Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

ÜBER EINE KLASSE TORSIONSFREIER ABELSCHER GRUPPEN

LADISLAV PROCHÁZKA, Praha

(Eingegangen am 7. Dezember 1963)

In dieser Bemerkung beschäftigen wir uns mit der Struktur solcher torsionsfreien abelschen Gruppen G, für die die Relation $G \cong H \dotplus G/H$ gilt, falls H eine Servanzuntergruppe von G ist.

Da wir nur abelsche Gruppen studieren wollen, wird unter einer Gruppe immer eine additiv geschriebene abelsche Gruppe gemeint. Den Rang einer torsionsfreien abelschen Gruppe G bezeichnen wir durch $r(G)$. Ist J eine solche Gruppe vom Range 1, so wird mit dem Symbol typ J der Typ dieser Gruppe J bezeichnet.

Eine torsionsfreie Gruppe G heisst total reduzibel, wenn sie als eine direkte Summe von Untergruppen vom Range 1 ausgedrückt werden kann; wenn darüber die Typen der in der direkten Zerlegung auftretenden Gruppen eine geordnete Menge bilden, so sagen wir, dass die Gruppe G total $\mathfrak{K}$-reduzibel ist.

Lemma 1. *Es sei G eine total $\mathfrak{K}$-reduzible torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges $r \geqq 2$ und sei*

$$G = J_1 \dotplus J_2 \dotplus \ldots \dotplus J_r \tag{1}$$

eine ihrer totalen Zerlegungen, wobei typ $J_i \leqq$ typ J_{i+1} $(i = 1, \ldots, r - 1)$ *ist. Ist H eine solche Servanzuntergruppe von G vom Range $r - 1$, dass $J_r \cap H = (0)$ ist, so gilt*

$$H \cong J_1 \dotplus \ldots \dotplus J_{r-1}\,, \quad G/H \cong J_r\,. \tag{2}$$

Beweis. Es ist nach Voraussetzung $J_r \cap H = (0)$ und darum ist $\{H, J_r\} = H \dotplus J_r$. Weiter haben wir

$$G/(H \dotplus J_r) \cong (G\ H)/((H \dotplus J_r)/H)\,. \tag{3}$$

G/H ist eine torsionsfreie Gruppe vom Range 1 und nach dem Satz 2 von [3] muss sogar eine Relation der Form $G/H \cong J_i$ gelten, wo $1 \leqq i \leqq r$ ist; es ist also typ $G/H =$ typ J_i. Da es aber $J_r \cong (H \dotplus J_r)/H$ gilt, muss typ $J_r \leqq$ typ $G/H =$ typ J_i sein. Wegen der Voraussetzung haben wir typ $J_i \leqq$ typ J_r und deshalb ist typ $J_i =$

$=$ typ $J_r =$ typ G/H. Vor allem folgt daraus der Isomorphismus $J_r \cong G/H$, und dies heisst, dass die zweite von Relationen (2) erfüllt ist. Gleichzeitig haben wir

$$\text{typ}\, G/H = \text{typ}\,(H \dotplus J_r)/H\,,$$

also die an der rechten Seite der Relation (3) auftretende Gruppe muss endlich sein. Dann ist die Gruppe $G/(H \dotplus J_r)$ auch endlich, nach dem Satz B von [2] gilt also der Isomorphismus $G \cong H \dotplus J_r$ und dies bedeutet wegen des Satzes 46.7 von [1], dass H total reduzibel sein muss. Ist $H = J_1^* \dotplus \ldots \dotplus J_{r-1}^*$ eine totale Zerlegung von H, so folgt aus der Relation

$$J_1 \dotplus \ldots \dotplus J_{r-1} \dotplus J_r \cong J_1^* \dotplus \ldots \dotplus J_{r-1}^* \dotplus J_r$$

nach dem Satz 46.1 von [1] der Isomorphismus

$$J_1 \dotplus \ldots \dotplus J_{r-1} \cong J_1^* \dotplus \ldots \dotplus J_{r-1}^* = H$$

und das ist genau die erste von den Relationen (2).

