P* bilden. Auch die willkürliche Permutation der Punkte *2, 3, 4* ist zulässig (und darauf werde ich in analogischen Fällen nicht mehr hinweisen). Man kann deswegen das Teilschema für den Fall M_1 folgendermassen anführen:

R_1	*1*	*2*	*3*	*4*	$2-3-X,$	$0-5-P,$	$111, Q68,\ 8:6$
	5 0 P 7	. *Q*	. *Q*	. *Q*	$2-4-Y,$	$0-6-7,$	$Q:6,8$
	Q 8 6 9	. *7*	. *P*	. *a*	$3-4-Z,$	$P-8-9,$	$a \equiv 0, 9.$

Berücksichtigen wir zuerst den Fall

$$a \equiv 0\,, \quad \text{d. h.} \quad 4-Q-0$$

und setzen voraus, dass $2-8$ ist. Für den Punkt t ($t \equiv 5, 7$) folgt die Beziehung $27Q-86Q-t0\bar{Q}$ und unter der Voraussetzung, dass $t \equiv 5$ ist, erhält man die Identität $\bar{Q} \equiv P$ (siehe die Gerade $5-0-P$), dies widerspricht der Geraden $Q-P-3$.

Der zweite Fall (wo $t \equiv 7$, d. h. $\bar{Q} \equiv 6$ ist, siehe $7-0-6$) führt auf einen Widerspruch mit der fremden Geraden *Q68*.

Daraus ist erischtlich, dass $2:8$ sein muss, dann aber ist der Punkt 2 von vier Punkten (namentlich $8, P, 0, 1$) separiert.

Wir können also den Fall $a \equiv 0$ ausschliessen und sich dem Falle

$$a \equiv 9\,, \quad \text{d. i.} \quad 4-Q-9$$

zu widmen.

Aus der Beziehung $2Q7-4Q9-Y\bar{Q}1$ ersehen wir (wenn wir die Verbindung $Y-1$ berücksichtigen), dass $\bar{Q}$ ein Konfiguratinspunkt sein muss. Begreiflich ist nur $\bar{Q} \equiv$ $\equiv 0, Q$ (siehe $QQ\bar{Q}$, $Q68$). Im Falle $\bar{Q} \equiv 0$ widerspricht die Beziehung $QQ0-P98-$ -341 den Bedingungen $1:3,4$ und $3-4$. Es muss also QQQ sein, d. h. Q ist ein Inflexionspunkt.

Die zwei Konfigurationsgeraden $4-2-5$, $4-3-6$ bekommt man aus den Relationen $179-QQQ-524$, $89P-QQQ-643$ und die letzte Gerade, die durch den Punkt 4 geht, muss also die Gerade $4-7-8$ sein. Die letzte Gerade, auf der der Punkt 6 liegt, ist $2-6-9$ (der Beziehung $5Q1-487-269$ nach) und der Punkt 7 ($7:3,5,P$) ist vom Type B^1. Das schliessen wir aus und sehen gleichzeitig, dass die Möglichkeit M_1 zu keiner neuen Konfiguration führen kann.

Deswegen werden wir uns der Möglichkeit M_2 zuwenden und das dazugehörige Teilschema folgendermassen anführen:

R_2	1	2	3	4	$2-3-X,$	$0-5-P$
	$0\ P\ 5\ 7$	$.\ Q$	$.\ Q$	$.\ Q$	$2-4-Y,$	$0-6-7$
	$Q\ 6\ 8\ 9$	$.\ a$	$.\ b$	$.\ c$	$3-4-Z,$	$P-8-9.$

Es ist klar, dass die Verbindung $8-0$ und $8-7$ nicht gleichzeitig eintreten kann. Ein solcher Fall ermöglicht auf der Geraden $0-8$, bzw. $8-7$ die Punkte 2 und 3 zu wählen, dann aber wäre der Punkt 4 – welcher von den Punkten $1, 0, 8$ getrennt ist – vom Type B^3.

Deswegen ergeben sich nur folgende drei Möglichkeiten:

M_{21}	$8:0,7$
M_{22}	$8:0,\ 8-7$ und
M_{23}	$8-0,\ 8:7.$

Nehmen wir zuerst die Möglichket

$$M_{21}, \qquad \text{d. i.} \quad 8:0,7$$

in Betracht.

Aus der Beziehung $719-05P-688$ ist ersichtlich, dass noch $8:6$ ist. Also $8:0,7,6$ und deswegen muss der Punkt Q auf einer von den Geraden liegen, die durch den Punkt 8 gehen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man diese Gerade als $4-8-Q$ bezeichnen und die letzte Gerade, die noch mit dem Punkte 8 inzidiert, kann nur die Gerade $2-3-8$ sein. Aus der Beziehung $6P1-791-08\bar{1}$ und der Separierung $8:0$ folgt, dass der Punkt $\bar{1}$ kein Konfigurationspunkt sein kann, und daraus folgt (siehe die Beziehung $581-0Q1-P4\bar{1}$) die Separierung $4:P$. Mit Rücksicht auf die zulässige Permutation (23) kann man voraussetzen, dass die letzte durch den Punkt P gehende Gerade die Gerade $2-P-t$ $(t \equiv Q, 7)$ ist.

Wäre $t \equiv Q$, würde man zum Widerspruch der Grundbedingungen $3-4$, $1:3$ mit der Beziehung $2PQ-868-314$ kommen.

Es muss also $2-P-7$ sein. Die übrige durch den Punkt 7 gehende Konfigurationsgerade ist die Gerade $4-5-7$, da schon $4:1, P$ ist und der Relation $Q10-886-457$ nach kann also die Gerade 457 keine fremde Gerade sein. Im diesen Falle ist der Punkt 3 $(3:1, P, 7)$ vom Typ B^3.

M_{22}, d. h. $8:0,\ 8-7$.

Auf die Gerade $8-7$ kann man vor allem den Punkt 2 legen, d. h. $2-8-7$, und aus den Beziehungen $719-05P-688$, $197-688-PP2$ folgt die Separierung $8:0, 6$ und $2:1, P$. Weiter sehen wir aus der Anführung R_2, dass auf der Geraden $2-Q-a$ nur $a \equiv 5, 6, 9, 0$ sein kann. Mit Hinblick auf die Beziehung $278-Q01-a65$ kann man sofort die Möglichkeit $a \equiv 0$ ausschliessen (siehe $0-6-7$). Im Falle $a \equiv 5$ ergibt sich nicht nur 565, $2-Q-5$ sondern auch $Q96$ (siehe $2PP-581-Q96$), was zu einer unzulässigen Separierung $6:9, Q, 5, 8$ führt.

Deswegen bleiben nur zwei Möglichkeiten $a \equiv 9, 6$ zu lösen.

Im Falle

$$a \equiv 9, \quad \text{d. i.} \quad 2-Q-9,\ 965$$

sehen wir, dass $6:5, 8, 9$ wäre und die zwei übrigen durch den Punkt 6 gehenden Konfigurationsgeraden kann man als die Geraden $6-Q-3$, $2-4-6$ bezeichnen. Die Separierung $5:2, 6, 9$ folgt unmittelbar aus der Beziehung $868-791-255$ und deswegen sind $3-5-7$, $4-Q-5$ die letzten zwei Geraden, die noch mit dem Punkte 5 inzidieren können. Dann aber widerspricht die Relation $735-0Q1-668$ dem Ergebnis 886.

Aus der Möglichkeit M_{22} ist nur der Fall

$$a \equiv 6, \quad \text{d. i.} \quad 2-Q-6,\ 665$$

übriggeblieben.

Wäre $9-0-t$, dann ist $t \equiv 3, 4$, und die Relation $98P-076-t21$ widerspricht den Resultaten $t-2$, $1:2$. Es ist also $9:0$. Weiter folgt aus $688-6P1-595$, $851-P50-$ $-99Q$ die Separierung $9:0, 5, Q$. Der zulässigen Permutation (34) halber kann man $9-6-3$ und $2-4-9$ als die letzten zwei Konfigurationsgeraden wählen, die durch den Punkt 9 gehen. Die Gerade $2-3-5$ ergibt sich aus $89P-760-235$ und folglich kann auf der Geraden $5-4-v$ $v \equiv 7, Q$ sein. Mit Hinsicht auf die Verbindung $3-Q$ und Beziehung $665-924-3Qv$ muss $v \equiv 7$, d.h. $5-4-7$, $3-Q-7$ entstehen und durch den Punkt 7 gehen fünf verschiedene Konfigurationsgeraden.

Die ersten zwei Möglichkeiten M_{21} und M_{22} (für die Anführung R_2) können also keine neuen Konfigurationen ergeben (wie wir gerade festgestellt haben). Die letzte Möglichkeit

M_{23}, d. i. $8-0,\ 8:7$

führt dagegen zu einer neuen Konfiguration, wie wir uns übrigens gleich überzeugen werden.

Man legt (selbstverständlich ohne Beschränkung der Allgemeinheit) den Punkt 2 auf die Gerade $0-8$, also $2-0-8$. Mit Rücksicht auf $719-05P-688$, $688-P50-$ -112 folgt, dass $8:6,7$ ist.

Jetzt werden wir für einen Augenblick voraussetzen, dass

$$(P_1) \qquad 9:2$$

ist.

Durch den Punkt 9 müssen vier Konfigurationsgeraden gehen, deswegen ist $9-3$, $9-4$, aber nicht $3-4-9$. Daraus ist ersichtlich, dass der Punkt 9 mit dem Punkte Q verbunden sein muss, weil anderenfalls der Punkt 9 ($9:0,2,Q$) vom Type B^1 wäre. Begreiflich kann man $9-Q-4$ wählen und die weitere Konfigurationsgerade $2-4-6$ bekommt man aus $0Q1-89P-246$.

Wäre $3-6-Q$, dann wäre die letzte durch den Punkt 9 gehende Gerade die Gerade $3-9-5$ und die Beziehungen $10Q-886-523$, $395-280-5PP$ sind dann im Widerspruch mit der Geraden $5-P-0$.

Da aber $3-6-Q$ nicht entstehen kann, muss die letzte Gerade, die durch den Punkt 6 geht (und gleichzeitig auch die letzte mit dem Punkte 9 inzidierbare Gerade) die Gerade $3-6-9$ sein.

Wir haben für den Punkt a auf der Geraden $2-Q-a$ nur folgende drei Möglichkeiten: $a \equiv 5, 7, P$. Wäre $a \equiv 7$, dann ist der Punkt 0 ($0:3,4,9$) vom Typ B^1. Auch der Fall $a \equiv P$ führt zu einem Widerspruch, da aus $8P9-0Q1-227$, $89P-$ $-112-57Q$ die unzulässige Separierung $7:2,5,Q,8$ folgt. Es bleibt also nur die letzte Möglichkeit $a \equiv 5$, d. h. $2-Q-5$ übrig.

Eine der Geraden, auf welchen der Punkt 7 liegt, muss die Gerade $2-3-7$ sein (anderenfalls wäre $3-Q-7$ und auf der Geraden $2-3$ könnte nur der Punkt P liegen, was zu einem Widerspruch der Beziehung $23P-0Q1-876$ mit der Geraden $0-7-6$ führt). Folglich $208-719-3QP$, d. h. $3-Q-P$ und der Punkt P — der von den Punkten $2,4,7$ getrennt ist — ist ein B^1-Punkt.

Daraus ist ersichtlich, dass unsere Voraussetzung (P_1) falsch ist, und weiterhin kann man voraussetzen, dass

$$(P_2) \qquad 9-2,\ 688,\ 112,\ 2-0-8,\ 8:6,7$$

ist.

Leicht überzeugen wir uns, dass auf der Geraden $2-9$ einer der Punkte $3, 4$ liegen muss (im Falle $2-9-Q$ wäre $6:2,5,Q,8$, was aus den Beziehungen $89P-0Q1-$

-226, $89P-112-56Q$ hervorgeht). Begreiflich können wir auf die Gerade $2-9$ den Punkt 4 legen, also $2-9-4$. Die weitere Konfigurationsgerade $4-5-6$ bekommen wir aus $112-8P9-564$ und aus der Separierung $4 : 1, 0$. Daraus ist nämlich ersichtlich, dass nicht $4 : 5, 6$ sein kann, und deswegen kann 564 nicht eine fremde Gerade sein.

Für den Punkt c auf der Geraden $4-Q-c$ (siehe R_2) können wir die Werte $c \equiv 7, 8, P$ einsetzen und mühelos beweisen wir dann, dass $c \equiv 7$ sein muss, weil wir anderenfalls – mit Rücksicht auf die Beziehung $249-0Q1-8c7$ – zu einem Widerspruch der Geraden $8c7$ mit 886, resp. $8-P-9$ kommen. Daraus folgt $4-Q-7$ und die Bedingung 877.

Auf der Geraden $2-Q$ kann nicht der Punkt 5 liegen, denn aus $2Q5-076-844$ folgt $8 : 6, 7, 4$ und der Punkt 8 wäre vom Type B^3. Einfach überzeugen wir uns, dass man (unter diesen Bedingungen) auf die Gerade $2-Q$ nur den Punkt 6 legen kann, d. h. $2-Q-6$ ist die weitere Konfigurationsgerade und ausserdem ist $3 : 1, 0, 6$.

Für den dritten Schnittpunkt f der Geraden $2-Q-f$ mit der Kubik ergibt sich $f \equiv Q, 5$. Ist $f \equiv Q$, dann widerspricht die Verbindung $2-Q-6$ der Beziehung $89P-0Q1-236$. Es ist deswegen $3-9-5$ und aus den Relationen $112-Q74-099$, $099-851-237$, $208-719-3QP$ erhalten wir die Geraden $2-3-7$, $3-Q-P$, so dass die letzte Konfigurationsgerade die Gerade $3-4-8$ sein muss.

Dieses Totalschema vermerken wir uns, da es tatsächlich zu einer neuen Konfiguration führt und – wie wir übrigens weiter sehen werden – auch realisierbar ist:

	1	2	3	4	$0-5-P$
S_2	$0\ P\ 5\ 7$	$0\ Q\ 3\ 4$	$9\ Q\ 4$	$5\ Q$	$0-6-7$
	$Q\ 6\ 8\ 9$	$8\ 6\ 7\ 9$	$5\ P\ 8$	$6\ 7$	$P-8-9.$

Wir werden uns jetzt mit der letzten Möglichkeit dieses Kapitels beschäftigen. Zuerst führen wir das dazugehörige Totalschema an:

	1	2	3	4	$2-3-X,$	$0-5-P$
R_3	$7\ P\ 5\ 0$	$.\ Q$	$.\ Q$	$.\ Q$	$2-4-Y,$	$0-6-7$
	$Q\ 6\ 8\ 9$	$.\ .$	$.\ .$	$.\ .$	$3-4-Z,$	$P-8-9.$

Wir setzen voraus, dass der Punkt Q von dem Punkte P und 5 getrennt ist, d. h.

(P_r) $$Q : P, 5, r, \quad \text{wobei} \quad r \equiv 6, 8, 9, 0$$
ist.

Der Reihe nach treten wir zuerst an die Möglichkeit

(P_6), $$\text{d. i.} \quad Q : P, 5, 6$$
heran.

Die drei übrigen Konfigurationsgeraden, die durch den Punkt Q gehen, kann man begreiflich als $2-Q-8$, $3-Q-9$, $4-Q-0$ bezeichnen. Da der Punkt Z (auf der

Geraden $3-4$) mit dem Punkt 1 verbunden sein muss, sehen wir aus $390-40Q-$ $-Z1\bar{Q}$, dass $Z-\bar{Q}-1$ eine Konfigurationsgerade ist und dass für den Konfigurationspunkt $\bar{Q}$ nur die Möglichkeiten $5, 6, P, Q$ in Betracht kommen. Dann ergibt sich $20Q-39Q-XP\bar{Q}$ und daraus ist ersichtlich, dass im Falle $\bar{Q} \equiv 5$ genau $X \equiv 0$ sein muss (siehe die Konfigurationsgerade $0-5-P$) und dass durch den Punkt 0 eine fünfte Gerade geht. Im Falle $\bar{Q} \equiv 6$ wäre analogisch $X \equiv 1$ (siehe $6-P-1$) und die fremde Gerade 231 würde den Grundbedingungen $1:2$, $2-3$ widersprechen. Folglich können wir für den Punkt $\bar{Q}$ nur die Werte P oder Q in Betracht nehmen.

Wenn wir noch für einen Augenblick voraussetzen, dass $8-6$ ist, dann muss der dritte Punkt $T \equiv 3, 4$ dieser Geraden mit dem Punkte Q verbunden sein (siehe $815-670-TQP$), was aber der Separierung $P:Q$ widerspricht und TQP keine Konfigurationsgerade ist. Unsere Voraussetzung $8-6$ ist falsch und diese zwei Punkte sind getrennt.

Im Falle $Z \equiv 8$ wäre auch $\bar{Q} \equiv 5$ (wenn man $Z-\bar{Q}-1$ mit $8-5-1$ vergleicht) und unter diesen Umständen begreifen wir sofort, dass die letzte durch den Punkt 8 gehende Konfigurationsgerade die Gerade $8-7-T$ sein muss (wobei $T \equiv 3, 4$ ist). Wäre $T \equiv 3$, dann widerspricht die Beziehung $3Q9-7Q1-8\bar{Q}0$ den Ergebnissen $8:0$, $\bar{Q}-0$. Es ist also $T \equiv 4$, d. h. $8-7-4$ und im Hinblick auf die Relationen $478-019-QQP$, $QQP-901-346$, $28Q-39Q-XPP$ sehen wir, dass $\bar{Q} \equiv P$ und $3-4-6$ ist.

Für den Punkt X kommen auf der Geraden $2-3$ also nur zwei Möglichkeiten $X \equiv 7$, P in Betracht. Im Falle $X \equiv 7$ kommen wir zu einem Widerspruch der Geraden $3-5-P$ (die noch durch den Punkt 3 gehen kann) mit der Konfigurationsgeraden $0-5-P$.

Es bleibt also nur die Möglichkeit $X \equiv P$ übrig, d. h. PPP, $2-3-P$ und $3-5-7$ ist die letzte Gerade, die durch den Punkt 3 geht. Jetzte aber widerspricht die Beziehung $23P-Q71-856$ der Geraden $8-5-1$.

Damit ist auch der Fall (P_6) gelöst und wir können an den Fall

(P_8), d. i. $Q:5, P, 8$

herantreten.

Die übrigen durch den Punkt Q gehenden drei Geraden kann man als $2-Q-6$, $3-Q-9$, $4-Q-0$ bezeichnen und aus der Relation $39Q-40Q-Z1\bar{Q}$ entsteht die weitere Konfigurationsgerade $Z-1-\bar{Q}$ (weil der Punkt Z mit dem Punkte 1 verbunden sein muss). Für den Konfigurationspunkt $\bar{Q}$ ergeben sich also folgende Möglichkeiten: $\bar{Q} \equiv Q, P, 5, 8$.

Man bezeichnet mit t den dritten Punkt der Geraden $12t$. Folglich $Q71-Q62-\bar{Q}0t$ und in den Fällen $\bar{Q} \equiv Q, 5, P$ wäre $t \equiv 4, P, 5$ und die Gerade würde den Geraden $2-4-Y$, $1-6-P$, $1-8-5$ widersprechen. Es muss also $\bar{Q} \equiv 8$ sein, d. h. $QQ8$, und aus $1-\bar{Q}-Z$ folgt deswegen Z $\equiv 5$, d. h. $3-4-5$.

Dann ist aber $Y \equiv \bar{1}$ (siehe $6P1-091-78\bar{1}$, $QQ8-607-24\bar{1}$), was mit Rücksicht auf die Verbindung $Y-1$ ausgeschlossen ist.

Im dritten möglichen Falle

(P_9), d. i. $Q : P, 5, 9$

kann man vor allem die drei übriggebliebenen Konfigurationsgeraden, die durch den Punkt Q gehen, als $2-Q-6$, $3-Q-8$, $4-Q-0$ wählen und mit t den dritten Punkt auf der Geraden PQ bezeichnen, also PQt. Wäre t ein Konfigurationspunkt, dann wäre $t \equiv Q, P, 5, 9$ was begreiflich die Beziehung $05P-71Q-68t$ ausschliesst. Es kann also t kein Konfigurationspunkt sein, d. h. $P : Q$ und ausserdem noch $6 : 8$.

Wenn für einen Augenblick voraussetzen, dass $8 : 7$ und daraus $8 : 6, 7, 0$ ist, dann muss die letzte durch den Punkt 8 gehende Gerade die Gerade $2-4-8$ sein. Daraus folgt $518-0Q4-P72$, $P89-7Q1-230$ und ein Widerspruch mit $2 : 0$, $2-3$.

Es muss also $8-7$ sein und der besseren Übersicht halber führen wir die bisherigen Teilergebnisse folgenderweise an:

(1) $2-Q-6$, $3-Q-8$, $4-Q-0$, PQt, $68t$, $8 : 6, 0$, $8-7$, t ist kein Konfigurationspunkt.

Für den Punkt T der Geraden $8-7-T$ kann man nur die Werte $2, 4$ einsetzen. Aus den Relationen $89P-706-T11$. $P98-Q17-t0T$ und der Tatsache, dass t kein Konfigurationspunkt ist, folgt die Beziehung $T : 0$. Deswegen ist offensichtlich $T \equiv 2$ (siehe $4-0-Q$). So haben wir $8-7-2$, 112 und $2 : 0$ erhalten und weiter sehen wir aus der Beziehung $581-091-PP2$, dass auch $2 : 1, 0, P$ ist. Für den Punkt Y auf der Geraden $2-4-Y$ ergibt sich $782-0Q4-63Y$, d. h. Y kann nur $5, 9$ sein.

Wäre $Y \equiv 9$, dann stösse $6Q2-901-341$ an $3-4$, $1 : 3$. Es ist also $2-4-5$ und $3-5-6$ ist die letzte Gerade, welche noch durch den Punkt 5 gehen kann. Leicht sehen wir, dass $4-7-9$, $2-3-9$, $3-4-P$ die drei übriggebliebenen Konfigurationsgeraden sein müssen. In diesem Falle ist aber der Punkt 2 – der von den Punkten $1, 0, P$ getrennt ist – vom Type B^1.

Es verbleibt noch über die letzte Möglichkeit

(P_0), d. h. $Q : P, 5, 0$

zu sprechen.

Man bezeichnet $2-Q-6$, $3-Q-8$, $4-Q-9$ als die letzten drei druch den Punkt Q gehenden Konfigurationsgeraden. Wäre 8 mit 6 verbunden, dann könnte auf dieser Geraden nur der Punkt 4 liegen und wegen der Relation $158-706-QP3$ würde man zu einen Widerspruch mit $Q-8-3$ kommen. Es muss also $8 : 6$ sein.

Infolge der Beziehung $346-89P-QQ1$ und der Geraden $Q-1-7$ kann auch nicht $Z \equiv 6$ sein und die letzte durch den Punkt 6 gehende Gerade muss also eine Gerade $6-T-t$ sein, wobei $T \equiv 3, 4$ und $t \equiv 5, 9$ ist. Den Fall $T \equiv 4$ (und daraus $t \equiv 5$, siehe $4-9-Q$) kann man sofort ausschliessen, was wir sogleich begreifen, wenn wir uns über $645-Q38-2Z1$ und $2 : 1$, $1-Z$ klar werden. Folglich $6-3-t$, wobei $t \equiv 5, 9$ ist.

Im Falle $t \equiv 9$, d. h. $6-3-9$ muss $5 : Q, 9, 6$ und gleichzeitig $5-7-S$ sein, wobei

$S \equiv 2, 4$ ist. Der Relation $581-7Q1-S3\bar{1}$ halber sehen wir, dass unter der Voraussetzung $S \equiv 2, 4$ auch $\bar{1} \equiv X, Z$ wäre, was begreiflich nicht möglich ist, da der Punkt 1 mit beiden Punkten X und Z verbunden sein muss.

Es ist also $t \equiv 5$, d. h. $6-3-5$. Wenn wir erwägen, dass die Punkte $5, 7, 9$ eine fremde Gerade bilden (siehe $61P-3Q8-579$), folgen daraus die Separierungen $5 : 7, 9, Q$; $9 : 5, 6, 7$. Die letzten zwei Konfigurationsgeraden, die durch die Punkte 5 und 9 gehen, müssen deswegen die Geraden $2-3-9$, $2-4-5$ sein und dann widersprechen die Beziehungen $579-8Q3-112$, $112-876-9QQ$ der Geraden $9-Q-4$.

Damit haben wir bewiesen, dass

(T_1) der Punkt Q mindestens mit einem der Punkten $5, P$ verbunden ist.

Man setzt voraus (für einen Augenblick), dass Q mit beiden Punkten 5 und P verbunden ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man auf die Gerade $5-Q$ den Punkt 2 und analogisch auf $P-Q$ den Punkt 3 legen.

Aus den Beziehungen $5P0-Q71-266$, $05P-71Q-683$ folgt, dass $6 : 2$ ist, weil schon der Punkt 6 mit dem Punkte 3 (so wie mit dem Punkte 4) verbunden sein muss, und man bekommt die Konfigurationsgerade $6-8-3$. Durch den Punkt 9 müssen vier Geraden gehen und deswegen kann nicht $2-4-9$ sein. Der Separierung $2 : 1, P, 6$ nach sehen wir, dass $2-9$ ist, dass aber nicht $2-3-9$ sein kann (anderenfalls widerspricht die Relation $239-581-Q60$ der Geraden $7-6-0$). Daraus folgt, dass auf der Geraden $2-9$ nur der Punkt 7 liegen kann, d. h. dass $2-9-7$ ist.

In diesem Falle aber würde die Gerade $2-Q-5$ der Beziehung $\bar{7}60-982-235$ widersprechen und daraus ist ersichtlich, dass

(T_2) gleichzeitig nicht $5-Q$ und $P-Q$ entstehen kann.

Im Falle $P-Q$ ergeben sich für den Punkt $\bar{1}$ zwei Möglichkeiten, oder besser gesagt wir werden jetzt unterscheiden, ob dieser Punkt konfigurationell oder nichtkonfigurationell ist.

(P_1) Vor allem setzen wir voraus, dass $\bar{1}$ nicht ein Konfigurationspunkt ist (begreiflich stets unter der Bedingung $P-Q$).

Der Anführung T_2 nach muss schon $Q : 5$ sein und auf der Geraden $P-Q$ kann man den Punkt 2 wählen, d. h. $2-Q-P$. Aus den Beziehungen $16P-17Q-\bar{1}02$, $16P-109-\bar{1}78$, $P50-Q17-286$ sehen wir sofort, dass $7 : 8$ und $2 : 0, 1$ ist. Folglich kann 286 nicht eine fremde Gerade sein. Also $2-8-6$. Diese Teilergebnisse fassen wir der besseren Übersicht halber zusammen:

(I) $$2-Q-P,\ 2-8-6,\ 2 : 0, 1,\ 7 : 8, P,\ Q : 5\,.$$

Der Punkt 7 muss noch von einem der Punkte $2, 5, 9$ separiert sein. Es sind also folgende Möglichkeiten zu erwägen:

(I_r) $$7 : 8, P, r\,(r \equiv 9, 5, 2)\,.$$

(I_9), d. h. $7 : 8, P, 9$.

Die beiden übrigen Geraden, welche durch den Punkt *7* gehen, kann man als *7–3–5*, *2–4–7* bezeichnen und aus *P50–Q71–239* folgt die weitere Konfigurationsgerade *2–3–9*. Dann ist *4–5–t* ($t \equiv 6, 9$) die letzte durch den Punkt *5* gehende Konfigurationsgerade. Deswegen ergibt sich aus *427–581–t6Q* noch *6 : Q*.

Wäre $t \equiv 9$, dann kann der Punkt *6* noch auf der Geraden *3–4* liegen und die Gerade *4–Q–0* ergibt sich aus *375–61P–4Q0*. In diesem Falle wäre der Punkt *0* (*0 : 2, 3, 8*) vom Type B^1.

Auch in dem zweiten Falle, d. h. $t \equiv 6$ und folglich *4–5–6*, *66Q* kommt man zu einem Widerspruch, weil *4–Q–9* die letzte durch den Punkt *9* gehende Gerade ist und die daraus hervorgehende Beziehung *274–66Q–809* der Geraden *8–P–9* widerspricht;

I_5), d.h. *7 : 8, P, 5*.

Durch den Punkt *7* kann man noch die Geraden *7–9–3*, *2–4–7* legen und *2–3–5* ergibt sich aus *P98–Q71–235*. Analogisch wie oben ist *4–5–t* ($t \equiv 6, 9$) die letzte Gerade, die noch durch den Punkt *5* gehen kann. Daraus folgt die Beziehung *427–581–t6Q* und Separierung *6 : Q*.

Im Falle $t \equiv 6$, d. h. *4–5–6*, *66Q* muss wieder *4–Q–9* sein, was aber die Beziehung *274–66Q–089* impliziert, welche der Geraden *8–9–P* widerspricht.

Es muss also $t \equiv 9$, d. h. *4–5–9* und *96Q* sein. Dann ist *3–4–6* die letzte durch den Punkt *6* gehende Gerade und die weitere Konfigurationsgerade *4–Q–8* bekommt man leicht aus *379–61P–4Q8*. Daraus ergibt sich die sechzehnte Gerade *3–Q–0* und der Punkt *8* (*8 : 3, 7, 0*) ist vom Type B^1.

Bei der letzten Möglichkeit

(I_2), d. h. *7 : 8, P, 2*

kann man *3–7–5* und *4–7–9* als zwei Geraden, die sich im Punkte *7* schneiden, wählen und aus *P50–Q71–239*, *P98–Q71–245* folgen die Geraden *2–3–9*, *2–4–5*.

Im Falle *3–4–6* wäre *5* (*5 : Q, 6, 9*) vom Type A, im Falle *3–4–0* wäre *0* (*0 : 2, 8, Q*) vom Type B^1 und in dem letzten Falle *3–4–8* wäre *8* (*8 : 7, 0, Q*) vom Type B^1.

Damit haben wir bewiesen, dass

(T_3) unter der Voraussetzung *P–Q*, der Punkt $\bar{7}$ ein Konfigurationspunkt sein muss.

Den Anführungen T_2, T_3 nach kann man weiter voraussetzen, dass *Q : 5* ist, und auf der Geraden *P–Q* den Punkt *2* wählen. Es ist also *2–Q–P*. Folglich *P50–Q17–286*, *6P1–091–78*$\bar{1}$ und wegen des Widerspruches *78*$\bar{1}$ mit *7Q1* bzw. *682* kann sich nicht $\bar{1} \equiv 1$ bzw. $\bar{1} \equiv 2$ ergeben. Begreiflich wählen wir $\bar{1} \equiv 3$, d. h. *113*, *378*.

Wäre *378* eine fremde Gerade, dann *3 : 7, 8, 1, P*. Deswegen ist *3–7–8* eine Konfigurationsgerade und *2 : 1, 6, 8*; *8 : 2, 6, 0*. Dann kann durch den Punkt *8* noch die Gerade *4–8–Q* gehen und mit Rücksicht auf *6 : 2* ist der Punkt *6* schon mit beiden Punkten *3* und *4* verbunden, aber inzidiert nicht mit der Geraden $3-4$. $3-6-Q$ ist also eine der Geraden, die durch den Punkt *6* gehen.

Erwägt man die Gültigkeit der Beziehung $230-P61-QQ9$, $3Q6-4Q8-Z92$, $2:1,6,8$, dann kann man auf der Konfigurationsgeraden $Z-9-2$ für Z nur *5* einsetzten, d. h. $2-9-5$, $3-4-5$.

In diesem Augenblick wäre aber der Punkt *4* (der von den Punkten *1*, *P*, *0* getrennt ist) vom Type B^1.

Den obenangeführten Resultaten nach sahen wir, dass

$$(T_4) \qquad P:Q \text{ und gleichzeitig } Q-5 \text{ sein muss .}$$

Auf die Gerade $Q-5$ legt man den Punkt *2*, also $2-Q-5$, und $5P0-Q71-266$ impliziert die Separierung $2:6,1$. Im Falle $8-6$ wäre $T\equiv 2,3,4$ der dritte Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kubik und man würde zu einem Widerspruch der Relation $851-607-TPQ$ mit den Grundbedingungen $T-Q$, $Q:P$ kommen. Daraus folgt die Separierung $6:8,2$ und der besseren Übersicht halber führen wir folgendermassen die drei übrigen Möglichkeiten an:

$$(P_r) \qquad 2-Q-5,\ 266,\ 2:6,1,\ P:Q,\ 6:8,2,r \quad (\text{wobei } r\equiv Q,9,5 \text{ ist}) .$$

Bei der Möglichkeit

$$(P_Q), \qquad \text{d. h. } 6:8,2,Q$$

kann man $3-6-5$, $4-6-9$ als die letzten zwei Geraden wählen, die mit dem Punkte *6* inzidieren. Mühelos begreifen wir, dass mit dem Punkte *7* noch die Geraden $2-7-$ $-t$ $(t\equiv 8,9,P)$ und $3-4-7$ inzidieren. Mit Rücksicht auf die Beziehung $347-$ $-662-59t$, kann nur $t\equiv 9$ sein, d. h. $2-7-9$, 995, und die Relation $995-076-123$ widerspricht den Bedingungen $1:2$, $2-3$.

$$(P_9), \qquad \text{d. h. } 6:8,2,9 .$$

Analogisch wählt man $3-Q-6$, $4-5-6$ als die letzten zwei Geraden, die durch den Punkt *6* gehen. Wäre $9-Q$, dann inzidiert diese Gerade mit dem Punkte *4* und $8P9-564-11Q$ schliesst $1-7-Q$ aus. Es ist also $9:Q$, d. h. zusammen $9:6,Q,5$, und auf der Geraden $9-4$ liegt noch der Punkt *2* (siehe $3Q6-456-Z22$, $9-2$), d. h. $2-4-9$ ist die vorletzte und $9-3-7$ die letzte Konfigurationsgerade, die durch den Punkt *9* geht.

Im Falle $4-Q-0$ widerspricht $Z-1$ der Beziehung $389-4Q0-Z11$.

Im Falle $4-Q-8$ widerspricht $98P-7Q1-346$ der Beziehung $3-Q-6$.

Daraus aber ergibt sich $Q:0,8,9$ und noch $Q:P$, was begreiflich unzulässig ist.

Bei der letzten Möglichkeit:

$$(P_5) \qquad \text{d. h. } 6:8,2,5$$

wählen wir $3-Q-6$, $4-6-9$ als die letzten Geraden, die mit dem Punkte 6 inzidieren, und da durch den Punkt 7 vier Konfigurationsgeraden gehen müssen, muss gleichzeitig $2-7$, $3-7$, aber nicht $2-3-7$ sein. Auf keiner dieser Geraden kann der Punkt 8 liegen (siehe $2-7-8$ und der Widerspruch $1-Q-7$ mit $P98-662-147$, bzw. im Falle $3-7-8$ die Gerade $1-X$ und die Beziehung $378-2Q5-X11$). Es muss notwendig $7:8$ sein und ausserdem sehen wir, dass $4-Q-8$, $2-3-8$ die übrigen durch 8 gehenden Konfigurationsgeraden sind. Dann widerspricht aber die Relation $P98-662-143$ den gut bekannten Beziehungen $1:4$, $4-3$.

Die Ergebnisse dieses Kapitels kann man mit Hilfe des folgenden Nebensatzes zusammenfassen:

Lemma 4. *Besteht eine Konfiguration mit B^2- (aber nicht mit A-, B^1-, B^3-, B^4-) Punkten, die mit einer irreduziblen Kurve dritter Ordnung inzidiert, dann kann man das Schema dieser Konfiguration folgendermassen ausdrücken:*

	1	2	3	4	$0-5-P$
S_2	$0\ P\ 5\ 7$	$0\ Q\ 3\ 4$	$9\ Q\ 4$	$5\ Q$	$0-6-7$
	$Q\ 6\ 8\ 9$	$8\ 6\ 7\ 9$	$5\ P\ 8$	$6\ 7$	$P-8-9$.

5. KAPITEL

In der im Literaturverzeichniss angeführten Arbeit [13] hat J. Metelka bewiesen, dass in den Konfigurationen mit A-Punkten keine D-Punkte vorkommen können. Diese D-Punkte ergeben sich auch nicht in den obenangeführten Schemen S_1 und S_2. Die einzige Konfiguration mit den D-Punkten, in welcher gleichzeitig keine B-Punkte vorkommen, ist vom Type $D_4C_7E_1$. Das Totalschema

9	Q	0	P	1
$1\ 2\ 3\ 7$	$1\ 2\ 3\ 4$	$3\ 4\ 6$	$2\ 4\ 5$	$2\ 0$
$4\ 5\ 6\ 8$	$6\ 7\ 8\ 5$	$5\ 8\ 7$	$8\ 7\ 6$	$3\ P$

dieser Konfiguration kann man mit den Punkten und Geraden in der Projektionsebene über dem Körper der komplexen Zahlen realisieren, wie ich übrigens in meiner Arbeit (16) schon früher bewiesen habe.

Aus der Beziehung $194-350-228$ ersehen wir fast augenblicklich den Widerspruch mit der Geraden $P-2-8$. Daraus ist ersichtlich, dass die Konfigurationspunkte nicht auf einer irreduziblen Kurve dritter Ordnung liegen.

Man kann also den folgenden Hilfsatz dieses kurzen Kapitels aussprechen:

Lemma 5. *Mit einer irreduziblen Kubik kann keine Konfiguration mit D-Punkten inzidieren.*

6. KAPITEL

In diesem Kapitel suchen wir die Schemen von Konfigurationen, welche nur E- und C-Punkte enthalten, unter der Voraussetzung der Existenz mindestens eines E^1-Punktes.

Es sei 1 ein E^1-Punkt, der von den Punkten $2, 3, 4$ getrennt ist. Dann bilden bekanntlich (siehe die Definition der E^1-Punkte) die Punkte $2, 3, 4$ eine Konfigurationsgerade und ausserdem existieren zwei weitere Geraden, welche mit den vier Punkten $1, 2, 3, 4$ nicht inzidieren. Diese Geraden kann man als $5-6-7$, $5-8-9$ bezeichnen, da sie einen gemeinsamen Konfigurationspunkt haben.

