Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

APPROXIMATIVE LÖSUNG DER FORMELN VON FRENET IM FALLE „KLEINER" QUOTIENDEN Q/P, R/P

VLADIMÍR PETRŮV, Praha

(Eingegangen am 4. Februar 1964)

In dieser Arbeit wird die Approximation der Lösung der Formeln von Frenet für Weltlinie gegeben und zwar in den Fällen, dass die Funktion $q = Q/P$, $r = R/P$ die Bedingungen $0 < q < \varepsilon_1$, $0 < r < \varepsilon_2$ oder $0 < q < \varepsilon$, $r = 0$ erfüllen. Es wird auch der Wert des Fehlers abgeschätzt.

Es wurde bewiesen:[1]) Sind die Funktionen P, Q, R stetig und nichtnegativ, die Funktion P positiv, dann bestimmen sie eine Weltlinie (eindeutig bis auf die Wahl des inertialen Systems), und zwar durch die ersten Funktionen i_1^α vier Lösungen der Formeln von Frenet, die gewisse Anfangsbedingungen erfüllen. Die Beschreibung der Weltlinie geben dann gleich die Gleichungen

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = i_1^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4). \tag{1}$$

Setzt man[2])

$$\sigma = \frac{1}{\mu c}\int_0^\tau P(\varrho)\, d\varrho\,, \tag{2}$$

$$q = \frac{Q}{P}\,, \quad r = \frac{R}{P}\,, \tag{3}$$

$$j_1^\alpha = \frac{1}{c}\, i_1^\alpha\,, \quad j_2^\alpha = i_2^\alpha\,, \quad j_3^\alpha = i_3^\alpha\,, \quad j_4^\alpha = i_4^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)\,, \tag{4}$$

bekommt man aus den Formeln von Frenet ein ainfacheres System von Differenzialgleichungen für die Funktionen j_1^α der Veränderlichen σ.[2])

Im Falle, dass $r = 0$ (d.i. $R = 0$) und die Funktion q positiv und stetig differenzierbar in gewissem Intervalle $I = \langle 0, a)$ $(0 < a \leqq +\infty)$ ist, ist dieses System der Glei-

[1]) siehe [1], [2].

[2]) siehe [3].

chung

$$(5)\qquad \frac{d^3 j_1^\alpha}{d\sigma^3} - \frac{q'}{q}\frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} + (q^2 - 1)\frac{d j_1^\alpha}{d\sigma} + \frac{q'}{q} j_1^\alpha = 0$$

equivalent und es gibt ein inertiales System (ein einziges bis auf die Wahl des Zeitraumkoordinatenursprunges) so, dass die Weltlinien, die der Funktion q entsprechen, mittels der Gleichungen (1), (4) im Intervalle durch die Lösungen j_1^α ($\alpha = 1, 2, 4$; $j_1^3 = 0$) der Gleichung (5), die die Anfangsbedingungen

$$(6)\qquad \begin{aligned} &j_1^1(0) = 0\,, \quad \frac{d j_1^1(0)}{d\sigma} = 1\,, \quad \frac{d^2 j_1^1(0)}{d\sigma^2} = 0\,,\\ &j_1^2(0) = 0\,, \quad \frac{d j_1^2(0)}{d\sigma} = 0\,, \quad \frac{d^2 j_1^2(0)}{d\sigma^2} = q(0)\,,\\ &j_1^4(0) = \frac{1}{c}\,, \quad \frac{d j_1^4(0)}{d\sigma} = 0\,, \quad \frac{d^2 j_1^4(0)}{d\sigma^2} = \frac{1}{c} \end{aligned}$$

erfüllen, bestimmt sind.

In allgemeinem Falle, wenn in gewissem Intervall $I = \langle 0, a)$ $(0 < a \leqq +\infty)$ die Funktionen q, r positiv sind und die Funktion q stetige Ableitung zweiter Ordnung und die Funktion r stetige Ableitung erster Ordnung hat, ist dieses System der Gleichung

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\frac{d^4 j_1^\alpha}{d\sigma^4} - \left(2\frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}\right)\frac{d^3 j_1^\alpha}{d\sigma^3} + \left[q^2 + r^2 - 1 - \frac{q''}{q} + \frac{q'}{q}\left(2\frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}\right)\right]\frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} +\\ &+ \left[q^2\left(\frac{q'}{q} - \frac{r'}{r}\right) + 2\frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}\right]\frac{d j_1^\alpha}{d\sigma} - \left[r^2 - \frac{q''}{q} + \frac{q'}{q}\left(2\frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}\right)\right] j_1^\alpha = 0 \end{aligned}$$

equivalent und es gibt ein inertiales System (ein einziges bis auf die Wahl des Zeitraumkoordinatenursprunges) so, dass die Weltlinien, die den Funktionen q, r entsprechen, mittels der Gleichungen (1), (4) im Intervall I durch die Lösungen der Gleichung (7), die die Anfangsbedingungen

$$(8)\qquad \begin{aligned} &j_1^1(0) = 0\,, \quad \frac{d j_1^1(0)}{d\sigma} = 1\,, \quad \frac{d^2 j_1^1(0)}{d\sigma^2} = 0\,, \quad \frac{d^3 j_1^1(0)}{d\sigma^3} = 1 - q^2(0)\,,\\ &j_1^2(0) = 0\,, \quad \frac{d j_1^2(0)}{d\sigma} = 0\,, \quad \frac{d^2 j_1^2(0)}{d\sigma^2} = q(0)\,, \quad \frac{d^3 j_1^2(0)}{d\sigma^3} = q'(0)\,,\\ &j_1^3(0) = 0\,, \quad \frac{d j_1^3(0)}{d\sigma} = 0\,, \quad \frac{d^2 j_1^3(0)}{d\sigma^2} = 0\,, \quad \frac{d^3 j_1^3(0)}{d\sigma^3} = q(0)\,r(0)\,,\\ &j_1^4(0) = \frac{1}{c}\,, \quad \frac{d j_1^4(0)}{d\sigma} = 0\,, \quad \frac{d^2 j_1^4(0)}{d\sigma^2} = \frac{1}{c}\,, \quad \frac{d^3 j_1^4(0)}{d\sigma^3} = 0 \end{aligned}$$

erfüllen, bestimmt sind.[3])

[3]) siehe [2].

Der Fall, dass die Funktionen q, r konstant sind, wurde schon gelöst.[4]) Studieren wir jetzt den Fall, dass die Funktionen q, r „klein“ sind (genauer: $q = \varepsilon_1 f$, $r = \varepsilon_2 g$, wo $|f| \leqq 1$, $|g| \lneqq 1$). Lässt man in diesem Falle in den Gleichungen (5), (7) die Glieder, die ε^2 enthalten, d.i. die Glieder mit q^2 und r^2, aus, bekommt man Differentialgleichungen, dessen Lössung sich höchstwahrscheinlich nicht viel von den Lösungen der Gleichungen (5), (7) unterscheiden wird. Die Untersuchung dieser Gleichungen ist der Inhalt dieses Artikels.

I. DER FALL $r = 0$

Ist $q = \varepsilon f$, $|f| \leqq 1$, bekommt man aus (5) die Gleichung

$$\frac{d^3 j_1^\alpha}{d\sigma^3} - \frac{f'}{f}\frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} + (\varepsilon^2 f^2 - 1)\frac{dj_1^\alpha}{d\sigma} + \frac{f'}{f} j_1^\alpha = 0\,.$$

Lässt man in dieser Gleichung das Gleid mit ε^2 aus, entsteht die Gleichung

$$\frac{d^3 j_1^\alpha}{d\sigma^3} - \frac{f'}{f}\frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} - \frac{dj_1^\alpha}{d\sigma} + \frac{f'}{f} j_1^\alpha = 0\,,$$

d.i. die Gleichung

$$\text{(9)} \qquad \frac{d^3 j_1^\alpha}{d\sigma^3} - \frac{q'}{q}\frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} - \frac{dj_1^\alpha}{d\sigma} + \frac{q'}{q} j_1^\alpha = 0\,.$$

Lösen wir diese Gleichung. Wir bringen sie zu der Form

$$\text{(10)} \qquad \left(\frac{d}{d\sigma} - \frac{q'}{q}\right)\left(\frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} - j_1^\alpha\right) = 0\,.$$

Wir setzen

$$\frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} - j_1^\alpha = u^\alpha$$

und lösen zuerst die Gleichung

$$\frac{du^\alpha}{d\sigma} - \frac{q'}{q} u^\alpha = 0\,.$$

Wir bekommen (C^α beliebige Konstante)

$$u^\alpha = C^\alpha q\,.$$

Die Gleichung (10) ist dann und nur dann erfüllt, wenn

$$\frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} - j_1^\alpha = C^\alpha q\,.$$

[4]) sihe [3].

