Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

LES CONNEXIONS NON-LINÉAIRES SUR LA VARIETE A_m^n

BOHUMIL CENKL, Praha

(Reçu le 4 janvier 1963)

Dans le présent travail, on détermine la connexion affine tangente à une connexion ponctuelle non-linéaire donnée sur A_m^n avec ses centres ponctuels dans les espaces locaux. On trouve ensuite les connexions non-linéaires telles que leur connexion affine tangente soit la connexion affine osculatrice. On caractérise aussi géométriquement quelques types spéciaux de connexions ponctuelles non-linéaires.

1. Soit donnée une variété différentiable X_m à m dimensions. A chaque point x^α [1]) de la variété X_m associons un espace affine $A_n(x)$ à n dimensions. Nous obtenons ainsi la variété de König A_m^n. Soit

$$M, I_1, \dots, I_n \tag{1.1}$$

la base choisie dans A_n. Les transformations admissibles des paramètres sur X_m et de la base dans A_n sont

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\alpha)\,; \quad \Delta = \operatorname{Det} |A_\alpha^{\alpha'}| \neq 0\,, \quad A_\alpha^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\,; \tag{1.2}$$
$$M = M'\,, \quad I_a = \sigma_a^{a'} I_{a'}\,, \quad \sigma = \operatorname{Det} |\sigma_a^{a'}| \neq 0$$

où les fonctions $\sigma_a^{a'}$ ne dépendent que du point x^α. Désignons par $\sigma_{a'}^a$ les éléments de la matrice inverse de $\|\sigma_a^{a'}\|$. Nous avons alors

$$\sigma_{a'}^a \sigma_b^{a'} = \delta_b^a\,, \quad \sigma_{a'}^a \sigma_a^{b'} = \delta_{a'}^{b'}\,. \tag{1.3}$$

Considérons ensuite l'espace vectoriel $V_n(x)$ dont les éléments sont les vecteurs de l'espace affine $A_n(x)$. Un point x^α de la variété X_m et la direction déterminée par un vecteur $u^a \in V_n(x)$ forment ce qu'on appelle élément (x, u). Le point x^α est appelé centre de l'élément (x, u). Notons E_m^n la variété des éléments (x, u); elle est manifestement à $m + n - 1$ dimensions. L'espace affine $A_n(x)$ associé au point x^α de la variété X_m peut également être considéré comme un espace affine associé à l'élément (x, u) de l'espace E_m^n. En effet, u^a est un vecteur de $A_n(x)$. La base (1) étant choisie,

[1]) On a $a, b, \dots = 1, 2, \dots, n$; $\alpha, \beta, \dots = 1, 2, \dots, m$; $\tilde{a}, \tilde{b}, \dots = 0, 1, 2, \dots, n$.

déterminons, sur la variété de König ainsi définie ayant E^n_m pour sa base et A_n pour son espace local, la connexion affine par les formes

$$\begin{aligned}(1.4)\qquad \omega^a &= \Gamma^a_\alpha(x, u)\,\mathrm{d}x^\alpha + G^a_c(x, u)\,\mathrm{d}u^c\,,\\ \omega^b_a &= \Gamma^b_{a\alpha}(x, u)\,\mathrm{d}x^\alpha + G^b_{ac}(x, u)\,\mathrm{d}u^c\,.\end{aligned}$$

Or, demandons que les formes (4) dépendent seulement des coordonnées $(x^1, \ldots, \ldots, x^m, t^1, \ldots, t^{n-1})$ où $u^\tau = t^\tau u^n$ $(\tau = 1, 2, \ldots, n-1)$. Pour cela, il faut évidemment, et il suffit, que les formes (4) ne varient pas si nous multiplions u^a par un facteur scalaire $\varrho(x, u, v)$, v étant un paramètre arbitraire. Il se fait voir que cette condition est exprimée par les équations

$$\begin{aligned}(1.5)\qquad \Gamma^a_{\tilde{b}\alpha}(x, \varrho u) = \Gamma^a_{\tilde{b}\alpha}(x, u)\,,\quad G^a_{\tilde{b}c}(x, \varrho u) &= \varrho^{-1} G^a_{\tilde{b}c}(x, u)\,,\\ G^a_{\tilde{b}c}(x, u)\,u^c &= 0\,,\end{aligned}$$

où nous posons $\Gamma^a_{0\alpha} = \Gamma^a_\alpha$, $G^a_{0\alpha} = G^a_\alpha$. Si nous nous bornons au cas où ϱ est une constante réelle, nous pourrons remplacer les conditions (5) par $(5_{1,2})$, c'est-à-dire que la dernière des équations (5) pourra ne pas être vérifiée. Nous pouvons écrire les équations qui déterminent la connexion linéaire sur la variété de König définie ci-dessus sous la forme de

$$(1.6)\qquad \mathrm{d}M = \omega^a I_a\,,\quad \mathrm{d}I_a = \omega^b_a I_b\,.$$

Nous dirons que le vecteur $Y(x) = u^a(x)\,I_a(x)$ se transporte parallèlement suivant la courbe $c : x^\alpha = x^\alpha(t)$, $t \in I = \langle t_1, t_2 \rangle$ sur X_m lorsque les coordonnées $u^a(x(t))$ du vecteur Y le long la courbe c vérifient les équations

$$(1.7)\qquad \frac{\mathrm{d}u^a}{\mathrm{d}t} + u^b\left(\Gamma^a_{b\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} + G^a_{bc}\frac{\mathrm{d}u^c}{\mathrm{d}t}\right) = 0\,.$$