Das Teilschema von sechzehn Konfigurationsgeraden kann man deswegen folgendermassen ausdrücken:

$$(1)\qquad \begin{array}{cccccc} \underline{\;1\;} & \underline{\;2\;} & \underline{\;3\;} & \underline{\;4\;} & 2-3-4 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 5-6-7\,; & 1:2,3,4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 5-8-9 & \end{array}$$

Wir beziechnen weiter die drei übrigen Konfigurationspunkte als 0, P, Q.

Der Punkt 1 muss mit dem Punkte 5 verbunden sein und auf der Geraden $1-5$ kann nur ein einziger der Punkte 0, P, Q liegen.

Wählt man

$$(2)\qquad 1-5-Q\,,$$

was zulässig ist, dann inzidiert die letzte durch den Punkt 5 gehende Konfigurationsgerade mit einem Punkte der Menge $2, 3, 4$ und auf dieser Geraden muss der Punkt 0 oder P liegen. Begreiflich kann man diese Gerade als

$$(3)\qquad 2-5-P$$

annehmen und dann ergibt sich $5 : 3, 4, 0$.

Wenn wir uns über die Verbindung 0 mit den Punkten $3, 4$ klar werden und wenn wir gleichzeitig erwägen, dass der Punkt 0 nicht auf der Geraden $3-4$ liegen kann, dann sehen wir, dass 5 vom Typ B ist.

Man kann also den folgenden Hilfsatz aussprechen:

Lemma 6. *Es existieren keine Konfigurationen vom Typ E_iC_{12-i}, die mindestens einen E^1-Punkt enthalten.*

7. KAPITEL

In diesem Kapitel suchen wir die Totalschemen vom Typ $E_i^2C_{12-i}$ unter der Voraussetzung der Existenz wenigstens eines E^2-Punktes.

Zum Unterschied von den vorhergehenden Kapiteln wird man jetzt nicht ausdrücklich voraussetzen, dass die Konfigurationspunkte mit einer irreduziblen Kubik inzidieren.

Anfangs ist es zweckmässig die Konfigurationspunkte nicht mit Zahlen, sondern mit Buchstaben zu bezeichen.

Es sei Z ein E^2-Punkt, der von den Punkten P_1, P_2, P_3 separiert ist. Nach der Definition ergibt sich vorerst $P_1 - P_2 - P_3$ und es existieren genau zwei Konfigurationsgeraden, die nicht mit den Punkten P_1, P_2, P_3, Z inzidieren und auf welchen sechs verschiedene Konfigurationspunkte liegen. Diese Geraden werden wir weiterhin kurz als q, r bezeichnen und auf die Gerade q (bzw. r) werden wir die Punkte Q_1, Q_2, Q_3 (bzw. R_1, R_2, R_3) legen. Die übrigenen zwei Konfigurationspunkte mögen U_1, U_2 sein.

So haben wir zwölf Konfigurationspunkte in fünf disjunkte Mengen geteilt:

$$(1) \qquad \bar{z} \equiv (Z); \quad \bar{p} \equiv (P_i); \quad \bar{q} \equiv (Q_i); \quad \bar{r} \equiv (R_i); \quad \bar{u} \equiv (U_j), \quad \text{wobei} \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2 \text{ ist.}$$

Es sei weiter $\bar{s}$ die Vereinigung $\bar{q} + \bar{r}$.

Analogisch kann man auch die sechzehn Konfigurationsgeraden in drei disjunkte Menge teilen. In die Menge $\bar{m}_1$ legen wir die Geraden $p \equiv P_1 - P_2 - P_3$, $q \equiv \equiv Q_1 - Q_2 - Q_3$ und $r \equiv R_1 - R_2 - R_3$. Vier Geraden, die durch den Punkt Z gehen, reihen wir in die Menge $\bar{m}_2$ ein und die neun übrigen Geraden gehören zur Menge $\bar{m}_3$.

Der besseren Übersicht halber kann man symbolisch das Teilschema folgendermassen anführen:

$$(2) \qquad \begin{array}{l|c|ccc}
p \equiv P_1 - P_2 - P_3 & Z & P_1 & P_2 & P_3 \\
r \equiv R_1 - R_2 - R_3 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
q \equiv Q_1 - Q_2 - Q_3 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\hline
\bar{m}_1 & \bar{m}_2 & & \bar{m}_3 &
\end{array}$$

Der Punkt Z ist nur von den Punkten der Menge $\bar{p}$ getrennt, so dass ein beliebiger Punkt S_i (aus der Menge $\bar{s}$) schon mit dem Punkte Z verbunden sein muss. Eine der Geraden, die durch den Punkt S_i geht, gehört zur Menge $\bar{m}_2$, die zweite zur Menge $\bar{m}_1$ (siehe 2) und deswegen müssen die zwei übrigen Geraden zur Menge $\bar{m}_3$ gehören. Daraus ist ersichtlich, dass der Punkt S_i genau mit zwei Punkten aus der Menge $\bar{p}$ verbunden ist und von dem dritten Punkte dieser Menge getrennt sein muss.

Man kann also behaupten, dass $P_1 : S_1, S_3, Z$; $P_2 : S_2, S_5, Z$; $P_3 : S_3, S_4, Z$ ist.

Überprüfen wir vorerst, dass die Punkte S_i, S_j welche von dem Punkte P_i getrennt sind – also $P_i : S_i, S_j, Z$ – auf keiner der Geraden q (resp. r) liegen können. Andenfalls würden diese zwei Punkte S_i, S_j gleichzeitig mit Z verbunden sein, d. h. $S_i - Z$, $S_j - Z$ und ausserdem $S_i - S_j - S_k$. In diesem Falle wäre der Punkt P_i (im Widerspruch zur Voraussetzung) vom Typ B. Wir sehen also, dass sich

$$(3) \qquad P_i : Q_i, R_i, Z$$

für alle $i = 1, 2, 3$ ergibt.

Weiter wird man beweisen, dass

(T_1) kein Punkt der Menge $\bar{s}$ von beiden Punkten der Menge $\bar{u}$ getrennt sein kann.

Den Beweis dieser Behauptung bekommt man mit Hilfe des Widerspruches.

Man setzt voraus, dass wenigstens ein Punkt der Menge $\bar{s}$ (z. B. der Punkt Q_1) von beiden Punkten der Menge $\bar{u}$ getrennt ist, also $Q_1 : U_1, U_2, P_1$. Dann kann begreiflich der Punkt P_1 nicht ein C-Punkt sein (dem Ergebnisse 3 nach) und er muss vom Typ E sein. D. h. Q_1-R_1-Z ist eine Konfigurationsgerade und in diesem Falle stellen wir schon leicht die dritten Punkte auf den Geraden Q_1-P_2, Q_1-P_3 fest. Man bekommt also die Beziehungen:

(a) $$Q_1 : P_1, U_1, U_2;\ Q_1-R_1-Z;\ Q_1-P_2-R_3;\ Q_1-P_3-R_2\,.$$

P_1 ist ein E-Punkt. Deswegen existieren genau zwei Konfigurationsgeraden, die mit keinem der Punkte P_1, Q_1, R_1, Z inzidieren. Sofort ersehen wir, dass keine von diesen Geraden zu den Mengen $\bar{m}_1$ und $\bar{m}_2$ gehören kann, und deswegen müssen beide Geraden zur Menge $\bar{m}_3$ gehören. Man kann also behaupten, dass

(b) $$v_2 \equiv P_2-X_2-Y_2,\ v_3 \equiv P_3-X_3-Y_3$$

ist, da diese Geraden nicht mit dem Punkte P_1 inzidieren können.

Auf den Geraden v_2, v_3 liegt auch keiner der Punkte Q_1, R_1 und gemäss dem Ergebnisse (3) erhalten wir nur folgende zwei Möglichkeiten: $X_2, Y_2 \equiv Q_3, U_1, U_2$; $X_3, Y_3 \equiv Q_2, U_1, U_2$.

Unter Hinweis auf die Bedingung, dass P_1 ein E-Punkt ist, muss er sogar vom Typ E^2 sein. Die Geraden v_2, v_3 können sich also nicht im Konfigurationspunkte schneiden und daraus (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) folgt:

(c) $$v_2 \equiv P_2-Q_3-U_2\,,\quad v_3 \equiv P_3-Q_2-U_1\,.$$

Man wird jetzt die durch den Punkt R_1 gehenden Geraden näher untersuchen. Wir kennen schon zwei von diesen Geraden (der Anführung (a) und dem Ergebnisse (2) nach). Die zwei übriggebliebenen Geraden (die durch den Punkt R_1 gehen) müssen also $R_1-P_2-U_1$ und $R_1-P_3-U_2$ sein (siehe die Anführung 2). Folglich $R_1 : P_1$, Q_2, Q_3 und der Punkt R_1 ist vom Typ B.

Damit ist die Behauptung T_1 völlig bewiesen.

Weiter kann man behaupten, dass

(T_2) alle Punkte der Menge $\bar{p}$ vom Type C sind.

Für den Beweis setzen wir selbstverständlich das Gegenteil voraus, nämlich dass wenigstens ein Punkt der Menge $\bar{p}$ (z. B. P_1) ein E-Punkt ist. Wegen des vorangeführten Ergebnisses ist der Punkt P_1 von dem Punkte Q_1 getrennt und der Punkt Q_1 kann deswegen nur von zwei Punkten der Menge (U_1, U_2, R_2, R_3) separiert sein.

Die Separierung $Q_1 : P_1, U_1, U_2$ widerspricht der Behauptung T_1 und im Falle $Q_1 : R_2, R_3, P_1$ wäre der Punkt Q_1 vom Type B. Es muss also $Q_1 : P_1, U_i, R_j$ sein und man kann begreiflich voraussetzen, dass

(d) $$Q_1 : P_1, U_1, R_2$$

ist. Ausserdem wissen wir schon, dass sich $Q_1 - R_1 - Z$ ergibt.

Aus den Ergebnissen (2), (3) und der Anführung (d) folgt, dass auf der Geraden $Q_1 - P_3$ der Punkt U_2 liegt, und folglich kann mit der Geraden $P_3 - R_2$ nur ein einziger Punkt aus der Gruppe U_1, Q_2 inzidieren.

Beide diese Möglichkeiten sind ausgeschlossen, weil im Falle $P_3 - R_2 - U_1$ (resp. $P_3 - R_2 - U_2$) der Punkt Q_1 (resp. P_2) vom Type B wäre.

Damit ist auch die Behauptung T_2 völlig bewiesen.

Weil alle Punkte der Menge $\bar{p}$ vom Typ C sind, kann man das Teilergebnis (3) folgendermassen vervollständigen:

(4) Es ist $P_i : Q_i, R_i, Z$; $Q_i : R_i$ für alle Werte $i = 1, 2, 3$

gültig.

Weiter behaupte ich, dass

(T_3) $$U_1 - U_2$$

ist.

Zum Beweis dieser Behauptung setzen wir voraus, dass im Gegenteil $U_1 : U_2$, d. h. $U_1 : U_2, S_i, S_j$ ist (denn beide Punkte der Menge $\bar{u}$ müssen schon mit dem Punkte Z und mit allen Punkten der Menge $\bar{p}$ verbunden sein). Unter der Voraussetzung $S_i : U_2$ wäre $S_i : U_1, U_2$ im Widerspruch mit der Behauptung T_1. Es muss also $S_i - U_2$ und analogisch $S_j - U_2$ sein.

Die Punkte U_2, S_i, S_j liegen auf keiner Konfigurationsgeraden, weil eine solche Gerade nicht in den Mengen $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3$ vorkommt. (Ausserdem gemäss der Verbindung $S_i - U_2$ können diese Punkte nich einmal auf einer fremden Geraden liegen). Der Punkt U_1 ist also vom Type C und folglich $S_i : S_j$, so dass $U_1 : U_2, Q_i, R_t$; $Q_i : R_t$ ist.

Dem Ergebnis (4) nach sehen wir, dass $Q_i : P_i, R_i, U_1, R_t$ und folglich $R_t \equiv R_i$ ist, was zu den folgenden Beziehungen führt:

(e) $$U_1 : U_2, Q_i, R_i \text{ und analogisch } U_2 : U_1, Q_j, R_j\,,$$

wobei begreiflich die Punkte Q_i, Q_j, R_i, R_j untereinander verschieden sind.

Wir beachten jetzt näher den dritten Punkt (Q_k) aus der Menge $\bar{q}$, den wir bis jetzt noch nicht in Erwägung gezogen haben. Vor allem ist dieser Punkt mit allen Punkten den Mengen $\bar{q}, \bar{u}, \bar{z}$ verbunden und im Sinne der Anführung (4) von einem der Punkte (P_k) aus der Menge $\bar{p}$ getrennt.

Es ergeben sich also folgende zwei Möglichkeiten:

$$\text{entweder} \quad Q_k : P_k, R_k, R_i\,, \quad \text{oder} \quad Q_k : P_k, R_k, R_j\,.$$

Das ist aber unzulässig, da (wegen der Beziehung $R_i : U_1, Q_i, P_i$; $R_j : U_2, Q_j, P_j$) der Punkt Q_k mit beiden Punkten R_i, R_j verbunden sein muss.

Damit ist T_3 bewiesen.

Für die Punkte der Menge $\bar{u}$ kommen also nur die Separierungen $U_1 : S_1, S_2, S_3$; $U_2 : S_4, S_5, S_6$ in Betracht. In diesen Beziehungen sind begreiflich auch verschiedene Punkte der Menge $\bar{s}$ mit verschiedenen Indexen bezeichnet (da jeder Punkt der Menge $\bar{s}$ höchstens von einem Punkte aus der Menge $\bar{u}$ getrennt sein kann). Es ergeben sich also folgende zwei Möglichkeiten:

Entweder liegen die Punkte S_1, S_2, S_3 (und dann auch S_4, S_5, S_6) auf einer Geraden q (resp. r) oder liegen diese Punkte auf verschiedenen Geraden. Diese zwei Möglichkeiten kann man kurz so bezeichnen:

(f) $\qquad$ entweder $U_i : Q_i, Q_j, R_k$, oder

(g) $\qquad U_i : Q_1, Q_2, Q_3$.

Wir werden uns zuerst mit der Möglichkeit (f) beschäftigen. Weil $Q_i - Q_j - R_k$ zu keiner der Mengen $\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3$ gehört und Q_i mit Q_j verbunden ist, muss U_i vom Typ C sein und es ist entweder $Q_i : R_k$, oder $Q_j : R_k$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man voraussetzen, dass $Q_i : R_k$ ist. Wegen Ergebnisse (4) und (f) muss also $Q_i : R_k, U_i, P_i, R_i$, d. h. $R_k \equiv R_i$ sein. Daraus folgt $U_i : Q_i, Q_j, R_i$ und $U_j : R_j, R_k, Q_k$. In diesem Falle ergibt sich aber $Q_i : U_i, P_i, R_i$; $R_i : U_i, P_i$, d. h. der Punkt Q_i ist vom Typ D.

Damit ist der Fall (f) ausgeschlossen und es verbleibt nur der Fall (g). Diesen Fall führen wir folgendermassen an:

(5) $$U_1 : Q_1, Q_2, Q_3\,; \quad U_2 : R_1, R_2, R_3\,.$$

In diesem Stadium ist es vorteilhaft, die bisher mit Buchstaben bezeichneten Konfigurationspunkte mit Ziffern zu bezeichnen, zusätzlich mit P und Q:

$$\begin{array}{cccccccccccc} P_1 & P_2 & P_3 & U_1 & U_2 & Q_1 & Q_2 & Q_3 & R_1 & R_2 & R_3 & Z \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 8 & 6 & 7 & 9 & P & Q\,. \end{array}$$

Aus den Ergebnissen (*1*), (*4*) und (*5*) bekommt man einfach:

(6) $1 : 7, 0, Q$; $2 : 8, 9, Q$; $3 : 6, P, Q$; $4 : 6, 8, 0$; $5 : 7, 9, P$; $6 : 3, 4, P$; $7 : 1, 5, 0$; $8 : 2, 4, 9$; $9 : 2, 5, 8$; $0 : 1, 4, 7$; $P : 3, 5, 6$; $Q : 1, 2, 3$; $1-2-3$; $6-8-0$; $7-9-P$.

Daraus ist ersichtlich, dass nur die Punkte *4, 5, Q* vom Typ E^2 sind. Die übrigen Konfigurationspunkte sind schon vom Typ C.

Das Teilschema (6) ändert sich nicht bei Benützung folgender Permutationen:

(7)
$$p_1 \equiv (45), (89), (6P), (70); \quad p_2 \equiv (23), (68), (9P);$$
$$p_3 \equiv (12), (78), (90), (45), (6P).$$

Dazu bemerke ich, dass noch weitere Permutationen existieren, aber die drei obenangeführten werden uns für unsere Aufgabe reichlich genügen.

Die Konfigurationspunkte *4, 5* sind verbunden und der dritte Punkt dieser Geraden muss ein einziger bestimmter Punkt der Menge *1, 2, 3, Q* sein (weil *4–5* eine Gerade der Menge $\overline{m}_2$ und $\overline{m}_3$ ist).

Bei Benützung der Permutation p_2 sehen wir, dass die Möglichkeiten *4–5–2*, *4–5–3* äquivalent sind, und zum gleichen Ergebnis gelangen wir, wenn wir für die Möglichkeiten *4–5–1*, *4–5–2* die Permutation p_3 benützen. Daraus ist ersichtlich, dass es hinreicht, wenn für die Geraden *4–5* nur folgende zwei Möglichkeiten in Betracht genommen werden:

(8)
$$M_1 \equiv 4-5-Q\,; \quad M_2 \equiv 4-5-2\,.$$

Beschäftigen wir uns vorerst mit der Möglichkeit M_1, dann sehen wir, dass durch den Punkt *Q* entweder

$$\frac{Q}{\begin{matrix}4\ 6\ 8\ 0\\ 5\ 7\ P\ 9\end{matrix}} \quad \text{oder} \quad \frac{Q}{\begin{matrix}4\ 6\ 8\ 0\\ 5\ 9\ 7\ P\end{matrix}} \quad \text{Geraden gehen können.}$$

Unter Hinweis auf die Permutation p_1 sind diese zwei Möglichkeit äquivalent und man kann nur dier erste Möglichkeit erwägen. Die übrigen Konfigurationsgeraden finden wir schon verhältnismässig leicht und bekommen so das Totalschema:

(9)
$$\frac{Q}{\begin{matrix}4\ 6\ 8\ 0\\ 5\ 7\ P\ 9\end{matrix}} \quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 6\ 8\ 4\\ 3\ 9\ 5\ P\end{matrix}} \quad \frac{2}{\begin{matrix}6\ 0\ 4\\ 5\ P\ 7\end{matrix}} \quad \frac{3}{\begin{matrix}8\ 0\ 4\\ 7\ 5\ 9\end{matrix}} \quad \begin{matrix}6-8-0\\ 7-9-P\,.\end{matrix}$$

In diesem Kapitel bleibt noch die Möglichkeit M_2 aus der Anführung (8) zu erwägen. Hier stellen wir augenblicklich alle durch den Punkt *2* gehende Konfigurationsgeraden fest. Es sind die Geraden:

(10)
$$2-3-1, \; 2-4-5, \; 2-6-7, \; 2-0-P\,.$$

Für die Geraden, die durch den Punkt *1* gehen, haben wir bisher zwei Möglichkeiten:

$$\frac{1}{\begin{matrix}2\ 6\ 8\ 4\\ 3\ 9\ 5\ P\end{matrix}} \quad \frac{1}{\begin{matrix}2\ 6\ 8\ 4\\ 3\ 5\ P\ 9\,.\end{matrix}}$$

Diese Möglichkeiten sind äquivalent (siehe die Permutation p_1) und man kann also nur die erste Möglichkeit für weitere Erwägungen benützen. Die übriggebliebenen Konfigurationsgeraden finden wir schon ohne viel Mühe und bekommen so das weitere Totalschema:

$$
(11) \qquad \begin{array}{ccccc}
\underline{\quad Q \quad} & \underline{\quad 1 \quad} & \underline{\quad 2 \quad} & \underline{\quad 3 \quad} & \\
6\ 8\ 0\ 4 & 2\ 6\ 8\ 4 & 4\ 6\ 0 & 8\ 0\ 4 & 6-8-0 \\
5\ P\ 9\ 7 & 3\ 9\ 5\ P & 5\ 7\ P & 7\ 5\ 9 & 7-9-P.
\end{array}
$$

Mit Rücksicht auf das Resultat (6) sehen wir, dass die Konfigurationspunkte *2, 6, 7* vom Typ C^2 und *4, 5, Q* vom Typ E^2 sind. Die übrigen Punkte sind vom Type C^1, so dass das ganze Schema (11) vom Type $E_3^2C_6^1C_3^2$ ist.

Analogisch finden wir den Typ $E_3^2C_9^2$ des Schemas (9).

Unter den gegebenen Verhältnissen können diese zwei Schemen nicht äquivalent sein. Die Ergebnisse dieses Kapitels kann man also in dem folgenden Hilfsatz zusammenfassen:

Lemma 7. *Es existieren nur die zwei folgenden, nicht äquivalenten Schemen, in denen nur E^2- und C-Punkte vorkommen*:

$$
S_{3,4} \qquad \begin{array}{cccccc}
\underline{\quad Q \quad} & \underline{\quad 1 \quad} & \underline{\quad 2 \quad} & \underline{\quad 3 \quad} & & \\
4\ 6\ 8\ 0 & 2\ 6\ 8\ 4 & 6\ 0\ 4 & 8\ 0\ 4 & 6-8-0, & \text{wobei} \\
x\ y\ P\ 9 & 3\ 9\ 5\ P & x\ P\ y & 7\ 5\ 9 & 7-9-P & x, y \equiv 5, 7 \text{ ist.}
\end{array}
$$

Im Falle $x \equiv 5$ handelt es sich um den Typ $E_3^2C_9^2$ und im anderen Falle um den Typ $E_3^2C_6^1C_3^2$.

Bemerkung. In dem letzten Kapitel werden wir auch beweisen, dass diese zwei Schemen wirklich realisierbar sind und dass die Konfigurationspunkte auf einer Kurve dritter Ordnung liegen.

8. KAPITEL

In diesem Kapitel suchen wir die Schemen von Type C_{12}, wobei die Existens mindestens eines C^2-Punktes vorausgesetzt wird.

Es sei *1* ein C^2-Punkt, der von den Punkten *2, 3, 4* getrennt ist, und weiter ergebe sich auch *3 : 4*. Wir wissen schon, dass genau zwei Konfigurationsgeraden existieren, die sich nicht in dem Konfigurationspunkte schneiden und gleichzeitig mit keinem Punkte der Gruppe *1, 2, 3, 4* inzidieren. Als diese zwei Geraden kann man *5–6–7*, *8–9–0* wählen und die zwei übrigen Konfigurationspunkte kann man als *P, Q* bezeichnen.

Diese Teilergebnisse fassen wir zusammen und führen die zwei möglichen Alternativen für die Geraden, die durch den Punkt *1* gehen, an:

M_1 $1-5-8,\ 1-6-9,\ 1-7-0,\ 1-P-Q,\ 5-6-7,\ 8-9-0,\ 2-3,\ 2-4,$
$3:4;\ 1:2,3,4.$

M_2 $1-5-8,\ 1-6-9,\ 1-7-Q,\ 1-P-0,\ 5-6-7,\ 8-9-0,\ 2-3,\ 2-4,$
$3:4;\ 1:2,3,4.$

Ich empfehle dem Leser sich zu überzeugen, dass alle übrigen Möglichkeiten für die Geraden, die durch den Punkt *1* gehen können, mit den Möglichkeiten M_1 oder M_2 äquivalent sind.

Wir konzentrieren uns jetzt auf die Möglichkeit M_1. Durch den Punkt P (bzw. Q) müssen vier Konfigurationsgeraden gehen und deswegen ist dieser Punkt mit den Punkten *1, 2, 3, 4* verbunden, aber er kann nicht auf den Geraden $2-3$, $2-4$ liegen. Man kann also das Teilschema für diese Möglichkeit folgendermassen anführen:

$$(M_1)\quad \frac{1}{\begin{matrix}5\ 6\ 7\ P\\ 8\ 9\ 0\ Q\end{matrix}}\quad \frac{2}{\begin{matrix}P\ Q\\ x\ y\end{matrix}}\quad \frac{3}{\begin{matrix}.\ P\ Q\\ .\ .\ .\end{matrix}}\quad \frac{4}{\begin{matrix}.\ P\ Q\\ .\ .\ .\end{matrix}}\quad 8-9-0,\ 5-6-7,\ 2-3,\ 2-4.$$

Der Punkt *2* ist von dem Punkte *1* getrennt und wir sehen, dass er noch von den zwei Punkten aus der Menge (5, 6, 7, 8, 9, 0) separiert sein muss. Begreiflich kann man voraussetzen, dass $2:0$, d. h. $2:1,0$ ist.

In dem Falle $2:7$ wäre der Punkt *2* vom Typ E. In den Fällen $2:8$ oder $2:9$ wäre er vom Typ B. Deswegen muss entweder $2:5$, oder $2:6$ sein. Mit Rücksicht auf die zulässige Permutation (*56*), (*89*), kann man $2:6$ wählen, der Punkt *2* ist also von den Punkten *1, 0, 6* getrennt. Ausserdem muss $0:6$ sein, weil der Punkt *2* vom Typ C ist.

Für die zwei Punkte x, y auf den Geraden $2-P$, $2-Q$ ergeben sich – den zulässigen Permutation (*79*), (*60*), (*58*) nach – nur die Möglichkeiten *79, 59, 58, 57*. Weil auch (PQ) eine zulässige Permutation ist, kann man für die erste Ziffer (aus diesen Paaren) x und für die zweite y annehmen.

Diese Möglichkeiten fassen wir mit den bisherigen Ergebnissen kurz zusammen:

$$(1)\qquad 2:1,0,6;\ 0:6;\ xy \equiv 79, 59, 57, 58.$$

Im Falle

$$x \equiv 7,\ y \equiv 9, \quad \text{d. h.} \quad 2-P-7,\ 2-Q-9$$

können auf den Geraden $2-3$, $2-4$ nur die Punkte *5, 8* liegen. Der Permutation (*34*) nach kann man $2-3-5$, $2-4-8$ wählen und somit folgt aus $2P7-815-4Q6$, $248-961-QQ5$, dass $4-Q-6$ und $Q:5$ ist.

Im Falle, dass der Punkt P mit dem Punkte *6* verbunden ist, kann auf dieser Geraden nur der Punkt *3* liegen und wir haben einen Widerspruch der Relation $235-$ $-QP1-968$ mit der Geraden $9-6-1$. Es muss also $6:P$ sein, d. h. $6:0,2,P$.

Dann ist $3-6-8$ die letzte Gerade, die noch durch den Punkt 6 gehen kann, und daraus folgt, die Separierung $8 : 7, P, Q$. Weil sich $P-Q$ und $P-7$ ergibt, muss schon $7 : Q$ sein (8 ist ein C-Punkt), d. h. $Q : 5, 7, 8$, so dass die letzte durch den Punkt Q gehende Gerade die Gerade $Q-3-0$ ist.

Dann aber widerspricht $2P7-3Q0-511$ der Geraden $5-1-8$ und wir können uns dem weiteren Falle zuwenden.

$$x \equiv 5, \; y \equiv 9, \quad \text{d. h.} \quad 2-P-5, \; 2-Q-9 .$$

Auf den Geraden $2-3$, $2-4$ können nur die Punkte $7, 8$ liegen und der Permutation (34) nach kann man diese Geraden als $2-3-7$, $2-4-8$ bezeichnen. Die weitere Konfigurationsgerade $3-8-P$ bekommt man aus der Beziehung $29Q-701-38P$. Dann ergibt sich $8 : 6, 7, Q$ und $6 : 2, 0, 8$, so dass die letzten durch den Punkt 6 gehenden Geraden die Geraden $3-Q-6$, $4-P-6$ sein können. Jetzt aber kommen wir schon zum Widerspruch der Geraden $7-1-0$ mit der Beziehung $2P5-3Q6-717$.

Im vorletzten Falle

$$x \equiv 5, \; y \equiv 7, \quad \text{d. h.} \quad 2-P-5, \; 2-Q-7$$

bekommt man augenblicklich einen Widerspruch der Beziehung $PQ1-576-229$ mit der Separierung $2 : 1, 0, 6$ (wo schon die Punkte 2 und 9 verbunden sein müssen).

Es bleibt also noch der letzten Fall

$$x \equiv 5, \; y \equiv 8, \quad \text{d. h.} \quad 2-P-5, \; 2-Q-8$$

zu lösen. Mit den Geraden $2-3$, $2-4$ können nur die Punkte $7, 9$ inzidieren und der zulässigen Permutation (34) nach kann man diese Geraden als $2-3-7$, $2-4-9$ bezeichnen. Man bekommt vor allem zwei weitere Konfigurationsgeraden $4-Q-7$, $3-P-9$ und ausserdem noch die Bedingungen $7 : 8, 9, P$; $9 : 5, 7, Q$. Weil 7 und 9 auch C-Punkte sein müssen, ergibt sich notwendigerweise $5 : Q$ und $8 : P$.

Wäre $P-0$, dann könnte auf dieser Geraden nur der Punkt 4 liegen und man würde zu dem Widerspruch der Relation $PQ1-089-426$ mit der Geraden $4-2-9$ kommen. Es muss also $P : 0$ sein und daraus ergibt sich $P : 7, 8, 0$; $0 : 2, 6, P$. Der Punkt 6 ist schon mit dem Punkte P verbunden und diese Gerade inzidiert mit dem Punkte 4. So haben wir die Gerade $4-6-P$ bekommen und aus der Beziehung $249-QP1-866$ sehen wir, dass auch $8 : 6$, d. h. $8 : 6, 7, P$ ist. Die letzte durch den Punkt 8 gehende Gerade $3-4-8$ widerspricht der Beziehung $3 : 4$ und damit ist die Möglichkeit M_1 völlig ausgeschöpft.

Bei der zweiten Möglichkeit M_2 müssen analogisch die

(T_1) Punkte P, Q mit allen vier Punkten $1, 2, 3, 4$ verbunden sein, können aber nich auf den Geraden $2-3$, $2-4$ liegen.

Das Teilschema für diese Möglichkeit kann man also folgendermassen ausdrücken:

$$(M_2)\qquad \begin{array}{cccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & & \\ 5\,6\,7\,P & 3\,4\,.\,. & .\,.\,. & .\,.\,. & 5-6-7 \\ 8\,9\,Q\,0 & .\,.\,.\,. & .\,.\,. & .\,.\,. & 8-9-0\,. \end{array}$$

Man erwägt, dass sich dieses Teilschema bei der Benützung den angeführten Permutationen nicht ändert:

$$(\mathrm{p})\qquad p_1 \equiv (56), (89)\,; \quad p_2 \equiv (58), (69), (70), (PQ)\,; \quad p_3 \equiv (34)\,.$$

Wir beweisen zuerst, dass sich

$$(\mathrm{T}_2)\qquad X-7-0 \;\; (\text{wobei } X \equiv 3, 4) \;\; \text{nicht ergibt}\,.$$

Der Permutation (34) nach kann man nur den Fall $3-7-0$ voraussetzen. Der Punkt 3 ist von den Punkten $1, 4, t\,(t \equiv 5, 6, 8, 9)$ getrennt und der zulässigen Permutationen p_1, p_2 halber kann man weiter voraussetzen, dass $3:1, 4, 5$ ist. Es folgt daraus $3-8-X$, $3-9-Y$, $3-6-Z$, wobei $X \equiv 6, P, Q$; $Y \equiv 5, P, Q$; $Z \equiv 8, P, Q$ ist. Ausserdem folgen aus den Beziehungen $567-890-113$, $113-908-6PX$, $113--809-5PY$, $113-576-8QZ$ die Separierungen $6:P$; $5:P$; $8:Q$.

Im Falle $5:0$ wäre der Punkt $5\,(5:3, P, 0)$ vom Typ B. Es ist also $5-0$. Wäre $2-P-Q$, dann würde die Beziehung $P01-Q71-233$ der Verbindung $2-3$ widersprechen. Aus diesen Ergebnissen erwägen wir, dass der Punkt 2 nicht auf der Geraden $5-0$ liegen kann (weil sich anderenfalls nach der Behauptung T_1 $2-P-Q$ ergäbe). Es muss also $5-0-4$ sein und deswegen ist $2-5-Q$ die letzte durch den Punkt 5 gehende Konfigurationsgerade. Folglich ergibt sich $5:3, P, 9$ und $0:6, Q, 2$.

Der Punkt 2 muss mit dem Punkte 7 verbunden sein, denn anderenfalls wäre er von Typ B. Es muss auch $7-P$ sein. (Im gegenteiligen Falle wäre $P:5, 6, 7$ und daraus folgt, dass P vom Typ E ist.) Die letzte durch den Punkt 7 gehende Gerade ist also die Gerade $2-7-P$, d. h. $7:4, 8, 9$; $4:1, 3, 7$ und der Punkt 7 ist vom Typ B.

Damit ist die Anführung T_2 völlig bewiesen und ich behaupte noch, dass sich

$$(\mathrm{T}_3)\qquad 7:0 \;\; \text{ergibt}\,.$$

Zur Beweisführung genügt die Voraussetzung, dass $7-0-2$ ist und dass wir auf einen Widerspruch stossen. Unter diesen Bedingungen muss nach der Behauptung T_1 auch $2-P-Q$ sein. Weil $2:1, a, b$ und der Punkt 2 vom Typ C ist, muss auch a : b sein. Dann ergeben sich zwei Alternativen: entweder $2:1, 5, 9$, oder $2:1, 6, 8$. Diese Alternativen sind äquivalent (der Permutation p_1 nach) und man kann voraussetzen, dass $2:1, 5, 9$ und daraus auch $5:9$ ist.

Auf den Geraden $2-3$, $2-4$ können nur die Punkte $6, 8$ liegen und mit Hilfe der Permutation p_3 wählen wir auf der Geraden $2-3$ den Punkt 6, d. h. $2-3-6$, $2-4-8$. Aus den Relationen $890-567-112$, $112-576-8Q3$, $112-908-6P4$ folgen die

Beziehungen $8-Q-3$, $6-P-4$, $6:8, 0, Q$; $8:6, 7, P$ und weiter $0:Q$; $7:P$, weil $6, 8$ die C-Punkte sind.

Im Falle $3-5-P$ widerspricht die Beziehung $263-01P-795$ der Geraden $7-6-5$ und einfach überzeugen wir uns, dass auf der Geraden $3-P$ nur der Punkt 9 liegen kann. Es ist also $3-P-9$ die weitere Konfigurationsgerade und die Trennung $9:7, 2, 5$ bekommt man aus $236-0P1-799$. Dann muss aber $4-Q-9$ die letzte durch den Punkt 9 gehende Konfigurationsgerade sein und man bekommt einen Widerspruch der Geraden $0-9-8$ mit der Relation $248-7Q1-095$.

So haben wir die Behauptung T_3 bewiesen.

Weiter kann man behaupten, dass

(T_4) der Punkt 7 wenigstens von einem Punkte der Menge 2, 3, 4 getrennt ist.

Begreiflich setzen wir das Gegenteil voraus. Im Falle $7:0, 8, 9$ ist der Punkt 7 vom Typ E. Die zulässige Permutation p_1 erlaubt uns die Voraussetzung $7:0, 9, P$ zu erwägen. Es ist entweder $2-3-7$ oder $2-4-7$ eine der Geraden, die durch den Punkt 7 gehen. Hinsichtlich der Permutation p_3 kann man diese Gerade als $2-3-7$ bezeichnen. Dann muss durch den Punkt 7 noch die Gerade $4-7-8$ gehen. Die Separierung $P:9$ folgt aus der Bedingung, dass 7 ein C-Punkt sein muss.

Für den Punkt t auf der Geraden $4-P-t$ ergeben sich zwei Möglichkeiten $t \equiv 5, Q$ (siehe $1P0-748-Qt9$) und ausserdem im Falle $t \equiv 5$ wäre $9:Q, 5, 7, P$. Es ist also $4-P-Q$ und folglich $QQ9$; $9:7, P, Q$. Auf der Geraden $2-9$ kann also nur der Punkt 4 liegen und so bekommen wir die letzten zwei Geraden $2-4-9$, $3-5-9$, die noch durch den Punkt 9 gehen können. Die weitere Konfigurationsgerade $3-P-6$ ergibt sich aus $7Q1-249-3P6$.

Wäre $2-0$, d. h. $2-0-Q$, dann würde die Gerade $0-8-9$ im Widerspruch mit $Q71-249-086$ sein. Es ist also $2:0$ und auf der Geraden $3-0$ kann nur der Punkt Q liegen, also $3-0-Q$. In diesem Augenblicke widerspricht die Gerade $7-4-8$ der Beziehung $249-3Q0-7P8$.

Damit ist die Behauptung T_4 bewiesen und man kann noch in Erwägung ziehen, dass im Falle $7:3$, d. h. $3:1, 4, 7$; $7:3, 0, t$ $(t \equiv 8, 9, P)$ der Punkt 7 vom Typ B wäre. Es muss deswegen $7-3$ und analogisch auch $7-4$ sein. Mit Rücksicht auf T_4 bekommen wir so die Trennung:

(T_5) $$7:2.$$

Setzen wir für einen Augenblick voraus, dass

(P_1) $$2-0 \text{ ist},$$

dann $2:1, 7, a$ (wobei sich $a \equiv 8, 9$ und $a:7$ ergeben muss), da der Punkt 2 vom Typ C ist. Die zulässige Permutation p_1 erlaubt uns die Separierung $2:1, 7, 8$ voraussetzen, daraus folgt noch $7:8$ und $7:2, 0, 8$.