Lösen wir jetzt diese Gleichung. Das Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung bilden z.B. die Funktionen $\sinh\sigma$, $\cosh\sigma$ und die Lösung der nichthomogenen Gleichung bekommt man durch Variation der Konstanten:

$$j_1^\alpha(\sigma) = D_1^\alpha(\sigma)\sinh\sigma + D_2^\alpha(\sigma)\cosh\sigma\,.$$

Für Ableitungen der Funktionen D_1^α, D_2^α bekommt man Bedingungen

$$\frac{\mathrm{d}D_1^\alpha(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}\sinh\sigma + \frac{\mathrm{d}D_2^\alpha(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}\cosh\sigma = 0\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}D_1^\alpha(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}\cosh\sigma + \frac{\mathrm{d}D_2^\alpha(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}\sinh\sigma = C^\alpha q(\sigma)\,,$$

aus welchen folgt

$$\frac{\mathrm{d}D_1^\alpha(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma} = C^\alpha q(\sigma)\cosh\sigma\,,\quad \frac{\mathrm{d}D_2^\alpha(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma} = -\,C^\alpha q(\sigma)\sinh\sigma\,;$$

eine Lösung der nichthomogenen Gleichung ist also

$$j_1^\alpha(\sigma) = \sinh\sigma\,.\int_0^\sigma C^\alpha q(\varrho)\cosh\varrho\,\mathrm{d}\varrho - \cosh\sigma\,.\int_0^\sigma C^\alpha q(\varrho)\sinh\varrho\,\mathrm{d}\varrho =$$
$$= C^\alpha\int_0^\sigma(\sinh\sigma\cosh\varrho - \sinh\varrho\cosh\sigma)\,q(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho = C^\alpha\int_0^\sigma q(\varrho)\sinh(\sigma-\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\,.$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (9) ist dann

$$(11)\qquad j_1^\alpha(\sigma) = A^\alpha\sinh\sigma + B^\alpha\cosh\sigma + C^\alpha\int_0^\sigma q(\varrho)\sinh(\sigma-\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\,,$$

wo A^α, B^α, C^α beliebige Konstanten sind.

Wir werden jetzt die Konstanten A^α, B^α, C^α $(\alpha = 1, 2, 4)$ so wählen, damit die Anfangsbedingungen (6) erfüllt wurden. Weil die Funktionen $\sinh\sigma$, $\cosh\sigma$, $\int_0^\sigma q(\varrho)\sinh(\sigma-\varrho)\,\mathrm{d}\varrho$ der Reihe nach die Anfangsbedingungen $0, 1, 0$; $1, 0, 1$; $0, 0, q(0)$ (der Wert der Funktion, der ersten und der zweiten Ableitung für $\sigma = 0$) erfüllen, sieht man, dass man

$$A^4 = C^4 = 0\,,\quad B^4 = \frac{1}{c}\,;\quad A^1 = C^1 = 0\,,\quad B^1 = 1\,;\quad A^2 = B^2 = 0\,,\quad C^2 = 1$$

nehmen muss. Man bekommt so aus (11)

$$(12)\qquad j_1^1(\sigma) = \sinh\sigma\,,\quad j_1^2(\sigma) = \int_0^\sigma q(\varrho)\sinh(\sigma-\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\,,\quad j_1^4(\sigma) = \frac{1}{c}\cosh\sigma\,.$$

Um zu erfahren, wie viel sich die Funktionen (12) von den Lösungen der Gleichung (5), die die Anfangsbedingungen (6) erfüllen, unterscheiden, schätzen wir allgemein die Differenz zwischen der Lösung j_1^α der Gleichung (5) und der Lösung k_1^α der Gleichung

$$\frac{d^3 k_1^\alpha}{d\sigma} - \frac{q'}{q}\frac{d^2 k_1^\alpha}{d\sigma^2} - \frac{dk_1^\alpha}{d\sigma} + \frac{q'}{q} k_1^\alpha = 0 \tag{13}$$

ab, und zwar unter der Voraussetzung, dass die Funktionen j_1^α und k_1^α dieselben Anfangsbedingungen erfüllen, d.i.

$$j_1^\alpha(0) = k_1^\alpha(0)\,; \quad \frac{dj_1^\alpha(0)}{d\sigma} = \frac{dk_1^\alpha(0)}{d\sigma}\,, \quad \frac{d^2 j_1^\alpha(0)}{d\sigma^2} = \frac{d^2 k_1^\alpha(0)}{d\sigma^2}\,. \tag{14}$$

Wir wissen schon,[5]) dass die Gleichung (5) dem System

$$\frac{dj_1^\alpha}{d\sigma} = j_2^\alpha\,, \quad \frac{dj_2^\alpha}{d\sigma} = j_1^\alpha + q j_3^\alpha\,, \quad \frac{dj_3^\alpha}{d\sigma} = -\,q j_2^\alpha \tag{15}$$

equivalent ist. Wir wollen ein ähnliches System finden, das der Gleichung (13) equivalent wäre. Zu diesem Zweck definieren wir die Funktionen k_2^α, k_3^α durch die Gleichungen

$$\frac{dk_1^\alpha}{d\sigma} = k_2^\alpha\,, \quad \frac{dk_2^\alpha}{d\sigma} = k_1^\alpha + q k_3^\alpha\,. \tag{16}$$

Wenn man die letzte Gleichung differenziert, hat man

$$\frac{d^2 k_2^\alpha}{d\sigma^2} = \frac{dk_1^\alpha}{d\sigma} + q' k_3^\alpha + q\frac{dk_3^\alpha}{d\sigma}$$

und von da mittels der Gleichungen (16)

$$\frac{d^3 k_1^\alpha}{d\sigma^3} - \frac{dk_1^\alpha}{d\sigma} - \frac{q'}{q}\left(\frac{d^2 k_1^\alpha}{d\sigma^2} - k_1^\alpha\right) = q\frac{dk_3^\alpha}{d\sigma}\,.$$

Weil q positiv ist, ist also die Gleichung (13) der Gleichung

$$\frac{dk_3^\alpha}{d\sigma} = 0 \tag{17}$$

equivalent. Aus den Gleichungen (16) und (17) bekommt man also ein System der Differenzialgleichungen

$$\frac{dk_1^\alpha}{d\sigma} = k_2^\alpha\,, \quad \frac{dk_2^\alpha}{d\sigma} = k_1^\alpha + q k_3^\alpha\,, \quad \frac{dk_3^\alpha}{d\sigma} = 0\,, \tag{18}$$

das der Gleichung (13) equivalent ist.

---

[5]) siehe [3].

Die Lösung j_1^α der Gleichung (5) entspricht der Lösung $j_1^\alpha, j_2^\alpha, j_3^\alpha$ des Systems (15) und die Lösung k_1^α der Gleichung (13) entspricht der Lösung $k_1^\alpha, k_2^\alpha, k_3^\alpha$ des Systems (18). Aus der Gleichung (14) und den ersten zwei Gleichungen der Systeme (15) und (18) folgt gleich, dass diese Lösungen wieder dieselben Anfangsbedingungen

$$j_l^\alpha(0) = k_l^\alpha(0) \quad (l = 1, 2, 3) \tag{19}$$

erfüllen.