Lemma 2. *Es sei G eine den im Lemma* 1 *auftretenden Bedingungen genügende Gruppe und H eine von ihrer Servanzuntergruppen vom Range r* $-$ 1. *Dann gibt es ein Index k* $(1 \leqq k \leqq r)$, *für den die Relationen*

$$H \cong J_1 \dotplus \ldots \dotplus J_{k-1} \dotplus J_{k+1} \dotplus \ldots \dotplus J_r\,, \quad G/H \cong J_k \tag{4}$$

erfüllt sind.

Beweis Da der Rang der Untergruppe H kleiner als r ist, gibt es solche Indexe i $(1 \leqq i \leqq r)$, für die $H \cap J_i = (0)$ gilt; k sei der grösste unter ihnen. Ist $k = r$, so wenden wir das Lemma 1 an, und die Behauptung ist vollständig bewiesen. Es sei also $k < r$. Dann ist $H \cap J_i \neq (0)$ $(i = k + 1, \ldots, r)$, woraus folgt $J_i \subseteq H$ $(i = k + 1, \ldots r)$, denn J_i $(i = k + 1, \ldots, r)$ sind lauter Servanzuntergruppen vom Range 1. Dies bedeutet, dass $J_{k+1} \dotplus \ldots \dotplus J_r \subseteq H$ sein muss. Setzen wir jetzt $G_1 = J_1 \dotplus \ldots \dotplus J_k$, so haben wir

$$G = G_1 \dotplus J_{k+1} \dotplus \ldots \dotplus J_r\,, \tag{5}$$

und für die Untergruppe H gilt die direkte Zerlegung

$$H = H_1 \dotplus J_{k+1} \dotplus \ldots \dotplus J_r\,, \tag{6}$$

wo $H_1 = G_1 \cap H$ ist. Es ist klar, dass H_1 eine Servanzuntergruppe von G_1 vom Range $k - 1$ bildet; gleichzeitig haben wir $r(G_1) = k$. Da $J_k \cap H = (0)$, ist es umsomehr $J_k \cap H_1 = (0)$, woraus folgt, dass man das Lemma 1 anwenden darf. Wir können also schreiben

$$H_1 \cong J_1 \dotplus \ldots \dotplus J_{k-1}\,, \quad G_1/H_1 \cong J_k\,.$$

Von hier und von (6) folgt schon die erste von Relationen (4). Wegen der Formeln (5) und (6) haben wir $G = \{G_1, H\}$ und darum ist

$$G/H = \{G_1, H\}/H \cong G_1/(G_1 \cap H) = G_1/H \cong J_k ;$$

dies besagt aber, dass auch die zweite von Relationen (4) erfüllt ist.

Jetzt können wir schon den folgenden Satz beweisen.

Satz 1. *Ist G eine total $\mathfrak{K}$-reduzible torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges r, so gilt für jede ihre Servanzuntergruppe H der Isomorphismus*

$$G \cong H \dotplus G/H . \tag{7}$$

Beweis. Wir setzen $s = r(H)$. Ist $s = r$ oder $s = 0$, so ist die Relation (7) trivial erfüllt. Den Beweis des Satzes wollen wir nun durch vollständige Induktion nach r durchführen.

Es ist klar, dass unser Satz für $r = 1$ und wegen des Lemma 2 auch für $r = 2$ gültig ist. Es sei also $r > 2$ und setzen wir voraus, dass der Satz schon für jede Gruppe vom Range $r - 1$ gilt; es sei ausserdem $1 \leqq s \leqq r - 1$ (der Fall $s = 0$ ist wieder trivial). Ist aber $s = r - 1$, so folgt unsere Behauptung unmittelbar vom Lemma 2. Weiter dürfen wir also voraussetzen, dass $1 \leqq s < r - 1$ ist. In diesem Falle wählen wir eine beliebige Servanzuntergruppe K von G aus, so dass $H \subseteq K$ und $r(K) = r - 1$ ist. Wegen des Lemma 2 und wegen der Induktionsvoraussetzung haben wir