Nous dirons que le point $A(x) = M(x) + u^a(x)\,I_a(x)$ se transporte parallèlement le long de la courbe c, lorsque les coordonnées du point A le long de la courbe c vérifient l'équation

$$(1.8)\qquad \frac{\mathrm{d}u^a}{\mathrm{d}t} + u^b\Gamma^a_{b\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} + \Gamma^a_\alpha\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} + G^a_c\frac{\mathrm{d}u^c}{\mathrm{d}t} + G^a_{bc}u^b\frac{\mathrm{d}u^c}{\mathrm{d}t} = 0\,.$$

Ayant ainsi définit le transport parallèle suivant les courbes sur la variété X_m, nous parlons *d'une connexion ponctuelle non-linéaire*, ou bien tout court de la connexion non-linéaire (Γ, G) *sur la variété* A^n_m. Compte tenu transformations admissibles (2), on peut montrer que nous avons les formules de transformation que voici

$$\begin{aligned}(1.9)\qquad \Gamma^a_\alpha &= \Gamma^{\alpha'}_{\alpha'} A^{\alpha'}_\alpha \sigma^a_{a'} + G^{a'}_{c'}\sigma^a_{a'}\partial_\alpha\sigma^{c'}_c u^c\,,\\ \Gamma^b_{a\alpha} &= \sigma^{a'}_a\sigma^b_{b'}(\Gamma^{b'}_{a'\alpha'}A^{\alpha'}_\alpha + G^{b'}_{a'c'}\partial_\alpha\sigma^{c'}_c u^c) - \partial_\alpha\sigma^b_{a'}\sigma^{a'}_a\,,\\ G^b_{ac} &= G^{b'}_{a'c'}\sigma^b_{b'}\sigma^{a'}_a\sigma^{c'}_c\,,\quad G^a_c = G^{a'}_{c'}\sigma^{c'}_c\sigma^a_{a'}\,.\end{aligned}$$

Nous entendrons par *différentielle absolue* d'un vecteur contrevariant u^a l'expression

$$\text{(1.10)} \qquad \mathrm{D}u^a = \mathrm{d}u^a + u^b(\Gamma^a_{b\alpha}\,\mathrm{d}x^\alpha + G^a_{bc}\,\mathrm{d}u^c)\,.$$

Nous pouvons évidemment écrire $\mathrm{D}u^a = (\delta^a_c + u^b G^a_{bc})\,\mathrm{d}u^c + u^b\Gamma^a_{b\alpha}\,\mathrm{d}x^\alpha$. Nous voyons que nous avons sur la variété E^n_m, le champ tensoriel

$$\text{(1.11)} \qquad \Phi^a_c = \delta^a_c + u^b G^a_{bc}\,.$$

Supposons ensuite que nous ayons $\Phi = \mathrm{Det}\,|\Phi^a_c| \neq 0$. Dans ce cas-là, nous dirons que la connexion définie sur l'espace des éléments est régulière. Dans la suite, nous ne considérerons que des connexions régulières, mais nous les appellerons connexions tout court.

Définissons maintenant les grandeurs M^b_a à l'aide des expressions

$$\text{(1.12)} \qquad M^b_a\Phi^c_b = \delta^c_a\,, \quad M^b_a\Phi^a_c = \delta^b_c\,.$$

En vertu de (10) et (11) nous avons donc

$$\text{(1.13)} \qquad \mathrm{d}u^b = M^b_a(\mathrm{D}u^a - u^c\Gamma^a_{c\alpha}\,\mathrm{d}x^\alpha)\,.$$

Les formes qui déterminent la connexion de la variété A^n_m peuvent maintenant s'écrire comme

$$\omega^a = (\Gamma^a_\alpha - M^c_b G^a_c \Gamma^b_{e\alpha}u^e)\,\mathrm{d}x^\alpha + G^a_c M^c_b\,\mathrm{D}u^b\,,$$

$$\omega^b_a = (\Gamma^b_{a\alpha} - M^c_e G^b_{ac}\Gamma^e_{h\alpha}u^h)\,\mathrm{d}x^\alpha + G^b_{ac}M^c_e\,\mathrm{D}u^e\,.$$

Si nous posons maintenant

$$\text{(1.14)} \qquad \overset{*}{\Gamma}{}^b_{a\alpha} = \Gamma^b_{a\alpha} - M^c_e G^b_{ac}\Gamma^e_{h\alpha}u^h\,, \quad \overset{*}{G}{}^b_{ac} = G^b_{ae}M^e_c\,,$$

$$\overset{*}{\Gamma}{}^a_\alpha = \Gamma^a_\alpha - M^c_b G^a_c \Gamma^b_{h\alpha}u^h\,, \quad \overset{*}{G}{}^a_b = G^a_c M^c_b\,,$$

et que nous écrivions $\mathrm{D}u^c = \tilde{\omega}^c$, nous pourrons exprimer les formes ω^a, ω^b_a ainsi:

$$\text{(1.15)} \qquad \omega^a = \overset{*}{\Gamma}{}^a_\alpha\,\mathrm{d}x^\alpha + \overset{*}{G}{}^a_c\tilde{\omega}^c\,, \quad \omega^b_a = \overset{*}{\Gamma}{}^b_{a\alpha}\,\mathrm{d}x^\alpha + \overset{*}{G}{}^b_{ac}\tilde{\omega}^c\,.$$

2. Une fonction $a(x, u)$ définie sur E^n_m sera appelée *scalaire de poids p*, lorsque les transformations (1.2) font varier cette fonction suivant la loi

$$\text{(2.1)} \qquad a' = \Delta^p a\,.$$

Lorsque $p = 0$, nous parlons de scalaire tout court.