Wir schätzen jetzt die Differenz $k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma)$ für festes $\sigma \in (0, a)$ ab. Nach dem Mittelwertsatz ist

$$k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma) = (k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma)) - (k_1^\alpha(0) - j_1^\alpha(0)) = \sigma \left[\frac{d}{d\sigma}(k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma))\right]_{\sigma=\bar{\sigma}},$$

wo $0 < \bar{\sigma} < \sigma$ ist. Aus den ersten zwei Gleichungen in (15) und (18) bekommt man

$$k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma) = \sigma(k_2^\alpha(\bar{\sigma}) - j_2^\alpha(\bar{\sigma}))\,. \tag{20}$$

Schätzen wir ähnlich die Differenz $k_2^\alpha(\sigma) - j_2^\alpha(\sigma)$ für $\sigma \in (0, \bar{\sigma}\rangle$ ab:

$$k_2^\alpha(\sigma) - j_2^\alpha(\sigma) = \sigma\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}(k_2^\alpha(\sigma) - j_2^\alpha(\sigma))\right]_{\sigma=\sigma_1},$$

wo $0 < \sigma_1 < \sigma$, was wegen den zweiten Gleichungen in (15), (18) gibt

$$k_2^\alpha(\sigma) - j_2^\alpha(\sigma) = \sigma[k_1^\alpha(\sigma_1) - j_1^\alpha(\sigma_1) + q(\sigma_1)(k_3^\alpha(\sigma_1) - j_3^\alpha(\sigma_1))]\,.$$

Daraus, weil $q \leqq \varepsilon$ ist, folgt

$$|k_2^\alpha(\sigma) - j_2^\alpha(\sigma)| \leqq \sigma(|k_1^\alpha(\sigma_1) - j_1^\alpha(\sigma_1)| + \varepsilon|k_3^\alpha(\sigma_1) - j_3^\alpha(\sigma_1)|)\,.$$

Wegen der Bedingung (19) bekommt man durch nochmaliges Benützen des Mittelwertsatzes und der ersten und dritten Gleichung in (15), (18)

$$\begin{aligned}
|k_2^\alpha(\sigma) - j_2^\alpha(\sigma)| &\leqq \sigma\sigma_1(|k_2^\alpha(\sigma_2) - j_2^\alpha(\sigma_2)| + \varepsilon|q(\sigma_3)\,j_2^\alpha(\sigma_3)|) = \\
&= \sigma\sigma_1(|k_2^\alpha(\sigma_2) - j_2^\alpha(\sigma_2)| + \varepsilon^2|k_2^\alpha(\sigma_3) - (k_2^\alpha(\sigma_3) - j_2^\alpha(\sigma_3))|) \leqq \\
&\leqq \sigma\sigma_1(\varepsilon^2|k_2^\alpha(\sigma_3)| + |k_2^\alpha(\sigma_2) - j_2^\alpha(\sigma_2)| + \varepsilon^2|k_2^\alpha(\sigma_3) - j_2^\alpha(\sigma_3)|),
\end{aligned}$$

wo $0 < \sigma_2 < \sigma_1$, $0 < \sigma_3 < \sigma_1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man voraussetzen, dass z.B. $|k_2^\alpha(\sigma_2) - j_2^\alpha(\sigma_2)| \geqq |k_2^\alpha(\sigma_3) - j_2^\alpha(\sigma_3)|$, wegen $\sigma_1 < \sigma$ bekommt man so

$$|k_2^\alpha(\sigma) - j_2^\alpha(\sigma)| \leqq \sigma^2(\varepsilon^2|k_2^\alpha(\sigma_3)| + (1 + \varepsilon^2)\,|k_2^\alpha(\sigma_2) - j_2^\alpha(\sigma_2)|)\,.$$

Im Intervall $\langle 0, \bar{\sigma}\rangle$ ist die Funktion k_2^α beschränkt: $|k_2^\alpha(\sigma)| \leqq K$ für $0 \leqq \sigma \leqq \bar{\sigma}$. Man hat so die Abschätzung: Zu jedem $\sigma \in (0, \bar{\sigma}\rangle$ gibt es ein σ_0, $0 < \sigma_0 < \sigma$ so, dass

$$|k_2^\alpha(\sigma) - j_2^\alpha(\sigma)| \leqq \sigma^2[K\varepsilon^2 + (1 + \varepsilon^2)\,|k_2^\alpha(\sigma_0) - j_2^\alpha(\sigma_0)|]\,. \tag{21}$$

Aus den Gleichungen (20), (21) folgt: Zu jedem $\sigma \in (0, a)$ gibt es ein σ_0, $0 < \sigma_0 < \sigma$ so, dass

$$|k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma)| \leqq \sigma^3[K\varepsilon^2 + (1 + \varepsilon^2)\,|k_2^\alpha(\sigma_0) - j_2^\alpha(\sigma_0)|]\,. \tag{22}$$

Wir werden jetzt diese Behauptung beweisen: Zu jedem n ($n = 1, 2, \ldots$) gibt es ein σ_n, $0 < \sigma_n < \bar{\sigma}$ so, dass

$$\begin{gathered}|k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma)| \leqq \\ \leqq \sigma^3[K\varepsilon^2 \sum_{l=0}^{n-1} (1 + \varepsilon^2)^l \sigma^{2l} + (1 + \varepsilon^2)^n \sigma^{2(n-1)}\,|k_2^\alpha(\sigma_n) - j_2^\alpha(\sigma_n)|]\,.\end{gathered} \tag{23}$$

Beweis durch Induktion nach n: Für $n = 1$ folgt (23) gleich aus (22), wenn man sich noch erinnert, dass $\sigma_0 < \bar{\sigma}$ ist und wenn man σ_1 statt σ_0 schreibt. Es soll jetzt (23) für den Wert n gültig sein. Auf der rechten Seite auftretenden Ausdruck $|k_2^\alpha(\sigma_n) - j_2^\alpha(\sigma_n)|$ kann man nach (21) abschätzen, es ist also

$$\begin{gathered}|k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma)| \leqq \sigma^3[K\varepsilon^2 \sum_{l=0}^{n-1} (1 + \varepsilon^2)^l \sigma^{2l} + (1 + \varepsilon^2)^n \sigma^{2n} K\varepsilon^2 + \\ + (1 + \varepsilon^2)^{n+1} \sigma^{2n} |k_2^\alpha(\sigma_0) - j_2^\alpha(\sigma_0)|]\,,\end{gathered}$$

was, wenn man $\sigma_{n+1} = \sigma_0$ schreibt, gerade die Ungleichung (23) für den Wert $n + 1$ ist.

Bezeichnet man $C = \max_{\sigma \in \langle 0, \bar{\sigma} \rangle} |k_2^\alpha(\sigma) - j_2^\alpha(\sigma)|$, dann ist

$$(1 + \varepsilon^2)^n \sigma^{2(n-1)}\,|k_2^\alpha(\sigma_n) - j_2^\alpha(\sigma_n)| \leqq C(1 + \varepsilon^2)^n \sigma^{2(n-1)}$$

und die rechte Seite dieser Ungleichung konvergiert für $n \to +\infty$ zur Null, wenn $(1 + \varepsilon^2)\,\sigma^2 < 1$ ist, d.i. wenn

$$|\sigma| < \frac{1}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2)}}\,. \tag{24}$$

Nimmt man in (23) den Grenzwert für $n \to +\infty$, hat man

$$|k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma)| \leqq K\varepsilon^2\sigma^3 \sum_{l=0}^{+\infty} (1 + \varepsilon^2)^l \sigma^{2l} = \frac{K\varepsilon^2\sigma^3}{1 - (1 + \varepsilon^2)\,\sigma^2}\,.$$

Wir haben so folgende Sätze bewiesen:

Satz 1. *Im Intervall $I = \langle 0, a)$ $(0 < a \leqq +\infty)$ soll die Funktion q positiv und stetig differenzierbar sein und es soll $q \leqq \varepsilon$ gelten. Es mag j_1^α eine Lösung der Gleichung (5) und k_1^α eine Lösung der Gleichung (13) im Intervall I bezeichnen und diese Lösungen sollen dieselben Anfangsbedingungen (14) erfüllen. Bezeichnen wir*

$$J = I \cap \langle 0, (1 + \varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}})\,, \quad K = \sup_{\sigma \in J} \left|\frac{\mathrm{d}k_1^\alpha(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}\right|.$$

Es gilt dann für alle $\sigma \in J$ die Ungleichung

$$(25) \qquad |k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma)| \leqq \frac{K\varepsilon^2\sigma^3}{1 - (1 + \varepsilon^2)\sigma^2}.$$

