

Werk

Label: Article

Jahr: 1965

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0090|log165

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

VĚTA O KONVOLUCI OBRAZŮ PŘI LAPLACEOVĚ TRANSFORMACI

MILOŠ NOVOTNÝ, Praha

(Došlo dne 13. června 1964)

Při technických aplikacích Laplaceovy transformace používá se dost často věty o tzv. konvoluci obrazů, přestože v běžných matematických monografiích o Laplaceově transformaci není tato věta buď vůbec uvedena nebo ji tam nalézáme za předpokladů natolik silných, že v praxi nemusí být splněny, a v trochu jiné podobě, než v jaké se ji v praxi užívá (viz [1], kap. VIII, § 6, věta IV_a⁰). Tato práce obsahuje proto důkazy věty o konvoluci obrazů v jejím tradičním tvaru a za poměrně slabých předpokladů.

Tato práce předpokládá znalost základů teorie Laplaceovy transformace (viz [1], kap. III. až VIII.) a teorie Lebesgueovy míry a Lebesgueova integrálu (viz [2], kap. I. až VIII.). Měrou a integrálem myslíme všude Lebesgueovu míru a Lebesgueův integrál. Speciálně absolutně konvergentním integrálem myslíme Lebesgueův integrál podle obvyklé definice ([2], kap. III.) na rozdíl od nevlastního Lebesgueova integrálu podle zobecněné definice ([2], kap. VIII.), který může konvergovat i neabsolutně.

Věta 1. *Předpokládejme:*

- 1) *Množina $M \subset \langle 0, +\infty \rangle$ má míru 0.*
- 2) *V okolí každého $t \in \langle 0, +\infty \rangle - M$ má funkce f konečnou variaci.*
- 3) *$f(t) = \frac{1}{2} \left[\lim_{\tau \rightarrow t-} f(\tau) + \lim_{\tau \rightarrow t+} f(\tau) \right]$ pro všechna $t \in \langle 0, +\infty \rangle - M$.*
- 4) *Integrál $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ absolutně konverguje pro $x(f) < \operatorname{Re} p < +\infty$.*
- 5) *$x(f) < x < +\infty$ a $C(x)$ je přímka s rovnicí $z = x + iy$ pro $-\infty < y < +\infty$.*
- 6) *Integrál $\int_{C(x)} F(z) dz$ absolutně konverguje.*
- 7) *Integrál $G(p) = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt$ absolutně konverguje pro $x(g) < \operatorname{Re} p < +\infty$.*

Potom pro všechna p , splňující nerovnost

$$(1) \quad x(g) + x < \operatorname{Re} p < +\infty,$$

platí

$$(2) \quad \int_0^{+\infty} f(t) g(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(x)} F(z) G(p-z) dz;$$

integrály na obou stranách (2) absolutně konvergují.

Důkaz: Omezme se na p , splňující (1). Označme $|C(x)|$ množinu všech komplexních z takových, že $z = x + iy$, kde $-\infty < y < +\infty$. Potom podle 6) a 7) konvergují integrály $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)| dy$ a $\int_0^{+\infty} |g(t)| e^{-(\operatorname{Re} p - x)t} dt$ a tedy také integrál

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty < y < +\infty} \int_{0 \leq t < +\infty} |F(x + iy)| |g(t)| e^{-(\operatorname{Re} p - x)t} dt dy. \text{ Protože podle 4) a 7) } |F(z) g(t) e^{-(p-z)t}| = \\ & = |F(x + iy)| |g(t)| e^{-(\operatorname{Re} p - x)t} \text{ pro všechna } z \in |C(x)| \text{ a skoro všechna } 0 \leq t < +\infty, \\ & \text{ musí tedy integrál } \int_{0 \leq t < +\infty} \int_{z \in |C(x)|} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dt dz \text{ absolutně konvergovat, takže} \\ & \text{ podle Fubiniovy věty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \int_0^{+\infty} g(t) e^{-pt} \left[\int_{C(x)} F(z) e^{tz} dz \right] dt &= \int_{0 \leq t < +\infty} \int_{z \in |C(x)|} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dt dz = \\ &= \int_{C(x)} F(z) \left[\int_0^{+\infty} g(t) e^{-(p-z)t} dt \right] dz. \end{aligned}$$