Par *tenseur de caractéristique* $\begin{pmatrix} & r \\ p, & \\ & s \end{pmatrix}$ nous entendrons l'ensemble des fonctions $T^{\alpha_1,\dots,\alpha_r}_{\beta_1,\dots,\beta_s}$ sur E^n_m avec la loi de transformation

$$T^{\alpha_1',\dots,\alpha_r'}_{\beta_1',\dots,\beta_s'} = \Delta^p T^{\alpha_1,\dots,\alpha_r}_{\beta_1,\dots,\beta_s} A^{\alpha_1'}_{\alpha_1} \dots A^{\alpha_r'}_{\alpha_r} A^{\beta_1}_{\beta_1'} \dots A^{\beta_s}_{\beta_s'} \tag{2.2}$$

pour les transformations admissibles (1.2).

Soient maintenant $Y_a(x) = \underset{a}{u}^b(x)\, I_b(x)$ n champs vectoriels linéairement indépendants sur la variété A^n_m. Soient $\overset{a}{u}_b(x)$ les fonctions vérifiant les équations

$$\underset{a}{u}^b \overset{a}{u}_c = \delta^b_c\,, \quad \underset{a}{u}^b \overset{c}{u}_b = \delta^c_a\,. \tag{2.3}$$

L'ensemble des fonctions $\underset{a}{u}^b$ (ou $\overset{a}{u}_b$, resp.) étant donné, nous dirons que nous avons un repère fondamental dans l'espace local $A_n(x)$.

Soient

$$\overset{d_1,\dots,d_u}{\underset{e_1,\dots,e_v}{T}}{}^{\alpha_1,\dots,\alpha_r}_{\beta_1,\dots,\beta_s}$$

des tenseurs de caractéristique $\begin{pmatrix} & r \\ p, & \\ & s \end{pmatrix}$. Considérons les expressions

$$T^{a_1,\dots,a_u,\alpha_1,\dots,\alpha_r}_{b_1,\dots,b_v,\beta_1,\dots,\beta_s} = \overset{d_1,\dots,d_u}{\underset{e_1,\dots,e_v}{T}}{}^{\alpha_1,\dots,\alpha_r}_{\beta_1,\dots,\beta_s} \underset{d_1}{u}^{a_1} \dots \underset{d_u}{u}^{a_n} \overset{e_1}{u}_{b_1} \dots \overset{e_v}{u}_{b_v} \tag{2.4}$$

qui se transforment par (1.2) selon la loi

$$\begin{aligned} T^{a_1',\dots,a_u',\alpha_1',\dots,\alpha_r'}_{b_1',\dots,b_v',\beta_1',\dots,\beta_s'} &= \Delta^p T^{a_1,\dots,a_u,\alpha_1,\dots,\alpha_r}_{b_1,\dots,b_v,\beta_1,\dots,\beta_s} A^{\alpha_1'}_{\alpha_1} \dots A^{\alpha_r'}_{\alpha_r}\,. \\ & A^{\beta_1}_{\beta_1'} \dots A^{\beta_s}_{\beta_s'} \sigma^{a_1'}_{a_1} \dots \sigma^{a_u'}_{a_u} \sigma^{b_1}_{b_1'} \dots \sigma^{b_u}_{b_v'}\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

L'ensemble des fonctions (4) avec la loi de transformation (5) sera appelé *tenseur de caractéristique* $\begin{pmatrix} u & & r \\ & , p, & \\ v & & s \end{pmatrix}$. Si $p = 0$, nous parlerons de tenseur tout court. Lorsque $p = r = s = 0$ et $u = 0$ (ou bien $v = 0$), nous parlerons d'un tenseur covariant (ou contrevariant, respectivement).

Par *la différentielle relative d'un tenseur de caractéristique* $\begin{pmatrix} u & & 0 \\ & , 0, & \\ v & & 0 \end{pmatrix}$, qui sera noté simplement par $\begin{pmatrix} u & \\ & , 0 \\ v & \end{pmatrix}$, *par rapport au champ vectoriel* u^a, nous entendons

$$\underset{(u)}{\mathrm{D}} T^{a_1,\dots,a_u}_{b_1,\dots,b_v} = \mathrm{d} T^{a_1,\dots,a_u}_{b_1,\dots,b_v} + T^{a_1,\dots,a_{i-1},c,a_{i+1},\dots,a_u}_{b_1,\dots,b_v} \omega^{a_i}_c - T^{a_1,\dots,a_u}_{b_1,\dots,b_{i-1},c,b_{i+1},\dots,b_v} \omega^c_{b_i}\,. \tag{2.6}$$