Wenn wir die durch den Punkt *7* gehenden Konfigurationsgeraden suchen, benützen wir die Permutation p_3, und diese Geraden bezeichnen wir als die Geraden $3-7-P$, $4-7-P$. Weil $8:2$ ist, muss auch $8-4-t$ ($t \equiv 6, Q$) sein, was aber wegen der Beziehung $908-7P4-31t$ und Bedingungen $1-t$, $1:3$ unmöglich ist. Damit ist bewiesen, dass

$$(\mathrm{T}_6) \qquad 2:1,7,0 \quad \text{ist}.$$

Wir setzen noch die Existenz der Konfigurationsgeraden

$$(\mathrm{P}_2) \qquad 2-P-Q$$

voraus.

Wegen der Permutationen p_1 und p_3 kann man $2-5-9$, $2-3-6$, $2-4-8$ als die übrigen durch den Punkt *2* gehenden Geraden annehmen. In den Fällen $5-Q-t$ (bzw. $9-Q-t$), wobei $t \equiv 3, 4$ ist, würde die Relation $581-Q2P-t40$ der Verbindung $4-0$ (bzw. $961-Q2P-t30$ der Geraden $3-0$) widersprechen. Es ist also $Q:5, 9, T$ und $T \equiv 6, 8, 0$.

Der Punkt Q ist allerdings vom Typ C und ausserdem ergibt sich $5-9-2$. Es muss also entweder $5:7$, oder $9:T$ sein und daraus sehen wir, dass nicht $T \equiv 6, 8$ sein kann. Im letzten Falle $T \equiv 0$, d. h. $Q:5,9,0$ wäre $0:2,7,Q,5$ und daraus ergibt sich, dass die Voraussetzung P_2 falsch ist.

$$(\mathrm{T}_7) \qquad Q:P$$

beweisen.

Wegen der Permutation p_3 genügt es die Existenz der Konfigurationsgeraden $3-P-Q$ vorauszusetzten. Die Permutation p_1 erlaubt uns auch die Gerade $3-7-8$ zu erwägen.

Im Falle $Q-9-T(t \equiv 2, 4)$ widerspricht die Gerade $Q-3-P$ der Relation $980-$ $-Q71-T3P$. Es muss also $9:Q$ sein und für den Punkt t der Geraden $2-9-t$ kommen drei Möglichkeiten $t \equiv 3, 4, P$ in Betracht. Wäre $t \equiv 3$, dann wäre $2:1, 7, 0, 5$ (siehe $961-378-255$). Auch der Fall $t \equiv 4$ ist unmöglich, weil $3-0-9$ als die letzte durch den Punkt *9* gehende Gerade der Geraden $8-0-9$ widersprechen würde. Daraus folgt nur $2-9-P$ und $9:3$ (wie wir sofort sehen können), d. h. $3:1,4,9$ und $9:Q,3,x$ (wobei $x \equiv 5, 7$ ist). Begreiflich kann nicht $x \equiv 7$ sein, weil anderenfalls *9* vom Typ B wäre. Folglich $9:Q, 3, 5$ und $5:Q$.

$4-9-7$ ist die letzte mit dem Punkte *9* inzidierbare Gerade, d. h. $7:2, 0, 5$. Daraus sehen wir, dass auf der Geraden $4-0$ nur der Punkt Q liegen kann und man kommt zu einem Widerspruch der Bedingungen $3-6$, $3:4$ mit $809-7Q1-346$.

Die Behauptung T_5 ist damit bewiesen.

Der Punkt *7* ist von den Punkten *0, 2* getrennt und deswegen muss er noch von einem der Punkte *8, 9* separiert sein. Gemäss den Permutationen p_1 und p_3 kann man voraussetzen, dass $3-7-8$ ist.

Mit Rücksicht auf *2 : 0* muss schon *0 : 3* und *0 : 4* sein, d. h. auf der Geraden *0–3* liegt der Punkt *Q* (anderenfalls inzidiert er mit der Geraden *3–P*, was im Gegensatz zur Behauptung T_7 wäre).

Schliesslich kann auf der letzten durch den Punkt *0* gehenden Geraden *4–0* weder *P* noch *Q* liegen.

Fassen wir alle diese Ergebnisse zusammen, können wir das Teilschema M_2 folgendermassen anführen:

1	2	3	4		
5 6 7 P	3 4 P Q	7 P Q	0 P Q	5–6–7	2 : 1, 7, 0
8 9 Q 0	. . . .	8 . 0	. . .	8–9–0	7 : 0

Dann ist offenbar *4–7–P* eine weitere mit dem Punkte *7* inzidierbare Konfigurationsgerade und aus den Relationen *1P0–873–540, 809–7Q1–336* folgt *4–Q–5* und *3 : 1, 4, 6.* Danach muss *4–0–6* eine von den durch den Punkt *6* gehenden Geraden sein. Leicht finden wir noch die weiteren zwei Geraden *3–P–9, 2–3–5* und stellen fest, dass der Punkt *5* (*5 : 0, P, 9*) vom Typ B ist.

Wir können jetzt den Hilfsatz dieses Kapitels anführen:

Lemma 8. *Die Punkte der Konfigurationen* $C_i^1 C_{12-i}^2$ $(i > 0)$ *können nicht mit einer irreduziblen Kubik inzidieren.*

Bemerkung. Dazu bemerke ich noch, dass vier Konfigurationen vom Type $C_i^1 C_{12-i}^2$ existieren (die aber begreiflich nicht mit der Kubik inzidieren) und in einer meiner anderen Arbeiten angeführt werden.

9. KAPITEL

In diesem Kapitel suchen wir die Schemen der Konfigurationen C_{12}^1. Es sei *1* ein C^1-Punkt, der von den Punkten *2, 3, 4* getrennt ist. Wir setzen weiter voraus, dass *3 : 4* ist. Es existieren genau zwei Konfigurationsgeraden (die sich in einem Konfigurationspunkte schneiden), welche nicht mit den Punkten *1, 2, 3, 4* inzidieren. Man kann diese Geraden als *5–6–7, 5–8–9* bezeichnen und die übrigen drei Konfigurationspunkte als *0, P, Q* wählen.

Auf der Geraden *1–5* muss schon irgend einer von den Punkten *0, P, Q* liegen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man diese Gerade als die Gerade *1–5–Q* bezeichnen. Der besseren Übersicht halber führen wir das Teilschema von sechzehn Konfigurationsgeraden folgendermassen an:

(S)

1	2	3	4	5
5 . . .	3 4 . .	. . .	. . .	6 8
Q . . .	. . . .	. . .	. . .	7 9.

(1) Daraus ist ersichtlich, dass jeder der Punkte 0, P, Q mit allen Punkten $1, 2, 3, 4$ verbunden sein muss, aber auf keiner der Geraden $2-3$, $2-4$ liegen kann.

Nach den obenangeführten Ergebnissen muss vorerst $2 : 1, a, b$ sein, wobei $a, b \equiv 5, 6, 7, 8, 9$ ist. Ausserdem ergibt sich noch $a : b$, weil der Punkt 2 vom Typ C sein muss. Man kann also voraussetzen,

(2) dass $2 : 1, 6, 8$ und folglich $6 : 8$ ist.

Wäre der Punkt 5 von beiden Punkten $3, 4$ getrennt, dann $3 : 1, 4, 5$ und der Punkt 3 wäre vom Typ D. Der Punkt 5 muss also wenigstens mit einem Punkte der Gruppe $3, 4$ verbunden sein und man kann voraussetzen, dass genau $5-3$ ist. Aus der Anführung (2) sehen wir, dass auch $5-2$ ist, d. h. $2-3-5$ muss die letzte durch den Punkt 5 gehende Gerade sein.

(3) $2-3-5$ impliziert $4 : 1, 3, 5$; $5 : 4, 0, P$

und daraus folgt $0 : P$.

Wir werden jetzt den Konfigurationspunkt 3 näher untersuchen. Aus den obenangeführten Ergebnissen folgt $3 : 1, 4, X$ $(X \equiv 6, 7, 8, 9)$. Im Falle $X : 2$ gehen durch den Punkt X nur drei Geraden. Es ist also $X-2$, d. h. (siehe 2) $X \equiv 7, 9$. Die zulässige Permutation (79), (68) erlaubt uns

(4) $3 : 1, 4, 7$

in Betracht zu nehmen.

Der Punkt 9 ist schon mit allen Punkten $2, 3, 4$ verbunden und deswegen muss $2-4-9$ eine Konfigurationsgerade sein (weil schon die Gerade $2-3-5$ existiert). Die übrigen zwei durch den Punkt 2 gehenden Geraden kann man als $2-0-t$, $2-P-v$ bezeichnen $(t, v \equiv 7, Q)$, wenn wir uns der Separierung $0 : P$ bewusst sind.

Nach der zulässigen Permutation $(0P)$ kann man also diese Geraden als Geraden $2-0-7$, $2-P-Q$ erwägen.

Dann aber existieren eben zwei Konfigurationsgeraden $(2-P-Q,\ 5-8-9)$ die mit keinem der Punkte $2, 1, 4, 7$ inzidieren. Folglich (siehe die Anführung 4) ist der Punkt 3 vom Typ C^2, was den Grundvoraussetzungen widerspricht.

Damit haben wir den folgenden Hilfsatz bewiesen:

Lemma 9. *Es existieren keine Konfigurationen vom Type* C^1_{12}.

10. KAPITEL

In den vorhergehenden Kapiteln haben wir vier Schemen gefunden und wir müssen noch beweisen, dass diese Schemen wirklich realisierbar sind und dass die Konfigurationspunkte mit einer irreduziblen Kurve dritter Ordnung inzidieren.

Wir konzentrieren uns vorerst auf das Schema

$$S_1 \quad \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5-6-7 \\ \hline 5\;7\;9\;8 & P\;6\;3\;4 & P\;Q\;4 & P\;Q & 7-8-9 \\ Q\;0\;6\;P & Q\;8\;9\;0 & 0\;7\;8 & 5\;6 & 9-0-5 \end{array} \quad \text{vom Type } B_2^1B_4^2B_2^3C_2^1C_1^2E_1^2$$

aus dem Hilfsatze L. 2.

Die Konfigurationspunkte $0, 4, Q$ können nicht auf einer Geraden (weder konfigurationellen oder fremden) liegen und deswegen kann man diese Punkte als Eckpunkte des Koordinatendreiecks wählen. Also $0 = (1, 0, 0)$, $4 = (0, 1, 0)$, $Q = (0, 0, 1)$. Weiter setzen wir voraus, dass der Schnittpunkt der fremden Geraden 06 und $2Q$ der Punkt $J = (1, 1, 1)$ ist. Die Koordinaten dieser Geraden sind $06J = (0, 1, -1)$, $2QJ = (1, -1, 0)$ und weil auch $4-6-Q = (1, 0, 0)$ ist, muss der Punkt 6 die Koordinaten $6 = (0, 1, 1)$ haben. Aus $2-4-0 = (0, 0, 1)$ bekommen wir analogisch $2 = (1, 1, 0)$. Die Koordinaten des Punktes P können wir mit $P = (1, 1, a)$ bezeichnen, weil der Punkt P auf der Geraden $2-P-Q = (1, -1, 0)$ liegt. Aus $4-5-P = (a, 0, -1)$ ergibt sich analogisch $5 = (1, c, a)$ und aus $1-5-Q = (c, -1, 0)$ bekommt man die Koordinaten des Punktes $1 = (1, c, cx)$.

Auf der fremden Geraden $0Q = (0, 1, 0)$ muss der Punkt 8 liegen (siehe $923-5P4-0Q8$), und da dieser Punkt auch mit der Geraden $2-6-8 = (1, -1, 1)$ inzidiert, sind $(-1, 0, 1)$ die Koordinaten des Punktes 8. Aus $3-4-8 = (1, 0, 1)$, $3-P-0 = (0, a, -1)$ ergibt sich folglich $3 = (-a, 1, a)$ und aus $1-7-0 = (0, x, -1)$, $3-Q-7 = (1, a, 0)$ bekommt man analogisch $7 = (-a, 1, x)$.

Die Koordinaten des letzten Punktes 9 wählen wir aus der Geraden $9-0-5 = (0, a, -c)$, d. h. $9 = (-b, c, a)$.

Diese Ergebnisse fassen wir zusammen:

$$s_1 \quad \begin{array}{llll} 1 = (1, c, cx), & 2 = (1, 1, 0), & 3 = (-a, 1, a), & 4 = (0, 1, 0)\,, \\ 5 = (1, c, a), & 6 = (0, 1, 1), & 7 = (-a, 1, x), & 8 = (-1, 0, 1)\,, \\ 9 = (-b, c, a), & 0 = (1, 0, 0), & P = (1, 1, a), & Q = (0, 0, 1) \end{array}$$

und erwägen, dass diese Konfigurationspunkte auch (ohne weitere Bedingungen) mit den folgenden Geraden inzidieren:

$$\begin{array}{lll} 1-5-Q = (c, -1, 0), & 1-7-0 = (0, x, -1), & 2-P-Q = (1, -1, 0), \\ 2-6-8 = (1, -1, 1), & 2-4-0 = (0, 0, 1), & 3-P-0 = (0, a, -1), \\ 3-Q-7 = (1, a, 0), & 3-4-8 = (1, 0, 1), & 4-5-P = (a, 0, -1), \\ 4-6-Q = (1, 0, 0), & 9-0-5 = (0, a, -c)\,. & \end{array}$$

Zwischen a, b, c, x müssen gewisse Beziehungen bestehen und diese Beziehungen stellen wir aus den Bedingungen der Inzidenz der Konfigurationspunkte mit den folgenden Geraden fest:

$$\begin{array}{ll} 5-6-7 \ldots\ x-ac-1+a^2 = 0, & 1-8-P \ldots\ ac+c-cx-1 = 0\,, \\ 2-3-9 \ldots\ a.(b+c-a-1) = 0, & 1-9-6 \ldots\ (a-c+bcx-bc) = 0\,, \\ 7-8-9 \ldots\ cx-a+b-ac = 0\,. & \end{array}$$

Leicht erwägen wir, dass wir diese Bedingungen auch in der Form

b_1 $\quad x = ac+1-a^2,\ b = a+1-c,\ abc = 1$ anführen können,

denn im Falle $a = 0$ wäre $3 \equiv 4$ und im Falle $x = 1$ wäre $1-7-0 \equiv 5-9-0$.

Analogisch wie in diesem Falle suchen wir auch die Koordinaten der Konfigurationspunkte der Schemen S_2, S_3, S_4. Weiterhin führe ich nur die Ergebnisse an und der Leser kann sich leicht überzeugen, dass alle nötigen Inzidenzbedingungen erfüllt sind.

S_2	*1*	*2*	*3*	*4*	*0–5–P*	vom Type B^2_{12}
	0 P 5 7	*0 Q 3 4*	*9 Q 4*	*5 Q*	*0–6–7*	
	Q 6 8 9	*8 6 7 9*	*5 P 8*	*6 7*	*P–8–9*.	

s_2 $\quad 1 = (1, 0, 0),\ 2 = (0, 1, 0),\ 3 = (av, v^2, a),\ 4 = (b, 1, c),\ 5 = (0, 0, 1),$
$6 = (b, 1, b),\ 7 = (tv, v, t),\ 8 = (a, 0, 1),\ 9 = (a, v, t),\ 0 = (a, 1, 1),$
$P = (a, 1, b),\ Q = (1, 1, 1).$

b_2 $\quad t-1 = v.(b-1) = a.(c-1);\ (c-1).v^2 = t-v;\ ac = bt.$

S_3	*Q*	*1*	*2*	*3*		
	4 6 8 0	*2 6 8 4*	*6 0 4*	*8 0 4*	*6–8–0*	vom Type $E^2_3C^1_6C^2_3$
	7 5 P 9	*3 9 5 P*	*7 P 5*	*7 5 9*	*7–9–P*	

s_3 $\quad 1 = (1, tx, x),\ 2 = (1, 0, 0),\ 3 = (x, t, 1),\ 4 = (0, 1, 0),\ 5 = (1, 1, 0),$
$6 = (1, 0, -1),\ 7 = (0, 0, 1),\ 8 = (x^2, tx, 1),\ 9 = (x, tx, 1),\ 0 = (1, tx, x^2),$
$P = (1, t, x),\ Q = (0, 1, 1).$

b_3 $\quad x^2+x+1 = tx.$

S_4	*Q*	*1*	*2*	*3*		
	4 6 8 0	*2 6 8 4*	*6 0 4*	*8 0 4*	*6–8–0*	vom Type $E^2_3C^2_9$
	5 7 P 9	*3 9 5 P*	*5 P 7*	*7 5 9*	*7–9–P*	

s_4 $\quad 1 = (1, r, 1),\ 2 = (0, 1, 0),\ 3 = (1, q, 1),\ 4 = (1, 0, 0),\ 5 = (0, 0, 1),$
$6 = (0, 1, 1),\ 7 = (1, 1, 0),\ 8 = (1, r, s),\ 9 = (y, q, 1),\ 0 = (1, q, y),$
$P = (s, r, 1),\ Q = (1, 0, -1).$

b_4 $\quad r = s+2,\ q = y+2,\ sy = 1.$

Damit ist bewiesen, dass alle Schemen wirklich realisierbar sind, und es bleibt nur die Inzidenz der Konfigurationspunkte mit einer irreduziblen Kubik zu beweisen.

Wie oben, so werde ich mich auch hier ausführlich nur mit dem Schema S_1 beschäftigen.

Gemäss der Beziehung *923—5P4—0Q8* konstruieren wir vor allem die Kubik F_1 aus den Geraden

$$923 = (a, -a, a+1),\ 5P4 = (a, 0, -1),\ 0Q8 = (0, 1, 0) \text{ und analogisch}$$

die Kubik F_2 aus den Geraden

$$950 = (0, a, -c),\ 2PQ = (1, -1, 0),\ 348 = (1, 0, 1).$$

Auf den Kubiken F_1 und F_2 liegen also die Punkte *2, 3, 4, 5, 8, 9, 0, P, Q* und ausserdem ergeben sich folgende Beziehungen:

$$F_2(1) : F_1(1) = F_2(6) : F_1(6) = F_2(7) : F_1(7) = a-c.$$

Daraus ist ersichtlich, dass mit der Kubik $K_1 \equiv F_2+(c-a).F_1$ alle zwölf Konfigurationspunkte inzidieren. Mit Hilfe der Beziehungen b_1 können wir diese Kubik K_1 folgenderweise ausdrücken:

$$K_1 \qquad x_0 . (ax . x_1-cx_2) . (x_0-x_1+x_2)+ab . x_1x_2 . (x_2-x_1) = 0.$$

Analogisch finden wir die Gleichungen der kubischen Kurven für die Konfigurationspunkte der Anführungen s_2, s_3, s_4:

$$K_2 \qquad a . x_2^2 . (x_0-x_1)+b . (a-1) . x_0x_1 . (x_1-x_2)+x_0x_2 . (x_1-x_0) = 0,$$

$$K_3 \qquad x_1(x_0x_1+x_1x_2-x_0x_2-x_2^2-x_0^2)+t^2 . x_0x_2 . (x_0-x_1+x_2) = 0,$$

$$K_4 \qquad x_1(x_0x_1+x_1x_2-x_0x_2-x_2^2-x_0^2)+qr . x_0x_2 . (x_0-x_1+x_2) = 0.$$

Bemerkung. Dazu bemerke ich, dass man das Schema S_4 (zum Unterschiede von den übrigen Schemen) auch noch mit den Punkten (und dazugehörigen Geraden) als s_4' folgendermassen ausdrücken kann:

s_4' $\quad$ *1* = (1, 0, 0), *2* = (0, 1, 0), *3* = (1, 1, 0), *4* = (0, 0, 1), *5* = $(t-tx, x-1, t+1)$, *6* = $(1-x, 1, -t)$, *7* = $(0, t, 1)$, *8* = $(x, x-1, t+1)$, *9* = $(1, 1, -t)$, *0* = $(1, x, 1)$, *P* = (1, 0, 1), *Q* = $(x-1, x+tx-1-t, t-1-tx)$.

b_4' $\quad$ $t^2+t+1 = 0;\ x . (x-1) . (x-t-1) . (x-t) \neq 0.$

Die Punkte dieser letzten Konfiguration inzidieren nicht mit einer irreduziblen Kubik (wie wir uns übrigens leicht überzeugen können).

Die Teilergebnisse dieser Arbeit kann man also in folgende zwei Hauptsätze zusammenfassen:

Satz 1. *Es sei i > 0. Es existieren nur drei ebene Konfigurationen* $(12_4, 16_3)$ *von den Typen* $E_i^2C_{12-i}$ *und keine Konfigurationen der Typen* $E_i^1E_j^2C_k$ *und* C_{12}^1.

Satz 2. *Nur acht ebene Konfigurationen* $(12_4, 16_3)$ *inzidieren mit der irreduziblen Kurve dritter Ordnung. Die ersten zwei von diesen Konfigurationen* (AI, AII) *hat de Vries, die dritte* (BI) *Bydžovský und die vierte* (BII) *J. Metelka gefunden. Die übrigen vier Konfigurationen* (S_1, S_2, S_3, S_4) *von den Typen* $B_8C_3E_1$, B_{12}, $E_3^2C_6^1C_3^2$, $E_3^2C_9^2$ *in dieser Arbeit gefunden sind.*

Literatur

[1] *B. Byžovský:* Über eine ebene Konfiguration (12_4, 16_3), Věstník Král. české spol. nauk 1939, č. II.

[2] *J. De Vries:* Über gewisse ebene Konfigurationen. Acta matematica, 12, 1889, 67.

[3] *O. Hesse:* Über Curven dritter Ordnung..., J. f. reine u. angew. Math. 36, 1848, 156–176 — Sebrané spisy, str. 155 a násl.

[4] *O. Hesse:* Eine Bemerkung zum Pascalschen Theorem, J. f. reine u. angew. Math. *41*, 1851, 27Q — Sebrané spisy (Mnichov 1897), str. 254.

[5] *G. Salmon* (něm. překlad W. Fiedler): Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, 1873, čl. 151, 152.

[6] *Th. Reye:* Konstruktion der Konfigurationen, Acta Mathematica, *1*, 1882, str. 97– a násl.

[7] *Th. Reye:* Geometrie der Lage, 3. B., 1910, str. 234 a n.

[8] *H. Schrötter:* Über ebene Konfigurationen, J. f. reine u. angew. Meth. *108*, 1891, str. 297.

[9] *M. Zacharias:* Untersuchungen über ebene Konfigurationen (12_4, 16_3), Deutsche Mathematik, *6*, čís. 2 a 3.

[10] *J. Metelka:* O jistých konfiguracích (12_4, 16_3) v rovině. Věstník Král. české spol. nauk 1944, XXI, str. 1–8

[11] *B. Byžovský:* O dvou nových konfiguracích (12_4, 16_3). Časopis pro pěstování matematiky *79*, 1954, 219–228.

[12] *B. Bydžovský:* Poznámky k teorii konfigurace (12_4, 16_3). Časopis pro pěstování matematiky, *74*, 1950, 249–251. (Zprávy ze spol. sjezdu matematiků čsl. a polských.)

[13] *J. Metelka:* O rovinných konfiguracích (12_4, 16_3). Časopis pro pěstování matematiky *80*, 1955, 133– a násl.

[14] *F. Levi:* Geometrische Konfigurationen, Leipzig, 1929.

[15] *V. Metelka:* O jistých rovinných konfiguracích (12_4, 16_3), které obsahují aspoň jeden bod typu D. Časopis pro pěstování matematiky *80*, 1955, 146– a násl.

[16] *V. Metelka:* Rovinné konfigurace (12_4, 16_3) s D-body. Časopis pro pěstování matematiky *82*, 1957, str. 385– a násl.

Anschrift des Verfassers: Liberec, Hálkova 6 (Vysoká škola strojní a textilní).

Výtah

ROVINNÉ KONFIGURACE (12_4, 16_3), KTERÉ INCIDUJÍ S NEROZLOŽITELNOU KŘIVKOU TŘETÍHO STUPNĚ

VÁCLAV METELKA, Liberec

Velmi významnou podmnožinu rovinných konfigurací (12_4, 16_3) tvoří ty zajímavé případy, ve kterých konfigurační body leží na nerozložitelných kubikách. Doposud byly v literatuře popsány čtyři konfigurace těchto vlastností. Objevili je postupně J. Hesse, De Vries, B. Bydžovský a J. Metelka. Autoru se podařilo vypočítat další čtyři konfigurace na nerozložitelné kubice a zároveň dokázat, že více konfigurací těchto vlastností již existovat nemůže. Použil k tomu hlavně metody klasifikace rovinných konfigurací podle typů jejich bodů. Na zajímavé vlastnosti těchto konfigurací hodlá poukázat v pokračování tohoto článku.

Резюме

ПЛОСКИЕ КОНФИГУРАЦИИ (12_4, 16_3), КОТОРЫЕ ИНЦИДЕНТНЫ С НЕПРИВОДИМОЙ КРИВОЙ ТРЕТБЕГО ПОРЯДКА

ВАЦЛАВ МЕТЕЛКА (Václav Metelka), Либерец

Значительное подмножество плоских конфигураций (12_4, 16_3) составляют те интересные случаи, когда конфигурационные точки лежат на неприводимых кубических кривых. До сих пор были описаны четыре конфигурации с этими свойствами. Обнаружили их постепенно И. Гесе (Hesse), Де Врие (De Vries), Б. Быджовский и И. Метелка. Автору удалось найти остальные четыре конфигурации на неприводимой кубической кривой и одновременно доказать, чро больше конфигураций с этими свойствами существовать уже не может. Для этой цели был применен главным образом метод классификации плоских конфигураций в зависимости от типов их точек. Интересные свойства этих конфигураций собирается автор описать в продолжении настоящей статьи.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

DOTYKOVÉ NOMOGRAMY S KRUŽNICEMI

JAROSLAV ZÁHORA, Brno

(Došlo dne 3. července 1965)

1. ÚVOD

Dotykový nomogram rovnice

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

jako útvar duální k průsečíkovému nomogramu téže rovnice (1) se skládá ze tří systémů isoplét

$$f(\xi, \eta, x_1) = 0\,, \tag{2}$$

$$g(\xi, \eta, x_2) = 0\,, \tag{3}$$

$$h(\xi, \eta, x_3) = 0 \tag{4}$$

okótovaných postupně hodnotami x_1, x_2, x_3 a tak sestrojených, že trojice ${}^0x_1, {}^0x_2, {}^0x_3$ vyhovuje vztahu (1) právě tenkrát, existuje-li společná tečna tří křivek

$$f(\xi, \eta, {}^0x_1) = 0, \quad g(\xi, \eta, {}^0x_2) = 0, \quad h(\xi, \eta, {}^0x_3) = 0\,.$$

Jsou-li systémy isoplét (2), (3), (4) dány v bodových souřadnicích (ξ, η), lze získati rovnici (1) tímto postupem: Uvažujeme společnou tečnu křivek (2), (3), (4), která ať se dotýká křivky (2) v bodě $({}^1\xi_0; {}^1\eta_0)$, křivky (3) v bodě $({}^2\xi_0; {}^2\eta_0)$ a křivky (4) v bodě $({}^3\xi_0; {}^3\eta_0)$. Tato tečna má rovnice

$$\frac{\partial f({}^1\xi_0; {}^1\eta_0; x_1)}{\partial \xi}(\xi - {}^1\xi_0) + \frac{\partial f({}^1\xi_0; {}^1\eta_0; x_1)}{\partial \eta}(\eta - {}^1\eta_0) = 0\,, \tag{5}$$

$$\frac{\partial g({}^2\xi_0; {}^2\eta_0; x_2)}{\partial \xi}(\xi - {}^2\xi_0) + \frac{\partial g({}^2\xi_0; {}^2\eta_0; x_2)}{\partial \eta}(\eta - {}^2\eta_0) = 0\,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial h({}^3\xi_0; {}^3\eta_0; x_3)}{\partial \xi}(\xi - {}^3\xi_0) + \frac{\partial h({}^3\xi_0; {}^3\eta_0; x_3)}{\partial \eta}(\eta - {}^3\eta_0) = 0\,. \tag{7}$$

Poněvadž rovnice (5) a (6) jsou rovnicemi téže přímky, existuje funkce k (proměnných x_1, x_2), $k \neq 0$ taková, že platí

$$(8)\qquad \frac{\partial g}{\partial \xi} = k \frac{\partial f}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial g}{\partial \eta} = k \frac{\partial f}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial g}{\partial \xi}\,{}^2\xi_0 + \frac{\partial g}{\partial \eta}\,{}^2\eta_0 = k\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\,{}^1\xi_0 + \frac{\partial f}{\partial \eta}\,{}^1\eta_0\right).$$

Poněvadž rovnice (5) a (7) jsou rovnicemi téže přímky, existuje funkce m (proměnných x_1, x_3), $m \neq 0$ taková, že platí

$$(9)\qquad \frac{\partial h}{\partial \xi} = m \frac{\partial f}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial h}{\partial \eta} = m \frac{\partial f}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial h}{\partial \xi}\,{}^3\xi_0 + \frac{\partial h}{\partial \eta}\,{}^3\eta_0 = m\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\,{}^1\xi_0 + \frac{\partial f}{\partial \eta}\,{}^1\eta_0\right).$$

Poněvadž bod dotyku $({}^1\xi_0; {}^1\eta_0)$ leží na křivce (2), bod dotyku $({}^2\xi_0; {}^2\eta_0)$ leží na křivce (3) a bod dotyku $({}^3\xi_0; {}^3\eta_0)$ leží na křivce (4) platí

$$(10)\qquad f({}^1\xi_0; {}^1\eta_0; x_1) = 0; \quad g({}^2\xi_0; {}^2\eta_0; x_2) = 0; \quad h({}^3\xi_0; {}^3\eta_0; x_3) = 0.$$

Soustavy (8), (9) a (10) představují 9 rovnic o 8 proměnných ${}^1\xi_0$, ${}^1\eta_0$, ${}^2\xi_0$, ${}^2\eta_0$, ${}^3\xi_0$, ${}^3\eta_0$, k, m. Eliminací těchto osmi proměnných z rovnic (8), (9) a (10) získáme rovnici (1), vztah mezi proměnnými x_1, x_2, x_3.

2. DOTYKOVÝ NOMOGRAM SE TŘEMI OBECNÝMI SOUSTAVAMI KRUŽNIC

2.1. Použijeme nyní postupu vyloženého v úvodu k odvození rovnice (1), kterou zobrazuje dotykový nomogram se třemi obecnými soustavami kružnic

$$(2')\qquad (\xi - f_1)^2 + (\eta - g_1)^2 = h_1^2,$$

$$(3')\qquad (\xi - f_2)^2 + (\eta - g_2)^2 = h_2^2,$$

$$(4')\qquad (\xi - f_3)^2 + (\eta - g_3)^2 = h_3^2,$$

při čemž pro $i = 1, 2, 3$ jsou f_i, g_i, h_i funkcemi pouze proměnné x_i, $h_i \neq 0$. Rovnice vyskytující se v těchto výpočtech označíme stejnými čísly jako odpovídající rovnice v obecném postupu, označíme je však čárkovaně, např. (2′), (3′), …

Společná tečna kružnic (2'), (3'), (4') se dotýká kružnice (2') v bodě $({}^1\xi_0; {}^1\eta_0)$, kružnice (3') v bodě $({}^2\xi_0; {}^2\eta_0)$ a kružnice (4') v bodě $({}^3\xi_0; {}^3\eta_0)$ a její rovnice jsou

$$(5') \qquad (\xi - f_1)({}^1\xi_0 - f_1) + (\eta - g_1)({}^1\eta_0 - g_1) = h_1^2\,,$$

$$(6') \qquad (\xi - f_2)({}^2\xi_0 - f_2) + (\eta - g_2)({}^2\eta_0 - g_2) = h_2^2\,,$$

$$(7') \qquad (\xi - f_3)({}^3\xi_0 - f_3) + (\eta - g_3)({}^3\eta_0 - g_3) = h_3^2\,.$$

Podmínku, že rovnice (5'), (6'), (7'), jsou rovnicemi téže přímky, vyjádříme takto:

$$(8') \qquad {}^2\xi_0 - f_2 = k({}^1\xi_0 - f_1)\,; \quad {}^2\eta_0 - g_2 = k({}^1\eta_0 - g_1)$$
$$h_2^2 + f_2({}^2\xi_0 - f_2) + g_2({}^2\eta_0 - g_2) = k[h_1^2 + f_1({}^1\xi_0 - f_1) + g_1({}^1\eta_0 - g_1)]$$

$$(9') \qquad {}^3\xi_0 - f_3 = m({}^1\xi_0 - f_1)\,; \quad {}^3\eta_0 - g_3 = m({}^1\eta_0 - g_1)$$
$$h_3^2 + f_3({}^3\xi_0 - f_3) + g_3({}^3\eta_0 - g_3) = m[h_1^2 + f_1({}^1\xi_0 - f_1) + g_1({}^1\eta_0 - g_1)]$$

Poněvadž body dotyku $({}^i\xi_0; {}^i\eta_0)$ pro $i = 1$ resp. 2 resp. 3 leží na kružnicích (2') resp. (3') resp. (4'), platí

$$(10') \qquad \begin{aligned} ({}^1\xi_0 - f_1)^2 + ({}^1\eta_0 - g_1)^2 &= h_1^2\,,\\ ({}^2\xi_0 - f_2)^2 + ({}^2\eta_0 - g_2)^2 &= h_2^2\,,\\ ({}^3\xi_0 - f_3)^2 + ({}^3\eta_0 - g_3)^2 &= h_3^2\,. \end{aligned}$$

Ze soustavy devíti rovnic (8'), (9'), (10') můžeme eliminovati proměnné ${}^1\xi_0 - f_1$; ${}^1\eta_0 - g_1$; ${}^2\xi_0 - f_2$; ${}^2\eta_0 - g_2$; ${}^3\xi_0 - f_3$; ${}^3\eta_0 - g_3$; k; m takto: Do rovnic (10') a do posledních rovnic soustav (8') a (9') dosadíme za ${}^2\xi_0 - f_2$, ${}^2\eta_0 - g_2$, ${}^3\xi_0 - f_3$, ${}^3\eta_0 - g_3$ výrazy z rovnic (8') a (9'). Tak dostaneme

$$(11) \qquad \begin{aligned} ({}^1\xi_0 - f_1)^2 + ({}^1\eta_0 - g_1)^2 &= h_1^2\,,\\ k^2({}^1\xi_0 - f_1)^2 + k^2({}^1\eta_0 - g_1)^2 &= h_2^2\,,\\ m^2({}^1\xi_0 - f_1)^2 + m^2({}^1\eta_0 - g_1)^2 &= h_3^2\,,\\ h_2^2 + kf_2({}^1\xi_0 - f_1) + kg_2({}^1\eta_0 - g_1) &= k[h_1^2 + f_1({}^1\xi_0 - f_1) + g_1({}^1\eta_0 - g_1)]\,,\\ h_3^2 + mf_3({}^1\xi_0 - f_1) + mg_3({}^1\eta_0 - g_1) &= m[h_1^2 + f_1({}^1\xi_0 - f_1) + g_1({}^1\eta_0 - g_1)]\,. \end{aligned}$$

Rovnice (11) obsahují již pouze 4 z původních 8 proměnných. Z prvních tří rovnic systému (11) vyplývá $h_1^2 = h_2^2/k^2 = h_3^2/m^2$ a z toho dále

$$(12) \qquad \frac{1}{k} = {}^1\varepsilon\frac{h_1}{h_2}\,; \quad \frac{1}{m} = {}^2\varepsilon\frac{h_1}{h_3}\,, \quad \text{kde} \quad {}^1\varepsilon = \pm 1\,;\ {}^2\varepsilon = \pm 1\,.$$

Upravíme-li poslední dvě rovnice systému (11) a dosadíme-li do nich za k a m výrazy z rovnic (12) získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $({}^1\xi_0 - f_1)$ a $({}^1\eta_0 - g_1)$

$$
\begin{aligned}
(13)\qquad & ({}^1\xi_0 - f_1)(f_2 - f_1) + ({}^1\eta_0 - g_1)(g_2 - g_1) = h_1^2 - {}^1\varepsilon h_1 h_2\,,\\
& ({}^1\xi_0 - f_1)(f_3 - f_1) + ({}^1\eta_0 - g_1)(g_3 - g_1) = h_1^2 - {}^2\varepsilon h_1 h_3\,.
\end{aligned}
$$

Matice rozšířená soustavy (13) je

$$
\begin{pmatrix} f_2 - f_1, & g_2 - g_1, & h_1^2 - {}^1\varepsilon h_1 h_2 \\ f_3 - f_1, & g_3 - g_1, & h_1^2 - {}^2\varepsilon h_1 h_3 \end{pmatrix}
$$

a řešení této soustavy je

$$
({}^1\xi_0 - f_1) = \frac{(h_1^2 - {}^1\varepsilon h_1 h_2)(g_3 - g_1) - (h_1^2 - {}^2\varepsilon h_1 h_3)(g_2 - g_1)}{(f_2 - f_1)(g_3 - g_1) - (f_3 - f_1)(g_2 - g_1)}\,,
$$

$$
({}^1\eta_0 - g_1) = \frac{(h_1^2 - {}^2\varepsilon h_1 h_3)(f_2 - f_1) - (h_1^2 - {}^1\varepsilon h_1 h_2)(f_3 - f_1)}{(f_2 - f_1)(g_3 - g_1) - (f_3 - f_1)(g_2 - g_1)}\,.
$$

Dosadíme-li tyto výrazy do první rovnice systému (11), obdržíme po úpravě hledaný vztah zobrazený dotykovým nomogramem se třemi obecnými soustavami kružnic.

$$
\begin{aligned}
(1')\qquad & [(h_1 - {}^1\varepsilon h_2)(g_3 - g_1) - (h_1 - {}^2\varepsilon h_3)(g_2 - g_1)]^2 + \\
& + [(h_1 - {}^2\varepsilon h_3)(f_2 - f_1) - (h_1 - {}^1\varepsilon h_2)(f_3 - f_1)]^2 = \\
& = [(f_2 - f_1)(g_3 - g_1) - (f_3 - f_1)(g_2 - g_1)]^2\,.
\end{aligned}
$$

Rovnici (1′) lze ještě poněkud upraviti. Roznásobíme-li dvojčleny vyskytující se v rovnici (1′), získáme

$$
\begin{aligned}
& (h_1 g_3 - {}^1\varepsilon h_2 g_3 + {}^1\varepsilon h_2 g_1 - h_1 g_2 + {}^2\varepsilon h_3 g_2 - {}^2\varepsilon h_3 g_1)^2 + \\
& + (h_1 f_2 - {}^2\varepsilon h_3 f_2 + {}^2\varepsilon h_3 f_1 - h_1 f_3 + {}^1\varepsilon h_2 f_3 - {}^1\varepsilon h_2 f_1)^2 = \\
& = (f_2 g_3 - f_2 g_1 - f_1 g_3 - f_3 g_2 + f_3 g_1 + f_1 g_2)^2
\end{aligned}
$$

a dalšími úpravami

$$
\begin{aligned}
& [g_1({}^1\varepsilon h_2 - {}^2\varepsilon h_3) - g_2(h_1 - {}^2\varepsilon h_3) + g_3(h_1 - {}^1\varepsilon h_2)]^2 + \\
& + f_1({}^1\varepsilon h_2 - {}^2\varepsilon h_3) - f_2(h_1 - {}^2\varepsilon h_3) + f_3(h_1 - {}^1\varepsilon h_2)]^2 = \\
& = [f_1(g_2 - g_3) - f_2(g_1 - g_3) + f_3(g_1 - g_2)]^2\,,
\end{aligned}
$$

neboli

$$
(1'')\qquad \begin{vmatrix} f_1 & h_1 & 1 \\ f_2 & {}^1\varepsilon h_2 & 1 \\ f_3 & {}^2\varepsilon h_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} g_1 & h_1 & 1 \\ g_2 & {}^1\varepsilon h_2 & 1 \\ g_3 & {}^2\varepsilon h_3 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix}^2.
$$

Podle předpokladu $h_i \neq 0$ pro $i = 1, 2, 3$. Rovnice (1′) a s ní ekvivalentní rovnice (1″) představuje tedy čtyři vztahy o proměnných x_1, x_2, x_3, lišící se pouze různou

kombinací znamének u funkcí h_2, h_3. Můžeme totiž položiti buď ${}^1\varepsilon = +1$, ${}^2\varepsilon = +1$, nebo ${}^1\varepsilon = +1$, ${}^2\varepsilon = -1$, nebo ${}^1\varepsilon = -1$, ${}^2\varepsilon = +1$ nebo ${}^1\varepsilon = -1$, ${}^2\varepsilon = -1$. Máme tento výsledek:

Věta 2.1.1. *Dotykový nomogram se třemi obecnými soustavami kružnic o zobrazovacích rovnicích* (2'), (3'), (4') *zobrazuje čtyři vztahy* (1") *lišící se pouze různou kombinací hodnot* ${}^1\varepsilon = \pm 1$, ${}^2\varepsilon = \pm 1$.

