Zusammenfassung

BEITRAG ZU DEN ITERATIONSVERFAHREN FÜR DIE LÖSUNG DER SYSTEME LINEARER GLEICHUNGEN MIT NICHTSYMMETRISCHER MATRIX VOM SPEZIELLEN TYPUS

MIROSLAV ŠISLER, Praha

In der Arbeit wird eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz eines Iterationsverfahrens zur Lösung eines Systems linearer Gleichungen $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ angegeben, wo $\boldsymbol{A}$ eine nichtsymmetrische Matrix vom speziellen Typus ist. Der Satz 1 und 2 enthält diese Behaptungen: Es sei $\boldsymbol{A}$ eine quadratische Matrix und $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^*$ eine negativ bzw. positiv definite Matrix. Falls man die Matrix $\boldsymbol{A}$ in der Form $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q} - 2\boldsymbol{P}$ ausdrückt, wo $\boldsymbol{Q}$ eine positiv bzw. negativ definite Hermitesche Matrix und $\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{A}$ eine nichtsinguläre Matrix ist, dann ist die Matrix $\boldsymbol{P}$ nichtsingulär und alle Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P})$ sind im Absolutbetrag kleiner als 1. Die Matrix $\boldsymbol{A}$ kann man sogar so zerlegen, dass $\boldsymbol{P}$ eine Dreiecksmatrix ist.

Der Beweis des Satzes 2 enthält auch die Methode für die Verwirklichung einer solcher Zerlegung. Falls man die Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ in der Form $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$ schreibt, wo $\boldsymbol{A}_0$ die Diagonalmatrix mit den Elementen a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$, und $\boldsymbol{A}_1 = (b_{ij})$ die Dreiecksmatrix, für die $b_{ij} = a_{ij}$, $i > j$, und $b_{ij} = 0$, $i \leqq j$, gilt, bezeichnet, kann man z.B. $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_1^*$ und $\boldsymbol{P} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{A})$ wählen. Dabei ist $\boldsymbol{D}$ eine Diagonalmatrix mit positiven bzw. negativen Elementen von genügend grössen Absolutbetrag.

Der Satz 2 ethält die Behauptung, dass das durch die Formel (12) definierte Iterationsverfahren bei beliebigem Anfangsvektor $\boldsymbol{x}_0$ zur Lösung $\boldsymbol{a}$ des Systems $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ konvergiert. Es gelten dabei die Fehlerabschätzungen (13), (14), (15), (16), (21), (22), wo $\delta_\nu = \|\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}\|$, $d_\nu = \|\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu\|$ ist. Man wählt dabei eine solche Norm des Vektors und die entsprechende Norm der Matrix, dass die Ungleichung $q = \|\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P})\| < 1$ gilt.

Aus der Formel (12) folgt sofort die Formel (20), sodass man bei jedem Schritt ein System linearer Gleichungen mit einer Dreiecksmatrix löst.

Wenn die nichtsymmetrische Matrix $\boldsymbol{A}$ von spezieller Form $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{S}$ ist, wo $\boldsymbol{A}_0$ eine Diagonalmatrix und $\boldsymbol{S}$ eine schiefsymmetrische Matrix ist, kann man die Voraussetzung über die Matrix $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^*$ im Satze 1 durch die Voraussetzung ersetzen, dass die alle reellen Teile der Diagonalelemente der Matrix $\boldsymbol{A}$ negative bzw. positive Zahlen sind.