Considérons, à titre d'exemple, le tenseur T_{ab}. Sa différentielle relative par rapport au champ u^a est donc

$$\underset{(u)}{\mathrm{D}} T_{ab} = \mathrm{d}T_{ab} - T_{ac}\omega^c_b - T_{cb}\omega^c_a =$$

$$= \{\partial_\alpha T_{ab} - M^e_c u^h \Gamma^c_{h\alpha}\partial_e T_{ab} - T_{ac}\overset{*}{\Gamma}{}^c_{b\alpha} - T_{cb}\overset{*}{T}{}^c_{b\alpha}\}\,\mathrm{d}x^\alpha +$$

$$+ \{\partial_e T_{ab} M^e_c - T_{ac}\overset{*}{G}{}^e_{bc} - T_{eb}\overset{*}{G}{}^e_{ac}\}\,\mathrm{D}u^c\,.$$

Nous pouvons donc écrire brièvement

(2.7)
$$\underset{(u)}{\mathrm{D}} T_{ab} = T_{ab/\alpha}\,\mathrm{d}x^\alpha + T_{ab/c}\,\mathrm{D}u^c\,,$$

la signification de $T_{ab/\alpha}$ et $T_{ab/c}$ étant évidente des calculs précédents.

3. D'une manière analogue à celle appliquée dans les espaces à connexion affine, nous pouvons maintenant exprimer les tenseurs de torsion et de courbure. Par différentiation extérieure de (1.4) nous obtenons

(3.1)
$$[\mathrm{d}\omega^a] = [\omega^b\omega^a_b] - \Omega^a\,,$$
$$[\mathrm{d}\omega^b_a] = [\omega^c_a\omega^b_c] - \Omega^b_a\,,$$

où, comme il est aisé de montrer

(3.2)
$$2\Omega^a = \underset{1}{S}{}^a_{\alpha\beta}[\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta] + \underset{2}{S}{}^a_{ce}[\tilde{\omega}^c\tilde{\omega}^e] + 2\underset{3}{S}{}^a_{\alpha c}[\mathrm{d}x^\alpha\tilde{\omega}^c]\,,$$
$$2\Omega^b_a = \underset{1}{R}{}^b_{\alpha\beta a}[\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta] + \underset{2}{R}{}^b_{lha}[\tilde{\omega}^l\tilde{\omega}^h] + 2\underset{3}{R}{}^b_{\alpha la}[\mathrm{d}x^\alpha\tilde{\omega}^l]\,,$$

S et R étant le tenseur de torsion et celui de courbure. Si nous écrivons explicitement les composantes du tenseur de courbure, nous obtenons

(3.3)
$$\underset{1}{R}{}^b_{\alpha\beta a} = 2\partial_{[\beta}\overset{*}{\Gamma}{}^b_{|a|\alpha]} + 2\overset{*}{\Gamma}{}^c_{a[\alpha}\overset{*}{\Gamma}{}^b_{|c|\beta]} + 2\partial_c\overset{*}{\Gamma}{}^b_{a[\beta}\Gamma^k_{|h|\alpha]}M^c_k u^h\,,$$
$$\underset{2}{R}{}^b_{lka} = 2\partial_c\overset{*}{G}{}^b_{a[l}M^c_{k]} + 2\overset{*}{G}{}^c_{a[l}\overset{*}{G}{}^b_{|c|k]}\,,$$
$$\underset{3}{R}{}^b_{\alpha la} = \partial_c\overset{*}{\Gamma}{}^b_{a\alpha}M^c_l - \partial_\alpha\overset{*}{G}{}^b_{al} + \overset{*}{G}{}^b_{cl}\overset{*}{\Gamma}{}^c_{a\alpha} - \overset{*}{G}{}^c_{al}\overset{*}{\Gamma}{}^b_{c\alpha} + \partial_c\overset{*}{G}{}^b_{al}M^c_k\Gamma^k_{h\alpha}u^h\,.$$

D'une manière analogue, le tenseur de torsion peut être exprimé sous la forme

(3.4)
$$\underset{1}{S}{}^a_{\alpha\beta} = 2\partial_{[\beta}\overset{*}{\Gamma}{}^a_{\alpha]} + 2\overset{*}{\Gamma}{}^b_{[\alpha}\Gamma^a_{|b|\beta]} + 2\partial_c\overset{*}{\Gamma}{}^a_{[\beta}\Gamma^b_{|h|\alpha]}M^c_b u^h\,,$$
$$\underset{2}{S}{}^a_{hl} = 2\partial_c\overset{*}{G}{}^a_{[h}M^c_{l]} + 2\overset{*}{G}{}^b_{[h}\overset{*}{G}{}^a_{|b|l]}\,,$$
$$\underset{3}{S}{}^a_{\alpha b} = \partial_c\overset{*}{\Gamma}{}^a_\alpha M^c_b - \partial_\alpha\overset{*}{G}{}^a_b + \overset{*}{\Gamma}{}^c_\alpha\overset{*}{G}{}^a_{cb} - \overset{*}{\Gamma}{}^a_{c\alpha}\overset{*}{G}{}^c_b + \partial_c\overset{*}{G}{}^a_b M^c_l T^l_{h\alpha}u^h\,.$$