Z 1) až 5) plyne však podle věty o inverzní transformaci k transformaci Laplaceově ([1], kap. VI., § 5, věta 2.), že

$$(4) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C(x)} F(z) e^{tz} dz = f(t) \quad \text{pro skoro všechna } t \in (0, +\infty),$$

a 7) a 1) dává vzorec

$$(5) \quad \int_0^{+\infty} g(t) e^{-(p-z)t} dt = G(p-z).$$

Dosazením (4) a (5) do (3) dostaneme dokazovaný vzorec (2).

Absolutní konvergence integrálů na obou stranách (2) plyne ze (3) po dosazení (4) a (5).

Ve větě 1. předpokládáme poměrně málo o funkci g , ale zato poměrně mnoho o funkci f ; zejména předpoklad 6) je dosti silný. Odvodíme proto ještě další větu, kde předpoklady o funkci g budou zesíleny, kdežto předpoklady o funkci f zeslabeny; zejména oslabíme předpoklad 6).

Věta 2. Předpokládejme:

- 1) Množina $M \subset \langle 0, +\infty \rangle$ má míru 0.
- 2) V okolí každého $t \in \langle 0, +\infty \rangle - M$ má funkce f konečnou variaci.
- 3) $f(t) = \frac{1}{2} [\lim_{\tau \rightarrow t-} f(\tau) + \lim_{\tau \rightarrow t+} f(\tau)]$ pro všechna $t \in \langle 0, +\infty \rangle - M$.
- 4) Integrál $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ konverguje absolutně pro $x(f) < \operatorname{Re} p < +\infty$.
- 5) $x(f) < x < +\infty$ a $C(x)$ je přímka s rovnicí $z = x + iy$ pro $-\infty < y < +\infty$.
- 6) Jsou-li t_1 a t_2 libovolná čísla taková, že $0 < t_1 \leq t_2 < +\infty$, nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x + iy) e^{ity} dy$ konverguje stejnoměrně pro všechna $t_1 \leq t < t_2$.
- 7) Integrál $\int_{C(x)} [F(z)/(p - z)] dz$ konverguje absolutně pro $x < \operatorname{Re} p < +\infty$.
- 8) Funkce g je omezená v intervalu $\langle 0, t_1 \rangle$ a absolutně spojitá v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ pro všechna $0 < t_1 \leq t_2 < +\infty$.
- 9) Integrál $\int_0^{+\infty} g'(t) e^{-pt} dt$ konverguje absolutně pro $x(g') < \operatorname{Re} p < +\infty$.

Potom platí:

I. Integrál $G(p) = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-pt} dt$ konverguje absolutně pro $x(g') < \operatorname{Re} p < +\infty$.

II. Pro všechna p , splňující nerovnost

$$(6) \quad \max [x(g') + x, x] < \operatorname{Re} p < +\infty,$$

je

$$(7) \quad \int_0^{+\infty} f(t) g(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(x)} F(z) G(p - z) dz,$$

kde integrál vlevo resp. vpravo může konvergovat i neabsolutně resp. konverguje absolutně.

Důkaz: Z 8), 9) a věty o obrazu derivace ([1], kap. VIII., § 1., věta 1.) plyne ihned I.

Omezme se na p , splňující (6), a na $z \in |C(x)|$; přitom $|C(x)|$ je opět množina všech $z = x + iy$ takových, že $-\infty < y < +\infty$. Dále nechť t_1 a t_2 jsou libovolná čísla taková, že $0 < t_1 \leq t_2 < +\infty$.