$$G \cong K \dotplus G/K , \quad K \cong H \dotplus K/H$$

und so erhalten wir den Isomorphismus

$$G \cong H \dotplus K/H \dotplus G/K . \tag{8}$$

Setzen wir $r - s = t$, so ist G/H eine torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges $t \geqq 2$ und K/H eine ihre Servanzuntergruppe vom Range $t - 1$. Nach dem Satz 2 von [3] ist G/H wieder eine total $\mathfrak{K}$-reduzible Gruppe und deshalb kann man das Lemma 2 an die Gruppe G/H und ihre Untergruppe K/H anwenden. Wegen des Isomorphismus $G/K \cong (G/H)/(K/H)$ folgt daraus, dass

$$G/H \cong K/H \dotplus G/K . \tag{9}$$

Die Relation (7) ist jetzt eine Folgerung von (8) und (9).

Damit ist die vollständige Induktion beendet und der Satz ist ganz bewiesen.

Bemerkung. Ist G eine torsionsfreie total $\mathfrak{K}$-reduzible Gruppe endlichen Ranges und ist H eine Servanzuntergruppe von G, so ist H nach (7) zu einem direkten Summanden von G isomorph. Ist $H \neq (0)$, so muss also H wegen des Satzes 46.7 von [1] total reduzibel sein. Man sieht aber leicht an, dass H schon total $\mathfrak{K}$-reduzibel sein muss. Dies ist aber eine spezielle Lautung des Satzes von [4].

Jetzt wollen wir weiter die Struktur solcher torsionsfreien Gruppen G studieren, für die man den Satz 1 formulieren kann, das heisst, für die die Formel (7) gilt, falls H eine Servanzuntergruppe von G ist.

Lemma 3. *Ist G eine solche reduzierte torsionsfreie Gruppe, dass für jede ihre Servanzuntergruppe H die Formel (7) erfüllt ist, so muss G von endlichem Range sein.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass die Gruppe G von unendlichem Range ist. Deshalb kann man in G die Elemente x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ auswählen, so dass sie eine linear unabhängige Menge bilden; es gilt

$$U = \{x_n\ (n = 1, 2, \ldots)\} = \sum_{n=1}^{\infty} \{x_n\}\,.$$

Da die additive Gruppe rationaler Zahlen $\mathscr{R}$ abzählbar ist, gibt es eine solche Untergruppe V von U, dass die Relation $U/V \cong \mathscr{R}$ erfüllt ist; V ist also eine Servanzuntergruppe von U. Es sei jetzt S die minimale Servanzuntergruppe von G, die die Untergruppe V enthält. Es ist klar, dass $S \cap U = V$ ist. Infolge der Voraussetzungen haben wir

$$G \cong S \dotplus G/S \tag{10}$$

und gleichzeitig gilt

$$\{U, S\}/S \cong U/(U \cap S) = U/V \cong \mathscr{R}\,.$$

Die letzte Relation besagt aber, dass $\{U, S\}/S$ eine nichttriviale vollständige Untergruppe von G/S ist. Die Gruppe $S \dotplus G/S$ ist also nicht mehr reduziert und wegen der Voraussetzung über G steht dies im Widerspruch zu (10). Das Lemma ist damit bewiesen.

Lemma 4. *Ist G eine solche torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges r, dass für jede ihre Servanzuntergruppe H die Formel (7) gilt, so ist G total reduzibel.*