4. Dans cette partie de notre travail nous allons considérer l'approximation d'une connexion non-linéaire sur une variété de König A^n_m par une connexion affine générale, définie ci-dessous, dans le cas où l'on a

$$G^b_{ca} = G^b_a = 0 . \tag{4.1}$$

Soit donc donnée une variété de König A^n_m. Nous dirons qu'une *connexion affine générale* est donnée sur la variété A^n_m, lorsque pour toute courbe $c : x^\alpha = x^\alpha(t)$, $t \in I$, sur la variété X_m, et pour tout espace local $A_n(x(t_0))$, $t_0 \in I$, on se donne une affinité $\mathscr{A}_c(t_0, t)$, $t \in I$, de l'espace $A_n(x(t_0))$ sur l'espace $A_n(x(t))$. L'application $t \to \mathscr{A}_c(t_0, t)$ est une application différentiable de I dans l'ensemble des affinités de l'espace $A_n(x(t_0))$ sur l'espace $A_n(x(t))$, pour $t \in I$ arbitraire.

Remarquons que pour une connexion affine générale sur la variété A^n_m, l'affinité $\mathscr{A}_c(t_0, t)$ de l'espace $A_n(x(t_0))$ sur $A_n(x(t))$, les points $x(t_0)$, $x(t)$ étant fixés sur la courbe c, ne coïncide généralement pas avec l'affinité $\mathscr{A}_c(t, t_0)$ de l'espace $A_n(x(t))$ sur $A_n(x(t_0))$. En effet, l'affinité $\mathscr{A}_c(t_0, t)$ dépend de la courbe c et du choix du point $x(t_0)$ sur c, c'est-à-dire qu'elle dépend de la courbe c „centrée". Dans le cas où l'affinité $\mathscr{A}_c(t_0, t)$ coïncide avec $\mathscr{A}_c(t, t_0)$ pour toute paire t_0, $t \in I$, nous obtenons une connexion affine sur la variété de König, au sens usuel. L'approximation de la connexion non-linéaire par la connexion affine générale qui vient d'être définie, sera entendue comme suit: Si nous avons une courbe $c : x^\alpha = x^\alpha(t)$, $t \in I_1 = \langle t_1, t_2 \rangle$, $x^\alpha(t_1) = \underset{1}{x}{}^\alpha$, $x^\alpha(t_2) = \underset{2}{x}{}^\alpha$ sur la variété X_m, le transport parallèle de l'espace affine $A_n(\underset{1}{x})$ le long de la courbe c sur l'espace $A_n(x(t))$, $t \in I_1$, est donné par la solution des équations (1.8) dans l'intervalle I_1. Si nous fixons un point A dans l'espace $A_n(\underset{1}{x})$ et prenons la solution $u^a(t)$ des équations (1.8) avec la condition initiale $u^a(t_1) = \underset{1}{u}{}^a$, où $A = M(\underset{1}{x}) + \underset{1}{u}{}^a I_a(\underset{1}{x})$, alors le point $B = M(x) + u^a(t)\, I_a(x)$ sera le point A transporté parallèlement par la connexion non-linéaire donnée. Supposons maintenant, pour simplifier l'écriture, que l'intervale I coïncide avec l'intervalle I_1, cela veut dire que les équations (1.8) admettent une solution dans l'intervalle I. Le transport parallèle des points par la connexion non-linéaire nous détermine une application $\mathscr{C}_c$ de l'espace affine $A_n(\underset{1}{x})$ sur $A_n(\underset{2}{x})$, donc une correspondance existant entre les espaces affines considérés, mais qui dépend de la courbe c. On sait bien qu'à toute correspondance générale C_c il est associé une et une seule affinité tangente $\mathscr{A}_c$ correspondant au choix du point A de l'espace local $A_n(\underset{1}{x})$ (voir [3]). Cette affinité dépend, dans le point considéré, d'une part de la courbe c, d'autre part du choix de l'espace local $A_n(\underset{1}{x})$ et du point A en cet espace. Si nous avons donc une variété de König A^n_m aux espaces locaux centrés, c'est-à-dire si nous fixons un point en chaque espace local, nous obtenons pour la connexion non-linéaire donnée, une et une seule connexion affine générale, que nous appelons *connexion affine tangente* à la connexion non-linéaire donnée. Si $\mathscr{A}_c$ est l'affinité osculatrice à la correspondance $\mathscr{C}_c$ dans le point A de l'espace local $\underset{1}{A_n}(\underset{1}{x})$, x étant un point arbitraire de la variété X_m, la connexion affine tangente sera appelée *connexion affine osculatrice.*

Prenons maintenant un espace local $A_n(x(t_0))$, $t_0 \in I$, et en lui un point $A(x(t_0))$. Sur la variété X_m prenons une courbe c passant par le point $x(t_0)$ et l'espace local $A_n(x(t))$ au point $x(t)$ de la courbe c. Soit ensuite γ une courbe dans l'espace local $A_n(x(t_0))$ passant par le point $A(x(t_0))$ et soit v le vecteur tangent à la courbe γ en $A(x(t_0))$. Par le transport parallèle dans la connexion non-linéaire donnée sur A^n_m, nous obtenons à partir de γ une courbe γ' dans l'espace $A_n(x(t))$, soit v' le vecteur v transporté parallélement de la même façon dans l'espace $A_n(x(t))$. Supposons que v' est le vecteur tangent à la courbe γ' au point considéré. Les connexions non-linéaires de ce type seront caractérisées dans la suite, pour le cas de variétés de König aux espaces locaux poctuellement centrés.