2.2. V dalším ukážeme, které ze společných tečen kružnic (2'), (3'), (4') je třeba vzíti za indexy pro řešení konkrétního vztahu, který je jedním ze čtyř vztahů (1").

Za tím účelem označme k_1 kružnici (2'), k_2 kružnici (3') a k_3 kružnici (4') a uvažujme o stejnolehlosti kružnic k_1 a k_2, ve které dotykovému bodu $({}^1\xi_0; {}^1\eta_0)$ kružnice k_1 odpovídá dotykový bod $({}^2\xi_0; {}^2\eta_0)$ kružnice k_2. Podle známých vět z planimetrie je koeficient této stejnolehlosti roven $\pm|h_1|/|h_2|$, kde $|h_1|$ je poloměr kružnice k_1, $|h_2|$ je poloměr kružnice k_2 a znaménko $+(-)$ platí v tom případě, je-li spojnice bodů $({}^1\xi_0; {}^1\eta_0)$, $({}^2\xi_0; {}^2\eta_0)$ vnější (vnitřní) společnou tečnou kružnic k_1, k_2. Podle (12) jest $|h_1|/|h_2| = 1/|k|$. Dokažme ještě, že $1/k$ je koeficientem stejnolehlosti i co do znaménka.

V první dvojici rovnic (8') je buď ${}^1\xi_0 - f_1 \neq 0$ nebo ${}^1\eta_0 - g_1 \neq 0$. Kdyby totiž bylo ${}^1\xi_0 - f_1 = {}^1\eta_0 - g_1 = 0$, bylo by ${}^1\xi_0 = f_1$, ${}^1\eta_0 = g_1 \Rightarrow h_1 = 0$ proti předpokladu. Nechť např. ${}^1\xi_0 - f_1 \neq 0$, a tedy též ${}^2\xi_0 - f_2 \neq 0$. Jsou-li poloměry v odpovídajících bodech dotyku $({}^1\xi_0; {}^1\eta_0)$, $({}^2\xi_0; {}^2\eta_0)$ stejně orientované, je uvažovaná společná tečna vnější společnou tečnou kružnic k_1, k_2. V tomto případě je $\operatorname{sgn}({}^1\xi_0 - f_1) = \operatorname{sgn}({}^2\xi_0 - f_2)$ a podle (8') $k > 0$, $1/k > 0$. Jsou-li poloměry v odpovídajících bodech dotyku opačně orientované, je společná tečna vnitřní společnou tečnou kružnic k_1, k_2 a je $\operatorname{sgn}({}^1\xi_0 - f_1) \neq \operatorname{sgn}({}^2\xi_0 - f_2)$ a podle (8') je $k < 0$, $1/k < 0$. Je tedy koeficient stejnolehlosti i co do znaménka roven $1/k$. Podobně lze ukázati, že $1/m$ je koeficient stejnolehlosti kružnic k_1, k_3. Máme tento výsledek:

Věta 2.2.1. *Platí-li pro dvojici* x_1, x_2 *nerovnost*

$$\frac{1}{k} = {}^1\varepsilon \frac{h_1(x_1)}{h_2(x_2)} > 0 \quad \left(\frac{1}{k} < 0\right),$$

je příslušný index vnější (vnitřní) společnou tečnou kružnic $k_1 \equiv (2')$ *a* $k_2 \equiv (3')$ *kótovaných hodnotami* x_1, x_2.

Platí-li pro dvojici x_1, x_3 *nerovnost*

$$\frac{1}{m} = {}^2\varepsilon \frac{h_1(x_1)}{h_3(x_3)} > 0 \quad \left(\frac{1}{m} < 0\right),$$

je příslušný index vnější (vnitřní) společnou tečnou kružnic $k_1 \equiv (2')$ *a* $k_3 \equiv (4')$, *kótovaných hodnotami* x_1, x_3.

Snadno lze také odvoditi, jakou polohu má společná tečna ke kružnicím (3′) a (4′) jsou-li znaménka koeficientů k a m známa. Stačí určiti, ve kterých polorovinách určených touto společnou tečnou leží středy kružnic (2′), (3′), (4′). Označíme-li $\varepsilon = {}^2\varepsilon/{}^1\varepsilon$, jest $k/m = \varepsilon h_2/h_3$. Je-li $k/m > 0$ pro dvojici x_2, x_3, potom je buď $k > 0$, $m > 0$ a podle předchozího výsledku leží středy všech tří kružnic k_1, k_2, k_3 v téže polorovině ohraničené společnou tečnou (indexem). Tento index je tedy vnější společnou tečnou kružnic k_2, k_3. Nebo je $k < 0$, $m < 0$, potom střed kružnice k_1 leží v jedné a středy kružnic k_2 a k_3 v opačné polorovině určené společnou tečnou (indexem) a tento index je opět vnější společnou tečnou kružnic k_2 a k_3. Podobně lze ukázati, že pro $k/m < 0$ jest příslušný index vnitřní společnou tečnou kružnic k_2 a k_3. Výsledek shrneme takto:

Věta 2.2.2. *Platí-li pro dvojici x_2, x_3 nerovnost*

$$\frac{k}{m} = \varepsilon \frac{h_2(x_2)}{h_3(x_3)} > 0 \quad \left(\frac{k}{m} < 0\right),$$

je příslušný index vnější (vnitřní) společnou tečnou kružnic $k_2 \equiv (3')$ a $k_3 \equiv (4')$, kótovaných hodnotami x_2 resp. x_3.

Na základě provedeného rozboru lze určiti, které ze společných tečen kružnic k_1, k_2, k_3 je nutno vzíti jako indexy v konkrétním případě při řešení daného vztahu, který je jedním ze čtyř vztahů (1′). Aby se předešlo chybnému čtení z nomogramu, je vhodné vyznačiti v klíči nomogramu polohu indexů vzhledem ke třem systémům kružnic a nerýsovati všechny kružnice celé, ale jen ty kruhové oblouky, které jsou pro čtení na nomogramu potřebné.

2.3. Položíme-li v rovnici (1′) a v rovnici (1″) ${}^1\varepsilon = {}^2\varepsilon = +1$, získáváme jeden ze čtyř vztahů zobrazených dotykovým nomogramem se třemi soustavami kružnic, a to rovnici

$$\begin{aligned} (1^*) \qquad & [(h_1 - h_2)(g_3 - g_1) - (h_1 - h_3)(g_2 - g_1)]^2 + \\ & + [(h_1 - h_3)(f_2 - f_1) - (h_1 - h_2)(f_3 - f_1)]^2 = \\ & = [(f_2 - f_1)(g_3 - g_1) - (f_3 - f_1)(g_2 - g_1)]^2 \end{aligned}$$

a s ní ekvivalentní rovnici

$$(1^{**}) \qquad \begin{vmatrix} f_1 & h_1 & 1 \\ f_2 & h_2 & 1 \\ f_3 & h_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} g_1 & h_1 & 1 \\ g_2 & h_2 & 1 \\ g_3 & h_3 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix}^2.$$

Rovnice (12) mají nyní tvar

$$\frac{1}{k} = \frac{h_1}{h_2}; \quad \frac{1}{m} = \frac{h_1}{h_3}$$

a dále platí

$$\frac{k}{m} = \frac{h_2}{h_3}.$$

Mají-li tedy pro určitou dvojici x_1, x_2 funkce h_1, h_2 stejná (opačná) znaménka, je $1/k > 0$ $(1/k < 0)$. Mají-li pro určitou dvojici x_1, x_3 funkce h_1, h_3 stejná (opačná) znaménka, je $1/m > 0$ $(1/m < 0)$. Mají-li konečně pro určitou dvojici x_2, x_3 funkce h_2, h_3 stejná (opačná) znaménka, je $k/m > 0$ $(k/m < 0)$. Vzhledem k větám 2.1.1, 2.2.1 a 2.2.2 můžeme vysloviti tento výsledek:

Věta 2.3.1. *Dotykový nomogram se třemi obecnými soustavami kružnic $k_1 \equiv (2')$, $k_2 \equiv (3')$, $k_3 \equiv (4')$ zobrazuje rovnici (1^{**}), při čemž pro dvojici x_i, x_j, $i, j = 1, 2, 3$ je třeba vzít za indexy vnější (vnitřní) společné tečny kružnic k_i, k_j, je-li $h_i h_j > 0$ $(h_i h_j < 0)$.*

Poznámka. Je-li kupř. pro všechna x_i $h_1 > 0$, $h_2 < 0$, $h_3 > 0$ a jsou-li hodnoty x_1, x_2 dány, použijeme jako indexů vnitřních společných tečen kružnic k_1, k_2 a hodnoty x_3 čteme u těch kružnic systému (4'), které se jednoho nebo druhého indexu dotýkají a jejichž středy leží spolu se středem kružnice k_1 v téže polorovině určené příslušným indexem.

3. TRANSFORMACE DOTYKOVÝCH NOMOGRAMŮ S KRUŽNICEMI

Dotykový nomogram o zobrazovacích rovnicích (2'), (3'), (4') lze podrobit homotetii

$$\xi' = \alpha\xi, \quad \eta' = \alpha\eta, \tag{14}$$

což je transformace převádějící každou kružnici v rovině opět v kružnici. Dosadíme-li do rovnic (2'), (3'), (4') za ξ a η výrazy z rovnic (14), obdržíme po jednoduché úpravě

$$\begin{aligned} (\xi - \alpha f_1)^2 + (\eta - \alpha g_1)^2 &= \alpha^2 h_1^2, \\ (\xi - \alpha f_2)^2 + (\eta - \alpha g_2)^2 &= \alpha^2 h_2^2, \\ (\xi - \alpha f_3)^2 + (\eta - \alpha g_3)^2 &= \alpha^2 h_3^2. \end{aligned} \tag{15}$$

V těchto třech rovnicích jsou souřadnice ξ, η označeny opět nečárkovaně. Pro $i = 1, 2, 3$ má kružnice k_i střed o souřadnicích αf_i; αg_i a poloměr αh_i. Jsou tedy rovnice (15) zobrazovacími rovnicemi vztahu (1'') s volitelným modulem α.

4. NĚKTERÉ SPECIÁLNÍ DOTYKOVÉ NOMOGRAMY S KRUŽNICEMI

4.1. V odstavcích 1–3 bylo předpokládáno $h_i \neq 0$ pro $i = 1, 2, 3$, byl tedy uvažován obecný případ dotykového nomogramu se třemi soustavami kružnic (15). Tento nomogram zobrazuje čtyři vztahy (1') příslušné různým kombinacím hodnot ${}^1\varepsilon = \pm 1$, ${}^2\varepsilon = \pm 1$.

Připustíme-li pro některé i $h_i \equiv 0$, potom se redukuje soustava kružnic

$$(\xi - \alpha f_i)^2 + (\eta - \alpha g_i)^2 = \alpha^2 h_i^2$$

na stupnici $(\xi - \alpha f_i)^2 + (\eta - \alpha g_i)^2 = 0$ neboli $\xi = \alpha f_i$; $\eta = \alpha g_i$.

Postupem podobným výpočtu rovnice (1') v odst. 2 lze ukázati, že i v tomto případě je tímto nomogramem zobrazena rovnice (1') event. (1''), ve které klademe $h_i \equiv 0$.

Snadno nahlédneme, že v případě jediného $h_i \equiv 0$ představuje rovnice (1') dva vztahy, lišící se pouze různými znaménky u funkcí h_2, h_3 podle volby ${}^1\varepsilon = \pm 1$, ${}^2\varepsilon = \pm 1$. V případě, že $h_i = h_j \equiv 0$ pro $i \neq j$, je rovnice (1') na volbě ${}^1\varepsilon$, ${}^2\varepsilon$ nezávislá.

Podobně jako v odst. 2.3 můžeme položiti ${}^1\varepsilon = {}^2\varepsilon = +1$ a dokázati platnost věty 2.3.1 pro dotykový nomogram se dvěma soustavami kružnic a jednou stupnicí nebo s jednou soustavou kružnic a se dvěma stupnicemi.

4.2. Speciální tvary rovnice (1*) lze získat také speciální volbou funkcí f_i, g_i.

Je-li pro některé i $f_i = g_i \equiv 0$, jsou kružnice k_i soustředné o středu v počátku.

Je-li pro některé i $f_i \equiv 0$, $h_i = g_i$, mají kružnice k_i středy na ose η a dotýkají se v počátku osy ξ atd.

V připojené tabulce jsou uvedeny některé speciální tvary rovnice (1*) a příslušné zobrazovací rovnice nomogramů.

Všimněme si kanonického tvaru uvedeného v tabulce na druhém místě

$$h_1(f_2 - f_3) + h_2(f_3 - f_1) = 0. \tag{16}$$

Předpokládáme, že $h_1 \neq 0 \neq h_2$. Rovnice (16) je nomograficky racionální 5. nomografického řádu a lze ji srovnat se Soreauovým kanonickým tvarem

$$F_3 = \frac{F_1 + F_2}{G_1 + G_2} \tag{17}$$

touto úpravou:

$$h_1 f_2 - h_1 f_3 + h_2 f_3 - h_2 f_1 = 0,$$

$$f_3(h_2 - h_1) = h_2 f_1 - h_1 f_2,$$

$$f_3 = \frac{h_2 f_1 - h_1 f_2}{h_2 - h_1},$$

a konečně rozšířením zlomku na pravé straně výrazem $1/h_1 h_2$ získáváme

$$f_3 = \left(\frac{f_1}{h_1} - \frac{f_2}{h_2}\right) : \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right).$$

Srovnávací rovnice jsou:

$$\frac{f_1}{h_1} = F_1; \quad -\frac{f_2}{h_2} = F_2; \quad \frac{1}{h_1} = G_1; \quad -\frac{1}{h_2} = G_2; \; f_3 = F_3.$$

Obráceně lze každou rovnici (17), pro kterou $G_1 \neq 0 \neq G_2$ převést na tvar (16). Jest potom

$$f_1 = \frac{F_1}{G_1}; \quad h_1 = \frac{1}{G_1}; \quad f_2 = \frac{F_2}{G_2}; \quad h_2 = -\frac{1}{G_2}; \quad f_3 = F_3 .$$

Zobrazovací rovnice dotykového nomogramu pro funkci (17) jsou

$$\left(\xi - \alpha \frac{F_1}{G_1}\right)^2 + \eta^2 = \frac{\alpha^2}{G_1^2}; \quad \left(\xi - \alpha \frac{F_2}{G_2}\right)^2 + \eta^2 = \frac{\alpha^2}{G_2^2}; \quad \xi_3 = \alpha F_3; \quad \eta_3 = 0 .$$

Platí-li pro dvojici x_1, x_2 nerovnost $h_1 h_2 = -1/G_1 G_2 > 0$, $(-1/G_1 G_2 < 0)$, je třeba vzíti za indexy vnější (vnitřní) společné tečny kružnic k_1, k_2.

Všimněme si dále kanonického tvaru uvedeného v tabulce na třetím místě.

$$(18) \qquad h_1(f_2 - f_3) + h_2 f_3 = 0 .$$

Předpokládáme, že $f_3 \neq 0$, $h_1 \neq 0$. Kdyby toto neplatilo, nebyla by rovnice (18) vztahem mezi třemi proměnnými. Rovnice (18) je nomograficky racionální čtvrtého nomografického řádu a lze ji uvést na Cauchyho kanonický tvar dělením výrazem $h_1 f_3$:

$$\frac{f_2}{f_3} - 1 + \frac{h_2}{h_1} = 0 .$$

Naopak funkci Cauchyho kanonického tvaru

$$(19) \qquad H_1 F_3 + H_2 G_3 + H_3 = 0 ,$$

ve které $H_3 \neq 0$ lze uvést na tvar (18), položíme-li

$$H_1 = \frac{1}{f_3}; \quad H_2 = \frac{1}{h_1}; \quad \frac{F_3}{H_3} = -f_2; \quad \frac{G_3}{H_3} = -h_2 .$$

Zobrazovací rovnice dotykového nomogramu pro funkci (19) jsou

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{\alpha^2}{H_2^2}, \quad \left(\xi + \frac{\alpha F_3}{H_3}\right)^2 + \eta^2 = \left(\frac{\alpha G_3}{H_3}\right)^2, \quad \xi_3 = \frac{\alpha}{H_1}; \quad \eta_3 = 0 .$$

Při čtení nomogramu je třeba vzíti za index vnější (vnitřní) společnou tečnu obou kružnic v případě, že

$$\frac{h_2}{h_1} = -\frac{H_2 G_3}{H_3} > 0, \quad \left(\frac{h_2}{h_1} = -\frac{H_2 G_3}{H_3} < 0\right).$$

Všimněme si ještě kanonického tvaru uvedeného na posledním místě v tabulce

$$(20) \qquad \frac{1}{h_1^2} = \frac{1}{f_2^2} + \frac{1}{g_3^2} .$$

TABULKA

Zobrazovací rovnice nomogramu	Kanonický tvar
Soustavy kružnic $\xi^2 + \eta^2 = \alpha_2 h_1^2$ $(\xi - \alpha f_2)^2 + (\eta - \alpha g_2)^2 = \alpha^2 h_2^2$ Stupnice $\xi_3 = \alpha f_3$; $\eta_3 = 0$	$g_2^2(h_1^2 - f_3^2) + [h_1 f_2 - f_3(h_1 - h_2)]^2 = 0$
Soustavy kružnic $(\xi - \alpha f_1)^2 + \eta^2 = \alpha^2 h_1^2$ $(\xi - \alpha f_2)^2 + \eta^2 = \alpha^2 h_2^2$ Stupnice $\xi_3 = \alpha f_3$; $\eta_3 = 0$	$h_1(f_2 - f_3) + h_2(f_3 - f_1) = 0$ (Lze převést na Soreauův kanonický tvar $F_3 = \frac{F_1 + F_2}{G_1 + G_2}$)
Soustavy kružnic $\xi^2 + \eta^2 = \alpha^2 h_1^2$ $(\xi - \alpha f_2)^2 + \eta^2 = \alpha^2 h_2^2$ Stupnice $\xi_3 = \alpha f_3$; $\eta_3 = 0$	$h_1(f_2 - f_3) + h_2 f_3 = 0$ (Lze převést na Cauchyho kanonický tvar)
Soustava kružnic $\xi^2 + \eta^2 = \alpha^2 h_1^2$ Stupnice $\xi_2 = \alpha f_2$; $\eta_2 = \alpha g_2$ $\xi_3 = \alpha f_3$; $\eta_3 = \alpha g_3$	$h_1^2[(g_3 - g_2)^2 + (f_3 - f_2)^2] =$ $= (f_2 g_3 - f_3 g_2)^2$
Soustava kružnic $\xi^2 + \eta^2 = \alpha^2 h_1^2$ Stupnice $\xi_2 = \alpha f_2$; $\eta_2 = 0$ $\xi_3 = 0$; $\eta_3 = \alpha g_3$	$\frac{1}{h_1^2} = \frac{1}{f_2^2} + \frac{1}{g_3^2}$ (Součtový tvar)

Rovnici (20) lze srovnat se součtovým tvarem

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 \,, \tag{21}$$

položíme-li $1/h_1^2 = \varphi_3$; $1/f_2^2 = \varphi_1$ a $1/g_3^2 = \varphi_2$. Naopak součtový tvar (21), pro který $\varphi_1 > 0$, $\varphi_2 > 0$, lze zobrazit dotykovým nomogramem o zobrazovacích rovnicích

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{\alpha^2}{\varphi_3}\,; \qquad \xi_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{\varphi_1}}\,; \quad \eta_1 = 0\,; \qquad \xi_2 = 0\,; \qquad \eta_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{\varphi_2}}\,.$$

4.3. Je-li $h_1 = h_2 = h_3 \equiv 0$, stane se dotykový nomogram spojnicovým o třech stupnicích $\xi_i = \alpha f_i$; $\eta_i = \alpha g_i$ $i = 1, 2, 3$. Rovnice (1**) se stane v tomto případě Soreauovou rovnicí

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Literatura

[1] *Václav Hruška:* Počet grafický a graficko-mechanický. Praha 1952.
[2] *František Jurga:* Nomografia a iné grafické metódy. Bratislava 1958.
[3] *M. d'Ocagne:* Traité de nomographie. Paříž 1921.
[4] *Václav Pleskot:* Nomografie. Praha 1963.

Adresa autora: Gorkého 42, Brno.

Резюме

ТАНГЕНЦИАЛЬНЫЕ НОМОГРАММЫ С ОКРУЖНОСТЯМИ

ЯРОСЛАВ ЗАГОРА (Jaroslav Záhora), Брно

Тангенциальная номограмма с тремя системами окружностей

$$k_i \equiv (\xi - f_i)^2 + (\eta - g_i)^2 = h_i^2\,, \quad (i = 1, 2, 3)\,,$$

где f_i, g_i, h_i — функции только переменной x_i, изображает четыре отношения

$$\begin{vmatrix} f_1 & h_1 & 1 \\ f_2 & {}^1\varepsilon h_2 & 1 \\ f_3 & {}^2\varepsilon h_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} g_1 & h_1 & 1 \\ g_2 & {}^1\varepsilon h_2 & 1 \\ g_3 & {}^2\varepsilon h_3 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix}^2,$$

отличающиеся лишь разными сочетаниями значений ${}^1\varepsilon = \pm 1$, ${}^2\varepsilon = \pm 1$. Если ${}^1\varepsilon h_1/h_2 > 0$ (${}^1\varepsilon h_1/h_2 < 0$), надо при чтении номограммы считать индексом внешнюю (внутреннюю) касательную окружностей k_1, k_2. Если ${}^2\varepsilon h_1/h_3 > 0$ (${}^2\varepsilon h_1/h_3 < 0$), надо считать индексом внешнюю (внутреннюю) касательную окружностей k_1, k_3.

Специальным подбором функций f_i, g_i, h_i можно получить изобразительные уравнения и канонические формы тангенциальных номограмм с двумя системами окружностей и с одной шкалой, или с одной системой окружностей и с двумя шкалами.

В работе далее показано изображение уравнений канонической формы Соро пятого номографического порядка, канонической формы Коши и канонической формы третьего номографического порядка тангенциальными номограммами с окружностями.

Summary

TANGENT NOMOGRAMS WITH CIRCLES

JAROSLAV ZÁHORA, Brno

The tangent nomogram with three general systems of circles

$$k_i = (\xi - f_i)^2 + (\eta - g_i)^2 = h_i^2 \quad (i = 1, 2, 3),$$

where f_i, g_i, h_i are functions of the variable x_i only, represents four relations (obtained by taking ${}^1\varepsilon = \pm 1$, ${}^2\varepsilon = \pm 1$ in)

$$\begin{vmatrix} f_1 & h_1 & 1 \\ f_2 & {}^1\varepsilon h_2 & 1 \\ f_3 & {}^2\varepsilon h_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} g_1 & h_1 & 1 \\ g_2 & {}^1\varepsilon h_2 & 1 \\ g_3 & {}^2\varepsilon h_3 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix}^2$$

If ${}^1\varepsilon h_1/h_2 > 0$ (or ${}^1\varepsilon h_1/h_2 < 0$), it is necessary when reading the nomogram take for the index the exterior (or interior, respectively) common tangent of the circles k_1, k_2. If ${}^2\varepsilon h_1/h_3 > 0$ (or ${}^2\varepsilon h_1/h_3 < 0$) it is necessary take for the index the exterior (or interior, respectively) common tangent of the circles k_1, k_3.

By special choice of the functions f_i, g_i, h_i it is possible to obtain the equations of representing and the canonic forms of tangent nomograms with two systems of circles and with one scale, and nomograms with one system of circles and with two scales.

It is also shown that it is possible to represent (by tangent nomograms) the Soreau canonic form of the 5th nomographic order, the Cauchy canonic form and the canonic form of the 3rd nomographic order.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

O JEDNÉ SMÍŠENÉ OKRAJOVÉ ÚLOZE TEORIE ANALYTICKÝCH FUNKCÍ

JIŘÍ VESELÝ, Praha

(Došlo dne 12. srpna 1965)

Při studiu okrajových úloh teorie analytických funkcí se zpravidla předpokládá „dostatečná hladkost" křivek, tvořících hranici uvažované oblasti. Často se k řešení těchto úloh užívá Fredholmovy metody, pro kterou se zpravidla tento předpoklad zavádí. V tomto článku vyjádříme řešení jisté smíšené okrajové úlohy pomocí integrálů typu

$$\int_K \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,, \tag{1}$$

kde K je rektifikovatelná Jordanova křivka a F spojitá reálná funkce na této křivce. Pro libovolnou spojitou funkci F nemůže však ani předpoklad hladkosti křivky K zaručit existenci spojitého rozšíření funkce vyjádřené integrálem (1) z vnitřku křivky K na K. V souvislosti s tím se studují oblasti ohraničené křivkami, splňujícími další omezení, na příklad tzv. Ljapunovovy podmínky.

V článcích [5] a [8] jsou studovány okrajové úlohy teorie harmonických funkcí; výsledků zde dosažených lze použít pro zobecnění řešení úlohy řešené též v [1] a [2]. V práci [1] naznačuje autor možnost převedení složitějších úloh na tuto úlohu, v práci [2] je popsána aplikace této úlohy v hydrodynamice. V tomto článku jsou formulovány nutné a postačující podmínky pro spojité rozšíření reálné a imaginární části studované funkce z uvažované oblasti na části hranice, kladené na křivky tuto hranici vytvářející. Je zde vyšetřen Fredholmův poloměr operátoru použitého k řešení této úlohy a udána podmínka, zaručující existenci řešení úlohy pro dostatečně širokou třídu hraničních podmínek.

Pro formulaci úlohy zavedeme následující označení. Nechť E_1 značí množinu všech reálných čísel, E_2 množinu všech komplexních čísel, $K_j \subset E_2$ pro $0 \leqq j \leqq q$ jest systém Jordanových křivek s vnitřky D_j, přičemž pro $0 \leqq j < k \leqq q$ platí

$$\bar{D}_j \cap \bar{D}_k = \emptyset\,, \quad D_0 \supset \bigcup_{j=1}^{q} \bar{D}_j\,. \tag{2}$$

Křivka K_0 jest orientována kladně, křivky K_j, $j = 1, \ldots, q$ záporně. Položíme

$$D = D_0 - \bigcup_{j=1}^{q} \bar{D}_j \tag{3}$$

a zvolíme pevně přirozené p, $1 \leqq p \leqq q$. Nechť $L' = \bigcup_{j=0}^{p-1} K_j$, $L'' = \bigcup_{j=p}^{q} K_j$, $L = L' \cup L''$. Je-li M kompaktní, $M \subset E_2$, označíme symbolem $C(M)$ Banachův prostor všech spojitých reálných funkcí na M s normou $\|F\| = \sup_{t \in M} |F(t)|$. Dále nechť Q značí množinu všech funkcí z $C(L)$, které jsou konstantní na každé komponentě L, Q_0 množinu všech funkcí z Q, které nabývají na křivce K_0 pouze nulové hodnoty. Zřejmě je $Q_0 \subset Q \subset C(L)$. Smíšenou Dirichletovu úlohu, kterou se budeme zabývat, lze formulovat ve tvaru:

Úloha 1. K dané funkci $G \in C(L)$ najděte jednoznačnou analytickou funkci Φ v oblasti D tak, aby existovaly konečné limity

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} \operatorname{Re} \Phi(z) = \tilde{\Phi}(\zeta) \quad \text{pro} \quad \zeta \in L',$$

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} \operatorname{Im} \Phi(z) = \tilde{\Phi}(\zeta) \quad \text{pro} \quad \zeta \in L''$$

a platil vztah $\tilde{\Phi} - G \in Q$.

Řešení této úlohy budeme hledat ve speciálním tvaru stejně jako v [1] či [2]. Proto též učiníme další předpoklad, že totiž $K_0, K_1, \ldots, K_q$ jsou rektifikovatelné křivky. Budeme studovat funkce $\Phi(z) = \Psi F(z)$ pro $F \in C(L)$, $z \in E_2 - L$ typu

$$\Psi F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{L'} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{L''} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \,. \tag{4}$$

Pro řešení úlohy 1 ve tvaru (4) je nutno najít k funkci $G \in C(L)$ „hustotu“ F, tj. vyšetřiti následující úlohu:

Úloha 2. K dané funkci $G \in C(L)$ určete funkci $F \in C(L)$ tak, aby funkce $\Psi F = \Phi$ určená vztahem (4) byla řešením úlohy 1.

Z hlediska určení chování funkce ΨF v okolí L a zaručení existence potřebných limit je vhodné vyšetřit následující úlohu:

Úloha 3. Nechť ΨF je definována vztahem (4). Najděte nutné a postačující podmínky k tomu, aby pro každou funkci $F \in C(L)$ existovaly vlastní limity

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} \operatorname{Re} \Psi F(z) = A F(\zeta) \quad \text{pro} \quad \zeta \in L', \tag{5}$$

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} \operatorname{Im} \Psi F(z) = A F(\zeta) \quad \text{pro} \quad \zeta \in L''.$$

Poznámka 1. Z existence vlastních limit (5) pro všechna $\zeta \in L$ plyne spojitost funkce ΛF na L, tj. $\Lambda F \in C(L)$.

Začneme řešením úlohy 3. Zvolíme následující označení. Nechť je K rektifikovatelná Jordanova křivka v E_2, vytvořená komplexní spojitou periodickou funkcí ψ reálné proměnné t s periodou $2k$, $k > 0$, s následujícími vlastnostmi:

$$
\begin{aligned}
(6) \qquad & \psi(\langle 0, 2k \rangle) = K, \quad \psi(t + 2k) = \psi(t) \quad \text{pro} \quad t \in E_1, \\
& 0 < |t_1 - t_2| < 2k \Rightarrow \psi(t_1) \neq \psi(t_2) \quad \text{pro} \quad t_1, t_2 \in E_1 .
\end{aligned}
$$

Z rektifikovatelnosti křivky K vyplývá při běžném způsobu definice variace funkce na intervalu var $[\psi; I] < +\infty$ pro každý omezený interval $I \subset E_1$. Přiřadíme každé funkci $F \in C(K)$ předpisem $f(t) = F(\psi(t))$ spojitou reálnou periodickou funkci f na E_1 s periodou $2k$. Vezmeme-li za normu na množině všech takových funkcí maximum funkce na E_1 a označíme-li takto vzniklý prostor C_{2k}, je uvedeným předpisem vyjádřený vzájemně jednoznačný vztah mezi funkcemi f, F izometrickým izomorfismem

$$
(7) \qquad C(K) \leftrightarrow C_{2k} .
$$

Každé funkci $F \in C(K)$ přiřadíme funkci $\Psi_K F$, definovanou pro $z \in E_2 - K$ předpisem

$$
(8) \qquad \Psi_K F(z) = \int_K \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \int_0^{2k} \frac{F(\psi(t))}{\psi(t) - z} \, d_t \, \psi(t) ,
$$

přičemž vzhledem k (7) budeme používat vždy vhodnějšího z obou vyjádření. V posledním integrálu lze integrovat přes libovolný interval $I \subset E_1$ délky $2k$.
Pro $z \notin K$ lze psáti

$$
(9) \qquad \psi(t) - z = |\psi(t) - z| \, . \exp i \, \vartheta_z(t) ,
$$

kde $\vartheta_z(z)$ označuje spojitou větev arg $[\psi(t) - z]$ na E_1. Dále označíme pro $F \in C(K)$, $z \in E_2 - K$

$$
\begin{aligned}
(10) \qquad \operatorname{Re} \Psi_K F(z) &= \int_K \frac{F(\zeta)}{|\zeta - z|} \, d|\zeta - z| = \int_0^{2k} \frac{F(\psi(t))}{|\psi(t) - z|} \, d_t |\psi(t) - z| = M_K(z, F) , \\
\operatorname{Im} \Psi_K F(z) &= \int_0^{2k} F(\psi(t)) \, d_t \, \vartheta_z(t) = W_K(z, F) .
\end{aligned}
$$

Nechť A, B jsou dvě množiny v E_2, pak dist $(A, B) = \inf \{|z_1 - z_2|; z_1 \in A, z_2 \in B\}$; je-li $A = \{z_1\}$, píšeme kratčeji dist $(A, B) =$ dist (z_1, B). Položme $B(M) = \{F; F \in C(M), \|F\| \leqq 1\}$.

Lemma 1. *Je-li $A \subset E_2$, dist $(A, K) > 0$, pak všechny funkce $M_K(z, F)$, $W_K(z, F)$ pro $F \in B(K)$ jsou stejně spojité a stejnoměrně omezené na A.*

Důkaz tohoto tvrzení vyplývá z lemmatu 2.1 v [8]. Nechť dále Int K značí omezenou komponentu $E_2 - K$, tj. vnitřek křivky K, Ext K neomezenou komponentu $E_2 - K$. Pro $z \notin K$ zavádíme označení ind (z, K) pro index bodu z vzhledem ke křivce K, tj.

$$\operatorname{ind}(z, K) = \frac{1}{2\pi} \Delta_u \arg [\psi(u) - z; \langle t, t + 2k \rangle] .$$

Označíme ještě symbolem σ hodnotu ind (z, K) na Int K, tj.

$$\operatorname{ind}(z, K) = \sigma \tag{11}$$

Je-li $z \in E_2$, $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $R \in (0, +\infty \rangle$, označíme $\mu_R^K(z, \alpha)$ počet ($0 \leqq \mu_R^K(z, \alpha) \leqq +\infty$) bodů množiny $K \cap \{z + r\exp i\alpha; 0 < r < R\}$. Funkce $\mu_R^K(z, \alpha)$ je lebesgueovsky měřitelná funkce vůči proměnné α (viz [6]) a lze položiti

$$v_R^K(z) = \int_0^{2\pi} \mu_R^K(z, \alpha) \, d\alpha . \tag{12}$$

Pro $R = +\infty$ budeme psáti pouze $v^K(z)$. Označíme-li D_K libovolnou z komponent $E_2 - K$, platí:

Lemma 2. *Nutnou a postačující podmínkou pro stejnoměrnou spojitost funkcí $W_K(z, F)$ na D_K pro všechny funkce $F \in C(K)$ je vztah*

$$\sup_{\zeta \in K} v^K(\zeta) < +\infty . \tag{13}$$

Důkaz tohoto tvrzení vyplývá z věty 2.10 v [5]. Stejnoměrná spojitost funkcí $W_K(z, F)$ $(F \in C(K))$ na D_K je ekvivalentní s existencí vlastních limit

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D_K}} W_K(z, F) \quad \text{pro} \quad \zeta \in K . \tag{14}$$

Pro výpočet limity (14) zavedeme funkci $\vartheta_\zeta(t)$, $\zeta \in K$, $t \in E_1$. Nechť $\zeta \in K$; zvolíme libovolně $t_0 \in \psi^{-1}(\zeta) = \{t_0; t_0 \in E_1, \psi(t_0) = \zeta\}$. V $(t_0, t_0 + 2k)$ existuje vzhledem k (6) spojitá větev $\vartheta_\zeta(t)$ argumentu arg $[\psi(t) - \zeta]$. Z (13) plyne (viz [8]) var $[\vartheta_\zeta(t); (t_0, t_0 + 2k)] < +\infty$ a existují tudíž vlastní limity

$$\lim_{t \to t_0+} \vartheta_\zeta(t) = \vartheta_\zeta(t_0+) , \quad \lim_{t \to (t_0 + 2k)^-} \vartheta_\zeta(t) = \vartheta_\zeta((t_0 + 2k) -) .$$

Položíme $\vartheta_\zeta(t_0) = \vartheta_\zeta(t_0+)$ a takto definovanou funkci $\vartheta_\zeta(t)$ rozšíříme z $\langle t_0, t_0 + 2k)$ na E_1 předpisem

$$\vartheta_\zeta(t + 2k) = \vartheta_\zeta(t) + \sigma\pi , \tag{15}$$

kde σ je určeno vztahem (11). I pro pevně zvolené $\zeta \in K$ není funkce $\vartheta_\zeta(t)$ určena jednoznačně, nýbrž jen až na jistou aditivní konstantu. Funkce $\vartheta_z(t)$ pro $z \notin K$ byla spojitá v E_1, funkce $\vartheta_\zeta(t)$ pro $\zeta \in K$ v E_1 obecně spojitá nemusí být. Položíme

$$(16) \qquad W_K(\zeta, F) = \int_0^{2k} F(\psi(t))\, \mathrm{d}_t\, \vartheta_\zeta(t)\,.$$

Hodnota $W_K(\zeta, F)$ je určena jednoznačně, nezávisle na výběru $\vartheta_\zeta(t)$. Potom platí (viz věta 1.2 v [8]):

Lemma 3. *Nechť platí (13). Pak pro libovolnou funkci $F \in C(K)$ a libovolné $\zeta \in K$ platí*

$$(17) \qquad \lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D_K}} W_K(z, F) = W_K(\zeta, F) \pm \sigma\pi\, F(\zeta)\,,$$

kde „+“ resp. „−“ platí při $D_K = \operatorname{Int} K$ resp. $D_K = \operatorname{Ext} K$.