Podle 8) je funkce $g(t) e^{-(p-z)t}$ spojitá a splňuje vzorec $|g(t) e^{-(p-z)t}| = |g(t)| \cdot e^{-(\operatorname{Re} p - x)t}$ pro $[t, z] \in \langle t_1, t_2 \rangle \times |C(x)|$. Protože pravá strana poslední rovnosti má podle 8) v $\langle t_1, t_2 \rangle$ integrál, je funkce $\int_{t_1}^{t_2} g(t) e^{-(p-z)t} dt$ podle věty o spojitosti integrálu, závislého na parametru ([2], kap. VII., věta 107.) spojitá pro $z \in |C(x)|$. Podle 4), 5) a věty o derivaci obrazu ([1], kap. IV., § 1., věta 6.) je funkce F analytická pro $z \in |C(x)|$. Z toho a z předchozího plyne, že funkce $\int_{t_1}^{t_2} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dt$ je spojitá a tedy měřitelná pro $z \in |C(x)|$.

Z (6) plyne $\operatorname{Re} (p - z) = \operatorname{Re} p - x > 0$ a tedy $p \neq z$ pro $z \in |C(x)|$. Podle 8) a věty o integraci po částech tedy dostáváme

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t) e^{-(p-z)t} dt = \left[-g(t) \frac{e^{-(p-z)t}}{p - z} \right]_{t=t_1}^{t=t_2} + \int_{t_1}^{t_2} g'(t) \frac{e^{-(p-z)t}}{p - z} dt,$$

takže

$$(8) \quad \left| \int_{t_1}^{t_2} g(t) e^{-(p-z)t} dt \right| \leq \frac{1}{|p-z|} \left[|g(t_1)| e^{-(\operatorname{Re} p - x)t_1} + |g(t_2)| e^{-(\operatorname{Re} p - x)t_2} + \int_{t_1}^{t_2} |g'(t)| e^{-(\operatorname{Re} p - x)t} dt \right].$$

Podle (6)

$$(9) \quad x(g') < \operatorname{Re} p - x < +\infty,$$

takže podle předpokladu 9) a věty o obrazu derivace ([1], kap. VIII., § 1., věta 1.)

$$g(t) = o \left[e^{(\operatorname{Re} p - x)t} \right] \quad t \rightarrow +\infty.$$

Ke každému $\varepsilon \in (0, +\infty)$ existuje tedy $T \in \langle 0, +\infty \rangle$ takové, že $|g(t)| e^{-(\operatorname{Re} p - x)t} < \varepsilon$ pro $T < t < +\infty$. Protože dále podle 8) je funkce g omezená v $\langle 0, T \rangle$, funkce $|g(t)| e^{-(\operatorname{Re} p - x)t}$ je omezená pro všechna $t \in \langle 0, +\infty \rangle$. První dva členy hranaté závorky na pravé straně (8) jsou tedy omezené pro všechna $0 < t_1 \leq t_2 < +\infty$. Z (8), (9) a 9) však plyne, že i poslední člen hranaté závorky na pravé straně je omezený pro všechna $0 < t_1 \leq t_2 < +\infty$. Existuje tedy číslo $A \in (0, +\infty)$ takové, že

$$(10) \quad \left| \int_{t_1}^{t_2} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dt \right| \leq A \left| \frac{F(z)}{p-z} \right|$$

pro všechna $0 < t_1 \leq t_2 < +\infty$ a $z \in |C(x)|$.