Bemerkung. Sucht man eine Lösung k_1^α, dessen Differenz von der genauen Lösung j_1^α kleiner als $\eta > 0$ sein soll, bekommt man aus (25) nach und nach

$$\frac{K\varepsilon^2\sigma^3}{1 - (1 + \varepsilon^2)\,\sigma^2} < \eta\,, \quad K\varepsilon^2\sigma^3 + (1 + \varepsilon^2)\,\sigma^2\eta < \eta\,;$$

weil $J \subset \langle 0, 1)$ ist, ist $\sigma^3 < \sigma^2$ und die letzte Ungleichung wird sicher erfüllt, wenn

$$K\varepsilon^2\sigma^2 + (1 + \varepsilon^2)\,\sigma^2\eta < \eta$$

d.i.

$$(26) \qquad |\sigma| < \frac{1}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2 + (K/\eta)\varepsilon^2)}}.$$

Für $\sigma \geqq 0$, die die Bedingung (26) erfüllen, gilt dann

$$|j_1^\alpha(\sigma) - k_1^\alpha(\sigma)| < \eta\,.$$

Satz 2. *Im Intervall $I = \langle 0, a)$ $(0 < a \leqq +\infty)$ soll die Funktion q positiv und stetig differenzierbar sein und es soll $0 < q \leqq \varepsilon$ gelten. Es soll $r = 0$ sein. Dann gibt es ein inertiales System so, dass die Funktionen $j_1^1, j_1^2, j_1^3 = 0, j_1^4$, die in diesem System den Weltlinien, die der Funktion q entsprechen, angehören, sind approximativ gleich den Funktionen*:

$$j_1^1(\sigma) \cong \sinh\sigma\,,\; j_1^2(\sigma) \cong \int_0^\sigma q(\varrho)\sinh(\sigma - \varrho)\,d\varrho\,,\; j_1^4(\sigma) \cong \frac{1}{c}\cosh\sigma\,.$$

Die Grösse des Fehlers schätzt der Satz 1 ab.

Bemerkung. Nach (1)–(3), (25) kann man auf Grund dieser Sätze die approximative Beschreibung der Weltlinie mit der Abschätzung des Fehlers bekommen.

II. DER FALL $r > 0$

Ist $q = \varepsilon_1 b$, $|f| \leqq 1$, $r = \varepsilon_2 g$, $|g| \leqq 1$, bekommt man aus (7) die Gleichung

$$\frac{d^4 j_1^\alpha}{d\sigma^4} - \left(2\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\right)\frac{d^3 j_1^\alpha}{d\sigma^3} + \left[(\varepsilon_1^2 f^2 + \varepsilon_2^2 g^2) - 1 - \frac{f''}{f} + \frac{f'}{f}\left(2\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\right)\right]\frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} +$$
$$+ \left[\varepsilon_1^2 f^2\left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right) + 2\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\right]\frac{d j_1^\alpha}{d\sigma} - \left[\varepsilon_2^2 g^2 - \frac{f''}{f} + \frac{f'}{f}\left(2\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\right)\right] j_1^\alpha = 0\,.$$

Lässt man in dieser Gleichung die Glieder mit $\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2$ weg, entsteht die Gleichung

$$\frac{d^4 j_1^\alpha}{d\sigma^4} - \left(2\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\right)\frac{d^3 j_1^\alpha}{d\sigma^3} - \left[1 + \frac{f''}{f} - \frac{f'}{f}\left(2\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\right)\right]\frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} +$$
$$+ \left(2\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\right)\frac{dj_1^\alpha}{d\sigma} + \left[\frac{f''}{f} - \frac{f'}{f}\left(2\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\right)\right] j_1^\alpha = 0,$$

d.i. die Gleichung

$$\frac{d^4 j_1^\alpha}{d\sigma^4} - \left(2\frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}\right)\frac{d^3 j_1^\alpha}{d\sigma^3} - \left[1 + \frac{q''}{q} - \frac{q'}{q}\left(2\frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}\right)\right]\frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} +$$
$$+ \left(2\frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}\right)\frac{dj_1^\alpha}{d\sigma} + \left[\frac{q''}{q} - \frac{q'}{q}\left(2\frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}\right)\right] j_1^\alpha = 0. \tag{27}$$

Lösen wir diese Gleichung. Man kann sie leicht auf die Form

$$\left\{\frac{d^2}{d\sigma^2} - \left(2\frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}\right)\frac{d}{d\sigma} - \left[\frac{q''}{q} - \frac{q'}{q}\left(2\frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}\right)\right]\right\}\left(\frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} - j_1^\alpha\right) = 0 \tag{28}$$

bringen. Wir setzen

$$\frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} - j_1^\alpha = u^\alpha$$

und lösen zuerst die Gleichung

$$\frac{d^2 u^\alpha}{d\sigma^2} - \left(2\frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}\right)\frac{du^\alpha}{d\sigma} - \left[\frac{q''}{q} - \frac{q'}{q}\left(2\frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}\right)\right] u^\alpha = 0. \tag{29}$$

Versucht man $u^\alpha = q$ zu legen, sieht man, dass die Funktion q eine Lösung der Gleichung (29) ist. Durch Substitution $u^\alpha = qz^\alpha$ erniedrigt man den Rang der Gleichung (29). Man bekommt so die Gleichung

$$\frac{d^2 z^d}{d\sigma^2} - \frac{r'}{r}\frac{dz^\alpha}{d\sigma} = 0,$$

woraus (C^α, D^α beliebige Konstanten)

$$z^\alpha(\sigma) = C^\alpha + D^\alpha \int_0^\sigma r(\varrho)\, d\varrho\,;$$

also die allgemeine Lösung der Gleichung (29) ist

$$u^\alpha(\sigma) = C^\alpha q(\sigma) + D^\alpha q(\sigma) \int_0^\sigma r(\varrho)\, d\varrho\,.$$

Die Gleichung (28) ist dann und nur dann erfüllt, wenn gilt

$$\frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} - j_1^\alpha = C^\alpha q(\sigma) + D^\alpha q(\sigma) \int_0^\sigma r(\varrho)\, d\varrho\,. \tag{30}$$

Bezeichnen wir einfachheithalber

$$r_0(\sigma) = \int_0^\sigma r(\varrho)\, d\varrho\,. \tag{31}$$

Ganz ähnlich wie im Falle I. bekommt man, dass die allgemeine Lösung der Gleichung (30) und also auch die allgemeine Lösung der Gleichung (27) durch die Gleichung

$$\begin{aligned} j_1^\alpha(\sigma) &= A^\alpha \sinh\sigma + B^\alpha \cosh\sigma + \\ &+ C^\alpha \int_0^\sigma q(\varrho) \sinh(\sigma - \varrho)\, d\varrho + D^\alpha \int_0^\sigma q(\varrho)\, r_0(\varrho) \sinh(\sigma - \varrho)\, d\varrho \end{aligned} \tag{32}$$

gegeben ist.

Wir werden jetzt die Konstanten A^α, B^α, C^α, D^α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) so wählen, damit die Anfangsbedingungen (8) erfüllt wurden. Weil die Funktionen $\sinh\sigma$, $\cosh\sigma$, $\int_0^\sigma q(\varrho)\sinh(\sigma-\varrho)\,d\varrho$, $\int_0^\sigma q(\varrho)\,r_0(\varrho)\sinh(\sigma-\varrho)\,d\varrho$ der Reihe nach die Anfangsbedingungen: $0, 1, 0, 1$; $1, 0, 1, 0$; $0, 0, q(0), q'(0)$; $0, 0, 0, q(0)\,r(0)$ (der Wert der Funktion, der ersten, zweiten und dritten Ableitung für $\sigma = 0$) erfüllen, sieht man, dass man

$$A^1 = 1\,,\quad B^1 = C^1 = 0\,,\quad D^1 = -\frac{q(0)}{r(0)}\,;\quad A^2 = B^2 = D^2 = 0\,,\quad C^2 = 1\,;$$

$$A^3 = B^3 = C^3 = 0\,,\quad D^3 = 1\,;\qquad B^4 = \frac{1}{c}\,,\quad A^4 = C^4 = D^4 = 0$$

wählen muss. Aus (32) folgt dann:

$$\begin{aligned} j_1^1(\sigma) &= \sinh\sigma - \frac{q(0)}{r(0)} \int_0^\sigma q(\varrho)\sinh(\sigma-\varrho)\, d\varrho\,, \\ j_1^2(\sigma) &= \int_0^\sigma q(\varrho)\sinh(\sigma-\varrho)\, d\varrho\,, \\ j_1^3(\sigma) &= \int_0^\sigma (q(\varrho) \int_0^\varrho r(\mu)\, d\mu \sinh(\sigma-\varrho)\, d\varrho\,, \\ j_1^4(\sigma) &= \frac{1}{c}\cosh\sigma\,. \end{aligned} \tag{33}$$