Beweis. Für $r \leqq 2$ ist die Behauptung ganz klar. Es sei also $r > 2$ und setzen wir voraus, dass die Gruppe G nicht total reduzibel ist. Da die Gruppe G Servanzuntergruppen vom Range 1 besitzt, besitzt sie nach (7) direkte Summanden vom Range 1. Ganz allgemein kann man also behaupten, dass es in der Gruppe G total reduzible direkte Summanden gibt. Es sei H ein solcher total reduzibel direkte Summand von G von grösstem möglichen Range s. Es ist also $1 \leqq s < r$ und da die Untergruppe H der Relation (7) genügt, muss es sogar $s < r - 1$ sein. Für die Gruppe G gilt eine Relation der Form

$$G = H \dotplus K\,, \tag{11}$$

wobei $r(K) = r - s \geqq 2$ ist. Es sei K_0 irgendeine Servanzuntergruppe von K vom Range $r(K) - 1$. Offenbar ist K_0 auch eine Servanzuntergruppe von G und darum haben wir nach (7) $G \cong K_0 \dotplus G/K_0$. Gemäss (11) können wir noch schreiben $G/K_0 \cong$

$\cong H \dotplus K/K_0$ und so erhalten wir die Formel

$$G \cong K_0 \dotplus H \dotplus K/K_0 \,. \tag{12}$$

Die Gruppe $H \dotplus K/K_0$ ist eine total reduzible Gruppe vom Range $s + 1$, die nach (12) zu einem direkten Summand von G isomorph ist. Dies ist aber im Widerspruch mit der Wahl der Zahl s und das Lemma ist wieder vollständig bewiesen.

Lemma 5. *Ist G eine solche torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges r, dass für jede ihrer Servanzuntergruppen H die Formel (7) gilt, so ist G total $\mathfrak{R}$-reduzibel.*

Beweis. Für $r = 1$ ist die Behauptung trivial und darum sei $r > 1$. Setzen wir voraus, dass (1) eine totale direkte Zerlegung von G bildet und dass es unter den Gruppen J_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ zwei Gruppen gibt, deren Typen nicht vergleichbar (hinsichtlich der Halbordnung der Menge aller Typen) sind. Es seien zum Beispiel genau die Gruppen J_1, J_2, die die nichtvergleichbare Typen besitzen. Wählen wir die Elemente $x_i \in J_i$, $x_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$ aus und setzen wir $x = x_1 + x_2$. Ist S die minimale Servanzuntergruppe von G, die das Element x enthält, so ist $S \subseteq J_1 \dotplus J_2$, $r(S) = 1$ und typ $S <$ typ J_i $(i = 1, 2)$. Wenn wir unter den Gruppen J_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ eine Gruppe vom Type typ S suchen, so müssen wir sie schon unter den Gruppen J_j $(j = 3, \ldots, r)$ suchen. Es sei k die Anzahl aller solcher Gruppen vom Type typ S ($k = 0$ ist auch möglich). Da $S \subseteq J_1 \dotplus J_2$ ist, haben wir nach (1)

$$G/S \cong (J_1 \dotplus J_2)/S \dotplus J_3 \dotplus \ldots \dotplus J_r \,. \tag{13}$$

Für die Untergruppe S muss auch die Relation (7) erfüllt sein und deshalb wegen (13) können wir schreiben

$$G \cong S \dotplus (J_1 \dotplus J_2)/S \dotplus J_3 \dotplus \ldots \dotplus J_r \,. \tag{14}$$

Aber die Anzahl aller Gruppen vom Type typ S, die an der rechten Seite der Relation (14) auftreten, ist gleich $s + 1$, was im Widerspruch mit der Wahl der Zahl s und mit dem Satz 46.1 von [1] ist.

Die Gruppe G ist also total $\mathfrak{R}$-reduzibel und das Lemma ist bewiesen.

Satz 2. *Ist G eine solche reduzierte torsionsfreie Gruppe, dass für jede ihre Servanzuntergruppe H die Relation (7) gilt, so ist G eine total $\mathfrak{R}$-reduzible Gruppe von endlichem Range.*

Beweis. Der Satz ist eine unmittelbare Folgerung des Lemma 3, 4 und 5.

Von beiden bewiesenen Sätzen erhalten wir gleich die folgende Behauptung.

Satz 3. *Ist G eine reduzierte torsionsfreie Gruppe, so gilt für jede ihre Servanzuntergruppe H die Formel (7) genau dann, falls G total $\mathfrak{R}$-reduzibel ist.*

Diesen Satz können wir noch gewissermassen verallgemeinern.