Z (6) plyne $\operatorname{Re}(p-z) = \operatorname{Re} p - x > x(g')$ pro $z \in |C(x)|$, takže podle tvrzení I., které jsme už dokázali, integrál $\int_0^{+\infty} g(t) e^{-(p-z)t} dt$ absolutně konverguje k výrazu $G(p-z)$. Proto

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0+ \\ t_2 \rightarrow +\infty}} \int_{t_1}^{t_2} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dt &= F(z) \int_0^{+\infty} g(t) e^{-(p-z)t} dt = \\ &= F(z) G(p-z) \quad \text{pro } z \in |C(x)|. \end{aligned}$$

Z toho všeho a ze 7) plyne podle jedné z vět o záměně limity a integrálu ([2], kap. III., věta 65.), že integrály $\int_{C(x)} \left[\int_{t_1}^{t_2} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dt \right] dz$ pro všechna $0 < t_1 \leq t_2 < +\infty$ a

$$\int_{C(x)} \left[\int_0^{+\infty} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dt \right] dz = \int_{C(x)} F(z) G(p-z) dz$$

konvergují absolutně, čímž je dokázána druhá část tvrzení II, a že

$$\begin{aligned} (12) \quad \int_{C(x)} F(z) G(p-z) dz &= \int_{C(x)} \left[\int_0^{+\infty} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dt \right] dz = \\ &= \lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0+ \\ t_2 \rightarrow +\infty}} \int_{C(x)} \left[\int_{t_1}^{t_2} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dt \right] dz. \end{aligned}$$

Označme $C(x; y_1, y_2)$ úsečku s rovnicí $z = x + iy$ pro $y_1 \leq y \leq y_2$ a $|C(x; y_1, y_2)|$ množinu všech $z = x + iy$ takových, že $y_1 \leq y \leq y_2$, takže $|C(x; y_1, y_2)|$ je uzavřená část $|C(x)|$. Z analytičnosti F pro $z \in |C(x)|$ a z 8) plyne omezenost $F(z) g(t) e^{-(p-z)t}$ pro $[t, z] \in \langle t_1, t_2 \rangle \times |C(x; y_1, y_2)|$, takže integrál $\iint_{\substack{t_1 \leq t \leq t_2 \\ z \in |C(x; y_1, y_2)|}} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dt dz$ absolutně konverguje a tedy podle Fubiniovy věty

$$(13) \quad \int_{C(x; y_1, y_2)} \left[\int_{t_1}^{t_2} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dt \right] dz = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{C(x; y_1, y_2)} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dz \right] dt.$$

Integrál za limitou na pravé straně (12) lze tedy napsat ve tvaru

$$(14) \quad \begin{aligned} \int_{C(x)} \left[\int_{t_1}^{t_2} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dt \right] dz &= \lim_{\substack{y_1 \rightarrow -\infty \\ y_2 \rightarrow +\infty}} \int_{C(x; y_1, y_2)} \left[\int_{t_1}^{t_2} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dt \right] dz = \\ &= \lim_{\substack{y_1 \rightarrow -\infty \\ y_2 \rightarrow +\infty}} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{C(x; y_1, y_2)} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dz \right] dt. \end{aligned}$$

Podle (13) jsou $\int_{C(x; y_1, y_2)} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dz$ pro všechna $-\infty < y_1 \leq y_2 < +\infty$ měřitelné funkce proměnné t v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$. Protože podle 6) integrál

$$\int_{C(x)} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dz = ig(t) e^{-(p-z)t} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + iy) e^{ity} dy$$

konverguje stejnoměrně pro všechna $t_1 \leq t \leq t_2$, platí

$$\lim_{\substack{y_1 \rightarrow -\infty \\ y_2 \rightarrow +\infty}} \int_{C(x; y_1, y_2)} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dz = \int_{C(x)} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dz$$

stejnoměrně pro všechna $t_1 \leq t \leq t_2$. Z toho a z existence integrálu na pravé straně (13) plyne podle jedné z vět o záměně limity a integrálu ([2], kap. III., věta 56.) vzorec

$$(15) \quad \begin{aligned} \lim_{\substack{y_1 \rightarrow -\infty \\ y_2 \rightarrow +\infty}} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{C(x; y_1, y_2)} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dz \right] dt &= \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left[\lim_{\substack{y_1 \rightarrow -\infty \\ y_2 \rightarrow +\infty}} \int_{C(x; y_1, y_2)} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dz \right] dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{C(x)} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dz \right] dt, \end{aligned}$$

kde vnitřní integrál na pravé straně může být i nevlastní.