Um wieder abzuschätzen, um wie viel sich die Funktionen (33) von den Lösungen der Gleichung (7), die die Anfangsbedingungen (8) erfüllen, unterscheiden, schätzen wir wieder allgemein die Differenz zwischen der Lösung j_1^α der Gleichung (7) und der

Lösung k_1^α der Gleichung

$$(34)\qquad \frac{d^4k_1^\alpha}{d\sigma^4}-\left(2\frac{q'}{q}+\frac{r'}{r}\right)\frac{d^3k_1^\alpha}{d\sigma^3}-\left[1+\frac{q''}{q}-\frac{q'}{q}\left(2\frac{q'}{q}+\frac{r'}{r}\right)\right]\frac{d^2k_1^\alpha}{d\sigma^2}+$$
$$+\left(2\frac{q'}{q}+\frac{r'}{r}\right)\frac{dk_1^\alpha}{d\sigma}+\left[\frac{q''}{q}-\frac{q'}{q}\left(2\frac{q'}{q}+\frac{r'}{r}\right)\right]k_1^\alpha=0$$

ab, und zwar unter der Voraussetzung, dass j_1^α und k_1^α dieselben Anfangsbedingungen erfüllen, d.i.

$$(35)\quad j_1^\alpha(0)=k_1^\alpha(0),\quad \frac{dj_1^\alpha(0)}{d\sigma}=\frac{dk_1^\alpha(0)}{d\sigma},\quad \frac{d^2j_1^\alpha(0)}{d\sigma^2}=\frac{d^2k_1^\alpha(0)}{d\sigma^2},\quad \frac{d^3j_1^\alpha(0)}{d\sigma^3}=\frac{d^3k_1^\alpha(0)}{d\sigma^3}.$$

Man weisst[6]), dass die Gleichung (7) dem System

$$(36)\qquad \frac{dj_1^\alpha}{d\sigma}=j_2^\alpha,\quad \frac{dj_2^\alpha}{d\sigma}=j_1^\alpha+qj_3^\alpha,\quad \frac{dj_3^\alpha}{d\sigma}=-qj_2^\alpha+rj_4^\alpha,\quad \frac{dj_4^\alpha}{d\sigma}=-rj_3^\alpha$$

equivalent ist. Wir wollen jetzt ein ähnliches System, das der Gleichung (34) equivalent wäre, finden. Zu diesem Zweck definieren wir die Funktionen k_2^α, k_3^α, k_4^α durch die Gleichungen

$$(37)\qquad \frac{dk_1^\alpha}{d\sigma}=k_2^\alpha,\quad \frac{dk_2^\alpha}{d\sigma}=k_1^\alpha+qk_3^\alpha,\quad \frac{dk_3^\alpha}{d\sigma}=rk_4^\alpha.$$

Differenziert man die letzte Gleichung, bekommt man nach und nach wegen der Gleichungen (37) und den Gleichungen, die aus ihnen durch Differenzieren folgen

$$\frac{d^2k_3^\alpha}{d\sigma^2}=r'k_4^\alpha+r\frac{dk_4^\alpha}{d\sigma},$$

$$r^2\frac{dk_4^\alpha}{d\sigma}=r\frac{d^2k_3^\alpha}{d\sigma}-r'\frac{dk_3^\alpha}{d\sigma},$$

$$qr^2\frac{dk_4^\alpha}{d\sigma}=r\frac{d^3k_2^\alpha}{d\sigma^3}-r\frac{d^2k_1^\alpha}{d\sigma^2}-q''rk_3^\alpha-(2q'r+qr')\frac{dk_3^\alpha}{d\sigma},$$

$$q^2r^2\frac{dk_4^\alpha}{d\sigma}=qr\frac{d^4k_1^\alpha}{d\sigma^4}-qr\frac{d^2k_1^\alpha}{d\sigma^2}-(2q'r+qr')\left(\frac{d^2k_2^\alpha}{d\sigma^2}-\frac{dk_1^\alpha}{d\sigma}\right)+$$
$$+[q'(2q'r+qr')-qq''r]\,k_3^\alpha,$$

$$q^3r^2\frac{dk_4^\alpha}{d\sigma}=q^2r\frac{d^4k_1^\alpha}{d\sigma^4}-q(2q'r+qr')\frac{d^3k_1^\alpha}{d\sigma^3}-$$
$$-[q^2r+qq''r-q'(2q'r+qr')]\frac{d^2k_1^\alpha}{d\sigma^2}+$$
$$+(2q'r+qr')\frac{dk_1^\alpha}{d\sigma}+[qq''r-q'(2q'r+qr')]\,k_1^\alpha.$$

[6]) siehe [3].

Dividiert man die letzte Gleichung durch $q^2 r$, sieht man, dass ihre rechte Seite der linken Seite der Gleichung (34) gleich ist. Es ist also die Gleichung (34) der Gleichung

$$\frac{dk_4^\alpha}{d\sigma} = 0 \tag{38}$$

equivalent. Aus den Gleichungen (37), (38) bekommt man so das System der Differenzialgleichungen

$$\frac{dk_1^\alpha}{d\sigma} = k_2^\alpha\,, \quad \frac{dk_2^\alpha}{d\sigma} = k_1^\alpha + qk_3^\alpha\,, \quad \frac{dk_3^\alpha}{d\sigma} = rk_4^\alpha\,, \quad \frac{dk_4^\alpha}{d\sigma} = 0, \tag{39}$$

das der Gleichung (34) equivalent ist.

Der Lösung j_1^α der Gleichung (7) entspricht eine Lösung $j_1^\alpha, j_2^\alpha, j_3^\alpha, j_4^\alpha$ des Systems (36) und der Lösung k_1^α der Gleichung (34) entspricht eine Lösung k_1^α, k_2^α, k_3^α, k_4^α des Systems (39). Aus der Gleichung (35) und aus den ersten drei Gleichungen der Systeme (36), (39) foglt gleich, dass die Anfangsbedingungen dieser Lösungen in folgender Weise gebunden sind:

$$j_1^\alpha(0) = k_1^\alpha(0)\,, \quad j_2^\alpha(0) = k_2^\alpha(0)\,, \quad j_3^\alpha(0) = k_3^\alpha(0)\,, \quad j_4^\alpha(0) = k_4^\alpha(0) + \frac{q}{r}\, j_2^\alpha(0)\,,$$

d.i.

$$k_l^\alpha(0) - j_l^\alpha(0) = 0 \quad (l = 1, 2, 3)\,, \quad k_4^\alpha(0) - j_4^\alpha(0) = -\frac{q(0)}{r(0)}\, k_2^\alpha(0)\,. \tag{40}$$

Wir werden jetzt die Differenz $k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma)$ für festes $\sigma \in (0, a)$ abschätzen. Es ist wieder (der Mittelwertsatz)

$$k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma) = \sigma \left[\frac{d}{d\sigma}(k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma))\right]_{\sigma=\bar{\sigma}},$$

wo $0 < \bar{\sigma} < \sigma$ ist. Aus den ersten Gleichungen in (36) und (37) bekommt man

$$k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma) = \sigma(k_2^\alpha(\bar{\sigma}) - j_2^\alpha(\bar{\sigma}))\,.$$

Nützt man nochmals den Mittelwertsatz und die zweiten Gleichungen in (36) und (37) aus, hat man

$$k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma) = \sigma\,.\,\bar{\sigma}[(k_1^\alpha(\tilde{\sigma}) - j_1^\alpha(\tilde{\sigma})) + q(\tilde{\sigma})\,(k_3^\alpha(\tilde{\sigma}) - j_3^\alpha(\tilde{\sigma}))]\,,$$

wo $0 < \tilde{\sigma} < \bar{\sigma}$ ist. Daraus folgt, weil $q \leqq \varepsilon_1$ und $\bar{\sigma} < \sigma$ ist, dass

$$|k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma)| \leqq \sigma^2(|k_1^\alpha(\tilde{\sigma}) - j_1^\alpha(\tilde{\sigma})| + \varepsilon_1|k_3^\alpha(\tilde{\sigma}) - j_3^\alpha(\tilde{\sigma})|)\,, \tag{41}$$

ist, wo $0 < \tilde{\sigma} < \bar{\sigma}$ ist.