Provedené úvahy lze snadno zobecniti na oblasti, jejichž hranice je složena z konečně mnoha rektifikovatelných Jordanových křivek, speciálně tedy pro systém L. Nechť ψ_{Kj}, M_{Kj}, W_{Kj} jsou definovány analogicky jako odpovídající funkce ve vztazích (8) a (10). Pro libovolnou $F \in C(L)$ definujme

$$(18) \qquad M_{L'}(z, F) = \sum_{j=0}^{p-1} M_{K_j}(z, F)\,, \quad W_{L'}(z, F) = \sum_{j=0}^{p-1} W_{K_j}(z, F)\,, \quad z \in E_2 - L'\,,$$

$$M_{L''}(z, F) = \sum_{j=p}^{q} M_{K_j}(z, F)\,, \quad W_{L''}(z, F) = \sum_{j=p}^{q} W_{K_j}(z, F)\,, \quad z \in E_2 - L''\,.$$

Lemma 4. *Nechť $A \subset E_2$,* $\operatorname{dist}(A, L') > 0$. *Potom všechny funkce $M_{L'}(z, F)$, $W_{L'}(z, F)$ pro $F \in B(L)$ jsou stejně spojité a stejnoměrně omezené na A. Pro* $\operatorname{dist}(A, L'') > 0$ *platí analogické tvrzení o $M_{L''}(z, F)$, $W_{L''}(z, F)$, ($F \in B(L)$).*

Důkaz vyplývá z lemmatu 1.

Položme

$$(19) \qquad v_R^{L'}(z) = \sum_{j=0}^{p-1} v_R^{K_j}(z)\,, \quad v_R^{L''}(z) = \sum_{j=p}^{q} v_R^{K_j}(z)\,, \quad v_R^{L}(z) = v_R^{L'}(z) + v_R^{L''}(z)\,.$$

Lemma 5. *Buď P libovolná množina, $P \subset E_2 - L'$, $L' \subset \bar{P}$. K tomu, aby pro libovolnou funkci $F \in C(L)$ funkce $W_{L'}(z, F)$ byla stejnoměrně spojitou funkcí proměnné z na P je nutné a stačí, aby platilo*

$$(20) \qquad \sup_{\zeta \in L'} v^{L'}(\zeta) < +\infty\,.$$

Podobné tvrzení platí i pro $W_{L''}(z, F)$, přičemž podmínka má tvar

$$(20') \qquad \sup_{\zeta \in L''} v^{L''}(\zeta) < +\infty\,.$$

Důkaz vyplývá též z věty 2.10 v [5].

Poznámka 2. Vzhledem k definici (19) a vzhledem k vlastnostem funkcí v^L, $v^{L'}$, $v^{L''}$ je současná platnost podmínek (20) a (20′) ekvivalentní podmínce

$$\sup_{\zeta \in L} v^L(\zeta) < +\infty . \tag{21}$$

Plyne to přímo z definice (19) a odhadů $v^{L'}(\zeta)$, $v^{L''}(\zeta)$ pomocí $v^L(\zeta)$. Na příklad pro $v^{L'}(\zeta)$ platí

$$\sup_{\zeta \in L'} v^{L'}(\zeta) \leqq \sup_{\zeta \in L'} v^L(\zeta) \leqq \sup_{\zeta \in L} v^L(\zeta) .$$

Poznámka 3. Podobně jako v (17) platí pro libovolné $F \in C(L)$, $\zeta \in L'$

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} W_{L'}(z, F) = W_{L'}(\zeta, F) + \pi F(\zeta) . \tag{22}$$

Podle (17) jest pro pevně zvolené j, $0 \leqq j \leqq p - 1$, $F \in C(L)$ a libovolné $\zeta \in K_j$

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} W_{K_j}(z, F) = W_{K_j}(\zeta, F) + \pi F(\zeta) .$$

Podle lemmatu 4 platí

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} W_{K_j}(z, F) = W_{K_j}(\zeta, F) \quad \text{pro} \quad l \neq j$$

a odtud (22) vyplývá snadno sečtením přes všechna j, $0 \leqq j \leqq p - 1$ a porovnáním s definičními vztahy (18).

Označíme-li

$$W_{L'} F(\zeta) = \lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} W_{L'}(z, F) - \pi F(\zeta), \ \zeta \in L' ,$$

zjistíme snadno porovnáním, že $W_{L'} F(\zeta) = W_{L'}(\zeta, F)$ pro každé $\zeta \in L'$. Za předpokladu (20) jest takto definovaný operátor $W_{L'}$, zobrazující $C(L)$ (resp. $C(L')$) do $C(L')$ spojitým operátorem na $C(L)$. (Viz též poznámka 3.3 v [8].) Podobné závěry platí i o funkci $W_{L''}(\zeta, F)$ a příslušném operátoru $W_{L''}$.

Věta 1. *Nechť platí označení z úlohy 3. Pak nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby pro každou funkci $F \in C(L)$ existovaly vlastní limity ΛF z (5), je podmínka (21).*

Důkaz. Ze vztahů (3) a (18) pro $z \in D$, $F \in C(L)$ vyplývají po separaci reálné a imaginární části vztahy

$$\operatorname{Re} \Psi F(z) = \frac{1}{\pi} \left[W_{L'}(z, F) + M_{L''}(z, F) \right] , \tag{23}$$

$$\operatorname{Im} \Psi F(z) = \frac{1}{\pi} \left[W_{L''}(z, F) - M_{L'}(z, F) \right] .$$

Zvolíme-li libovolně otevřenou množinu $P \subset D$, $L' \subset \bar{P}$, je podle lemmatu 5 funkce $W_{L'}(z, F)$ stejnoměrně spojitá na P právě když platí (20). Zvolíme okolí $U(L')$ systému křivek L' tak, aby $\operatorname{dist}(U(L'), L'') > 0$. Z lemmatu 4 vyplývá stejnoměrná spojitost $M_{L''}(z, F)$ na $U(L')$. Funkce $\operatorname{Re} \Psi F(z)$ je tedy stejnoměrně spojitá pro $z \in P \cap U(L')$ právě když platí (20). Stejnou úvahu můžeme provést i pro $\operatorname{Im} \Psi F(z)$ a podmínku (20'). Z poznámky 2 vyplývá, že (21) platí, právě když jsou $\operatorname{Re} \Psi F$, $\operatorname{Im} \Psi F$ stejnoměrně spojité funkce v příslušných okolích L', L'', tj. když existují vlastní limity $\Lambda F(\zeta)$ z (5).

Operátor $W_{L'}$ zobrazuje – viz poznámku 3 – za předpokladu (21) prostor $C(L)$ do prostoru $C(L')$. Provedeme – bez změny označení – následující rozšíření definice operátoru $W_{L'}$:

$$(24) \qquad W_{L'} F(\zeta) = W_{L'}(\zeta, F) \text{ pro } \zeta \in L', \quad W_{L'} F(\zeta) = 0 \text{ pro } \zeta \in L''.$$

Podobně zavedeme ještě v souhlase s formulí (18)

$$(24) \qquad \begin{aligned} W_{L''} F(\zeta) &= W_{L''}(\zeta, F) \text{ pro } \zeta \in L'', & W_{L''} F(\zeta) &= 0 \text{ pro } \zeta \in L', \\ M_{L'} F(\zeta) &= M_{L'}(\zeta, F) \text{ pro } \zeta \in L'', & M_{L'} F(\zeta) &= 0 \text{ pro } \zeta \in L', \\ M_{L''} F(\zeta) &= M_{L''}(\zeta, F) \text{ pro } \zeta \in L', & M_{L''} F(\zeta) &= 0 \text{ pro } \zeta \in L''. \end{aligned}$$

Takto zavedené operátory $W_{L'}$, $W_{L''}$, $M_{L'}$, $M_{L''}$ zobrazují při platnosti (21) prostor $C(L)$ do prostoru $C(L)$. Vyšetřované limity $\Lambda F(\zeta)$ z (5) lze nyní vyjádřit ve tvaru

$$\Lambda F(\zeta) = \frac{1}{\pi} [W_{L'} + M_{L''}] F(\zeta) + F(\zeta) \quad \text{pro} \quad \zeta \in L',$$

$$\Lambda F(\zeta) = \frac{1}{\pi} [W_{L''} - M_{L'}] F(\zeta) + F(\zeta) \quad \text{pro} \quad \zeta \in L'',$$

resp. po úpravě s přihlédnutím k definičním vztahům (24)

$$(25) \qquad \Lambda F(\zeta) = \frac{1}{\pi} [(W_{L'} + W_{L''}) + (M_{L''} - M_{L'}) + \pi I] F(\zeta), \quad \zeta \in L,$$

kde I značí identický operátor na $C(L)$. Λ je tedy omezeným lineárním operátorem na $C(L)$, právě když platí (21). Omezenost operátorů $M_{L'}$, $M_{L''}$ vyplývá z lemmatu 4, omezenost operátorů typu $W_{L'}$, resp. $W_{L''}$ viz podrobněji v [5].

Nadále budeme předpokládat stále platnost (21).

Pro řešení úlohy 2 je vhodné vyšetřit Fredholmův poloměr operátoru $I - \Lambda = \Gamma$ na $C(L)$, resp. veličinu

$$(26) \qquad \omega\Gamma = \inf_T \|\Gamma - T\|,$$

kde T probíhá všechny kompaktní operátory na prostoru $C(L)$; tato veličina je převrácenou hodnotou Fredholmova poloměru operátoru Γ. Stejný význam má symbol ω při použití ve spojení s ostatními zavedenými operátory.

Zavedeme další označení. Nechť K je opět rektifikovatelná Jordanova křivka, vytvořená funkcí ψ s vlastnostmi (6). Pro libovolné $\zeta \in K$ zvolíme $t_0 \in \psi^{-1}(\zeta)$. Za předpokladu (13) existují vlastní limity

$$\lim_{t \to t_0+} \frac{\psi(t) - \zeta}{|\psi(t) - \zeta|} = \tau_K^+(\zeta), \quad \lim_{t \to t_0-} \frac{\psi(t) - \zeta}{|\psi(t) - \zeta|} = -\tau_K^-(\zeta). \tag{27}$$

Stejně jako v [8] nechť $\alpha_K(\zeta)$ značí radiální míru neorientovaného úhlu vektorů $\tau_K^+(\zeta)$, $\tau_K^-(\zeta)$. Podle [8] platí vztah

$$\alpha_K(\zeta) = |\vartheta_\zeta(t_0) - \vartheta_\zeta(t_0 -)| \tag{28}$$

mezi zavedenou měrou $\alpha_K(\zeta)$ a funkcí $\vartheta_\zeta(t)$ zavedenou výše (viz text před vztahem (15)). V [8] je určena veličina ωW_K pro operátor

$$W_K F(\zeta) = \lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in \operatorname{Int} K}} W_K(z, F) - \pi F(\zeta)$$

Platí

$$\omega W_K = \lim_{R \to 0+} \sup_{\zeta \in K} (v_R^K(\zeta) + \alpha_K(\zeta)) = \lim_{R \to 0+} \sup_{\zeta \in K} v_R^K(\zeta). \tag{29}$$

Poznámka 4. Ze vztahu (29) vyplývá, že W_K může být kompaktní pouze tehdy, je-li $\alpha_K(\zeta) = 0$ pro všechna $\zeta \in K$. To nastane tehdy, když křivka K neobsahuje žádné úhlové body, tj. body ζ, pro něž jest $\alpha_K(\zeta) > 0$.

Dále jest v [8] zaveden operátor W_L na prostoru $C(L)$ určený vztahy

$$W_L(z, F) = \sum_{j=0}^{q} W_{K_j}(z, F), \; z \in E_2 - L, \tag{30}$$

$$W_L F(\zeta) = \lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} W_L(z, F) - \pi F(\zeta), \; \zeta \in L, \; F \in C(L),$$

který za předpokladu (21) jest omezeným lineárním operátorem z prostoru $C(L)$ do $C(L)$. Jemu odpovídající hodnota ωW_L je vypočtena a vyjádřena ve tvaru

$$\omega W_L = \lim_{R \to 0+} \sup_{\zeta \in L} v_R^L(\zeta). \tag{31}$$

Přistupme k výpočtu veličiny $\omega\Gamma$. Nejprve dokážeme pomocné tvrzení:

Lemma 6. *Operátory definované na prostoru $C(L)$ předpisem*

$$T_1 = (W_{L'} + W_{L''} - W_L), \quad T_2 = (M_{L''} - M_{L'})$$

jsou na prostoru $C(L)$ kompaktní.

Důkaz. Použijeme vztahů (24) a (30) a zjistíme pro $F \in C(L)$ rozepsáním

$$
\begin{aligned}
(32) \quad & T_1 F(\zeta) = -W_{L''}(\zeta, F) \text{ pro } \zeta \in L', \quad T_1 F(\zeta) = -W_{L'}(\zeta, F) \text{ pro } \zeta \in L'', \\
& T_2 F(\zeta) = M_{L''} F(\zeta) \quad \text{pro } \zeta \in L', \quad T_2 F(\zeta) = -M_{L'} F(\zeta) \text{ pro } \zeta \in L''.
\end{aligned}
$$

Vzhledem k $\text{dist}(L', L'') > 0$ jsou operátory T_1, T_2 podle lemmatu 4 a věty Arzelovy kompaktní.

Věta 2. *Převrácená hodnota Fredholmova poloměru operátoru Γ je rovna výrazu*

$$
(33) \qquad \omega\Gamma = \frac{1}{\pi} \lim_{R \to 0+} \sup_{\zeta \in L} v_R^L(\zeta).
$$

Důkaz. Probíhá-li T všechny kompaktní operátory na prostoru $C(L)$, platí následující vztahy

$$
\begin{aligned}
\omega\Gamma &= \frac{1}{\pi} \inf_T \|(W_{L'} + W_{L''}) + (M_{L''} - M_{L'}) - T\| = \\
&= \frac{1}{\pi} \inf_T \|(W_{L'} + W_{L''}) - T_1 + (M_{L''} - M_{L'}) - T_2 - T\| = \\
&= \frac{1}{\pi} \inf_T \|W_L - T\| = \frac{1}{\pi} \omega W_L.
\end{aligned}
$$

Odtud již plyne za pomoci (31) formule (33).

Nyní lze přistoupit k řešení úloh 1 a 2. Vzhledem ke vztahu $\Lambda = I - \Gamma$ je nutné k řešení úlohy 2 určit k funkci $G \in C(L)$ funkci $F \in C(L)$ tak, aby platilo: $\Lambda F - G = (I - \Gamma) F - G \in Q$ (symboly Q a Q_0 byly definovány na počátku článku před formulací úlohy 1). Ukazuje se vhodným nalézti funkci $F \in C(L)$ tak, aby platilo

$$
(34) \qquad (I - \Gamma) F - G \in Q_0.
$$

Zavedeme pro libovolnou funkci $G \in C(L)$ toto označení: Symbol $\mathbf{D}G$ označuje množinu všech funkcí $F \in C(L)$, pro které platí vztah (34). Stejně jako v [8] nebo v [1] zavedeme nyní lineární operátor T_0 na prostoru $C(L)$, splňující vztahy

$$
(35) \qquad T_0 C(L) \subset Q_0,
$$

$$
(36) \qquad T_0 Q_0 = Q_0.
$$

Jeden z možných tvarů takového operátoru viz např. v 3.7 článku [8]. Platí následující lemma, jehož důkaz vyplyne jednoduše z později uvedeného lemmatu 9:

Lemma 7. *Nechť Φ_1, Φ_2 jsou řešení úlohy 1, mající tvar (4); nechť v souhlase s označením ve znění úlohy platí $\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_2 \in Q_0$. Potom $\Phi_1 = \Phi_2$.*

Z tohoto lemmatu a z následujícího pro každé $G \in C(L)$ platného vztahu

$$\{F;\ F \in C(L),\ (I - \Gamma + T_0)\,F = G\} \subset \mathbf{D}G \tag{37}$$

plyne, že pro existenci řešení úlohy 1 stačí dokázat existenci řešení rovnice pro libo-

$$(I - \Gamma + T_0)\,F = G \tag{38}$$

volnou funkci $G \in C(L)$. Vztah (37) vyplývá z formule (35) a z definice $\mathbf{D}G$ (viz vztah (34) a text za ním následující). K důkazu existence řešení rovnice (38) použijeme Riesz-Schauderovy teorie. Budeme předpokládat, že $\omega\Gamma < 1$, tj.

$$\lim_{R \to 0+} \sup_{\zeta \in L} v_R^L(\zeta) < \pi \tag{39}$$

Pak platí Fredholmova alternativa pro (38) a k existenci a unicitě řešení (38) pro libovolnou funkci $G \in C(L)$ stačí ověřit implikaci:

$$(F_0 \in C(L),\ (I - \Gamma + T_0)\,F_0 = 0) \Rightarrow F_0 = 0\,. \tag{40}$$

Operátor T_0 je rovněž kompaktní na prostoru $C(L)$, neboť Q_0 má konečnou dimenzi. K důkazu platnosti vztahu (40) budeme potřebovat několik pomocných tvrzení, která dokážeme dříve.

Poznámka 5. Budeme říkat, že Jordanova křivka K odděluje množiny $M_1 \subset E_2$, $M_2 \subset E_2$, jestliže tyto množiny leží v různých komponentách $E_2 - K$.

Lemma 8. *Nechť K je Jordanova křivka v E_2, D_K některá z komponent množiny $E_2 - K$. Pak ke každé uzavřené množině $M \subset D_K$ existuje po částech regulární Jordanova křivka K', $K' \subset D_K$, která odděluje množiny M a K.*

Poznámka 6. Význam pojmu po částech regulární křivky je zde chápán ve stejném smyslu, jak je vyložen v § 16 kap. I v [3].

Důkaz lemmatu 8 stručně naznačíme. K dané množině $M \subset D_K$ lze metodou, popsanou v Úvodu [3], § 10 najít vždy uzavřenou souvislou množinu M' tak, že platí $M \subset M' \subset D_K$. Předpokládejme nejprve, že $D_K = \operatorname{Int} K$. Podle vět 10.2 a 10.3 tamtéž existuje konečný počet Jordanových polygonálních křivek $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, \ldots, \mathscr{L}_m$ takových, že platí $M' \subset \bigcup_{j=1}^{m} \operatorname{Int} \mathscr{L}_j$. Ze souvislosti množiny M' plyne, že $M' \subset \operatorname{Int} \mathscr{L}_n$ pro jisté $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Tato křivka jest již hledanou po částech regulární křivkou s požadovanými vlastnostmi a proto položíme $\mathscr{L}_n = K'$. Pro případ $D_K = \operatorname{Ext} K$ můžeme použít transformace pomocí kruhové inverze se středem $z_0 \in \operatorname{Int} K$ a dostatečně malým poloměrem příslušné kružnice. Touto transformací převedeme řešenou situaci na předchozí případ a nalezenou polygonální křivku $\mathscr{L}_n$ převedeme novou aplikací této transformace na hledanou po částech regulární křivku K'. Tohoto tvrzení užijeme pro důkaz následujícího lemmatu:

Lemma 9. Nechť Φ jest jednoznačná analytická funkce v oblasti D taková, že pro $\tilde{\Phi}$ z úlohy 1 platí vztah $\tilde{\Phi} \in Q$. Potom funkce Φ je konstantní v oblasti D.

Důkaz tohoto tvrzení provedeme nepřímo. Nechť tedy Φ je nekonstantní jednoznačná analytická funkce v D, splňující uvedené požadavky. Zobrazení funkcí Φ provádí oblast D v oblast $\Phi(D)$. Označíme hodnoty funkce $\tilde{\Phi}$ na komponentách K_j hranice L postupně a_j, $j = 0, 1, \ldots, q$. Dále označíme $\mathscr{K}_j$, $j = 0, 1, \ldots, q$ množiny bodů přímek

$$\mathscr{K}_j = \{z;\ z \in E_2,\ \operatorname{Re} z = a_j\}\,, \quad j = 0, 1, \ldots, p - 1\,,$$

$$\mathscr{K}_j = \{z;\ z \in E_2,\ \operatorname{Im} z = a_j\}\,, \quad j = p, \ldots, q$$

a

$$P = \bigcup_{j=0}^{q} \mathscr{K}_j\,.$$

Pro libovolnou množinu $A \subset E_2$ definujeme množinu $\mathscr{U}_\varepsilon(A)$ předpisem

$$\mathscr{U}_\varepsilon(A) = \{z;\ z \in E_2,\ \operatorname{dist}(z, A) < \varepsilon\}\,.$$

Pro hranici $H(\Phi(D))$ množiny $\Phi(D)$ platí podle podmínky $\tilde{\Phi} \in Q$

$$H(\Phi(D)) \subset P \tag{41}$$

Definujeme funkci $l(z)$ vztahem

$$l(z) = \operatorname{Re} \Phi(z) - a_j \ \text{ pro } \ z \in \mathscr{U}_r(K_j) \cap D\,, \quad j = 0, 1, \ldots, p - 1\,,$$

$$l(z) = \operatorname{Im} \Phi(z) - a_j \ \text{ pro } \ z \in \mathscr{U}_r(K_j) \cap D\,, \quad j = p, \ldots, q\,,$$

při čemž volíme $r > 0$ dostatečně malé tak, aby $\mathscr{U}_r(K_j) \cap \mathscr{U}_r(K_i) = \emptyset$ pro $i \neq j$. Nyní lze k libovolnému $\varepsilon > 0$ nalézti $\delta > 0$ tak, že platí

$$z \in \mathscr{U}_\delta(L) \cap D \Rightarrow |l(z)| < \varepsilon\,.$$

Položíme $M = D - \mathscr{U}_\delta(L)$ a užitím lemmatu 8 sestrojíme systém Jordanových po částech regulárních křivek K'_j, $j = 0, 1, \ldots, q$, oddělujících množiny M a K_j pro všechna j. Je-li $D^\varepsilon_j = \operatorname{Int} K'_j$, položíme analogicky (3)

$$D^\varepsilon = D^\varepsilon_0 - \bigcup_{j=1}^{q} \bar{D}^\varepsilon_j\,.$$

Zřejmě platí $M \subset D^\varepsilon \Subset D$. Oblast $\Phi(D^\varepsilon)$ je omezená pro libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolíme-li ε dostatečně malé, lze v každé neomezené komponentě množiny $E_2 - P$ nalézti bod z_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ (k přirozené, $k \leqq 2(q + 1)$) tak, že platí

$$z_i \notin \Phi(D^\varepsilon)\,, \quad \operatorname{dist}(z_i, P) > \varepsilon\,, \quad i = 1, 2, \ldots, k\,.$$

Položíme $D_1 = D - D^\varepsilon$; pro libovolný bod $z \in \Phi(D_1)$ platí $\operatorname{dist}(z, P) < \varepsilon$, z čehož plyne $z_i \notin \Phi(D_1)$, $i = 1, \ldots, k$. Jelikož $D = D^\varepsilon \cup D_1$, platí též $z_i \notin \Phi(D)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Komponenty množiny $E_2 - P$ jsou otevřené konvexní množiny. Z předpokladu, že v některé z těchto komponent $E_2 - P$ leží dvojice bodů z_1, z_2 taková, že platí

$$z_1 \notin \Phi(D)\,, \quad z_2 \in \Phi(D)\,,$$

vyplývá existence bodu z^* na úsečce $\overline{z_1, z_2}$, $z^* \in E_2 - P$, $z^* \in H(\Phi(D))$; to jest však ve sporu se vztahem (41). Proto žádná z neomezených komponent $E_2 - P$ neobsahuje body z $\Phi(D)$ a $\Phi(D)$ jest omezená. Obsahuje-li některá z omezených komponent $E_2 - P$ bod z $\Phi(D)$, je celá částí $\Phi(D)$. Případ $\Phi(D) \subset P$ nemůže nastat, a proto alespoň jedna taková komponenta existuje. Vybereme nyní z přímek $\mathscr{K}_j$, $j = 0, 1, \ldots, q$ takovou, aby platilo — označme ji $\mathscr{K}_{j_0}$ —

$$\overline{\Phi(D)} \cap \mathscr{K}_{j_0} \neq \emptyset$$

a současně oblast $\Phi(D)$ ležela celá v jedné z polorovin, vyťatých přímkou $\mathscr{K}_{j_0}$. Pak křivka $K_{j_0} \subset D$ se zobrazí tak, že platí

$$\operatorname{dist}\left(\Phi(K'_{j_0})\,,\ \mathscr{K}_{j_0}\right) = 4\eta > 0$$

Sestrojíme nyní přímku $\mathscr{K}'_{j_0}$ rovnoběžnou s $\mathscr{K}_{j_0}$ a protínající $\Phi(D)$ tak, aby platilo $\operatorname{dist}(\mathscr{K}_{j_0}, \mathscr{K}'_{j_0}) = 2\eta$. K číslu $\eta > 0$ sestrojíme analogickým postupem oblast D'', ohraničenou systémem křivek K''_j, oddělujících množiny K_j a K'_j pro $j = 0, 1, \ldots, q$. Vyšetříme obraz oblasti $D_2 \subset D$, omezené křivkami K'_{j_0} a K''_{j_0}. Obraz $\Phi(D_2)$ oblasti D_2 je opět oblast. Na přímce $\mathscr{K}'_{j_0}$ leží tedy bod z $\Phi(D_2)$ a tedy i bod $z^* \in H(\Phi(D_2))$. Poněvadž ale $\Phi(K'_{j_0}) \cap \mathscr{K}'_{j_0} = \emptyset$, $\Phi(K''_{j_0}) \cap \mathscr{K}'_{j_0} = \emptyset$, musí být z^* obrazem vnitřního bodu oblasti D_2, což je opět ve sporu s tím, že Φ je nekonstantní holomorfní funkce v D.

Lemma 10. *Nechť platí vztah* (39). *Pak platí*

$$(42) \qquad (F \in C(L),\ (I - \Gamma)\,F \in Q) \Rightarrow F \in Q\,.$$

Důkaz. Z předešlého lemmatu vyplývá, že funkce ΨF je konstantní v oblasti D. Stačí tedy dokázat implikaci $(\Psi F = \text{konst.}) \Rightarrow F \in Q$. Předpis (4) pro ΨF určuje ΨF jakožto analytickou funkci v $E_2 - L$ pro libovolnou funkci $F \in C(L)$. Zvolme pevně j, $0 \leqq j \leqq p - 1$ a utvořme funkci $\Psi_j(z)$, definovanou pro $z \in E_2 - L$:

$$(43) \qquad \Psi_j(z) = \Psi\,F(z) - \frac{1}{\pi i}\,\Psi_{K_j}\,F(z)$$

(viz předešlé definiční vztahy (4) a (8)). Označme A_j, B_j komponenty množiny $E_2 - K_j$ tak, že pro oblasti A_j, B_j platí $D \subset A_j$, $D \cap B_j = \emptyset$. Pro funkci $\Psi_j(z)$, $z \in E_2 - L$ platí podle lemmatu 4

$$(44) \qquad \lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in A_j}} \Psi_j(z) = \lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in B_j}} \Psi_j(z)\,.$$

Dále za uvedených předpokladů (viz vztah (61) v [8], věta 2.3) platí

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in A_j}} M_{Kj}(z, F) = \lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in B_j}} M_{Kj}(z, F)\,. \tag{45}$$

Vynásobením (45) faktorem $-\pi^{-1}$ a sečtením takto získaného vztahu s imaginární částí vztahu (44) obdržíme

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in A_j}} \operatorname{Im} \Psi\, F(z) = \lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in B_j}} \operatorname{Im} \Psi\, F(z) = \text{konst.} \tag{46}$$

Odtud však z vlastností harmonických funkcí vyplývá, že funkce $\operatorname{Im} \Psi F$ je konstantní funkcí v B_j, tudíž i funkce $\operatorname{Re} \Psi F$ je konstantní v B_j a funkce

$$F(\zeta) = \tfrac{1}{2}\big(\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in A_j}} \operatorname{Re} \Psi\, F(z) - \lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in B_j}} \operatorname{Re} \Psi\, F(z)\big) \tag{47}$$

je konstantní na křivce K_j. Analogicky při pevném j, $p \leqq j \leqq q$ položíme

$$\Psi_j(z) = \Psi\, F(z) - \frac{1}{\pi}\, \Psi_{Kj}\, F(z)$$

a podobným postupem dospějeme k vyjádření funkce F na křivce K_j vztahem

$$F(\zeta) = \tfrac{1}{2}\big(\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in A_i}} \operatorname{Im} \Psi\, F(z) - \lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in B_j}} \operatorname{Im} \Psi\, F(z)\big)\,,$$

z něhož vyplývá, že funkce F je konstantní na křivce K_j. Je tedy funkce $F \in C(L)$ konstantní na každé komponentě L a tedy platí $F \in Q$.

Lemma 11. *Nechť platí* (39). *Pak platí vztahy*:

$$(F \in C(L),\ (I - \Gamma)\, F \in Q_0) \Rightarrow F \in Q_0\,, \tag{48}$$

$$(F \in Q_0) \Rightarrow (I - \Gamma)\, F = 0\,. \tag{49}$$

Důkaz. Nechť $F \in Q$, $F(\zeta) = a_0(F)$ pro libovolné $\zeta \in K_0$. Z Cauchyovy věty plyne pro libovolné $\zeta \in L$

$$(I - \Gamma)\, F = 2\pi\, a_0(F)\,. \tag{50}$$

Je-li $F \in Q_0$, jest $a_0(F) = 0$ a platí (49). Je-li dále $(I - \Gamma)\, F \in Q_0$, je též $F \in Q$ a podle (50) platí $F \in Q_0$.

Lemma 12. Nechť platí vztah (39). Pro funkci $0 \in C(L)$ platí $Q_0 = \mathbf{D}0$.

Důkaz. Z definice $\mathbf{D}G$ a vztahu (48) a (49) vyplývá

$$F \in \mathbf{D}0 \Leftrightarrow (I - \Gamma)\, F \in Q_0 \Rightarrow F \in Q_0\,,$$

$$F \in Q_0 \Rightarrow (I - \Gamma)\, F = 0 \Rightarrow F \in \mathbf{D}0\,.$$

Následující věta 3 nám umožňuje řešit vyšetřované úlohy 1 a 2.

Věta 3. *Nechť platí vztah* (39). *Potom pro libovolnou funkci* $G \in C(L)$ *platí* $\mathbf{D}G \neq \emptyset$. *Je-li* $F \in \mathbf{D}G$, $G \in C(L)$, *platí*

$$\mathbf{D}G = F + Q_0 = \{F + H;\ H \in Q_0\}\,.$$

Důkaz. Je-li $F_0 \in C(L)$, $(I - \Gamma + T_0) F_0 = 0$, pak $(I - \Gamma) F_0 = -T_0F_0 \in Q_0$ podle vztahu (35). Podle vztahu (48) vyplývá odtud $F_0 \in Q_0$, z čehož podle vztahu (49) plyne $(I - \Gamma) F_0 = 0 = -T_0F_0$. Odtud pak podle (36), (35) vyplývá $F_0 = 0$, neboť Q_0 má konečnou dimenzi. Vztah (40) je tedy ověřen a proto $\mathbf{D}G \neq \emptyset$ pro libovolnou $G \in C(L)$. Druhá část tvrzení věty 3 je důsledkem lemmatu 12. Uvedené věty umožňují řešení vyšetřované smíšené Dirichletovy úlohy pro třídu hraničních podmínek, vyjádřených funkcemi z prostoru $C(L)$.

Poznámka 7. S malými úpravami bylo by možno řešit podobně úlohu 1 i v případě $K_0 = \emptyset$. Pak je podmínka, vyjadřující chování hledané funkce Φ v okolí K_0 nahrazena podmínkou, charakterizující chování funkce Φ v nevlastním bodě E_2 tvaru $\lim\limits_{|z| \to +\infty} \operatorname{Re} \Phi(z) = a_0$.

Literatura

[1] *Мусхелишвили Н. И.:* Об основной смешанной краевой задаче теории логарифмического потенциала для многосвязных областей. Сообщения Академии наук Грузинской ССР, Т. *II*, № 4 (1941), 309—313.

[2] *Jacob C.:* Sur le probleme de Dirichlet dans un domaine plan multiplement connexe et ses applications a l'Hydrodynamique. Journ. de Math., 9^e sér., T. *18* (1939), str. 363—383.

[3] *Saks S., Zygmund A.:* Analytic Functions. Warszawa—Wroclaw 1952.

[4] *Л. В. Канторович - Г. П. Акилов:* Функциональный анализ и нормированных пространствах. ГИФМЛ, Москва 1959

[5] *Král J.:* On the logarithmic potential of the double distribution. Czech. math. J., T. *14* (*89*), (1964), str. 306—321.

[6] *Král J.:* Some inequalities concerning the cylic and radial variations of a plane path-curve. Czech. math. J., T. *14* (*89*), (1964), str. 271—279.

[7] *Král J.:* Non-tangential limits of the logarithmic potential. Czech. mat. J., T. *14* (*89*), (1964), str. 455—482.

[8] *Král J.:* The Fredholm radius of an operator in potential theory — Czech. math. J. T. *15* (*90*), (1964), str. 454—473, 565—588.

Adresa autora: Praha 1, Malostranské nám. 25 (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

Резюме

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ЙИРЖИ ВЕСЕЛЫ (Jiří Veselý), Прага

В статье решается следующая задача:

Пусть D — связная часть плоскости E_2, ограниченная замкнутыми простыми контурами K_j, $j = 0, 1, \ldots, q$, непересекающими друг друга, из которых K_0 охватывает все остальные. Обозначим $L' = \bigcup_{j=0}^{p-1} K_j$, $L'' = \bigcup_{j=p}^{q} K_j$, $0 < p \leqq q$, $L = L' \cup L''$. Следует найти однозначную аналитическую функцию Φ в D такую, что

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D}} \operatorname{Re} \Phi(z) = G(\zeta) + h(\zeta),\ \zeta \in L',$$

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D}} \operatorname{Im} \Phi(z) = G(\zeta) + h(\zeta),\ \zeta \in L'',$$

где G — заданная непрерывная действительная функция на L и h — любая действительная функция на L, постоянная на произвольном контуре K_j, $j = 0, 1, \ldots, q$.

Обыкновенно решается эта задача для достаточно гладких контуров K_j, $j = 0, 1, \ldots, q$. Здесь произведено решение этой задачи при отсутствии этого предположения.

Чтобы найти решение этой задачи в виде суммы интегралов типа Коши, решаются следующие вопросы:

пусть $$(\alpha)\qquad \Psi F(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{L'} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{1}{\pi}\int_{L''} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

(а) требуется: найти к действительной непрерывной функции G на L аналитическую однозначную функцию Φ в D так, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D}} \operatorname{Re} \Phi(z) = \tilde{\Phi}(\zeta),\ \zeta \in L' \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in D}} \operatorname{Im} \Phi(z) = \tilde{\Phi}(\zeta),\ \zeta \in L''$$

и чтобы разность функций $\tilde{\Phi}$ и G являлась непрерывной функцией на L и постоянной на любом контуре K_j, $j = 0, 1, \ldots, q$.

(б) найти к действительной непрерывной функции G на L непрерывную действительную функцию F, чтобы функция ΨF, определенная в D при помощи (α), являлась решением (а).

(в) пусть ΨF определена при помощи (α); найти необходимые и достаточные условия для существования конечных пределов

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} \operatorname{Re} \Psi F(z), \ \zeta \in L' \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} \operatorname{Im} \Psi F(z), \ \zeta \in L''$$

для произвольной непрерывной функции F на L.

Для решения (б) введен соответствующий линейный оператор Γ и вычислен его радиус Фредгольма.

Summary

ON THE MIXED BOUNDARY PROBLEM OF THE THEORY OF ANALYTIC FUNCTIONS

JIŘÍ VESELÝ, Praha

In this paper the following problem is solved:

Let D be a region in the plane E_2 bounded by closed simple non-intersecting curves K_j, $j = 0, 1, \ldots, q$ and let K_j, $j = 1, \ldots, q$ lie inside K_0. Set $L' = \bigcup_{j=0}^{p-1} K_j$, $L'' = \bigcup_{j=p}^{q} K_j$, $0 < p \leqq q$, $L = L' \cup L''$. Find an analytic single-valued function Φ in D which fulfils these conditions

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} \operatorname{Re} \Phi(z) = G(\zeta) + h(\zeta), \quad \zeta \in L',$$

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} \operatorname{Im} \Phi(z) = G(\zeta) + h(\zeta), \quad \zeta \in L'',$$

where G is a given, real-valued continuous function on L and h is a realvalued function constant on every curve K_j, $j = 0, 1, \ldots, q$.