Dans l'étoile de droites de sommet $A(x(t_0))$ dans l'espace local $A_n(x(t_0))$, il y a, pour la correspondance $\mathscr{C}_c$ existant entre les espaces $A_n(x(t_0))$ et $A_n(x(t))$ et donnée par la connexion non-linéaire sur la variété A^n_m, une et une seule transformation quadratique qui associe à la courbe γ en $A(x(t_0))$ la droite linéarisante (voir [1]). Si nous fixons dans $A_n(x(t_0))$ un sous-espace contenant le point $A(x(t))$ et demandons que la droite linéarisante soit située dans ce sous-espace, nous obtenons une correspondance $\mathscr{C}_c$ spéciale. Si nous demandons donc que la droite linéarisante se trouve dans le sous-espace choisi pour n'importe quelle courbe γ passant par le point $A(x(t_0))$, pour n'importe quel choix de l'espace $A_n(x(t))$ sur la courbe c, et pour n'importe quelle courbe c sur X_m passant par le point $x(t_0)$, nous obtenons une condition pour la connexion non-linéaire en $x(t_0)$. En étendant ces conditions géométriques à tous les points x de la variété X_m, nous obtenons une connexion non-linéaire spéciale sur la variété de König A^n_m aux espaces locaux centrés — les centres sont ponctuels. En faisant varier le choix des sous-espaces mentionnés des espaces locaux de la variété A^n_m, nous obtenons différents types de connexions non-linéaires sur la variété poctuellement centrée A^n_m. Le transport parallèle qui est donné par ces connexions non-linéaires spéciales peut être caractérisé, à l'aide des droites linéairisantes et des connexions affines tangentes mentionnées ci-dessus, par des propriétés de contact et de projection, comme cela résulte facilement de [1]. C'est donc dans ce sens-ci que nous comprenons l'approximation d'une connexion non-linéaire par une connexion affine générale.

Considérons donc à présent une variété de König centrée A^n_m et étudions les relations existant entre le transport parallèle des points et celui des vecteurs dans une connexion non-linéaire sur A^n_m.

En supposant (1) vérifié, nous pouvons écrire les équations différentielles du transport parallèle de vecteurs et de points sous la forme.

$$(4.2)\qquad \frac{\mathrm{d}v^a}{\mathrm{d}t} + v^b \Gamma^a_{b\alpha} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} = 0\,, \qquad \frac{\mathrm{d}u^a}{\mathrm{d}t} + (\Gamma^a_\alpha + u^b \Gamma^a_{b\alpha}) \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} = 0\,.$$

Il est alors possible d'exprimer les développements, au voisinage du point $t_0 \in I$ de la solution des équations (2) correspondant aux conditions initiales $v^a(t_0)$, $u^a(t_0)$, de la façon suivante

$$(4.3) \qquad v^a(t) = v^a(t_0) - t(v^b \Gamma^a_{b\alpha} x^\alpha)_{t_0} +$$
$$+ \frac{t^2}{2} \{(\Gamma^b_{c\beta}\Gamma^a_{b\alpha} - \partial_\beta \Gamma^a_{c\alpha} + v^l \partial_b \Gamma^a_{c\alpha} \Gamma^b_{l\beta})\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta - \Gamma^a_{c\alpha} \ddot{x}^\alpha\}_{t_0} v^c(t_0) + \ldots$$
$$u^a(t) = u^a(t_0) - t\{(\Gamma^a_\alpha + u^b \Gamma^a_{b\alpha})\, \dot{x}^\alpha\}_{t_0} -$$
$$- \frac{t^2}{2} \{(\partial_\beta \Gamma^a_\alpha - \partial_c \Gamma^a_\beta \Gamma^c_\alpha - \partial_c \Gamma^a_\beta \Gamma^a_{b\alpha} u^b + \partial_\beta \Gamma^a_{b\alpha} u^b - \partial_c \Gamma^a_{b\beta} \Gamma^c_\alpha u^b - \partial_c \Gamma^a_{b\beta} \Gamma^c_{l\alpha} u^b u^l -$$
$$- \Gamma^a_{b\beta} \Gamma^b_\alpha - \Gamma^a_{b\beta} \Gamma^b_{c\alpha} u^c)\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + (\Gamma^a_\alpha + \Gamma^a_{b\alpha} u^b)\, \ddot{x}^\alpha\}_{t_0} + \ldots \quad \text{où} \quad \dot{x}^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}, \quad \text{etc}\,.$$