Schätzen wir ähnlich die Differenz $k_3^\alpha(\sigma) - j_3^\alpha(\sigma)$ für $\sigma \in (0, \bar{\sigma}\rangle$ ab; mittels der Gleichungen (36), (37) bekommt man

$$k_3^\alpha(\sigma) - j_3^\alpha(\sigma) = \sigma[q(\sigma')\, j_2^\alpha(\sigma') + r(\sigma')\,(k_4^\alpha(\sigma') - j_4^\alpha(\sigma'))]\,,$$

wo $0 < \sigma' < \sigma$ ist. Daraus folgt, weil $q \leqq \varepsilon_1$, $r \leqq \varepsilon_2$ ist, dass

$$|k_3^\alpha(\sigma) - j_3^\alpha(\sigma)| \leqq \sigma(\varepsilon_1 |k_2^\alpha(\sigma')| + \varepsilon_1 |k_2^\alpha(\sigma') - j_2^\alpha(\sigma')| + \varepsilon_2 |k_4^\alpha(\sigma') - j_4^\alpha(\sigma')|)$$

ist. Auf dem Intervall $\langle 0, \bar{\sigma}\rangle$ ist die Funktion k_2^α beschränkt: $|k_2^\alpha(\sigma)| \leqq K_1$ für $0 \leqq \leqq \sigma \leqq \bar{\sigma}$, so dass

$$|k_3^\alpha(\sigma) - j_3^\alpha(\sigma)| \leqq \sigma\varepsilon_1 K_1 + \sigma(\varepsilon_1 |k_2^\alpha(\sigma') - j_2^\alpha(\sigma')| + \varepsilon_2 |k_4^\alpha(\sigma') - j_4^\alpha(\sigma')|)$$

ist. Wendet man jetzt auf die Ausdrücke $k_2^\alpha(\sigma') - j_2^\alpha(\sigma')$, $k_4^\alpha(\sigma') - j_4^\alpha(\sigma')$ noch einmal den Mittelwertsatz an, bekommt man nach den zweiten und vierten Gleichungen in (36), (37) und nach (40):

$$|k_3^\alpha(\sigma) - j_3^\alpha(\sigma)| \leqq \sigma\varepsilon_1 K_1 + \sigma\Big\{\varepsilon_1 \sigma' |(k_1^\alpha(\sigma'') - j_1^\alpha(\sigma'') +$$
$$+ q(\sigma'')\,(k_3^\alpha(\sigma'') - j_3^\alpha(\sigma''))| + \varepsilon_2 \left[\frac{q(0)}{r(0)}\, k_2^\alpha(0) + \sigma' |r(\sigma''')\, j_3^\alpha(\sigma''')|\right]\Big\}\,,$$

wo $0 < \sigma'' < \sigma'$, $0 < \sigma''' < \sigma'$ ist. Auf dem Intervall $\langle 0, \bar{\sigma}\rangle$ ist die Funktion k_3^α beschränkt: $|k_3^\alpha(\sigma)| \leqq K_2$ für $0 \leqq \sigma \leqq \bar{\sigma}$; weiter ist $q \leqq \varepsilon_1$, $r \leqq \varepsilon_2$, $\sigma'' < \bar{\sigma}$, $\sigma''' < \bar{\sigma}$, also

$$|k_3^\alpha(\sigma) - j_3^\alpha(\sigma)| \leqq \sigma\varepsilon_1 K_1 + \sigma^2 \varepsilon_2^2 K_2 + \sigma\varepsilon_2 \frac{q(0)}{r(0)} |k_2^\alpha(0)| +$$
$$+ \sigma^2[\varepsilon_1 |k_1^\alpha(\sigma'') - j_1^\alpha(\sigma'')| + \varepsilon_1^2 |k_3^\alpha(\sigma'') - j_3^\alpha(\sigma'')| + \varepsilon_2^2 |k_3^\alpha(\sigma''') - j_3^\alpha(\sigma''')|]\,.$$

Bezeichnen wir σ_0 den der beiden Punkte σ'', σ''' in dem der Wert $|k_3^\alpha - j_3^\alpha|$ grösser oder gleich dem Wert in dem anderen ist. Wir bezeichnen weiter

$$K_0 = \frac{q(0)}{r(0)} |k_2^\alpha(0)|\,.$$

Man hat dann

(42)
$$|k_3^\alpha(\sigma) - j_3^\alpha(\sigma)| \leqq \sigma\varepsilon_1 K_1 + \sigma^2 \varepsilon_2^2 K_2 + \sigma\varepsilon_2 K_0 +$$
$$+ \sigma^2(\varepsilon_1 |k_1^\alpha(\sigma'') - j_1^\alpha(\sigma'')| + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) |\, k_3^\alpha(\sigma_0) - j_3^\alpha(\sigma_0)|)\,,$$

wo $0 < \sigma'' < \sigma$, $0 < \sigma_0 < \sigma$ ist.

Definieren wir A_n, B_n folgendermassen:

(43)
$$A_1 = 1\,, \quad B_1 = 1$$

(44)
$$A_{n+1} = A_n + \varepsilon_1^2 B_n\,, \quad B_{n+1} = A_n + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)\, B_n \quad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Wir werden beweisen, dass es gilt: Zu jedem $n = 1, 2, \ldots$ gibt es Zahlen σ_n, σ'_n, $0 < \sigma_n < \bar{\sigma}, 0 < \sigma'_n < \bar{\sigma}$ so, dass

$$(45) \qquad |k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma)| \leqq (\sigma^3 \varepsilon_1^2 K_1 + \sigma^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 K_0 + \sigma^4 \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 K_2) \sum_{k=1}^{n-1} B_k \sigma^{2(k-1)} +$$
$$+ \sigma^{2n}(A_n |k_1^\alpha(\sigma_n) - j_1^\alpha(\sigma_n)| + \varepsilon_1 B_n |k_3^\alpha(\sigma'_n) - j_3^\alpha(\sigma'_n)|) .$$

Beweis durch Induktion nach n: Für $n = 1$ folgt (45) gleich aus (41), wenn man $\sigma_1 = \sigma'_1 = \tilde{\sigma}$ setzt (die leere Summe ist gleich Null). Es soll also (45) für den Wert n gelten. Die auf der rechten Seite auftretenden Ausdrücke $|k_1^\alpha(\sigma_n) - j_1^\alpha(\sigma_n)|$, $|k_3^\alpha(\sigma'_n) - j_3^\alpha(\sigma'_n)|$ schätzt man mit Hilfe von (41) und (42) ab. Man bekommt

$$|k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma)| \leqq (\sigma^3 \varepsilon_1^2 K_1 + \sigma^3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 K_0 + \sigma^4 \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 K_2) \sum_{k=1}^{n-1} B_k \sigma^{2(k-1)} +$$
$$+ B_n \sigma^{2n+1} \varepsilon_1^2 K_1 + B_n \sigma^{2n+1} \varepsilon_1 \varepsilon_2 K_0 + B_n \sigma^{2n+2} \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 K_2 +$$
$$+ \sigma^{2n+2}[(A_n + \varepsilon_1^2 B_n) |k_1^\alpha(\sigma_{n+1}) - j_1^\alpha(\sigma_{n+1})| +$$
$$+ \varepsilon_1(A_n + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) B_n) |k_3^\alpha(\sigma'_{n+1}) - j_3^\alpha(\sigma'_{n+1})|] ,$$

wo man σ_{n+1} gleich dem der zwei Zahlen $\tilde{\sigma}, \sigma''$, in dem der Wert $|k_1^\alpha - j_1^\alpha|$, und σ'_{n+1} gleich dem der zwei Zahlen $\tilde{\sigma}, \sigma_0$, in dem der Wert $|k_3^\alpha - j_3^\alpha|$ grösser oder gleich dem Wert in dem anderen ist, gesetzt hat. Wegen den Gleichungen (44) sieht man, dass die letzte Ungleichung gerade die Ungleichung (45) für den Wert $n + 1$ ist.