It is usually assumed the curves K_j, $j = 0, 1, \ldots, q$ are sufficienthy smooth. Here this problem is studied without this assumption.

To find the solution of this problem as a sum of Cauchy integrals, the following problems are solved. Let

$$(\alpha) \qquad \Psi F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{L'} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{L''} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta .$$

(a) Find an analytic single-valued function Φ in D to a given real-valued continuous function G on L such that the finite limits

$$\lim_{\substack{z \to \xi \\ z \in D}} \operatorname{Re} \Phi(z) = \tilde{\Phi}(\zeta), \ \zeta \in L' \quad \text{and} \quad \lim_{\substack{z \to \xi \\ z \in D}} \operatorname{Im} \Phi(z) = \tilde{\Phi}(\zeta), \ \zeta \in L''$$

exist and that the difference of the functions $\tilde{\Phi}$ and G is constant on K_j, $j = 0, 1, \ldots, q$.

(b) Find a real-valued continuous function F to a given real-valued continuous function G on L such that the function ΨF defined by (α) is a solution of (a).

(c) Let the function ΨF be defined by (α). Find nessesary and sufficient conditions for the existence of finite limits

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} \operatorname{Re} \Psi F(z), \; \zeta \in L' \quad \text{and} \quad \lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in D}} \operatorname{Im} \Psi F(z), \; \zeta \in L''$$

for every continuous F on L.

For the solution of (b) a convenient operator Γ is introduced and its Fredholm radius is expressed.

PRÍSPEVOK KU GEOMETRII KONVEXNÝCH MNOHOSTENOV V n-ROZMERNOM EUKLIDOVSKOM PRIESTORE

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 14. septembra 1965)

V euklidovskom n-rozmernom priestore E_n $(n \geqq 2)$ je dané m $(m > n)$ polpriestorov

(1) $$\pi_i = \vec{a}_i\vec{x} - h_i \leqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

ktoré vyjadríme rovnicami

(2) $$\pi_i = \vec{a}_i\vec{x} - h_i = -q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

kde q_i je nezáporný parameter, ktorý nazveme oporným parametrom roviny π_i, lebo istým spôsobom súvisí s oporným číslom h_i tento roviny. Ak treba prejsť k polpriestoru opačnému, píše sa $-q_i$ miesto q_i.

Prenik m polpriestorov (2) je konvexný m-sten, ak

1) má vnútorné body a

2) každá z m hraničných rovín $\pi_i = 0$ týchto polpriestorov obsahuje stenu mnohostena.

Mnohosten je potom buď ohraničený, buď neohraničený.

Či dané polpriestory (2) skutočne určujú konvexný m-sten majúci vlastnosti 1) a 2), závisí pri daných vektoroch $\vec{a}_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n})$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ od hodnôt oporných čísel h_i rovín π_i. O tom sú známe vety 1 a 2 v § 5 kap. VII diela [1]. V tejto práci vyslovíme nutné a postačujúce podmienky existencie konvexného mnohostena určeného polpriestormi (2) pomocou oporných parametrov q_i. Príslušné vety sú aplikabilné v konkrétnych prípadoch a umožňujú aj snadné zisťovanie topologických vlastností konvexného mnohostena.

Predpokladajme, že vektory $\vec{a}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sú lineárne nezávislé, takže roviny π_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, majú spoločný práve jeden bod (čím zo svojich úvah vylučujeme bezvrcholové hranoly) a platí

(3) $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0$$

Z rovníc (2) pre $i = 1, 2, \ldots, n$ sa potom určí

$$(4) \qquad x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,j-1}, & h_1 - q_1, & a_{1,j+1}, \ldots, a_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,j-1}, & h_n - q_n, & a_{n,j+1}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Ak oporné parametre $q_1, q_2, \ldots, q_n$ nadobúdajú nezávisle na sebe všetky možné nezáporné hodnoty, určujú vzťahy (4) súradnice práve všetkých spoločných bodov polpriestorov (2) pre $i = 1, 2, \ldots, n$. Bod $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ teda bude bodom preniku všetkých polpriestorov (2) vtedy a len vtedy, keď jeho súradnice (4) spĺňajú rovnice (2) pre $i = n + 1, n + 2, \ldots, m$. Po dosadení a úprave dostaneme

$$\begin{vmatrix} a_{n+k,1}, \ldots, a_{n+k,n}, & q_{n+k} - h_{n+k} \\ a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}, & q_1 - h_1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,n}, & q_n - h_n \end{vmatrix} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m - n$$

To je $m - n \geqq 1$ (jedna v prípade simplexu v E_n) lineárnych rovníc, ktoré môžeme písať v tvare

$$\begin{vmatrix} a_{n+k,1}, \ldots, a_{n+k,n}, & q_{n+k} \\ a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}, & q_1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,n}, & q_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{n+k,1}, \ldots, a_{n+k,n}, & h_{n+k} \\ a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}, & h_1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,n}, & h_n \end{vmatrix} = \Delta_k,$$

$k = 1, 2, \ldots, m - n$. Rozvedúc determinant na ľavej strane podľa prvkov posledného stĺpca a označiac alg. doplnok prvku q_l, $l = 1, 2, \ldots, n$, $\delta_{k,l}$, dostaneme rovnice

$$(5) \qquad \sum_{l=1}^{n} \delta_{k,l} q_l + (-1)^n \Delta q_n = \Delta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m - n$$

Rovnice (5), tzv. charakteristické rovnice preniku polpriestorov (2), nie sú identitami vzhľadom na nezáporné premenné q_i, lebo $\Delta \neq 0$. Vyjadrujú nutné a postačujúce podmienky pre oporné parametre $q_1, q_2, \ldots, q_m$, z ktorých prvých n určí podľa (4) súradnice práve všetkých bodov preniku polpriestorov (2). V ďalšom ich použijeme na dokazovanie viet o konvexných mnohostenoch (spomedzi ktorých sme bezvrcholové hranoly vylúčili).

Veta 1. *Prenik polpriestorov* (2) *má vlastnosť* 1) *vtedy a len vtedy, keď sústava rovníc* (5) *s neznámymi* $q_1, q_2, \ldots, q_m$ *má riešenie v obore kladných čísel.*

Dôkaz. Vtedy a len vtedy, keď nezáporné parametre vyhovujú rovniciam (5), sú body pomocou nich podľa (4) určené bodmi preniku všetkých polpriestorov (2). Vtedy a len vtedy, keď všetky tieto parametre sú kladné, leží bod vnútri všetkých polpriestorov (2), a teda je aj vnútorným bodom ich preniku.

Veta 2. *Časť hranice preniku polpriestorov* (2) *ležiaca v rovine* π_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, *má v tejto rovine vnútorné body vtedy a len vtedy, keď rovnice* (5) *majú riešenie tejto vlastnosti*: $q_i = 0,\ q_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots, m,\ j \neq i$.

Dôkaz. Za uvedených podmienok a len vtedy existuje v rovine π_i taký bod, ktorý náleží do preniku všetkých polpriestorov (2), ale neleží v žiadnej inej hraničnej rovine π_j, $j \neq i$ teda leží vnútri steny v π_i.

Veta 3. *Prenik polpriestorov* (2) *je konvexný m-sten vtedy a len vtedy, keď sústava rovníc* (5) *má m riešení tejto vlastnosti:*

$$\alpha_1)\ q_1 = 0,\ q_i > 0,\ i \neq 1\ ;\quad \alpha_2)\ q_2 = 0,\ q_i > 0,\ i \neq 2, \ldots ;$$

$$\alpha_m)\ q_m = 0,\ q_i > 0,\ i \neq m\,.$$

Dôkaz. Podľa vety 2 sú tieto podmienky nutné a postačujúce pre vlastnosť 2). Avšak z existencie riešení α_1), α_2), ..., α_m) vyplýva aj existencia riešenia sústavy (6) v obore kladných čísel[1]), a teda sú tie podmienky nutné a postačujúce aj pre vlastnosť 1). Tým je veta dokázaná.

Veta 4. *Konvexný mnohosten určený polpriestormi* (2) *je neohraničený vtedy a len vtedy, keď má neohraničené hraničné útvary k-rozmerné*, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Takýto mnohosten je určite ohraničený vtedy, keď každý parameter q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$*-nie nutne všetky spolu-sa vyskytuje aspoň v jednej takej rovnici* (5), *v ktorej* $\Delta_k \neq 0$, $\delta_{k,i} \neq 0$ *a v ktorej pre všetky nenulové koeficienty* $\delta_{k,j}$ *platí*

$$\operatorname{sign} \delta_{k,j} = \operatorname{sign} (-1)^n \Delta = \operatorname{sign} \Delta_k\,.$$

Dôkaz. Kedže neohraničený konvexný mnohosten má aspoň n neohraničených stien, je tvrdenie pre $k = n - 1$ triviálne. Zároveň je zrejmé, že tieto neohraničené steny — súc časťou hranice neohraničeného ihlana alebo hranola — majú neohraničené hraničné útvary k-rozmerné, $1 \leqq k < n - 1$. Ohraničené telesa tejto vlastnosti nemajú. Tým je dokázaná prvá časť vety.

Správnosť druhej časti vety vyplýva z toho, že za uvedených podmienok sú parametre $q_1, q_2, \ldots, q_n$ a potom aj nimi podľa (5) určené $q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_m$ určite ohraničené.

Veta 5. *Nech* $\mathfrak{M}$ *je konvexný m-sten, určený polpriestormi* (2). *Prenik rovín* $\pi_{i_1}, \pi_{i_2}, \ldots, \pi_{i_k}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_k$ *je nejaká kombinácia bez opakovania indexov* $1, 2, \ldots, m$, $2 \leqq k \leqq n)$ *je* $(n - k)$*-rozmerným hraničným útvarom mnohostena* $\mathfrak{M}$ *vtedy a len vtedy, keď sústava* (5) *má riešenie*

$$q_{i_1} = q_{i_2} = \ldots = q_{i_k} = 0\,,\quad q_l > 0\,,\quad l = 1, 2, \ldots, m\,,\quad l \neq i_1, i_2, \ldots, i_k\,.$$

V prípade $k = n \geqq 3$ *môže platiť aj* $q_e = 0$.

---

[1]) Ak lineárna rovnica o m neznámych má dve riešenia $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, má aj tretie riešenie $((x_1 + y_1)/2, (x_2 + y_2)/2, \ldots, (x_m + y_m)/2)$. Takéto riešenie sústavy (5) odvodené napr. z riešenia α_1) a α_2) však je z oboru kladných čísel.

Dôkaz. Nech $k < n$. Vtedy a len vtedy, keď sú splnené podmienky vety, leží v preniku rovín $\pi_{i_1}, \pi_{i_2}, \ldots, \pi_{i_k}$ taký bod, ktorý je hraničným bodom mnohostena $\mathfrak{M}$, ale neleží v žiadnej inej hraničnej rovine $\pi_l(l \neq i_1, i_2, \ldots, i_k)$ a teda je vnútorným bodom $(n - k)$-rozmerného hraničného útvaru mnohostena $\mathfrak{M}$.

Tvrdenie v prípade $k = n$ (pre vrcholy mnohostena), rozlíšené pre $n = 2$ a $n > 2$, je triviálne.

Pomocou vety 5 možno v konkrétnom prípade vždy rozhodnúť o počte hrán a vrcholov mnohostena, ako aj o ich topologickom rozpoložení.

Veta 6. *Majme maticu reálnych čísel*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}, h_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m,1}, \ldots, a_{m,n}, h_m \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0\,, \quad m > n \geqq 2\,.$$

Nech $\vec{a}_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n})$, $i = 1, 2, \ldots, m$. *Sústava $m - n$ lineárnych rovníc s neznámymi* $q_1, q_2, \ldots, q_m$

$$\begin{vmatrix} a_{n+k,1}, \ldots, a_{n+z,n}, & q_{n+k} - h_{n+k} \\ a_{1,1}, \quad \ldots, a_{1,n}, & q_1 - h_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}, \quad \ldots, a_{n,n}, & q_n - h_n \end{vmatrix} = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots, m - n$$

a) *má riešenie v obore kladných čísel vtedy a len vtedy, keď v tom prípade, že platí pre určité* k, $k \neq i_1, i_2, \ldots, i_{l_0}$

$$\vec{a}_k = \sum_{l=1}^{l_0} v_{k,l}\vec{a}_{i_l} \tag{6}$$

kde $k = 1, 2, \ldots, m$, $1 \leqq l_0 \leqq n$ *vektory* $\vec{a}_{i_l}$ *sú lineárne nezávislé a* $i_1, i_2, \ldots, i_{l_0}$ *je kombinácia indexov* $1, 2, \ldots, m$, *platí v prípade* $v_{k,l} < 0$ *aj* $h_k > \sum_{l=1}^{l_0} v_{k,l}h_{i_l}$ *a* b) *má riešenia*

$$\alpha_1)\ q_1 = 0,\ q_i > 0,\ i \neq 1\,; \quad \alpha_2)\ q_2 = 0,\ q_i > 0,\ i \neq 2, \ldots\,;$$
$$\alpha_m)\ q_m = 0,\ q_i > 0,\ i \neq m$$

vtedy a len vtedy, keď v tom prípade, že existuje rozklad (6) *s udanými vlastnosťami, platí v prípade* $v_{k,l} < 0$ *aj* $h_k > \sum_{l=1}^{l_0} v_{k,l}h_{i_l}$ *a v prípade* $v_{k,l} > 0$ *aj* $h_k < \sum_{l=1}^{l_0} v_{k,l}h_{i_l}$.

Dôkaz. Veta 1(2) § 5 kap. VII. diela [1] vyslovuje nutné a dostačujúce podmienky, aby prenik polpriestorov (2) mal vnútorné body (mal vnútorné body a s každou rovinou π_i spoločný útvar $(n - 1)$-rozmerný).[2] Veta 1 (3) tohoto článku vyjadruje

[2]) O zovšeobecnení pre ľubovoľný priestor E_n hovorí sa v poznámkach v bode 7 cit § — u diela [1].

tie isté podmienky v inej forme. Dokazovaná veta a) (b)) vyjadruje samozrejmú ekvivalenciu týchto podmienok vyslovených v dvoch formách, tým je dokázaná.

Poznámka. Pre $m = n + 1$ možno vetu 6 interpretovať ako nutné a postačujúce podmienky možnosti transformácie determinantu

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}, & h_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n+1}, \ldots, a_{n+1,n}, & h_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}, & q_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n+1,1}, \ldots, a_{n+1,n}, & q_{n+1} \end{vmatrix}$$

pričom sa prvých n stĺpcov nemení a prvky posledného stĺpca sa stanú a) kladnými, b) jeden – a to ktorýkoľvek – nulovým a ostatné kladnými. Obdobne možno interpretovať aj vetu v prípade $m > n + 1$ ako istú transformáciu príslušnej neštvorcovej matice.

Na ukázku použitia odvodených výsledkov uvedieme:

Príklad. Dané sú polpriestory v E_3:

(7) $\quad z \geqq 0,\ x \geqq 0,\ 2y + z - 2 \leqq 0,\ 2x - 2y + z - 2 \leqq 0,\ z - 2y \geqq 0\,;$

Dokážte: a) prenikom polpriestorov (7) je ohraničený konvexný päťsten; b) prenikom prvých štyroch polpriestorov (7) a opačného polpriestoru k poslednému je tiež ohraničený konvexný päťsten; c) prenik štyroch posledných polpriestorov (7) a opačného polpriestoru k prvému nie je konvexný päťsten; d) prenik 1., 2., 4. a 5. polpriestoru (7) a opačného polpriestoru k druhému je neohraničený konvexný päťsten. V prípade a) určte počet hrán v jednotlivých stenách a počet vrcholov mnohostena.

Riešenie. a) Rovnice polpriestorov (7) píšeme pomocou oporných parametrov

$$z = q_1,\ x = q_2,\ 2y + z - 2 = -q_3,\ 2x - 2y + z - 2 = -q_4,\ z - 2y = q_5\,.$$

Z prvých troch rovníc máme $x = q_2$, $y = 1 - \frac{1}{2}(q_1 + q_3)$, $z = q_1$. To dosadíme do ostatných rovníc a po úprave dostaneme rovnice

(8) $$2q_1 + 2q_2 + q_3 + q_4 = 4\,,\quad 2q_1 + q_3 - q_5 = 2$$

Rozhodujúce riešenia sústavy (8) nájdeme snadno niekoľkými pokusmi, čo veľmi uľahčuje okolnosť, že neznáme $q_{n+1}, \ldots, q_m$ sa vyskytujú práve v jedinej rovnici. Tu napr. nájdeme riešenia

$$(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\,;\quad (1, 0, 1\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1\tfrac{1}{2})\,;\quad (1\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{2}, 1)\,;\quad (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 2, 0, 1)\,;$$
$$(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, 1\tfrac{1}{2}, 1\tfrac{1}{2}, 0)\,.$$

Podľa vety 3 je teda uvažovaný prenik konvexný päťsten. Tento je podľa vety 4 ohraničený, lebo parametre q_1, q_2, q_3 sú podľa prvej rovnice (8) ohraničené.

Hrany tohoto päťstena v rovine $q_1 = 0$ určíme takto: V priesečnici rovín $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ hrana leží podľa vety 5, lebo sústava (8) má napr. riešenie (0, 0, 3, 1, 1). V priesečnici rovín $q_1 = 0$, $q_3 = 0$ však neleží hrana, lebo z druhej rovnice vyplýva $q_5 = -2$. V priesečnici rovín $q_1 = 0$, $q_4 = 0$ a rovín $q_1 = 0$, $q_5 = 0$ musia, pravdaže, hrany byť, lebo útvar v tejto stene je už určite trojuholnikom.

Obdobne nájdeme, že steny v rovinách $q_2 = 0$, $q_4 = 0$, $q_5 = 0$ tvoria štvoruholníky a v rovine $q_3 = 0$ trojuholník. Teleso teda má $h = \frac{1}{2}(3 + 3 + 3.4) = 9$ hrán. Počet vrcholov podľa Eulerovej vety je $v = 9 + 2 - 5 = 6$. Pomocou vety 5 však môžeme určiť aj topologické rozloženie vrcholov takto:

Priesečník rovín $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$ nie je vrcholom päťstena, lebo sústava (8) dá $q_5 = -2$. Priesečník rovín $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_4 = 0$ je vrcholom, lebo teraz $q_3 = 4$, $q_5 = 2$. Obdobne nájdeme, že body $q_1 = q_2 = q_5 = 0$, $q_1 = q_4 = q_5 = 0$, $q_2 = q_3 = q_4 = 0$, $q_2 = q_3 = q_5 = 0$, $q_3 = q_4 = q_5 = 0$ sú vrcholmi päťstena, body $q_1 = q_3 = q_4 = 0$, $q_1 = q_3 = q_5 = 0$ a $q_2 = q_4 = q_5 = 0$ však nimi nie sú.

b) Teraz máme charakteristické rovnice (po zmene znamienka q_5 v (8))

$$2q_1 + 2q_2 + q_3 + q_4 = 4\,, \quad 2q_1 + q_3 + q_5 = 2\ .$$

Postupom ukázaným v bode a) sa potvrdí, že i tento prenik je ohraničený konvexný päťsten.

c) Pre tento prenik dostaneme rovnice

$$-2q_1 + 2q_2 + q_3 + q_4 = 4\,, \quad -2q_1 + q_3 - q_5 = 2$$

Tento prenik nie je konvexným päťstenom, lebo pre $q_3 = 0$ druhá rovnica nemá riešenia v obore kladných čísel.

d) V tomto prípade máme charakteristické rovnice

$$2q_1 + 2q_2 - q_3 + q_4 = 4\,, \quad 2q_1 + q_3 - q_5 = 2\,.$$

Ukázaným postupom potvrdíme, že prenik je konvexný päťsten. Jeho neohraničenosť sa dokáže podľa vety 4 takto:

V priesečnici rovín $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ má päťsten hranu, lebo sústava $-q_3 + q_4 = 4$, $q_3 - q_5 = 2$ má napr. riešenie $q_3 = 3$, $q_4 = 7$, $q_5 = 1$. Snadno sa presvedčíme, že riešením tej sústavy sú aj všetky čísla $3 + z$, $7 + z$, $1 + z$, kde z je ľubovoľné číslo. Pri kladnom z dostaneme tak ľubovoľne veľké kladné hodnoty týchto parametrov, čo značí, že táto hrana a tým aj päťsten sú neohraničené.

Literatúra

[1] *A. D. Alexandrov:* Vypuklije mnogogranniki, Moskva—Leningrad, 1950.

Adresa autora: Bratislava, Sibírska 9.

Резюме

К ГЕОМЕТРИИ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ В n-МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ПАВЕЛ БАРТОШ (Pavel Bartoš), Братислава

В работе выводятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы пересечение m полупространств (2) было выпуклым m-гранником. Эти условия выражаются при помощи опорных параметров $q_1, q_2, \ldots, q_m$, удовлетворяющих характеристическим уравнениям (5), строение которых выражает и топологическую структуру многогранника. Из рассуждений вытекает теорема 6, касающаяся определенного преобразования матриц действительных чисел.

Summary

CONTRIBUTION TO THE GEOMETRY OF CONVEX POLYHEDRA IN n-SPACE

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

Necessary and sufficient conditions are found for the intersection of semispaces (2) to be an n-dimensional convex polyhedron. These conditions are expressed in terms of support parameters $q_1, q_2, \ldots, q_m$ satisfying the characteristic equations (5); their structure also describes the topological constitution of the polyhedron. In the course of this there is obtained theorem 6 concerning a certain transformation of real matrices.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

A "BANG-BANG" PRINCIPLE IN THE PROBLEM OF ε-STABILIZATION OF LINEAR CONTROL SYSTEMS

PAVOL BRUNOVSKÝ, Bratislava

(Received October 26, 1965)

In [1], the concept of ε-stabilizing control for two-dimensional linear control systems was introduced.

In the same way it may be introduced for systems of arbitrary dimension.

Let us have a linear control system

$$\dot{x} = Ax + Bu + \varepsilon p\,, \tag{1}$$

where x is an n-vector of state variables, u an m-vector of control, p an n-vector of perturbations, A, B — $n \times n$, and $n \times m$ constant matrices, respectively. Further, let there be given two convex compacts $P \subset E_n$, $Q \subset E_m$ (E_k being the k-dimensional Euclidean space).

By perturbation we shall denote a measurable function $p(t)$ on $\langle t_0, \infty)$, satisfying $p(t) \in P$ for a.e. $t \in \langle t_0, \infty)$. By control we shall denote a measurable function $u(x)$, defined on E_n and satisfying $u(x) \in Q$ a.e. in E_n.

Denote $\|x\|$ the Euclidean norm in E_n. Let $X \subset E_n$. Denote co X the convex hull of X, $\varrho(X, x) = \inf_{y \in X} \|y - x\|$, $S(X, \delta) = \{y \in E_n : \varrho(X, y) < \delta\}$, $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ for an arbitrary function f, defined on X.

Let $u(x)$ be a given control. $x(t)$ will be called a solution of (1) on an interval I, if it is absolutely continuous on I and satisfies a.e. on I the relation

$$\dot{x}(t) \in Ax(t) + BU(x(t)) + \varepsilon\, p(t)$$

where

$$U(x) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\text{mes}\, N = 0} \overline{\text{co}\, u(S(x, \delta) - N)}$$

and $p(t)$ is an arbitrary perturbation, defined on I.

The reason for the generalization of the notion of solution is the fact, that as controls discontinuous functions of state variables are allowed (cf. [3], [4]). For continuous $u(x)$, the former definition is equivalent to the classical one.

In the following we shall apply the fact, that $x(t)$ is a solution of (1) if and only if it is a solution of the contingent equation

$$\dot{x} \in Ax + BU(x) + \varepsilon P \tag{2}$$

(cf. [1], [4]).

A control $u(x)$ will be called ε-stabilizing, if a compact region G containing the origin exists such that if $x(t)$ is a solution of (1) with $x(t_0) \in G$, then $x(t) \in G$ for $t \geqq t_0$; the region G will be called (u, ε)-invariant.

Clearly a product of two (u, ε)-invariant regions (with u fixed) is (u, ε)-invariant again. Hence, to every ε-stabilizing control u the smallest (u, ε)-invariant region $G(u)$ exists in the sense, that it is contained in every other (u, ε)-invariant region.

Therefore, we may estimate the quality of the ε-stabilizing controls according to their smallest (u, ε)-invariant regions.

Let $|x|$ be a given norm in E_n. Denote $|G| = \max_{x \in G} |x|$ for an arbitrary compact G.

Let u_1, u_2 be two ε-stabilizing controls. u_1 will be said better then u_2 (u_2 worse than u_1), if $|G(u_1)| < |G(u_2)|$.

For two-dimensional systems under sufficiently general assumptions for $\varepsilon > 0$ sufficiently small the best ε-stabilizing control has been proved to exist and constructed in [1].

In [2], the n-dimensional controllable systems are treated. It is shown, that for special P and $\varepsilon > 0$ sufficiently small a control $u(x)$ exists such that the origin itself is a (u, ε)-invariant region and, moreover, the system (1) is asymptotically stable under an arbitrary perturbation.

If Q contains the origin in its interior and (1) is controllable, i.e. if among the vectors $b_1, \ldots, A^{n-1}b_1, b_2, \ldots, A^{n-1}b_2, \ldots, b_m, \ldots, A^{n-1}b_m$ ($b_1, \ldots, b_m$ being the column vectors of B) are n linearly independent, then for $\varepsilon > 0$ sufficiently small an ε-stabilizing control exists. This may be demonstrated as follows:

From [5] it follows, that the unperturbed system

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3}$$

may be done asymptotically stable by a linear function $u = Cx$ and, hence, there exists a positive definite quadratic form $V = \frac{1}{2}(Wx, x)$, W being symmetric, which is a Lyapunov function for (3), i.e. the form

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3)} = (Wx, (A + BC)\,x) = (W(A + BC)\,x, x)$$

is negative definite. Henceforth, it satisfies the inequality

$$(W(A + BC)\,x, x) \leqq q\|x\|^2, \quad q < 0.$$

Calculating dV/dt according to the system (1) we have

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)} = (W(A + BC)\,x, x) + (Wx, \varepsilon p) \leqq$$

$$\leqq q\|x\|^2 + \varepsilon\|W\| \,.\, \|P\|\,\|x\| = (q\|x\| + \varepsilon\|Q\|\,\|P\|)\,\|x\|\,.$$

From this it may be seen, that for $\varepsilon > 0$ an $\eta(\varepsilon) > 0$ exists such that $\eta(\varepsilon) \to 0$ as $\varepsilon \to 0$ and $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)} \leqq 0$ if $V(x) = \eta(\varepsilon)$. If $\varepsilon > 0$ is small enough, $2Cx \in Q$ if $V(x) = \eta(\varepsilon)$. Hence, defining a control $u(x)$ such that $u(x) = Cx$ in some neighbourhood of the surface $V(x) = \eta(\varepsilon)$ we obtain an ε-stabilizing control with a (u, ε)-invariant region $V(x) \leqq \eta(\varepsilon)$.

However, the question of the existence of a best ε-stabilizing control is in general open.

The main purpose of this paper is to prove a theorem, which enables us in the problem of choosing a best ε-stabilizing control to restrict ourselves on the so called "bang-bang" controls and which, in analogy to a theorem in the optimal control theory may be denoted as a "bang-bang" principle.

The "bang-bang" principle, according to [6] may be formulated as follows:

If an optimal control exists, then there exists an optimal control, which is bang-bang.

In [6], Q is a polyhedron and by "bang-bang" control there is meant a control which acquires as values only the vertices of Q.

The bang-bang controls for more general Q (and even more general control systems) are discussed in [7].

The ε-stabilization bang-bang principle will be given as a corollary of a theorem which we are going to prove.

According to [7] denote tend Q the least compact set the convex hull of which is Q.

Theorem. *Let u be an ε-stabilizing control with a (u, ε)-invariant region G. Then, there exists an ε-stabilizing control u_0, acquiring its values only from* tend Q *and such that $G_0 =$* co G *is a (u_0, ε)-invariant region.*

The proof of the theorem will be accomplished in several steps.

Let x be a boundary point of a closed convex set C. Denote M_x the set of all normals of the support planes of C at x, i.e. $M_x = \{\psi : (\psi, x) = \max_{y \in C} (\psi, y)\}$.

Lemma 1. *Let $C \subset E_n$ be a convex compact and let $x \in E_n$. Then*

1° *There exists a unique point $q(x) \in C$ such that $\|x - q(x)\| = \varrho(C, x)$;*

2° $(x - q(x), q(x)) = \sup_{y \in C} (x - q(x), y)$, *(in particular $x - q(x) \in M_{q(x)}$, if $x \bar{\in} C$);*

3° $\|q(x_1) - q(x_2)\| \leqq \|x_1 - x_2\|$ *for $x_1, x_2 \in E_n$.*

Proof. 1° For $x \in C$ we have clearly $q(x) = x$. If $x \bar{\in} C$, the existence of $q(x)$

follows from the compactness of C. If there were two distinct points $y_1 \in C$, $y_2 \in C$, satisfying $\|x - y_i\| = \varrho(C, x)$, $i = 1, 2$ then for the point $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ we would have $\|x - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\| < \varrho(C, x)$. This is impossible, as $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \in C$.

2° If $x \in C$, 2° is trivial. In order to prove 2° for $x \bar{\in} C$, suppose the contrary, i.e. that a point $y_0 \in C$ exists such that

$$(3) \qquad (x - q(x), y_0) > (x - q(x), q(x)) .$$

Denote $y(\alpha) = \alpha y_0 + (1 - \alpha)\, q(x)$. We have

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \|y(\alpha) - x\|^2 = 2(y_0 - q(x),\ y(\alpha) - x),$$

$y(0) = q(x)$, $y(\alpha) \in C$ for $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$. Due to (3) we have

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \|y(\alpha) - x\|^2|_{\alpha=0} = 2(y_0 - q(x)\,,\quad q(x) - x) < 0$$

from which it follows, that for $\alpha > 0$ sufficiently small $\|y(\alpha) - x\| < \|q(x) - x\| = \varrho(C, x)$. This is impossible, as $y(x) \in C$ for $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$.

3° From 2° it follows $(x_1 - q(x_1),\ q(x_1) - q(x_2)) \geqq 0$, $(q(x_2) - x_2,\ q(x_1) - q(x_2)) \geqq 0$. Adding these two inequalities, we obtain $(x_1 - q(x_1) + q(x_2) - x_2,\ q(x_1) - q(x_2)) \geqq 0$, i.e. $(x_1 - x_2,\ q(x_1) - q(x_2)) \geqq \|q(x_1) - q(x_2)\|^2$. From the last inequality it follows $\|x_1 - x_2\| \geqq \|q(x_1) - q(x_2)\|$, q.e.d.

Lemma 2. *Let x be a boundary point of G. Then, for every $\psi \in M_x$ an $u_\psi \in$ tend Q exists such that*

$$(4) \qquad (\psi, Ax + Bu_\psi + \varepsilon p) \leqq 0$$

for an arbitrary $p \in P$.

Proof. First suppose that the theorem fails to hold for a boundary point of G, say x_0. Let $\psi \in M_{x_0}$. Then, for every $u \in$ tend Q we have

$$(5) \qquad (\psi, Ax_0 + Bu + \varepsilon p_\psi) > 0\,,$$

where p_ψ is such that $(\psi, p_\psi) = \max_{p \in P} (\psi, p)$. Now, let $u \in Q$. Then, we may choose $u_i \in$ tend Q, $\lambda_i \geqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m + 1$, such, that $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$ and $u = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i u_i$ (cf. [8]). Hence

$$(\psi, Ax_0 + Bu + \varepsilon p_\psi) = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i (\psi, Ax_0 + Bu_i + \varepsilon p_\psi) > 0\,,$$

i.e. (5) is valid for every $u \in Q$.

Due to the contingent equation existence theorem ([4], [9]) a solution $x(t)$ of the contingent equation

$$\dot{x} \in Ax + BU(x) + \varepsilon p_\psi \tag{6}$$

with $x(t_0) = x_0$ exists. This solution satisfies the relation $\operatorname{cont} x(t_0) \subset Ax_0 + BU(x_0) + \varepsilon p_\psi \subset Ax_0 + BQ + \varepsilon p_\psi$. From this and (5) we obtain $(\psi, z) > 0$ for every $z \in \operatorname{cont} x(t_0)$. This is possible only if $x(t)$ leaves G. But $x(t)$ being a solution of (6) is also a solution of (2) and, hence, of (1). Thus, according to the assumption, it cannot leave G. This contradiction proves the validity of the theorem for $x \in G$.

Now, let x_0 be an arbitrary boundary point of G_0. Let $\psi \in M_{x_0}$. Then, we may choose $x_i \in G$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $r \leqq n + 1$ such that $x_0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$, $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$. It is easy to show that x_i should be boundary points of G and $\psi \in M_{x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Hence, r points $u_i \in Q$ exist such that $(\psi, Ax_i + Bu_i + \varepsilon p) \leqq 0$ for $p \in P$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Adding these inequalities we obtain $(\psi, Ax_0 + B\sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i + \varepsilon p) \leqq 0$ for $p \in P$. Due to the convexity of Q, $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i \in Q$. Applying the same argument as in the first part of the proof, we conclude from this the existence of the desired $u \in \operatorname{tend} U$.

Lemma 3. *Let $u(x)$ be a given control and let $x(t)$ be a solution of (1) on I. Let C be a given convex compact. Then, $r(t) = q(x(t))$ is absolutely continuous on I and $(x(t) - r(t), \dot{r}(t)) = 0$ for a.e. $t \in I$.*

Proof. The absolute continuity of $r(t)$ follows from the absolute continuity of $x(t)$ and lemma 1, 3°. As $r(t)$ is absolutely continuous, it has a derivate a.e. an I. Let the derivative $\dot{r}(t)$ at t exist. Suppose $(x(t) - r(t), \dot{r}(t)) \neq 0$. If

$$(x(t) - r(t), \dot{r}(t)) > 0\,, \tag{7}$$

then we have $(x(t) - r(t), h^{-1}(r(t + h) - r(t))) > 0$ for $|h|$ sufficiently small. For $h > 0$ we have $(x(t) - r(t), r(t + h)) > (x(t) - r(t)), r(t))$. This contradicts lemma 1, 2°. If, instead of (7), the opposite inequality holds, we obtain a contradiction with lemma 1, 2° for $h < 0$.

Denote $V(x) = \{u \in \operatorname{tend} Q : (x - q(x), Aq(x) + Bu + \varepsilon p \leqq 0\}$ for $x \in E_n$.

Lemma 4. *$V(x)$ is non-empty and compact for $x \in E_n$. $V(x)$ is an upper semicontinuous in the sense of inclusion set-valued function on E_n* (cf. [1], [4], [7]).

Proof. The compactness of $V(x)$ is evident. From Lemma 2 it follows that $V(x)$ is non-empty. Let $x_n \to x$, $u_n \in V(x_n)$, $u_n \to u$. We have $u \in \operatorname{tend} Q$, $(x - q(x), Aq(x) + Bu + \varepsilon p)) = \lim_{n\to\infty} (x_n - q(x_n), Aq(x_n) + Bu_n + \varepsilon p)$. Hence, $(x - q(x), Aq(x) + Bu + \varepsilon p) \leqq 0$, i.e. $u \in V(x)$. This proves the upper semicontinuity of $V(x)$ (cf. [1]).

Proof of the theorem. According to [10][1]), from Lemma 4 it follows the existence of a measurable function $u_0(x)$ such that $u_0(x) \in V(x)$ for $x \in E_n$. We shall prove that $u_0(x)$ is the sought ε-stabilizing control.

Denote $U_0(x) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\text{mes} N = 0} \text{co}\, \overline{u(S(x, \delta) - N)}$. For every $x \in E_n$, $v \in U_0(x)$ and $p \in P$

(8) $$(x - q(x), Aq(x) + Bv + \varepsilon p) \leqq 0$$

is valid.

In order to prove this suppose the contrary. Then, sequences $\{x_n\} \to x$ and $\{p_n\}$ exist such that

(9) $$(x_n - q(x_n), Aq(x_n) + Bu_0(x_n) + \varepsilon p_n) > \eta > 0\,.$$

The sequences $\{x_n\}$, $\{u_0(x_n)\}$, $\{p_n\}$ are bounded, therefore we may choose a subsequence x_{n_k} such that $u_0(x_{n_k}) \to u^*$, $p_n \to p^* \in P$. From (9) it follows $(x - q(x), Aq(x) + Bu^* + \varepsilon p^*) \geqq \eta > 0$. This is impossible, as from the upper semicontinuity of $V(x)$ it follows $u^* \in V(x)$.

Now, suppose that a solution of (1) leaves G. Then, a boundary point x_0 of G_0 exists such that $x(t_0) = x_0$ and $x(t) \in E_n - G_0$ for $t \in (t_0, t_1\rangle$. Let $r(t) = q(x(t))$. For a.e. $t \in (t_0, t_1)$ we have

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|x(t) - r(t)\|^2 = (x(t) - r(t)\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) - r(t)\,) \in (x(t) - r(t)\,,$$

$$Ax(t) + BU_0(x(t)) + \varepsilon P - \dot{r}(t)) = (x(t) - r(t)\,,$$

$$Ar(t) + BU_0(x(t)) + \varepsilon P) + (x(t) - r(t)\,, \quad A(x(t) - r(t)) - (x(t) - r(t), \dot{r}(t))\,.$$

According to (8) we have $(x(t) - r(t), Ar(t) + Bu + \varepsilon p) \leqq 0$ for every $u \in U_0(x(t))$, $p \in P$. Due to this and lemma 3 we have

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|x(t) - r(t)\|^2 \leqq (x(t) - r(t)\,, \quad A(x(t) - r(t)) \leqq \|A\|\, \|x(t) - r(t)\|^2\,.$$

Hence (cf. [11], Theorem 2.1 of chap. I),

$$\|x(t_1) - r(t_1)\| \leqq \|x(t_0) - r(t_0)\| \quad \exp \quad \{2\|A\|\,(t_1 - t_0)\}\,,$$

i.e. $x(t_1) - r(t_1) = 0$, which contradicts the assumption. This completes the proof.