Pour mettre un relief explicitement le fait que la condition initiale $u^a(t_0)$ de la solution des équations différentielles (2_2) dépend de n paramètres $s_1, \ldots, s_n$ — correspondant au choix du point dans l'espace local $A_n(x(t_0))$ — écrivons maintenant pour un instant $u^a(t_0; s_1, \ldots, s_n) = u^a(t_0, s)$. La courbe en $A_n(x(t_0))$ est donc donnée paramétriquement: $s_a = s_a(\tau)$, $\tau \in I' = \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$. Ecrivons alors pour plus de brièveté $u^a(t_0, s_a(\tau)) = u^a(t_0, \tau)$. Considérons maintenant, dans l'espace local $A_n(x(t))$, la courbe $\gamma(t) : A(t, \tau) = M(t) + u^a(t, \tau)\, I_a(t)$. Pour une valeur fixée $\tau \in I'$ du paramètre soit $u^a(t, \tau)$ la solution des équations (2_2) exprimée sous la forme de (3_2). La courbe $\gamma(t)$ dans l'espace local $A_n(x(t))$ résulte alors du transport parallèle de la courbe $\gamma(t_0)$ de l'esapce $A_n(x(t_0))$ dans l'espace $A_n(x(t))$. Examinons maintenant comment se transportent les vecteurs tangents à la courbe $\gamma(t_0)$ et cherchons les conditions sous lesquelles le transport parallèle du vecteur tangent à la courbe $\gamma(t_0)$ dans le point correspondant à la valeur $\tau_0 \in I'$ donne le vecteur tangent à la courbe $\gamma(t)$ dans le point correspondant à la même valeur $\tau_0 \in I'$, et ceci pour tout choix de la courbe c sur X_m et pour n'importe quelle courbe $\gamma(t_0)$ dans l'espace affine $A_n(x(t_0))$ passant par le point $A(t_0, \tau_0)$ — c'est-à-dire par le centre de l'espace local. Une telle connexion non-linéaire sera appelée connexion non-linéaire tangente.

En vertu de (3_2) nous avons

$$(4.4) \qquad \left.\frac{\partial u^a(t, \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau_0} = \left.\frac{\partial u^a(t_0, \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau_0} - t \left\{\partial_c(\Gamma^a_\alpha + u^b \Gamma^a_{b\alpha})\, \dot{x}^\alpha \frac{\partial u^c(t, \tau)}{\partial \tau}\right\}_{\tau_0, t_0} -$$
$$- \frac{t^2}{2} \left\{\partial_c(\ldots) \frac{\partial u^c(t, \tau)}{\partial \tau}\right\}_{\tau_0, t_0} + \ldots\,.$$

Il faut donc que $\partial u^a(t, \tau)/\partial \tau|_{\tau_0}$ vérifient les équations différentielles (2_1). Nous obtenons donc la condition cherchée sous la forme

$$(4.5) \qquad \left\{\partial_c(\Gamma^a_\alpha + u^b \Gamma^a_{b\alpha})\, \dot{x}^\alpha \frac{\partial u^c(t, \tau)}{\partial \tau}\right\}_{\tau_0, t_0} = \left\{\Gamma^a_{c\alpha} \dot{x}^\alpha \frac{\partial u^c(t, \tau)}{\partial \tau}\right\}_{\tau_0, t_0}.$$

Si nous exigeons que (5) soit vrai pour n'importe quelle courbe c sur X_m et pour n'importe quelle courbe γ dans l'espace affine local, nous obtenons au lieu de (5) la condition

$$\partial_c(\Gamma^a_\alpha + u^b\Gamma^a_{b\alpha}) = \Gamma^a_{c\alpha}\,. \tag{4.6}$$

Il est évident que l'on peut écrire (6) en vertu de (3.3), (3.4) comme suit:

$$\underset{3}{S^a_{\alpha c}} + u^b \underset{3}{R^a_{\alpha cb}} = 0\,. \tag{4.7}$$

La condition (7) *est nécessaire pour que la connexion non-linéaire soit une connexion non-linéaire tangente.* Il est aisé de voir que $\underset{3}{S^a_{\alpha c}} = \underset{3}{R^a_{\alpha cb}} = 0$ est *la condition nécessaire et suffisante pour que la connexion non-linéaire sur la variété A^n_m soit une connexion affine sur la variété de König A^n_m.* Il suffit, en effet, de se rendre compte que dans (7) u^b sont les coordonnées du centre.

Calculons maintenant l'affinité tangente à la correspondance $\mathscr{C}_c$ de l'espace $A_n(\underset{1}{x})$ dans $A_n(\underset{2}{x})$, correspondant à un point $A(\underset{1}{x})$ dans $A_n(\underset{1}{x})$, ainsi que la droite linéarisante associée à cette affinité. Soit maintenant (3_2) le développement de la solution de l'équation (2_2) au voisinage du point correspondant à la valeur t_1 du paramètre; c'est-à-dire soit $t_0 = t_1$. La correspondance $\mathscr{C}_c$ est donc donnée comme suit: $\mathscr{C}_c$: : $A(\underset{1}{x}) \to A(\underset{2}{x})$, où

$$\begin{aligned} A(\underset{1}{x}) &= M(\underset{1}{x}) + u^a(t_1)\, I_a(\underset{1}{x})\,, \\ A(\underset{2}{x}) &= M(\underset{2}{x}) + u^a(t_2)\, I_a(\underset{2}{x})\,. \end{aligned} \tag{4.8}$$

L'affinité générale $\mathscr{A}_c$ de l'espace $A_n(\underset{1}{x})$ sur $A_n(x(t))$ qui associe l'un à l'autre les points $A(\underset{1}{x})$ et $A(x(t))$, est donc

$$\mathscr{A}_c A = B\,, \quad \mathscr{A}_c I_a = \omega^b_a J_b\,, \tag{4.9}$$

où

$$A(\underset{1}{x}) = A\,, \quad A(x(t)) = B\,, \quad I_a(\underset{1}{x}) = I_a\,, \quad I_a(x(t)) = J_a\,.$$