Die Zahlen A_n, B_n sind durch die Gleichungen (43), (44) eindeutig bestimmt. Wir wollen zuerst die Zahlen B_n bestimmen. Aus der zweiten Gleichung in (44) für $n = 1$ bekommt man

$$(46) \qquad B_2 = 1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 .$$

Es ist auch klar, dass man die zweite Gleichung in (44) auf die equivalente Form

$$(47) \qquad B_{n+1} = A_{n+1} + \varepsilon_2^2 B_n$$

bringen kann.

Nimmt man die zweite Gleichung in (44) für den Wert $n + 1$ und subtrahiert davon die zweite Gleichung in (44) für den Wert n, bekommt man

$$B_{n+2} - B_{n+1} = A_{n+1} - A_n + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) B_{n+1} - (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) B_n ,$$

woraus wegen der ersten Gleichung in (44)

$$(48) \qquad B_{n+2} - (1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) B_{n+1} + \varepsilon_2^2 B_n = 0$$

folgt. Die Gleichung (48) zusammen mit den Gleichungen (46) und

$$(49) \qquad B_1 = 1$$

bestimmt die gesuchten B_n eindeutig.

Die Form der Gleichung (48) und der Gleichungen (46) und (49) führt uns dazu, die gesuchten Zahlen B_n wie Polynome in $(1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)$ mit Koeffizienten, die von ε_1 nicht abhängen, zu suchen, d.i. in der Form

$$B_m = \sum_{k=0}^{m-1} a_{m,k}(1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^k \tag{50}$$

wo $a_{m,k}$ von ε_2 aber nicht von ε_1 abhängen dürfen. Aus dem Gleichungen (49), (46) bekommt man

$$a_{1,0} = 1\,, \quad a_{2,0} = 0\,, \quad a_{2,1} = 1\,. \tag{51}$$

Das Einsetzen von (50) ins (48) gibt dann

$$\sum_{k=1}^{m-1} \left(a_{m+2,k} - a_{m+1,k-1} + \varepsilon_2^2 a_{m,k}\right)\left(1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2\right)^k + \left(a_{m+2,0} + \varepsilon_2^2 a_{m,0}\right) +$$
$$+ \left(a_{m+2,m} - a_{m+1,m-1}\right)\left(1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2\right)^m +$$
$$+ \left(a_{m+2,m+1} - a_{m+1,m}\right)\left(1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2\right)^{m+1} = 0\,.$$

Weil der Voraussetzung nach $a_{i,j}$ nicht von ε_1 abhängen, ist diese Gleichung dann und nur dann erfüllt, wenn die Koeffizienten bei allen Potenzen von $1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$ gleich Null sind, d.i. wenn

$$a_{m+2,0} = -\varepsilon_2^2 a_{m,0}\,, \quad a_{m+2,m+1} = a_{m+1,m}\,, \tag{52}$$
$$a_{m+2,m} = a_{m+1,m-1}\,, \quad a_{m+2,k} = a_{m+1,k-1} - \varepsilon_2^2 a_{m,k} \quad (k = 1, 2, \ldots, m-1)$$

gilt.

Wir werden zuerst beweisen, dass

$$a_{m,k} = 0 \quad \text{ist, wenn } m + k \text{ gerade ist.} \tag{53}$$

Beweis durch Induktion nach m: Für $m = 2$ ist $k = 0$ und (53) gilt wegen (51). Es soll (53) für alle Werte $m \leqq n + 1$ gelten; wir werden beweisen, dass es dann auch für den Wert $m = n + 2$ gilt. Ist $m = n + 2$ gerade, ist die Zahl $a_{n+2,0}$ gleich Null wegen der ersten Gleichung in (52). Die Zahl $a_{n+2,n}$ ist gleich Null wegen der dritten Gleichung in (52). Die Zahl $a_{n+2,k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ ist gleich Null im Falle, dass $n + 2 + k$ gerade ist, wegen der vierten Gleichung in (52), weil dann auch $n + k$ gerade ist und deswegen die Zahlen $a_{n-1,k-1}$ und $a_{n,k}$ nach der Induktionsvoraussetzung gleich Null sind.

Im Falle, dass $m + k$ ungerade ist, setzen wir jetzt (für $k = 1, 2, \ldots, m - 1$; $m = 1, 2, \ldots$)

$$a_{m,k} = (-1)^{(m-k-1)/2}\, \varepsilon_2^{m-k-1} b_{m,k}\,.$$

Aus (51) folgt dann

$$b_{1,0} = 1\,, \quad b_{2,1} = 1 \tag{54}$$

und aus (52) bekommt man (die dritte Gleichung wird selbstverständlich weggelassen, sie ist nach (53) sicher erfüllt)

$$b_{m+2,0} = b_{m,0}\,, \quad b_{m+2,m+1} = b_{m+1,m}\,, \tag{55}$$
$$b_{m+2,k} = b_{m+1,k-1} + b_{m,k} \quad (k = 1, 2, \ldots, m-1)\,.$$

Die erste Gleichung in (55) und die erste Gleichung in (54) geben gleich durch Induktion, dass

$$b_{m,0} = 1 \quad \text{für ungerades } m \tag{56}$$

ist. Die zweite Gleichung in (55) und die zweite Gleichung in (54) geben wieder gleich, dass

$$b_{m+1,m} = 1 \quad \text{für alle } m \tag{57}$$

ist. Die vierte Gleichung in (55) erinnert uns an die Gleichheit

$$\binom{p+1}{l+1} = \binom{p}{l+1} + \binom{p}{l} \tag{58}$$

Wir setzen deswegen

$$b_{m,k} = \binom{p}{l}. \tag{59}$$

wo

$$p = \alpha m + \beta k + \xi\,, \quad l = \gamma m + \delta k + \zeta\,, \tag{60}$$

die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \zeta$ (soweit es möglich sein wird) wollen wir so bestimmen, damit (56), (57) und

$$b_{m+1,k-1} = \binom{p}{l+1}, \quad b_{m+2,k} = \binom{p+1}{l+1} \tag{61}$$

gelte. Wenn es uns gelingt, dann werden die Zahlen (59), wo p, l durch (60) gegeben werden, die Gleichungen (55) erfüllen.

Die Gleichungen (61) geben wegen (59)

$$p = \alpha(m+1) + \beta(k-1) + \xi\,, \quad l + 1 = \gamma(m+1) + \delta(k-1) + \zeta\,,$$
$$p + 1 = \alpha(m+2) + \beta k + \xi\,, \quad l + 1 = \gamma(m+2) + \delta k + \zeta\,.$$

Setzt man p, l aus den Gleichungen (60) hinein, bekommt man

$$\alpha = \beta = \tfrac{1}{2}\,, \quad \gamma = \tfrac{1}{2}\,, \quad \delta = -\tfrac{1}{2}\,;$$

so dass (60) die Form

(62) $$p = \tfrac{1}{2}(m+k) + \xi\,, \quad l = \tfrac{1}{2}(m-k) + \zeta$$

hat. Die Gleichungen (56), (57) bestimmen dann ξ und ζ:

$$\xi = \zeta = -\tfrac{1}{2}$$

Es ist also

$$b_{m,k} = \binom{\frac{1}{2}(m+k-1)}{\frac{1}{2}(m-k-1)} = \binom{\frac{1}{2}(m+k-1)}{k}$$

$$(k = 0, 1, \dots m-1;\ m = 1, 2, \dots;\ m+k \text{ ungerade})\,.$$

Daraus und aus (53) folgt:

(63)

$$B_m = \sum_{\substack{k=0 \\ m+k \text{ ungerade}}}^{m-1} (-1)^{\frac{1}{2}(m-k-1)} \binom{\frac{1}{2}(m+k-1)}{k} \varepsilon_2^{m-k-1}(1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^k \quad (m = 1, 2, \dots)\,.$$

Nimmt man in (45) den Grenzwert für $n \to +\infty$, ensteht in dem ersten Glied die Reihe