Remark. The requirements, desired by the theorem are satisfied by every control, which is equal to $u_0(x)$ in a domain

$$H_\eta = \{x : x \in E_n - G_0, \varrho(G_0, x) < \eta\}\,,$$

$\eta > 0$ being arbitrarily small.

---

[1]) In fact, the existence of such a measurable function is proved in [10] for one-dimensional x. However, the proof may be transferred without complications to functions of x of an arbitrary finite dimension.

Corollary. *If Q is a polyhedron, then* tend *Q ist he set of the vertices of Q. From the theorem the bang-bang principle follows:*

For every ε-stabilizing control there exists a bang-bang ε-stabilizing control which is not worse. In particular, if a best ε-stabilizing control exists, then there is a best ε-stabilizing control, which is bang-bang.

References

[1] *Brunovský P.:* On the best stabilizing control under a given class of perturbations. Czech. math. journal, *15* (1965), 329—369.

[2] *Бруновски П.:* О стабилизации линейных систем при определенном классе постоянно действующих возмущений. Дифференциальные уравнения. (to appear)

[3] *Филиппов А. Ф.:* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Математический сборник *51* (1960), 99—128.

[4] *Барбашин Е. А., Алимов Ю. И.:* К теории релейных дифференциальных уравнений. Известия ВУЗ, Математика, 1962, 3—13.

[5] *Курцвейль Я.:* К аналитическому конструированию регуляторов. Автоматика и телемеханика *22* (1961), 836—844.

[6] *LaSalle J. P.:* The time optimal control problem. Contributions to the theory of nonlinear oscillations V, Princeton 1960, 1—25.

[7] *Ważewski T.:* On an optimal control problem. Differential equations and their applications, Prague 1963, 229—242.

[8] *Ważewski T.:* Sur la semicontinuité inferieur du „tendeur" d'un ensemble compact, variant d'une facon continue. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Phys. Astr. *9* (1961), 869—872.

[9] *Ważewski T.:* Systemes de commande et équations au contingent. Ibid. *9* (1961), 151—155.

[10] *Ważewski T.:* Sur une condition d'existence des fonctions implicites mesurables. Ibid. *9* (1961), 861—863.

[11] *Coddington E. A., Levinson N.:* Theory of ordinary differential equations. New York, 1955.

Authors address: Bratislava-Patrónka, Dúbravská cesta. (Ústav technickej kybernetiky SAV).

Výťah

PRINCÍP „BANG-BANG" V PROBLÉME ε-STABILIZÁCIE LINEÁRNYCH SYSTÉMOV RIADENIA

PAVOL BRUNOVSKÝ, Bratislava

V súhlase s [1] sa zavádza pojem ε-stabilizujúceho riadenia a (u, ε)-invariantnej oblasti pre sústavy riadenia ľubovoľnej konečnej dimenzie. Riadenie u_1 sa nazýva lepším ako riadenie u_2, ak minimálna v smysle inklúzie (u_1, ε)-invariantná oblasť je v istom smysle menšia ako minimálna v smysle inklúzie (u_2, ε)-invariantná oblasť. Dokazuje sa veta, ktorej dôsledkom je bang-bang princíp:

K ľubovoľnému ε-stabilizujúcemu riadeniu u existuje ε-stabilizujúce riadenie typu bang-bang, ktoré nie je horšie ako u. Špeciálne, ak existuje najlepšie ε-stabilizujúce riadenie, potom existuje najlepšie ε-stabilizujúce riadenie typu bang-bang.

Резюме

ПРИНЦИП РЕЛЕЙНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПРОБЛЕМЫ ε-СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

ПАВЕЛ БРУНОВСКИ (Pavol Brunovský), Братислава

В соответствии с [1] вводится понятие ε-стабилизирующего управления и (u, ε)-инвариантной области для систем управления произвольной конечной размерности. Управление u_1 называется лучшим по сравнению с управлением u_2, если минимальная по включению (u_1, ε)-инвариантная область в определенном смысле меньше минимальной (u_2, ε)-инвариантной области. Доказывается теорема, следствием которой является принцип релейности управления:

Для всякого ε-стабилизирующего управления u существует релейное ε-стабилизирующее управление, которое не хуже u. В частности, если существует наилучшее ε-стабилизируещее управление, то существует наилучшее ε-стабилизирующее управление, являющееся релейным.

GENERALIZED INTERPRETABILITY IN TERMS OF MODELS (NOTE TO A PAPER OF R. MONTAGUE)

PETR HÁJEK, Praha

(Received November 5, 1965)

In [2], MONTAGUE considers three relations between two sets of sentences Φ, Ψ, namely:

(1) all members of Ψ are derivable from Φ;

(2) the theory axiomatized by Ψ is interpretable in the theory axiomatized by Φ;

(3) the theory axiomatized Ψ is relatively interpretable in the theory axiomatized by Φ.

He gives semantic definitions of the relations (2) and (3), and proves that these new definitions are equivalent to the original syntactic definitions, which he states to have an accidental character.

The function f from the definition of (relative) interpretability, which associates to every standard atomic formula of the language of Ψ (and to a new unary predicate) a formula of the language of Φ, can be called either an interpretation (of Ψ in Φ) or a syntactic model (of Ψ in Φ), [1]. If a syntactic model of Ψ in Φ is given, i.e. actually constructed, then the relative consistency of Ψ with respect to Φ is (effectively) demonstrated. The need of effectivity (consequently, the need of finite metamathematics without set-theoretical means) seems to be adequate, if we (as mathematical logicians) inquire, what can the matematicians do (prove, decide) and what cannot they do? I believe that, in this case, the syntactic definitions of the relations (1)–(3) are not entirely accidental, and indeed that they are the only possible ones. The metamathematical framework sketched by Montague seems to correspond to another question of the logician, namely, what are relations between the languages of the matematicians and of the external "world"? In this case, indeed, semantic definitions of the relations (1)–(3) are more interesting than the syntactic ones.

In order to answer the first metamathematical question in particular cases, a generalized notion of interpretability, the so-called notion of a parametrical syntactic model (see below), was used (see e.g. [4]) and explicitely formulated (in [1]). We also have the fourth (actually used) relation between two systems of sentences:

(4) The theory axiomatized by Ψ has a parametrical syntactic model in the theory axiomatized by Φ (one may say that the former theory is parametrically interpretable in the latter one).

A semantic definition of this relation can be found, and proved to be equivalent to the syntactic definition by modifying the proof from [2]. This is carried out in the present paper.

The framework sketched in [2] will be employed here. The only difference is that we consider the logical calculus without preferred equality predicate (and, consequently, without operation symbols and constants). Obviously, it is possible that a theory contain an equality predicate; the condition for a predicate to be an equality predicate in a theory are well-known. Then logical operations and constants can be introduced as (metamathematical) abbreviations. This conceptions enables us to interpret the predicate declared to be the equality predicate not necessarily as the equality predicate of the theory in which it is interpreted (cf. footnote 17) in [3]). This fact can at least simplify constructions of syntactic models (see e.g. [5]). However, it seems that the modification of our consideration so as to apply to the metamathematics given in [2] does not present any problems.

Definition 1. A triple ϑ, χ, f is called a parametrical translation of a language Γ_1 into a language Γ_2 with n parameters, n a positive integer, iff (i) ϑ is a formula of Γ_2 such that the free variables of ϑ are among $v_1, v_3, \ldots, v_{2n-1}$ (n variables);

(ii) χ is a formula of Γ_2 such that the free variables of χ are among $v_0, v_1, v_3, \ldots, \ldots, v_{2n-1}$ ($n + 1$ variables);

(iii) f is a function whose domain is the set of all standard atomic formulas φ of Γ_1; for every such formula $P(v_0, \ldots, v_q)$, $f(\varphi)$ is a formula such that its free variables are among $v_1, v_3, \ldots, v_{2n-1}, v_0, v_2, \ldots, v_{2q}$ (and none of these variables are bound in $f(\varphi)$).

Definition 2. Let $t = \langle \vartheta, \chi, f \rangle$ be a parametrical translation of Γ_1 into Γ_2 (with n parameters). With every formula φ of Γ_1 one associates a formula φ_t of Γ_2 in the following way:

(a) if φ is atomic, say $P(v_{k_0}, \ldots, v_{k_q})$, and $f(P(v_0, \ldots, v_q))$ is $\psi(v_1, v_3, \ldots, v_{2n-1}, v_0, v_2, \ldots, v_{2q})$, then φ_t is $\psi(v_1, v_3, \ldots, v_{2n-1}, v_{2k_0}, v_{2k_1}, \ldots, v_{2k_q})$;

(b) if φ is $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ (or $\varphi_1 \vee \varphi_2$ or $\neg\varphi_1$, etc.) then φ_t is $(\varphi_1)_t \wedge (\varphi_2)_t$ (or $(\varphi_1)_t \vee \vee (\varphi_2)_t$, or $\neg(\varphi_1)_t$ respectively);

(c) if φ is $\bigwedge v_k \psi$ or $\bigvee v_k \psi$, then φ_t is $\bigwedge v_{2k}(\chi(v_{2k}, v_1, \ldots, v_{2n-1}) \rightarrow \psi_t)$ or $\bigvee_{2k}(\chi(v_{2k}, v_1, \ldots, v_{2n-1}) \wedge \psi_t)$ respectively.

Definition 3. (i) Let t, Γ_1, Γ_2 be as in Definition 2, let Γ_2 be the language of a theory Φ, φ a formula of Γ_1. Then φ is said to hold in the translation t iff the formula $\bigwedge v_1, \ldots, v_{2n-1}(\vartheta(v_1, \ldots, v_{2n-1}) \rightarrow \varphi_t)$ belongs to Φ.

(ii) Under the same assumption, let Γ_1 be the language of a theory ψ axiomatized by a set of formulas Ψ_0. The translation t is said to be a parametrical syntactic model of Ψ in Φ iff the formula

$$(1)\qquad \bigvee v_1, \ldots, v_{2n-1}\vartheta(v_1, \ldots, v_{2n-1}) \wedge \bigwedge v_1, \ldots, v_{2n-1}[\vartheta(v_1, \ldots, v_{2n-1}) \rightarrow \rightarrow \bigvee v_0\chi(v_0, v_1, \ldots, v_{2n-1})]$$

belongs to Φ and, for every $\psi \in \Psi_0$, ψ holds in t.

If $\Psi_0 = \{\psi\}$ is one-element-set (and ψ be closed), then the conjunction of (1) with the formula

$$\bigwedge v_1, \ldots, v_{2n-1}[\vartheta(v_1, \ldots, v_{2n-1}) \rightarrow \psi_t]$$

is denoted by Mod_t. (Mod_t is a closed formula of the language Γ_2.)

Definition 4. Let Φ, Ψ be theories. Then Ψ is said to be parametrically interpretable in Φ iff, for some positive integer n, there is a parametrical syntactic model with n parameters of Ψ in Φ.

Lemma. *Let Φ be a theory, Ψ a theory axiomatized by Ψ_0, t a parametrical syntactic model of Ψ in Φ. Then, for every $\psi \in \Psi$, ψ holds in t. Further more, if Φ is consistent, then Ψ is also consistent.* (See [1].)

Definition 5. A set F is called a family of semantic models (of a theory Φ, with n parameters) iff F is a function such that the domain of F is a non-empty n-ary relation and the range of F consists of some semantic models of Φ. Write $F(y) = \langle A_y, g_y\rangle$ for every y in the domain of F.

With the family of models F one associates a triple $\langle P_F, Q_F, g_F\rangle$ in the following manner: (i) P_F is the domain of F;

(ii) Q_F is the $(n + 1)$-ary relation such that $\langle x_0, \ldots, x_n\rangle \in Q_F$ if and only if $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle \in P_F$ and $x_n \in A_{\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle}$;

(iii) g_F is a function, the domain of g_F constists of all standard atomic formulas of the language of Φ and, for every k-ary φ in the domain of g_F, $g_F(\varphi)$ is the $(n + k)$-ary relation such that $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n, \ldots, x_{n+k-1}\rangle \in g_F'\varphi)$ if and only if $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle \in P_F$ and $\langle x_n, \ldots, x_{n+k-1}\rangle \in g_{\langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle}(\varphi)$.

Definition 6. A family of models F is said to be definable in a model A iff the relations P_F, Q_F and all relations in the range of g_F are such.

Theorem. *If Φ is a theory and Ψ is a finitely axiomatizable theory, then Ψ is parametrically interpretable in Φ if and only if, for each model A of Φ, there is a family of models of Ψ which is definable in A.*

Proof. We modify the proof of Theorem 1 in [2]. Assume the hypothesis. The implication from left to right is obvious. Assume that for every model A of Φ there is a family of models of F which is definable in A. Let G be the set of all parametrical translations of the language of Ψ into the language of Φ; let ψ_0 be the conjunction of all members of a finite axiom system of Ψ, let $\Psi_0 = \{\psi_0\}$. It is easy to see that, for every model A of Φ, there is a family of models of Ψ definable in A if and only if the sentence Mod_t is true in A for some $t \in G$. It follows from the Compactness Theorem that there is a finite subset D of G such that, for every model A of Φ, there exists a t in D for which Mod_t is true in A. Let $D = \{t_1, \ldots, t_n\}$, let $t_i = \langle \vartheta_i, \chi_i, f_i \rangle$ for every $1 \leqq i \leqq n$. The disjunction $\mathrm{Mod}_{t_1} \vee \ldots \vee \mathrm{Mod}_{t_n}$ is true in every model A of Φ, and consequently, $\Phi \vdash \mathrm{Mod}_{t_1} \vee \ldots \vee \mathrm{Mod}_{t_n}$. Define a translation $t_0 = \langle \vartheta_0, \chi_0, f_0 \rangle$ as follows:

$$\vartheta_0 \text{ is the formula } (\mathrm{Mod}_{t_1} \wedge \vartheta_1) \vee (\neg\, \mathrm{Mod}_{t_1} \wedge \mathrm{Mod}_{t_2} \wedge \vartheta_2) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee (\neg\, \mathrm{Mod}_{t_1} \wedge \neg\, \mathrm{Mod}_{t_2} \wedge \ldots \wedge \neg\, \mathrm{Mod}_{t_{n-1}} \wedge \mathrm{Mod}_{t_n} \wedge \vartheta_n)\,;$$
$$\chi_0 \text{ is the formula } (\mathrm{Mod}_{t_1} \wedge \chi_1) \vee (\neg\, \mathrm{Mod}_{t_1} \wedge \mathrm{Mod}_{t_2} \wedge \chi_2) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee (\neg\, \mathrm{Mod}_{t_1} \wedge \neg\, \mathrm{Mod}_{t_2} \wedge \ldots \wedge \neg\, \mathrm{Mod}_{t_{n-1}} \wedge \mathrm{Mod}_{t_n} \wedge \chi_n)\,;$$

for every standard atomic φ, $f_0(\varphi)$ is the formula

$$(\mathrm{Mod}_{t_1} \wedge f_1(\varphi)) \vee \ldots \vee (\neg\, \mathrm{Mod}_{t_1} \wedge \ldots \wedge \neg\, \mathrm{Mod}_{t_{n-1}} \wedge \mathrm{Mod}_{t_n} \wedge f_n(\varphi))\,.$$

D being finite, there is a positive integer n_0 such that t_0 is a parametrical translation with n_0 parameters. In analogy with Montague's procedure one proves $\Phi \vdash \mathrm{Mod}_{t_0}$, and this suffices to show that Ψ is parametrically interpretable in Φ.

Corollary. *Let Φ, Ψ be theories, let Ψ be finitely axiomatizable. Then Ψ is parametrically interpretable in Φ if and only if Ψ is parametrically interpretable in every complete extension of Φ.*

Appendix. It is obvious that every theory Ψ which is relatively interpretable in Φ is parametrically interpretable in Φ. The notion of parametrical syntactic models is at least useful as a means to simplify some syntactic constructions (consistency proofs). In the case of the Bernays-Gödel set theory Σ, the following holds: Every theory which is parametrically interpretable in Σ by means of a normal model (see [1]) is (nonparametrically) relatively interpretable in Σ. (A weaker statement is proved in [1], Theorem 7; the present assertion was proved by I. Korec.) Next there is exhibited a simple example of theories Φ, Ψ such that Ψ is parametrically interpretable but not relatively interpretable in Φ. Let the language of both Φ and Ψ consist of one unary predicate and one binary predicate $=$, let the axioms of Φ be

(1) $\bigvee v_0\, P(v_0) \wedge \bigvee v_0 \bigvee v_1 v_0 \neq v_1$,

(2) $\bigwedge v_0 \bigwedge v_1 [(P(v_0) \wedge v_0 = v_1) \rightarrow P(v_1)]$,

(3) reflexivity, transitivity and symmetry of $=$,

let the axioms of Ψ be (1), (2), (3)and

(4) $\bigvee v_0 \neg P(v_0)$.

In order to prove that Ψ is parametrically interpretable in it suffices to take $\vartheta(v_1) \equiv \equiv P(v_1)$, $\chi(v_1, v_0) \equiv v_0 = v_0$, $P_t(v_1, v_0) \equiv v_0 = v_1$, $=_t (v_1, v_0, v_2) \equiv v_0 = v_2$.

Now proceed to prove that Ψ is not relatively interpretable in Φ. Let A be any set consisting of at least two elements, let $g(P(v_0)) = A$, $g(v_0 = v_1) = \{\langle x, x\rangle;\ x \in A\}$, $A = \langle A, g\rangle$. If Ψ were relatively interpretable in Φ, then, by Theorem 2 in [2], two disjoint non-empty sets would be definable in A. But the only sets definable in A by menas of the language $\{P, =\}$ are the empty set $\emptyset$ and A. This can be shown by proving (by induction) the following assertion: If φ is a formula of the language $\{P, =\}$, π is a permutation of the set A, $\{a_n\}_\omega$ is a countable sequence of elements of A and $\{a_n\}_\omega$ fulfils φ in A, then also the sequence $\{\pi(a_n)\}_\omega$ fulfils φ in A.

Finally, let the axioms of Ψ_1 be (1), (2), (3) and

$$(5) \qquad \bigwedge v_0 \bigwedge v_1 [(P(v_0) \wedge P(v_1)) \rightarrow v_0 = v_1] .$$

The theory Ψ_1 is interpretable in Φ (put $P_t(v_0) \equiv P(v_0)$, $v_0 =_t v_1 \equiv ((P(v_0) \wedge \wedge P(v_1)) \vee v_0 = v_1))$; further more, Ψ_1 is parametrically interpretable in Φ in such a manner that the equality predicate is interpreted absolutely (take ϑ, χ, P_t, $=_t$ from the preceeding example); however, Ψ_1 is not relatively interpretable in Φ if the equality predicate is considered as absolute (consider e.g. the set of all positive integers with the equality relation and with the subset of all odd numbers).

References

[1] *P. Hájek:* Syntactic models of axiomatic theories, Bull. Acad. Polon. Sci. *XIII* (1965), 273—278.

[2] *R. Montague:* Interpretability in terms of models, Indag. Math. *XXVII* (1965), 467—476.

[3] *A. Tarski, A. Mostowski, R. N. Robinson:* Undecidable Theories, Amsterdam 1953.

[4] *P. Vopěnka:* Postroenie modélei teorii množestv metodom ul'traproizvedenia, Zeitschr. für Math. Log. *8* (1962), 281—292.

[5] *P. Hájek:* Die durch die schwach inneren relationen gegebenen Modelle der Mengenlehre, ibid. *10* (1964), 151—157.

Authors address: Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

ZOBECNĚNÁ INTERPRETOVATELNOST V TERMINOLOGII MODELŮ (POZNÁMKA K PRÁCI R. MONTAGUEHO)

PETR HÁJEK, Praha

Montague podává v práci [4] sémantické definice syntaktických pojmů interpretovatelnosti a relativní interpretovatelnosti libovolné axiomatické teorie v konečně axiomatizovatelné teorii. Podávám analogickou sémantickou charakterizaci obecnějšího pojmu parametrické interpretovatelnosti axiomatické teorie.

Věta. *Buďte Φ, Ψ axiomatické teorie, budiž Φ konečně axiomatizovatelná. Ψ je parametricky interpretovatelná ve Φ (tj. Ψ má parametrický syntaktický model ve Φ) právě tehdy, když ke každému sémantickému modelu* A *teorie Φ existuje rodina* F *sémantických modelů teorie Ψ definovatelná v* A. (*Pojem rodiny sémantických modelů a její definovatelnosti je zaveden jistým přirozeným způsobem.*)

Je podán příklad axiomatizovatelných teorií Φ, Ψ takových, že Ψ je parametricky interpretovatelná ve Φ, ale není relativně interpretovatelná ve Φ.

Резюме

ОБОБЩЕННАЯ ИНТЕРПРЕТИРУЕМОСТЬ В ПОНЯТИЯХ МОДЕЛЕЙ (ЗАМЕТКА К РАБОТЕ Р. МОНТАГЮ)

ПЕТР ГАЕК (Petr Hájek), Praha

Монтагю ввел семантические определения синтаксических понятий интерпретируемости и относительной интерпретируемости про извольной аксиоматической теории в конечно-аксиоматизируемой теории. В предлагаемой работе дается аналогичное семантическое определение более общего понятия параметрической интерпретируемости теории в конечно-аксиоматизируемой теории.

Теорема. Пусть Φ, Ψ — аксиоматические теории, пусть Φ — конечно-аксиоматизируема. Ψ параметрически интерпретируема в Φ тогда и только тогда, когда для всякой семантической модели A теории Φ существует семейство F семантических моделей теории Ψ, определимое в A. (Понятия семейства моделей и его определимости вводятся естественным образом.)

Дается пример конечно-аксиоматизируемых теорий Φ, Ψ таких, что Ψ параметрически интерпретируема в Φ, но не является относительно интерпретируемой в Φ.

ÚLOHY A PROBLÉMY

5. Nechť $dx/d\theta = f_i(x, \theta)$, $(i = 1, -1)$ jsou dvě obyčejné diferenciální rovnice v n-rozměrném euklidovském prostoru R^n; předpokládejme, že $f_i : D \to R^n$ jsou spojitá zobrazení, $D \subset R^n \times R^1$ otevřená souvislá množina, a dále, že obě rovnice mají jednoznačnost řešení počáteční úlohy. Nalezněte pokud možno jednoduché nutné (případně i postačující, případně jen v speciálních případech) podmínky na zobrazení f_i pro to, aby řešení daných rovnic byly v následujícím velmi názorném vztahu „komutativity posunů po řešeních“: Pro libovolné počáteční podmínky $(x, \xi) \in D$ a libovolná $\xi_i \in R^1$ (resp. jen pro dostatečně malá $\xi_i - \xi \geqq 0$) označme $x_i(.)$ řešení i-té rovnice procházející bodem x v čase ξ, a dále $y_i(.)$ řešení i-té rovnice bodem $x_{-i}(\xi_{-i})$ v čase ξ_{-i}; potom $y_1(\eta) = y_{-1}(\eta)$ pro $\eta = \xi_1 + \xi_{-1} - \xi$, má-li alespoň jedna strana smysl.

Poznámky. Jsou-li dané rovnice lineární autonomní, $dx/d\theta = A_i x$, pak lokální i globální komutativita je ekvivalentní s komutativností matic A_1, A_{-1} v obvyklém smyslu; v nehomogenním případě je poslední podmínka nutná. Další částečné výsledky pro autonomní případ jsou v článku O. Hájek, Meromorphic dynamical systems III, Czech. Math. Journal *16* (*91*) (1966), 36–40.

6. Udejte konstruktivní popis všech topologických orientovatelných ploch (= variet dimense 2) P s touto vlastností „dichotomie“: každá prostá uzavřená křivka C v P rozděluje P v dvě souvislé množiny mající C jako svoji hranici. Zjistěte, zda orientovatelnost není důsledkem ostatních předpokladů.

Poznámky. (1) Ukazuje se, že dichotomické plochy mají velký význam pro účely zobecňování kvalitativní teorie diferenciálních rovnic v rovině. (2) Ze známé klasifikace ploch ihned plyne, že jediná kompaktní dichotomická plocha je plocha kulová S^2. (3) Lze dokázat, že každá neprázdná podoblast dichotomické plochy je opět dichotomickou plochou. (4) A. Pultr vyslovil hypotézu o tom, že (2–3) v podstatě vyčerpávají dichotomické plochy, tj. že každá dichotomická plocha je homeomorfní s oblastí v S^2.

Otomar Hájek, Praha

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

RECENSE

Vl. Knichal, A. Bašta, M. Pišl, K. Rektorys, MATEMATIKA I., SNTL-SVTL, Praha 1965, strán 544, obrázkov 258, cena 48,50 Kčs.

Recenzovaná kniha je prvým dielom štvordielnej vysokoškolskej učebnice matematiky pre vysoké školy technického smeru. Je v nej zahrnutá látka, ktorá se preberie asi v prvom semestri na vysokých školách technických. Je rozdelená na 11 kapitol.

V úvode knihy poukazujú autori na to, že riešenie technických problémov má obyčajne tri fázy a to: 1. matematickú formuláciu technického problému, 2. matematické riešenie takto formulovanej úlohy a 3. rozbor výsledku. O týchto fázach sa v úvode potom krátko pojednáva.

Prvá kapitola je venovaná matematickej logike a obsahuje niektoré základné pojmy z matematickej logiky. Vysvetľujú sa tu pojmy: axióma, definícia, veta, implikácia, obrátená veta k danej vete, ekvivalencia výrokov, negácia výroku a dôkaz. Preberajú sa pri tom priame a nepriame dôkazy a dôkaz úplnou indukciou.

Druhá kapitola začína pojmom množiny a základnými operáciami s množinami. Pokračuje výkladom o reálnych číslach, pričom sa uvádzajú niektoré axiómy racionálnych čísel. Na presné vybudovanie teórie reálnych čísel odkazujú autori čitateľa na iné knihy. Za tým nasledujú definície intervalov a niekoľko článkov, ktoré pojednávajú o nerovnostiach, o lineárnych a kvadratických nerovnostiach s jednou neznámou a o sústave lineárnych nerovností s jednou neznámou. Potom nasleduje článok týkajúci sa definície a vlastností absolútnej hodnoty reálnych čísel. Koniec kapitoly je venovaný komplexným číslam a to ich definícii, definícii modulu komplexného čísla, geometrickému znázorňovaniu komplexných čísel, goniometrickému tvaru komplexných čísel, geometrickej interpretácii operácií s komplexnými číslami a umocňovaniu a odmocňovaniu komplexných čísel.

Tretia kapitola je venovaná otázkam lineárnej algebry. V úvodnom článku sa naznačuje problematika celej tejto kapitoly. V druhom a treťom článku pojednáva sa o vektoroch a o ich lineárnej závislosti a nezávislosti. Štvrtý článok obsahuje výklad o maticiach a výsledkov tohto článku využíva sa v ďalšom článku, ktorý sa týka riešenia sústavy lineárnych rovníc. Je tu uvedená Gaussova eliminačná metóda a Frobeniova veta. Po tomto článku nasledujú determinanty. K ich zavedeniu používa sa pojem permutácie a inverzie u permutácie. V ďalšom článku sú uvedené vlastnosti determinantov. Nasleduje článok o použití determinantov pri riešení sústavy lineárnych rovníc a Cramerovo pravidlo. Na to naväzuje pojednanie o homogenných sústavách lineárnych rovníc a o ich riešeniach. Kapitola končí základnými pojmami z maticového počtu.

Štvrtá kapitola s názvom „Analytická geometria v rovine" začína výkladom pravouhlého súradnicového systému v rovine. V treťom článku na začiatku sa dokazuje veta o invariantnosti rozdielu x-ových a y-ových súradnic dvoch bodov v rovine voči posunutiu pravouhlého súradnicového systému. Tejto vety sa potom častejšie používa. V tomto článku sa ďalej nachádza vzorec pre vzdialenosť dvoch bodov v rovine, definícia uhlu a smeru v rovine, definícia smerového uhlu priamky, vzorec pre smernicu priamky danej dvoma bodmi a tangensu uhlu dvoch priamok. Nasledujúci článok je venovaný analytickému vyjadreniu priamky. Sú tu rôzne druhy rovníc priamky a ukazujú sa spôsoby, ako prejsť z jedného vyjadrenia priamky do druhého. Piaty článok sa týká vzdialenosti bodu od priamky. Články o priamke končia článkom o vzájomnej polohe dvoch priamok a sväzkom priamok. Potom nasledujú články o kužeľosečkách. Najprv sa preberá kružnica a jej rovnica a vzájomná poloha kružnice a priamky. Potom nasleduje článok o elipse, článok o hyperbole a článok o parabole. V týchto článkoch sa nachádza odvodenie ich stredových a osových rovníc. Súčasne sa v tých článkoch vyšetruje vzájomný vzťah priamky a kužel osečky. Po týchto článkoch nasleduje pojednanie o transformácii súradníc a článok o polárnych súradniciach. Pri polárnych súradniciach preberajú sa niektoré krivky, ktorých rovnice majú v polárnych súradniciach veľmi jednoduchý tvar a rovnice kužeľosečiek pri špeciálnej polohe v polárnych súradniciach. V predposlednom článku kapitoly ukazuje sa ako pomocou transformácií môžeme zistiť, aký geometrický útvar predstavuje kvadratická rovnica v dvoch premenných. V článku o geometrických miestach preberajú sa niektoré dôležité krivky.

Po kapitole o analytickej geometrii začína kapitolou o postupnostiach matematická analýza. Najprv sa vysvetľuje pojem postupnosti, ohraničenej postupnosti, monotónnej postupnosti. Na príklade postupnosti $\{n/(n + 1)\}$ prichádza sa k pojmu limity postupnosti, na ktorý nadväzuje presná definícia pojmu limity postupnosti. V článku o limite postupnosti sú obsažené základné vety o limite postupnosti. V nasledujúcom článku sú vety o limite postupností, ktoré súvisia s usporiadaním reálnych čísel. Po článku pojednávajúcom o nevlastnej limite postupnosti je zaradený článok o vetách týkajúcich sa limít postupností vzhľadom na operácie s reálnymi číslami. Za tým nasleduje pojednanie o konvergencii monotónnych postupností. V súvislosti s tým definuje sa číslo e, pričom sa predtým dokazuje existencia limity postupnosti $\{(1 + 1/n)^n\}$. Okrem toho opisuje sa tu metóda, ktorá pomocou pojmu limity postupnosti umožňuje nám definovať mocniny s iracionálnym exponentom. Kapitola končí výkladom Ritzovej iteračnej metódy a Gaussovej-Seidelovej metódy na riešenie sústavy lineárnych rovníc. Tvrdenia o konvergencii takto získaných postupností sa vyslovujú bez dôkazov a autori odkazujú čitateľa v tejto súvislosti na citovanú literatúru.

Šiesta kapitola je venovaná pojednaniu o funkci jednej premennej. Začína sa úvodným článkom a pokračuje definíciou funkcie, spôsobmi zadania funkcie a s operáciami s funkciami. Tretí článok obsahuje niektoré jednoduché funkcie a ich grafy. V štvrtom článku sa preberajú niektoré typy funkcií, ako sú párne a nepárne funkcie, periodické funkcie, monotónne a ohraničené funkcie. Pojmu zložená funkcia je zasvätený nasledujúci článok. Šiesty článok sa týka pojmu jednojednoznačnej funkcie a s tým súvisiaceho pojmu inverznej funkcie. Po týchto článkoch preberajú sa v jednotlivých článkoch goniometrické, cyklometrické, exponenciálne, mocninné a logaritmické funkcie. Posledný článok obsahuje pojem elementárnej funkcie a pojmy algebraickej a transcendentnej funkcie.

Siedma kapitola je vyhradená otázke spojitosti funkcie. V jej prvom článku je pojem okolia bodu, prírastku argumentu a prírastku funkcie. Druhý článok obsahuje definíciu spojitosti funkcie v bode a spojitosti funkcie na otvorenom intervale. Pojem spojitosti funkcie v čísle je sprevádzaný geometrickým výkladom vlastnosti spojitosti funkcie v čísle. Tretí a štvrtý článok obsahuje vety o spojitosti súčtu, rozdielu, súčinu a podielu dvoch funkcií a spojitosti zloženej funkcie. Potom sa autori venujú výkladu spojitosti zprava a zľava. Šiesty článok pojednáva o spojitých funkciách na uzavretom intervale a obsahuje Weierstrassovu vetu o maxime a minime funkcie spojitej na uzavretom intervale, Bolzanovo-Weierstrassovu medzihodnotovú vetu, ich dôsledky a vetu o rovnomernej spojitosti funkcie spojitej na uzavretom intervale. V poslednom článku kapitoly dokazuje sa spojitosť inverznej funkcie, ak pôvodná funkcia je rýdzomonotónna a spojitá na intervale.

Nasledujúca kapitola o limite funkcie začína definíciou limity funkcie v čísle a vzťahom medzi spojitosťou a limitou funkcie a pokračuje druhým článkom o jednostranných limitách funkcie. Tu sa definujú body nespojitosti prvého druhu a druhého druhu a funkcia po čiastkach spojitá na intervale. V treťom článku sú vety o limite súčtu, rozdielu, súčinu a podielu dvoch funkcií a o limite zloženej funkcie. Štvrtý článok je venovaný definícii nevlastnej limity funkcie a limity a nevlastnej limity funkcie v nevlastných bodoch. V tomto článku sú vypočítané aj niektoré limity, ktoré sa budú neskôr používať. V poslednom piatom článku sú vety o nevlastných limitách.

Deviata kapitola o derivácii funkcie začína článkom, kde na príklade priamočiareho pohybu hmotného bodu a na úvahe o dotyčnici krivky sa ukazuje na význam, aký má limita $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (f(x + \Delta x) - f(x))/\Delta x$. Takto prechádzajú autori k definícii derivácie funkcie. Súčasne sa zavádza pojem nevlastnej derivácie a derivácie zprava a zľava. V druhom článku odvodzujú sa vzorce pre deriváciu konštanty, funkcie x^n, kde n je prirodzené číslo a funkcií $\sin x$, $\cos x$, e^x a $\ln x$. Potom nasleduje článok o vetách o derivácii súčtu, rozdielu, súčinu a podielu dvoch funkcií, ako aj veta o spojitosti funkcie v čísle, v ktorom má deriváciu. Pri tom sa odvodzujú vzorce pre deriváciu $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ a x^{-n}, kde n je prirodzené číslo. V štvrtom článku je veta o derivovaní inverzných funkcií. Jej sa používa potom k odvodeniu vzorcov pre deriváciu $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$. Piaty článok obsahuje vetu o derivácii složenej funkcie s rôznymi príkladmi, medzi iným s príkladmi derivácie funkcií x^α a a^x. V šiestom článku sú definície derivácií vyšších rádov a fyzikálny význam derivácie druhého rádu. Kapitola končí článkom o diferenciálu funkcie, v ktorom sa poukazuje aj na význam diferenciálu a krátkym článkom, ktorý obsahuje tabuľku derivácií základných elementárnych funkcií.

Za deviatou kapitolou nasleduje najdlhšia kapitola pojednávajúca o aplikáciach diferenciálneho počtu. Začína vetami o strednej hodnote, najprv Rolleovou vetou, potom Lagrangeovou vetou a nakoniec Cauchyho vetou. Autori dávajú aj geometrický výklad týchto viet. Sú tu uvedené niektoré dôsledky týchto viet, ako napr.: funkcia, ktorej derivácia na nejakom otvorenom intervale je 0, je na ňom konštanta; ďalej vety týkajúce sa vzťahu monotónnie a derivácie. Cauchyho vety o strednej hodnote používa sa v štvrtom článku pri odvodzovaní l'Hospitalovho pravidla. Tento článok pojednáva o všetkých prípadoch neurčitých výrazov. Piaty článok je aplikácia diferenciálneho počtu na extrémy funkcie. Sú tu uvádzané vety týkajúce sa lokálnych extrémov funkcií. Najprv sa formulujú tieto podmienky len použitím prvej derivácie a až v druhej časti sa nachádzajú podmienky, ktoré používajú aj druhú deriváciu funkcie. Tretia časť článku obsahuje hľadanie extrémov funkcie na intervale a niektoré slovné úlohy týkajúce sa extrémov funkcie. V šiestom článku pojednáva sa o konvexnosti, konkávnosti a inflexných bodoch funkcie na základe druhej derivácie a vyšších derivácií. Potom nasleduje článok o asymptotách funkcií. V ďalšom článku je vyšetrovanie grafu funkcií. Po článku o hyperbolických funkciách nasleduje článok o Taylorovej vete a jej použití. V ňom sa najprv zavádza pojem nekonečne malej a nekonečne veľkej funkcie v čísle, ďalej rád nekonečne malých veličín a symbol malé o. V druhej časti tohto článku je Taylorov vzorec a jeho použitie na niektoré funkcie. Kapitola končí článkom o približnom riešení rovníc, kde sa preberá metóda regula falsi a Newtonova metóda. Pritom je udaný aj výpočet chyby pri týchto metódach.

Posledná kapitola sa týká rovinných kriviek. V prvom článku sa jedná o parametrické rovnice kriviek a ako príklad sa preberajú cykloidy. V druhom článku je definícia hladkej krivky a okrem toho sa preberajú kardioida a asteroida. Tretí článok je venovaný otázke dotyčnice a normály krivky danej buď parametricky alebo pomocou polárnych súradníc. Posledný článok pojednáva o styku kriviek a o oskulačnej kružnici.