Ze (14) a (15) plyne však

$$\int_{C(x)} \left[\int_{t_1}^{t_2} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dt \right] dz = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{C(x)} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dz \right] dt,$$

kde vnitřní integrál na pravé straně může být i nevlastní, což dosazeno (12) dává

$$(16) \quad \int_{C(x)} F(z) G(p-z) dz = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0+ \\ t_2 \rightarrow +\infty}} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{C(x)} F(z) g(t) e^{-(p-z)t} dz \right] dt = \\ = \int_0^{+\infty} \left[\int_{C(x)} F(z) e^{tz} dz \right] g(t) e^{-pt} dt,$$

kde vnitřní i vnější integrál na pravé straně mohou být i nevlastní.

Ale podle 1) až 5) a věty o inverzní transformaci k transformaci Laplaceově ([1], kap. VI., § 5., věta 2.) $\int_{C(x)} F(z) e^{tz} dz = 2\pi i f(t)$ pro skoro všechna $t \in \langle 0, +\infty \rangle$, což dosazeno do (16) dává dokazovaný vzorec ve II. Tím je důkaz hotov.

Uveďme ještě dostačující podmínku proto to, aby byl splněn předpoklad 6) věty 2.:

Lemma 1. *Předpokládejme:*

- 1) Jsou splněny předpoklady 4) a 5) věty 2.
- 2) Existuje $Y_1 \in (0, +\infty)$ takové, že funkce $F_1(y) = \operatorname{Re} F(x + iy)$ a $F_2(y) = \operatorname{Im} F(x + iy)$ jsou monotónní v intervalu $(-\infty, -Y_1)$ i v intervalu $(Y_1, +\infty)$.
- 3) $\lim_{|y| \rightarrow +\infty} F(x + iy) = 0$.

Potom je splněn předpoklad 6) věty 2.

Důkaz: Zvolme libovolná t_1 a t_2 taková, že $0 < t_1 \leq t_2 < +\infty$, a libovolné $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Podle 2) a 3) existuje k tomuto ε takové $Y_2 \in (0, +\infty)$, že

$$(17) \quad |F_k(y)| \leq |F(x + iy)| < \frac{1}{16} \varepsilon t_1 \quad \text{pro} \quad Y_2 \leq |y| < +\infty \quad (k = 1, 2).$$

Pro všechna a a b taková, že $-\infty < a \leq b < +\infty$, platí dále nerovnost

$$(18) \quad \left| \int_a^b \varphi(ty) dy \right| \leq \frac{2}{t} \leq \frac{2}{t_1}$$

pro všechna $t_1 \leq t \leq t_2$ a pro $\varphi(ty) = \sin ty$, nebo $\varphi(ty) = \cos ty$.

Označme nyní $Y = \max(Y_1, Y_2) = -\min(-Y_1, -Y_2)$. Potom pro všechna y_1 a y_2 taková, že buď $-\infty < y_1 \leq y_2 < -Y$ nebo $Y < y_1 \leq y_2 < +\infty$, dává 2) a druhá integrální věta o střední hodnotě ([2], kap. V., věta 101.) vzorec

$$\int_{y_1}^{y_2} F_k(y) \varphi(ty) dy = F_k(y_1) \int_{y_1}^{\eta_k} \varphi(ty) dy + F_k(y_2) \int_{\eta_k}^{y_2} \varphi(ty) dy$$

pro jisté $\eta_k \in \langle y_1, y_2 \rangle$ ($k = 1, 2$), takže podle (17) a (18)

$$\left| \int_{y_1}^{y_2} F_k(y) \varphi(ty) dy \right| < \frac{\varepsilon t_1}{16} \cdot \frac{2}{t_1} + \frac{\varepsilon t_1}{16} \cdot \frac{2}{t_1} = \frac{1}{4} \varepsilon$$