(64) $$\sum_{m=1}^{+\infty} B_m \sigma^{2(m-1)}\,.$$

Wenn wir die Konvergenz dieser Reihe beweisen, dann wird $\lim_{m\to+\infty} B_m\sigma^{2m} = 0$ sein. Aus der Gleichung (47) folgt dann, dass auch $\lim_{m\to+\infty} A_m\sigma^{2m} = 0$ ist. Weil alle σ_n, σ_n' aus dem Intervall $\langle 0, \bar{\sigma}\rangle$ sind, sind die Ausdrücke $|k_1^\alpha(\sigma_n) - j_1^\alpha(\sigma_n)|$, $|k_3^\alpha(\sigma_n') - j_3^\alpha(\sigma_n')|$ durch eine von n nicht abhängige Konstante beschränkt. Es ist also

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma^{2n}(A_n|k_1^\alpha(\sigma_n) - j_1^\alpha(\sigma_n)| + \varepsilon_1 B_n|k_3^\alpha(\sigma_n') - j_3^\alpha(\sigma_n')|) = 0\,.$$

Der Grenzwert für $n \to +\infty$ gibt dann aus (45) die Abschätzung

(65) $$|k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma)| \leqq (\sigma^3\varepsilon_1^2K_1 + \sigma^3\varepsilon_1\varepsilon_2K_0 + \sigma^4\varepsilon_1\varepsilon_2^2K_2)\sum_{m=1}^{+\infty} B_m\sigma^{2(m-1)}\,.$$

Wir müssen also die Reihe (64), d.i. die Reihe

(66) $$\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{k=0 \\ k+m \text{ ungerade}}}^{m-1} (-1)^{\frac{1}{2}(m-k-1)} \binom{\frac{1}{2}(m+k-1)}{k} \varepsilon_2^{m-k-1}(1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^k \sigma^{2(m-1)}\right.$$

untersuchen. Die Reihe (66) wird sicher konvergent (sogar absolut konvergent) sein, wenn die verallgemeinerte Reihe

(67) $$\sum_{m=1}^{+\infty}\ \sum_{\substack{k=0 \\ k+m \text{ ungerade}}}^{m-1} \binom{\frac{1}{2}(m+k-1)}{k} \varepsilon_2^{m-k-1}(1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^k \sigma^{2(m-1)}$$

konvergieren wird. Weil $m + k$ ungerade ist, ist $m + k - 1$ gerade. Setzen wir $n = (m + k - 1)/2$ ein; die Bedingung $k \leqq m - 1$ gibt $k \leqq n$ und (67) ist also gleich

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon_2^{2(n-k)} (1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^k \sigma^{2(2n-k)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma^{2n}(1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_2^2\sigma^2)^n = \frac{1}{1 - \sigma^2(1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_2^2\sigma^2)}$$

soweit

(68) $$\sigma^2(1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_2^2\sigma^2) < 1$$

ist. Soweit also (68) gilt, konvergiert die Reihe (67) und deswegen auch die Reihe (66) und man kann die Reihe (66) ganz beliebig ordnen. Durch dieselbe Weise, wie wir die Reihe (67) addiert haben, bekommen wir auch die Summe der Reihe (66):

(69) $$\frac{1}{1 - \sigma^2(1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - \varepsilon_2^2\sigma^2)}.$$

Wir haben so folgende Sätze bewiesen:

Satz 3. *Im Intervall $I = \langle 0, a)$ $(0 < a \leqq +\infty)$ soll die Funktion q zweimal, die Funktion r einmal differenzierbar sein und es soll $0 < q \leqq \varepsilon_1$, $0 < r \leqq \varepsilon_2$ gelten. Es mag j_1^α eine Lösung der Gleichung (7) und k_1^α eine Lösung der Gleichung (34) im Intervall I sein und diese Lösungen sollen dieselben Anfangsbedingungen (35) erfüllen. Bezeichnen wir J den Intervall der $\sigma \in I$, die die Ungleichung (68) erfüllen,*

$$K_0 = \frac{q(0)}{r(0)}\,|k_2^\alpha(0)|\,, \quad K_1 = \sup_{\sigma\in J}\left|\frac{\mathrm{d}k_1^\alpha(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}\right|, \quad K_2 = \sup_{\sigma\in J}\left|\frac{1}{q(\sigma)}\left(\frac{\mathrm{d}^2k_1^\alpha(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma^2} - k_1^\alpha(\sigma)\right)\right|.$$

Es gilt dann

(70) $$|k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma)| \leqq \frac{\sigma^3(\varepsilon_1^2K_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2K_0 + \varepsilon_1\varepsilon_2^2K_2\sigma)}{1 - (1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - \varepsilon_2^2\sigma^2)\,\sigma^2}$$

für alle $\sigma \in J$.

Bemerkung 1. Im Falle, dass $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ist, hat die Abschätzung (70) die Form:

(71) $$|k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma)| \leqq \frac{\sigma^3\varepsilon^2(K_0 + K_1 + \sigma\varepsilon K_2)}{1 - [1 + \varepsilon^2(2 - \sigma^2)]\,\sigma^2}.$$

Die Bedingung (68) lautet dann $\sigma^2(1 + \varepsilon^2(2 + \sigma^2)) < 1$,

durch ihre Auflösung hat man

$$\sigma^2 < \frac{-1 - 2\varepsilon^2 + \sqrt{[(1 + 2\varepsilon^2)^2 + 4\varepsilon^2]}}{2\varepsilon^2},$$

d. i.

$$0 < \sigma < \left[\frac{\sqrt{(1 + 8\varepsilon^2 + 4\varepsilon^4)} - 1 - 2\varepsilon^2}{2\varepsilon^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{72}$$

Bemerkung 2. Den Ausdruck in (72) rechts kann man von unten durch den Ausdruck

$$[1 + \tfrac{1}{2}(8\varepsilon^2 + 4\varepsilon^4) - \tfrac{1}{4}(8\varepsilon^2 + 4\varepsilon^4)^2 - 1 - 2\varepsilon^2] : 2\varepsilon^2 = 1 - 7\varepsilon^2 - 8\varepsilon^4 - 2\varepsilon^6 \tag{73}$$

abschätzen, soweit $8\varepsilon^2 + 4\varepsilon^4 < 1$ ist, d. i. soweit

$$\varepsilon^2 < \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{4} = \sqrt{(1 + \tfrac{1}{4})} - 1 \tag{74}$$

ist. Die Zahl in (74) rechts kann man wieder von unten durch die Zahl $1 + \frac{1}{2}\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{7}{64}$ abschätzen; solange also

$$0 < \varepsilon < \frac{\sqrt{7}}{8} \tag{75}$$

ist, gilt (74) und der Ausdruck (73) lässt sich noch weiter durch den Ausdruck $1 - 8\varepsilon^2$ abschätzen. Man bekommt so im Satze 3 die einfachere Abschätzung: Ist $0 < \varepsilon < \sqrt{7} : 8$ ($\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$), dann gilt die Abschätzung (71) für alle die $\sigma \in I$, für die die Bedingung

$$0 < \sigma < \sqrt{(1 - 8\varepsilon^2)} \tag{76}$$

erfüllt ist.

Bemerkung 3. Wenn man wissen will, für welche $\sigma \in I$ sich die Funktion k_1^α von der genauen Lösung j_1^α sicher um weniger als η unterscheidet, bekommt man nach und nach aus (71)

$$\sigma^3\varepsilon^2(K_0 + K_1 + \varepsilon K_2\sigma) < \eta[1 - (1 + 2\varepsilon^2 - \varepsilon^2\sigma^2)\,\sigma^2],$$
$$(\varepsilon^3K_2 - \eta\varepsilon^2)\,\sigma^4 + \varepsilon^2(K_0 + K_1)\,\sigma^3 + \eta(1 + 2\varepsilon^2)\,\sigma^2 < \eta\,;$$

weil $\sigma < 1$ ist (siehe (68)), ist $\sigma^4 < \sigma^3 < \sigma^2$ und die letzte Ungleichung wird sicher erfüllt, wenn

$$(\eta + \eta\varepsilon^2 + \varepsilon^2K_0 + \varepsilon^2K_1 + \varepsilon^2K_2)\,\sigma^2 < \eta$$

ist, d. i. wenn

$$0 < \sigma < \frac{1}{\sqrt{[1 + \varepsilon^2(1 + (K_0 + K_1 + \varepsilon K_2) : \eta)]}} \tag{77}$$

ist. Für $\sigma \in I$, die die Bedingung (77) erfüllen, gilt dann die Ungleichung

$$|k_1^\alpha(\sigma) - j_1^\alpha(\sigma)| < \eta$$