V úvode autori píšu, že napísať učebnicu matematiky pre technikov nie je úloha ľahká a sú rôzne názory na to, z akých hľadísk ju možno písať. Autori vykladajú látku veľmi podrobne a zrozumiteľne a ilustrujú ju na príkladoch. Hľadiská na spracovanie látky sú dobre volené. Pred definíciou dôležitých pojmov je úvodný výklad, ktorý má čitateľovi umožniť správne pochopiť tento pojem. Niektoré dôkazy autori vynechávajú a na niektorých miestach upúšťajú od podrobností. V takýchto prípadoch odkazujú čitateľa na literatúru. Na konci každej kapitoly je zhrnutie, ktoré podáva krátky prehľad látky, o ktorej sa v kapitole pojednáva a ďalej článok „Otázky a cvičenia", kde sú príklady na riešenie. Týchto príkladov je ovšem pomerne málo. Je tomu tak možno preto, že sa snaď k tejto učebnici chystá nejaká zbierka úloh; čo by bolo veľmi užitočné. Autori si dosť všímajú otázok približných metód na riešenie rovníc.

V knihe sa vyskytuje pomerne málo chýb a vznikli buď prepisom alebo pri sádzaní knihy. Uvediem tu tie chyby, na ktoré som pri čítaní prišiel. V 27^3 príde $B \subset A$ miesto $B \cup A$; v 27^5 zas $B \subset A$ miesto $B \supset A$; na str. 40 sú obrázky 2.17 a 2.18 navzájom vymenené; na str. 56 vo vete 1 má byť $z \neq 0$ a nie $\zeta \neq 0$; v 145_3 príde $k = -a/b$ miesto $k = -b/a$; v 183^3 príde $\sqrt{[(x - p/2)^2 + y^2]}$ miesto $\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}$; v 242_1 príde $G - \varepsilon < a_n \leqq G$ miesto $G - \varepsilon < a_n < G$; v 245^3 príde $(1 + 1/n)^n$ miesto $(1 + 1/n)^n$; v príklade 2 na str. 454 príde $f(x) = (x^2 + 2x + 5)/(3x + 4)$ miesto $f(x) = (x^2 + 2x + 5)/(3x^2 + 4)$; vo vete 1 na str. 520 príde $I_1 \subset I$ miesto $I_1 \in I$ a v odmocnine v 527_4 príde $y_0'^2$ miesto y_0.

Tvrdenie v poznámke 7 na str. 230 nemožno považovať za obrátenú vetu k vete 4 v zmysle definície obrátenej vety zo str. 19. Ani tvrdenie, že obrátená veta k vete 4 neplatí, nie je správne. Zrejme totiž platí: Postupnosť $\{a_n\}$ je konvergentná vtedy a len vtedy, keď každá postupnosť z nej vybraná je konvergentná. Autori mali asi niečo iného na mysli, než vyjadrili v poznámke 7. Chceli totiž povedať, že z konvergencie nejakej vybranej postupnosti nevyplýva ešte konvergencia pôvodnej postupnosti.

Ešte by som chcel v súvislosti s recenziou tejto knihy upozorniť na dva problémy. Prvý sa týka otázky, či je správne, že autori obchádzajú definíciu reálnych čísel a odkazujú čitateľa na tri knihy. Reálne čísla predsa tvoria základný pojem matematickej analýzy a s ich definíciou sa čitateľ nestretne ani v rámci stredoškolského štúdia, ani pri čítaní tejto učebnice. Myslím, že axiomatika množiny reálnych čísel nie je taká ťažká, aby sa nemohla v učebnici takéhoto typu uviesť. V tejto súvislosti by bolo bývalo aspoň dobré, keby boli autori poznamenali, že budú sa pridržiavať definície reálnych čísel tak, ako je ona uvedená v nimi citovaných knihách. Autori to zrejme mlčky robia. Pri tejto definícii reálnych čísel sa veta o supremu javí totiž ako veta. Pri inej definícii reálnych čísel môže byť veta o supremu jednou z axiómov. Neuvedenie vlastností množiny reálnych čísel má tiež napr. za následok, že na str. 29 v príklade 2 sa ukazuje, že číslo $3 - a$, kde $a > 0$, nie je horným ohraničením množiny M len pre špeciálny prípad $a = 0{,}01$, ale tvrdenie je vyslovené obecne. Z Archimedovej vlastnosti množiny reálnych čísel by toto tvrdenie pre každé $a > 0$ ľahko vyplývalo. Druhý problém sa týka toho, či vety 2 a 3 na str. 30 a 31 nie sú priskoro. Autori ich uvádzajú bez dôkazu s tým, že ich možno dokázať pomocou vety 1 (vety o supreme). Je pravda, že k ich dôkazu môžeme použiť vetu 1, ale okrem toho treba ešte použiť napr. spojitosť funkcie x^n. K dôkazu vety 3 dávajú autori v cvičení 5 na str. 58 návod. Ale na základe toho návodu dokáže čitateľ len toľko, že existuje také číslo b, že pre $0 \leqq x < b$ platí $x^2 < a$ a pre $b < x$ platí $a \leqq x^2$. Čitateľ musí ovšem dokázať viac; totiž, že platí $\sup \{x^2 : 0 \leqq x < b\} = a$ a $\inf \{x^2 : b < x\} = a$.

Na koniec možno konštatovať, že recenzovaná kniha dobre spĺňa svoj účel a myslím, že mnohým poslucháčom vysokých škôl technických bude veľmi dobre slúžiť pri štúdiu matematiky. Obrázky v knihe Matematika I sú veľmi starostlivo urobené a budú uľahčovať čitateľovi pochopenie vykladanej látky. Svoju recenziu končím poznámkou, že je škodou, že tak hodnotná knižka má farebne málo výraznú väzbu.

Ladislav Mišík, Bratislava

J. P. Leonov, S. J. Rajevskij, N. S. Rajbman: NA POMOC AUTOMATIZACI. (O použití statistické dynamiky v automatizaci), SNTL Praha 1965 — knižnice automatizace, 105 stran, cena Kčs 5,50.

Cílem této nevelké knížky je seznámit poměrně široký okruh lidí — inženýry a technické pracovníky v automatizaci a hromadné výrobě — s aplikacemi statistických metod a metod teorie pravděpodobnosti v automatickém řízení a v hromadné výrobě. U čtenářů autoři nepředpokládají bližší znalosti z teorie pravděpodobnosti a v první kapitole definují základní pojmy, jako např.

náhodný jev, pravděpodobnost, podmíněnou pravděpodobnost, náhodnou veličinu, náhodný proces atd. Druhá kapitola pojednává o optimálních řídicích obvodech lineárních i obecných. Třetí kapitola je věnována statistickému popisu vzájemných vztahů a hledání vhodných matematických modelů vyjadřujících tyto vztahy. Čtvrtá kapitola pojednává o statistických metodách v automatické regulaci a o nejnovějších principech regulace. Pátá a šestá kapitola jsou věnovány statistickým charakteristikám výrobních procesů a automatických výrobních linek. V závěru je uvedena tabulka hustoty pravděpodobnosti normovaného normálního rozložení.

V souvislosti se snahami o rozvoj našeho národního hospodářství, o zvědečtění jeho řízení a se snahami o prosazování automatizace ve výrobní sféře se zdá, že uvedená publikace zasahuje do oblasti v současné době velmi aktuální. Publikace podobného zaměření by bylo třeba v ediční činnosti SNTL jen vítat. Aktuálnost a potřebnost by měla být v souladu se skutečnými hodnotami díla, jenže v případě uvedené knihy nemůžeme být příliš potěšeni. Hloubavější čtenář, který není blíže seznámen s problematikou, bude pravděpodobně zaražen svou neschopností pochopit a zvládnout rozebíranou tématiku a dojde (možná zcela nesprávně) k závěru, že to je „věda“ nad jeho síly. Skutečná příčina však tkví v množství nejasností a nepřesností, které v recensované knížce nalezneme. Není možné zde rozebírat všechny detaily — omezme se jen na několik příkladů.

Základní pojmy teorie pravděpodobnosti jsou definovány velmi mlhavě, neučitě nebo dokonce definice chybí. Velmi nejasná je definice náhodného jevu na str. 9 říkající, že „v podstatě náhodných jevů není přesně určených zákonitostí“. Což statistické zákonitosti „nejsou přesně určeny“, jsou nepřesné? Pojem pravděpodobnosti je definován na straně 10 zcela mylně. Autoři vycházejí z frekvenčního von Misesova pojetí pravděpodobnosti, mylně však slučují relativní četnost jevu s jeho pravděpodobností (viz vzorec (1) a (4)). (Autoři uvažují výrobu určité součásti. Nechť N je celkový počet uvažovaných součástí, n_1 je počet součástí s odchylkou větší než předepsaná mez a $P = n_1/N$. Uvažujeme-li i jiné partie o N výrobcích a nezmění-li se podmínky výroby potom „číslo P má ... důležitou vlastnost — stabilitu a může být objektivní charakteristikou celého procesu výroby součásti ... a nazývá se pravděpodobnost výskytu daného znaku“. Základní omyl zde vznikl, jelikož nebyl přesně vymezen náhodný jev, jehož pravděpodobnost se definuje. Pokud jde o zkoumání pouze jedné partie o N výrobcích, potom opravdu n_1/N je klasickou definicí pravděpodobnosti výskytu výrobku s velkou odchylkou v dané partii. Pokud však autoři mají na mysli definici pravděpodobnosti výskytu zmetků v celém procesu, jde o omyl.) Pojem podmíněné pravděpodobnosti na str. 12 vzorce (4), (5), (6) je definován chybně — zdá se však, že zde jde pouze o tiskové chyby. Pro upřesnění a snazší pochopení by bylo třeba vzorce (5) a (6) uvést ve formě

$$(5) \qquad P_2^{(1)} = \frac{n_2^{(1)}}{n_1}$$

$$(6) \qquad P_{1,2} = \frac{n_2^{(1)}}{N} = \frac{n_2^{(1)}}{n^1} \cdot \frac{n_1}{N} = P_2^{(1)} \cdot P_1$$

Velmi nejasně je na str. 13 definována náhodná veličina. „Hodnota náhodné veličiny na rozdíl od veličiny, která není náhodná, není přesně určena“. Znamená to snad, že při realizaci náhodné veličiny nevíme „přesně“ jakou hodnotu nabyla a v tom je její náhodnost? Jako v případě pojmu náhodného jevu a v řadě dalších případů jde zde o nepřesné, nejasné a neúplné formulace. V uvedené větě by stačilo položit slůvko „předem“ na třetí místo od konce, stejně jako by stačilo v definici střední hodnoty na str. 14 dodat slůvko „právě“ ve větě „Uvažujme náhodnou veličinu, která může nabýt při realizaci (právě) jedné z konečně mnoha hodnot $x_1, \ldots, x_n$.“ Jinak je definice střední hodnoty nesmyslná a špatná — může jít třeba o spojitou náhodnou veličinu nabývající všech reálných čísel a tedy i hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Podobné výtky není možné brát za puntičkářství — vždyť slovo „právě" je jedno z nejsilnějších a nejdůležitějších slov dnešní matematiky. Dále je třeba podotknout, že definice střední hodnoty náhodného procesu na str. 15 je nepřesná. V případě stacionárních ergodických procesů je v pořádku, v případě pouhých stacionárních procesů však poměr $m_N = (a_1 + a_2 + \ldots + a_N)/N$ nekonverguje k jedinému číslu, ale k podmíněné střední hodnotě vzhledem k σ-algebře invariantních podmnožin vzhledem k transformaci prostoru, která je fakticky měřitelnou funkcí vzhledem k této σ-algebře. Ve vzorci (14) na téže straně jde zřejmě o chybu tisku a má být správně $t \to 0$. Na str. 16 se mluví o rozptylu náhodného procesu, definuje se však jen rozptyl náhodné veličiny. Jednoduchý vzorec pro koeficient korelace chybí, i když se o něm mluví. Na str. 22 se praví, že intenzita poruchy je charakterisována číslem σ_N^2, aniž se objasní, co to vlastně σ_N^2 je. Mnohým čtenářům asi nebude jasný symbol $R \gg 1$ na téže straně a bylo by snad dobré říci, že neznamená nic víc, než že R je „mnohem" větší než 1. Formální matematický aparát je nejbohatěji rozvinut na str. 34—35 v příkladě z mechaniky — tedy v příkladě vzdáleně ilustrativním, ale v problematice samotných stochastických procesů a teorie pravděpodobnosti není formální matematický aparát téměř vůbec využit (vzorce, odvozování, dokazování atd.) — dokonce není ani uveden vzorec pro korelační koeficient (pro přílišnou složitost?). Jeden ze základních a nejdůležitějších pojmů regulace — pojem zpětné vazby — je nedostatečně osvětlen a rozebrán (viz str. 21a str. 46 druhý odstavec). Úvahy na str. 56 ve třetím odstavci platí jedině za předpokladu nezávislosti činitelů. Mnohokrát se hovoří o Gaussově zákonu, nikde však není jasně řečeno, oč jde (viz str. 55, 61 a str. 75). Na str. 75 se dokonce hustotě normálního rozložení říká „teoretická četnost"! Na str. 77—80 jsou uváděny testy dobré shody, aniž je vysvětleno, co je vlastně rozumět pod pojmem statistického testu; nicméně testy jsou prováděny do číselných detailů. Velkým nedostatkem knihy je naprostá neujasněnost v předpokladech, kladených na čtenářovy znalosti. V první kapitole se autoři snaží vysvětlit nejzákladnější a nejjednodušší pojmy: pojem pravděpodobnosti, střední hodnoty, rozptylu atd. U čtenáře se tedy nepředpokládají ani nejzákladnější znalosti. Avšak *téměř ani jeden ze složitějších pojmů není definován, zaveden ani objasněn.* Uveďme některé příklady: str. 10 třetí odstavec shora pojem nezávislosti; str. 36 šestý řádek zdola — statistická závislost náhodných veličin; str. 37 vzorec (42) a str. 39 vzorec (45) — střední hodnoty byly definovány jen pro veličiny nabývající konečně mnoha hodnot; str. 37 druhý odstavec a str. 39 třetí odstavec — podmíněná střední hodnota; str. 45 druhý odstavec — diskretní náhodný proces; str. 49 druhý odstavec — diskrétní náhodná funkce a systém podmíněných distribučních funkcí; str. 52 výraz $M(Y/x^*)$ atd atd. Autoři tedy na druhé straně předpokládají znalosti tolika náročných pojmů, že čtenář vybavený těmito znalostmi určitě sáhne po nějaké solidnější knížce.

Přes všechny tyto výtky není možné uvedenou knížku zcela odsoudit. Dvě poslední kapitoly, pojednávající o statistických charakteristikách automatických výrobních procesů a o statistických charakteristikách výrobních linek přinášejí hodně zajímavého a podnětného materiálu, se kterým se jinde běžně nesetkáme a který má velký význam v aplikacích. Kromě toho je třeba zdůraznit, že uvedený materiál je podán dostupně a přitom dostatečně přesně, aby bylo možné vyložené metody zavádět přímo do praxe (nejde o pouhé přehledy nebo neúplné informace o metodách). Zdá se, že největší vadou knihy je nevyrovnanost jednotlivých kapitol, která vznikla patrně špatnou spoluprací autorského kolektivu. Místa, kde autoři neopouštějí původní záměr a vykládají užití statistiky nebo statistické dynamiky v hromadné výrobě, jsou napsána poměrně zajímavě a lze uvítat, že byla zpřístupněna českému čtenáři. Bohužel autoři se snaží zároveň vykládat i teorii pravděpodobnosti a z uvedených výtek je zřejmé, že se tím pustili na příliš tenký led. Otázka, zda a nakolik je v populární knížce únosné vykládat teoretické základy probírané látky je velmi obtížná a je zřejmé, že v této knížce nebyla vyřešena příliš šťastně.

Miloslav Nosal, Praha

H. Lenz: VORLESUNGEN ÜBER PROJEKTIVE GEOMETRIE (Prednášky o projektívnej geometrii), Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1965, strán 360, obrázkov 90.

Kniha obsahuje 11 kapitol.

I. *Základné pojmy projektívnej geometrie v rovine a v priestore.* Pod základnými pojmami sa rozumia predovšetkým pojmy projektívnej a afinnej roviny a priestoru, ich podpriestorov, súradníc, kolineácie a jej zvláštnych prípadov, Desarguesovej, Moufangovej a Fanovej roviny, harmonickej štvorice. Uvádzajú sa vzájomné vzťahy medzi týmito pojmami.

II. *Klasická syntetická geometria.* Zavádza sa pojem dvojpomeru štyroch kolineárnych bodov v projektívnej súradnicovej rovine nad komutatívnym telesom. Ďalej sa dokazuje známa Hessenbergova veta: Každá projektívna rovina, v ktorej platí Pappova veta, je desarguesovská. Ťažisko kapitoly spočíva na definícii kužeľosečky (Steinerovej a von Staudtovej) a s ňou súvisiacich pojmov polarity a korelácie. Napokon sa vyšetrujú projektívne zobrazenia kužeľosečiek.

III. *Zavedenie súradníc.* Zavádzajú sa súradnice v desarguesovských rovinách a v priestore.

IV. *Kolineácie a korelácie.* Vychádza sa z pojmu incidenčnej štruktúry a zo semilineárneho zobrazenia vektorových priestorov a dokazujú sa fundamentálne vety projektívnej geometrie. Ďalej sa študujú projektívne kolineácie a s tým súvisiace vlastnosti dvojpomeru. Pomocou semibilineárnych a bilineárnych foriem sa vyšetrujú niektoré vlastnosti korelácií a špeciálne polarít.

V. *Oddeľovanie a usporiadanie.* Ide najprv o reláciu oddeľovania a reláciu „medzi" za predpokladu platnosti Fanovej axiómy (podľa Spernera). V ďalšom sa tieto relácie zobecňujú.

VI. *Kvadriky v obyčajných projektívnych priestoroch.* Pod obyčajným projektívnym priestorom sa rozumie priestor konečnej dimenzie nad komutatívnym telesom charakteristiky $\neq 2$. Najprv sa definujú metrické vektorové priestory a ich ortogonálne bázy. V ďalšom sa vychádza z Wittovej vety a uvádza sa projektívna i afinná klasifikácia kvadrík.

VII. *Kvadratické formy a kvadriky nad špeciálnymi telesami.* Jedná sa najmä o konečné telesá, o p-adické číselné telesá a o racionálne číselné telesá. Napokon je dokázaná Bruck-Ryserova veta o existencii konečných projektívnych rovín.

VIII. *Ďalšie vety o kolineáciach a koreláciach.* Ide najmä o invariantné podpriestory, o normálne tvary zobrazení a o rozklady metrických vektorových priestorov.

IX. *Grupy kolineácií.* Vyšetrujú sa niektoré špeciálne grupy transformácií. Väčšina kapitoly je venovaná projektívne-metrickej geometrii, pričom sa uvádzajú aj základné vzťahy hyperbolickej trigonometrie. Napokon sa hovorí o Cliffordových rovnobežkách.

X. *Algebraické variety.* Ide o úvod do modernej teórie algebraických nadplôch a variet, špeciálne čiar v rovine.

XI. *Projektívne priestory s topologickou štruktúrou.* Stručný prehľad.

Autor je vynikajúcim odborníkom v projektívnej geometrii. Jeho kniha je veľmi dobrým úvodom do štúdia tejto disciplíny. Je písaná tak, že orientuje čitateľa v problematike, uvádza dosiaľ neriešené problémy, mnoho úloh na precvičenie a tam, kde nemôže ísť dostatočne do hĺbky, uvádza príslušnú literatúru.

Oproti podobným knihám (Baer, Pedoe, Hall) má jednak tú prednosť, že zahŕňa v sebe najnovšie výsledky prác v projektívnej geometrii, no aj tú, že používa analytickú aj syntetickú metódu. Ďalšia výhoda knihy je tá, že autor nepoužíva len strohý „matematický jazyk", ale hovorí niečo aj „okolo" zavádzaných pojmov.

Aj keď prakticky všetky používané pojmy sú v knihe definované, pre jej úspešné štúdium je žiadúce mať prehľad o základných algebraických štruktúrach a ich vlastnostiach a taktiež o klasickej projektívnej geometrii.

Kniha je veľmi dobre metodicky spracovaná a možno ju doporučiť všetkým tým, ktorí si chcú prehĺbiť vedomosti o projektívnej geometrii.

Václav Medek, Bratislava

A. Doneddu: COURS DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES. Tome 1: Algébre et Géométrie. Vydal Dunod, Paris 1966, stran 583, cena neudána.

V poslední době referoval Jan Vyšín v tomto časopise o dvou obsáhlých knihách francouzského autora A. Doneдduho.[1]) Obě zmíněné knihy tvoří část trilogie učebnic elementární matematiky, které jsou pokusem o modernisaci tradiční matematické látky. V této recensi si všimneme další knihy od téhož autora, která nepatří do zmíněné trilogie a je prvním dílem připravovaného dvoudílného cyklu. Podáme nejprve stručný přehled o obsahu knihy.

Dílo se skládá ze čtyř částí, jež jsou dále členěny celkem na 23 kapitol. V osmi kapitolách, které tvoří první část, se pojednává o množinách, relacích a funkcích a zavádí se pojem grupy, okruhu, oboru integrity a tělesa. Čtenář se též seznámí s tím, jak se v matematice rozšiřuje číselný obor od čísel přirozených až po čísla komplexní. Kapitola věnovaná kombinatorické analyse obsahuje v podstatě jen tradiční středoškolskou kombinatoriku, podanou ovšem z trochu modernějšího zorného úhlu. Jedna z kapitol první části je věnována geometrii (eukleidovské, afinní a metrické). Druhá část spisu se ve svých čtyřech kapitolách zabývá polynomy, jejich derivacemi, Taylorovým rozvojem a racionálními lomenými funkcemi. Část třetí o lineární algebře se dělí na sedm kapitol. Je tu výklad o vektorových prostorech, maticích, determinantech (i ve vztahu k řešení soustav lineárních rovnic) a charakteristických polynomech čtvercových matic. Závěrečná čtvrtá část pojednává ve svých čtyřech kapitolách o problémech geometrie afinní, metrické a projektivní z hlediska analytické geometrie. Čtenář se tu poučí o analytickém vyjádření přímky a roviny, o homogenních a barycentrických souřadnicích aj. Výklad končí kapitolou o kuželosečkách a geometrických místech bodů v rovině.

Z obsahu, který jsme stručně nastínili, je zřejmé, že se tento svazek na mnoha místech překrývá s oběma knihami téhož autora, jež v našem časopise byly zhodnoceny. Máme dojem, že tato nová kniha se hodí jako přehledná učebnice pro čtenáře, který buď současně studuje nebo již prostudoval speciální učebnice věnované jednotlivým disciplínám. K prvnímu studiu má však podle našeho názoru výklad příliš velkou šíři; dotýká se velmi mnohých problémů, ale dostatečně je nezkoumá a neprocvičí. Vždyť i z našeho stručného obsahu je vidět, jak zvolená tématika je obsáhlá a různorodá a nelze tedy ani čekat víc než nepříliš hluboký pohled s pokusem o moderní jednotící hledisko. Jsou tu cvičení, ale mnohá mají charakter pouze ilustrační a v některých se zavádějí i nové pojmy (cyklická grupa, kongruence aj.). Trochu nás na příklad překvapilo, že autor zavádí sice kartézský součin, ale nevyužívá jej při definici binární relace. Upozorňujeme též na nedopatření na str. 24; zde se při definici grafu funkce f s množinou vzorů E, ztotožňuje množina všech dvojic $(x, f(x))$, kde $x \in E$, s kartézským součinem $E \times f(E)$.

Jitka Kučerová a *Jiří Sedláček*, Praha

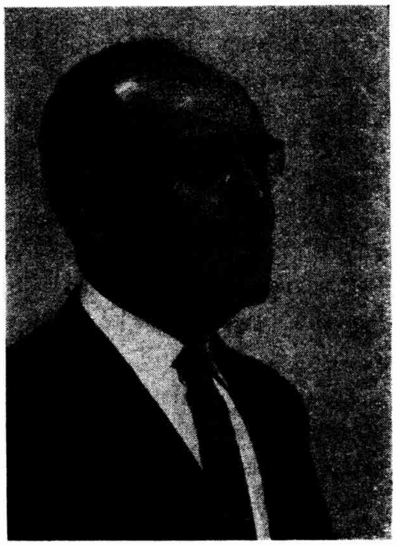
[1]) Časopis pro pěstování matematiky, roč. *89*, str. 336 a roč. *91*, str. 105.

ZPRÁVY

ŠEDESÁT LET DOC. RNDr. MIROSLAVA MENŠÍKA

KAREL DRÁBEK, Praha

Dne 3. srpna 1966 se dožívá šedesáti let dr. MIROSLAV MENŠÍK, docent deskriptivní geometrie na stavební fakultě Českého vysokého učení technického v Praze.



Miroslav Menšík se narodil v Praze a po absolvování vyšší české reálky v Praze na Starém Městě studoval v letech 1924—30 na vysoké škole strojního a elektrotechnického inženýrství při ČVUT a na přírodovědecké fakultě Karlovy university v Praze, kde v roce 1930 vykonal státní zkoušky z matematiky a deskriptivní geometrie. Ze zájmu o technické aplikace v dalších dvou letech 1930—31 studoval na (tehdejší) vysoké škole speciálních nauk oddělení zeměměřického inženýrství.

Od 1. 9. 1929, kdy se stal asistentem u prof. Kounovského v ústavu deskriptivní geometrie vysoké školy strojní a elektrotechnické, působí jako učitel na našich středních, průmyslových a vysokých školách. Zejména po květnu 1945 začíná převažovat učitelská činnost na vysokých školách. Zprvu vyučuje externě na fakultě architektury a pozemního stavitelství, pak na pedagogické fakultě Karlovy university a na zeměměřickém inženýrství. Na vysokou školu se vrátil od 1. 9. 1952, jako odborný asistent na fakutě architektury a pozemního stavitelství, na které byl na základě vědeckých a odborných prací jmenován od 1. 8. 1953 docentem deskriptivní geometrie.

Vzhledem k dlouholeté učitelské a odborné činnosti byl ministerstvem školství a kultury v září 1956 pověřen funkcí vedoucího redaktora Rozhledů matematicko-fyzikálních, odborného časopisu pro studující mládež, který po delší přestávce opět začal vycházet v roce 1957. Náklad tohoto časopisu, na jehož obsahu a přitažlivosti pro mládež má jistě nemalý podíl, se podařilo zvýšit z počátečních 600 na dnešních více než 11 000 výtisků. Plným právem proto bylo časopisu dne 17. 4. 1962 uděleno presidentem republiky vyznamenání Za zásluhy o výstavbu.

Doc. Menšík napsal řadu prací z lékařské statistiky a technického užití geometrie ve fotogrammetrii. Z tohoto oboru jako první absolvent Karlovy university v roce 1946 složil doktorát přírodních věd s vyznamenáním. Velmi závažná je však jeho činnost při vypracování učebnic deskriptivní geometrie pro průmyslové a všeobecně vzdělávací školy, které byly přeloženy též do slovenštiny, maďarštiny a ukrajinštiny. Také na vysoké škole spolupracoval při vydávání skript z deskriptivní geometrie a pomohl tak překlenout nedostatek učebnic z tohoto předmětu.

Za tuto publikační činnost bylo mu na 4. celostátním sjezdu JČMF v květnu 1965 uděleno vyznamenání I. stupně za pedagogickou práci. Jako člen ústředního výboru JČMF, ve kterém pracuje od roku 1939, byl v roce 1962 při oslavách 100. výročí založení Jednoty jmenován zasloužilým členem.

Doc. Menšík je neustále ve styku s praxí, neboť provádí fotogrammetrické zaměřování různých stavebních objektů. Velmi bohatá je též jeho přednášková činnost nejen v Československu, ale též v Německé demokratické republice (Drážďany), Maďarsku (Budapešť) a v Bulharsku (Sofia). Vede stále vědecký kroužek studentů z fotogrammetrie a téměř každý rok některý z účastníků přednáší výsledky své práce na celostátní konferenci vědeckých kroužků stavebních fakult.

Doc. Menšík je autorem velkého počtu učebnic, zvláště z deskriptivní geometrie, a dvaceti čtyř vědeckých a odborných článků s velmi různou problematikou (zeměměřictví, deskriptivní geometrie, lékařství, historie aj.).

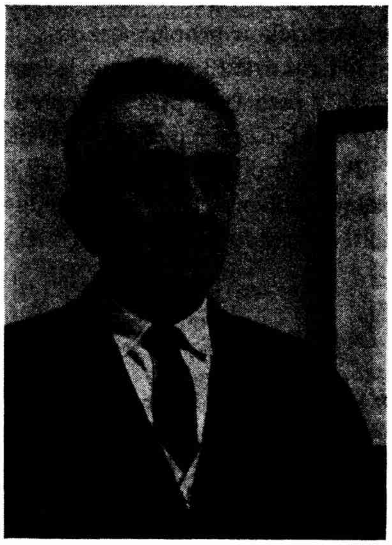
Doc. Menšík je velmi oblíbený u svých spolupracovníků pro své vědecké a odborné znalosti a u studentů pro jasný výklad, který spojuje teorii s praktickým zaměřením.

Přejeme jubilantovi do dalších let zachování dosavadní duševní pohody a mnoho úspěchů v tvůrčí vědecké i odborné práci.

ŠEDESÁT LET DOC. OTY SETZERA

KAREL DRÁBEK, Praha

V srpnu oslaví při pilné práci své šedesáté narozeniny další člen katedry matematiky a deskriptivní geometrie na stavební fakultě ČVUT v Praze, doc. OTA SETZER.



Narodil se 23. 8. 1906 v Praze-Žižkově. Po absolvování reálky v Praze-Holešovicích, kde maturoval s vyznamenáním v roce 1924, studoval na vysoké škole speciálních nauk matematiku s deskriptivní geometrií a pojistnou techniku (1924–26). Studia dokončil na přírodovědecké fakultě Karlovy university. Vykonal státní zkoušky z pojistné techniky (ČVUT), z pojistné matematiky a matematické statistiky a z matematiky a deskriptivní geometrie (KU).

Po aprobaci byl nejdříve výpomocným učitelem na ref. reálném gymnasiu a měšťanské škole, pak zatímním profesorem a od roku 1934 profesorem r. r. g. Dr. A. Dvořáka v Kralupech, kde v letech 1942–48 byl ředitelem. V době okupace se mu podařilo uchránit mnoho cenných předmětů a sbírek před zničením tím, že je ukryl ve svém domě. V období 1948–51 vyučoval na gymnasiu v Berouně a na průmyslové škole horní v Kladně. Odtud přešel 1. 9. 1951 jako odborný asistent na fakultu architektury a pozemního stavitelství ČVUT a na podkladě uveřejněných vědeckých a odborných prací a své dosavadní pedagogické činnosti byl dnem 1. 4. 1957 jmenován docentem deskriptivní geometrie na této fakultě.

Své bohaté pedagogické zkušenosti uplatňuje doc. Setzer nejen ve svých přednáškách a cvičeních pro studenty architektury a pozemního stavitelství, ale také při externí činnosti na jiných vysokých školách a střediscích dálkového studia. Zvlášť výrazně jich využívá ve funkci výkonného redaktora Rozhledů matematicko-fyzikálních, nositele vyznamenání „Za zásluhy o výstavbu socialismu", jíž byl pověřen v září 1956. Dík společné usilovné práci obou redaktorů a redakční rady se stal tento časopis u naší studující mládeže velmi oblíbený. Svědčí o tom stále se zvyšující náklad, ale zvlášť stoupající zájem řešitelů úloh o ceny, které jsou každoročně vypisovány. Právě na této úlohářské činnosti se doc. Setzer podílí nemalou měrou, neboť nejprve byl sám řešitelem a nyní je autorem řady zajímavých a vtipných úloh z matematiky a deskriptivní geometrie. Řídí celou soutěž o ceny v Rozhledech a dále se stará o zábavnost časopisu uváděním oddechových úloh a hříček. V úlohářské činnosti se uplatnil také v obdobném časopisu Archimedes, který je vydáván v Německé spolkové republice.

Do jeho učitelské činnosti spadá rovněž spolupráce s Universitou 17. listopadu, kde po řadu let působil při prázdninových soustředěních zahraničních studentů. Z těchto poznatků rovněž vyplynulo sepsání speciálního skripta z deskriptivní geometrie.

Je třeba se zmínit též o tom, že doc. Setzer i nadále pracuje v konstruktivní geometrii; všechny své výsledky, které přednesl při různých příležitostech u nás i v zahraničí (Drážďany, Varšava), však vždy nepublikoval. Je autorem řady skript a učebnic z deskriptivní geometrie a čtyřiadvaceti vědeckých a odborných článků s převážně geometrickou problematikou.

Od roku 1923 je členem Jednoty čs. matematiků a fyziků, v níž po zvolení do výboru v roce 1939 pracuje nepřetržitě v různých funkcích. Za tuto dlouholetou práci byl v r. 1962 jmenován při oslavách 100 let Jednoty jejím zasloužilým členem.

Přejeme doc. Setzerovi, který je u svých spolupracovníků na katedře i u studentů velmi oblíben nejen pro své pedagogické a odborné znalosti, ale též pro přímé a přátelské vystupování, do dalších let mnoho zdraví a úspěchů v práci.

JMENOVÁNÍ

K 1. říjnu 1965 jmenoval president republiky doc. dr. MICHAELA GREGUŠE, DrSc. a doc. dr. MILANA KOLIBIARA, DrSc. profesory pro obor matematiky na přírodovědecké fakultě University Komenského v Bratislavě.

OBHAJOBY A DISERTAČNÍ PRÁCE DOKTORŮ A KANDIDÁTŮ VĚD

Před *komisí pro obhajoby doktorských disertačních prací* obhájili dne 13. února 1966 dr. KAREL DRBOHLAV práci na téma: „K teorii kongruencí na komutativních pologrupách" a dne 7. března 1966 JINDŘICH NEČAS práci na téma: „Přímé metody v teorii eliptických rovnic."

Před *komisí pro obhajoby kandidátských disertačních prací* obhájil dne 17. března 1966 MIROSLAV KŘÍŽEK práci na téma: „Skupinové metody řešení soustavy lineárních algebraických rovnic."

PŘEDNÁŠKY A DISKUSE

pořádané JČMF, matematicko-fyzikální fakultou Karlovy university a Matematickým ústavem ČSAV v Praze

14. 2. 1966: *S. Kurepa* (Záhřeb): Roots of elements in Banach algebras.

4. 3. 1966: *K. Konda* (Tokio): Multidimensional picture in plasticity theory.

8. 3. 1966: *K. Konda* (Tokio): A pentration into the microscopic world by the geometry of higher space.

15. 3. 1966: *D. A. Buchsbaum* (Waltham): Some topics in the theory of categories.

Redakce

СОДЕРЖАНИЕ (РЕЗЮМЕ)

CONTENS OF SUMMARIES

STROJE NA ZPRACOVÁNÍ INFORMACÍ 12

Sborník — Editor: Miloslav Hampl

308 str. — obr. a tab. v textu — 3 sklád. příl. — rusky; anglicky, německy; anglický, český a ruský souhrn — brož. Kčs 28,50

Většina prací tohoto sborníku se zabývá problematikou návrhů a konstrukce číslicových počítačů nebo jejich využití. Několik prací je věnováno speciálním kybernetickým problémům. Z obsahu uvádíme:

K. Dykast, J. Valenta: A Transient in a Transistor-diode Logical Circuit. — S. Jura: Vyčislitěl'nyj metod opredelenija parametrov startstopnych sistem lentoprotjažnych mechanizmov — J. Kafka: A Finite-difference Analogue of the Quasi-stationary Electromagnetic Field — K. Korvasová: Mechanical Analysis of Source Language — J. Raichl: An Attempt to Simulate Some Simple Behaviours of Lowest Organisms on a Computer — D. Singer, V. Podzimek: Die boole'sche Formulierung von Rezepturen und die automatische Steuerung von Chargenbetrieben — K. Spiro: A Logical Model of Differentiation and Generalization in Learning — Vladimír Strejc: The Theory of the Synthesis of a Multi-parameter, Hybrid, Linear Control System Exposed to the Action of Stationary, Cross Correlated, Random Input Signals — S. Jura: The Theory and Design of the Rewind Equipment for the Recording Tape — J. Kolman: Some Characteristics of the Ferrite Core Memory with Two Wires Threading Each Core — J. Metz: Beschreibung digitaler Schaltungen — Z. Nenadál: Optimal Filtration and Prediction Using Digital Computers — M. Niedszyński, R. Solich: Vieletappen-Transportmodell und Methode seiner Lösung — M. Nováková: Loss of Significant Figures During the Multiplication of Approximative Values — E. Outrata: A Special Sorting Problem — J. Sedlák: Modelling Logical Delay Elements on a Computer — V. Vurcfeld: Proposal of the Quasi-optimal Control of a Linear System by Means of an Automatic Computer.

Objednávky zašlete na adresu:

Academia

nakladatelství Československé akademie věd

Vodičkova 40, Praha 1 - Nové Město

Časopis pro pěstování matematiky, Ročník *91* (1966). — Vydává Československá akademie věd v Academii, nakladatelství Československé akademie věd, Vodičkova 40, Praha 1 — Nové Město, dod. pú 1. — Redakce: Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1, dod. pú 1, telefon 226601-03. — Vychází čtvrtletně. — Roční předplatné Kčs 48,—, cena jednotl. sešitu 12,— Kčs (cena pro Československo); $ 8,—; £ 2/17/ — (cena v devisách). — Tiskne Knihtisk, n. p. závod 5, Rudé armády 171, Praha 8 — Libeň-Kobylisy, dod. pú 8. — Rozšiřuje Poštovní novinová služba, objednávky a předplatné přijímá PNS — Ústřední expedice tisku, administrace odborného tisku, Jindřišská 14, Praha 1. Lze také objednat u každé pošty nebo doručovatele. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice tisku, odd. vývoz tisku, Jindřišská 14, Praha 1.

Toto číslo vyšlo v srpnu 1966

A-14*61504

© Academia, nakladatelství Československé akademie věd 1966