Ici, ω^b_a est fonction du paramètre t si l'espace $A_n(\underset{1}{x})$ est fixé; il est aussi fonction de la condition initiale $u^a(t_1)$ des équations différentielles (2). Demandons ensuite que $\mathscr{A}_c$ soit l'affinité tangente à la correspondance $\mathscr{C}_c$, c'est-à-dire que l'on ait

$$\mathscr{A}_c\, \mathrm{d}\underset{2}{A} = \mathrm{d}\underset{2}{B}\,. \tag{4.10}$$

La différentielle $\underset{2}{\mathrm{d}}$, c'est la différentielle par rapport aux paramètres s_a, dont dépend le choix du point $\underset{1}{A}(x)$. Nous pouvons manifestement écrire

$$(4.11) \qquad \underset{2}{\mathrm{d}}A = \underset{2}{\mathrm{d}}u^a(t_1)\, I_a\,, \quad \underset{2}{\mathrm{d}}B = \underset{2}{\mathrm{d}}u^a(t)\, J_a\,.$$

Nous demandons donc que nous ayons $\omega^a_c(t)\, \underset{2}{\mathrm{d}}u^c(t_1) = \underset{2}{\mathrm{d}}u^a(t)$. Or, comme

$$(4.12) \qquad \begin{aligned} \underset{2}{\mathrm{d}}u^a(t) &= \underset{2}{\mathrm{d}}u^a(t_1) - t\{\partial_c(\Gamma^a_\alpha + u^b\Gamma^a_{b\alpha})\, \dot{x}^\alpha\}_{t_1} \underset{2}{\mathrm{d}}u^c(t_1) - \\ &\quad - \frac{t^2}{2}\{\partial_c(\ldots)\}_{t_1} \underset{2}{\mathrm{d}}u^c(t_1) + \ldots\,, \end{aligned}$$

nous avons

$$(4.13) \qquad \begin{aligned} \omega^a_c(t) &= \delta^a_c - t\{\partial_c(\Gamma^a_\alpha + u^b\Gamma^a_{b\alpha})\, \dot{x}^\alpha\}_{t_1} - \\ &\quad - \frac{t^2}{2}\partial_c\{(\partial_\beta\Gamma^a_\alpha - \partial_l\Gamma^a_\beta\Gamma^l_\alpha - \partial_l\Gamma^a_\beta\Gamma^l_{b\alpha}u^b + \partial_\beta\Gamma^a_{b\alpha}u^b - \partial_l\Gamma^a_{b\beta}\Gamma^l_\alpha u^b - \\ &\quad - \partial_l\Gamma^a_{b\beta}\Gamma^l_{k\alpha}u^b u^k - \Gamma^a_{b\beta}\Gamma^b_\alpha - \Gamma^a_{b\beta}\Gamma^b_{l\alpha}u^l)\, \dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + (\Gamma^a_\alpha + u^b\Gamma^a_{b\alpha})\, \ddot{x}^\alpha\}_{t_1} + \ldots\,. \end{aligned}$$

Nous obtenons une fois de plus le fait bien connu, savoir que l'affinité $\mathscr{A}_c$ est déterminée sans ambiguité par l'équation (13). Considérons maintenant une courbe c sur X_m quelconque; nous obtenons à partir de l'existence d'une connexion non-lineaire sur A^n_m une seule connexion affine sur A^n_m, à condition que nous ayons choisi un point dans chaque espace local affine $A_n(x)$. Soit $A(x) = M(x) + u^a(x)\, I_a(x)$ ce point. Si nous substituons ses coordonnées $u^a(x)$ dans Γ^a_α et $\Gamma^a_{b\alpha}$, en obtenant ainsi $\tilde{\Gamma}^a_\alpha$ et $\tilde{\Gamma}^a_{b\alpha}$, alors les formes $\omega^a = \tilde{\Gamma}^a_\alpha\, \mathrm{d}x^\alpha$, $\omega^b_a = \tilde{\Gamma}^b_{a\alpha}\, \mathrm{d}x^\alpha$ donnent la connexion affine mentionnée. Nous obtenons donc une connexion affine au sens usuel du mot, et qui n'est pas identique avec la connexion affine tangente définie ci-dessus. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante: *Si A^n_m est une variété de König aux espaces locaux affines centrés et Γ une connexion non-linéaire sur A^n_m, alors il existe une et une seule connexion affine tangente Ω sur A^n_m qui est tangente à la connexion non-linéaire Γ, et une et une seule connexion affine $\tilde{\Gamma}$.*

Ensuite, nous avons

$$(4.14) \qquad \begin{aligned} \underset{2}{\mathrm{d}^2}A &= \underset{2}{\mathrm{d}^2}u^a(t_1)\, I_a\,, \\ \underset{2}{\mathrm{d}^2}B &= \underset{2}{\mathrm{d}^2}u^a(t)\, J_a = (\underset{2}{\mathrm{d}}\omega^a_c(t)\, \underset{2}{\mathrm{d}}u^c(t_1) + \omega^a_c(t)\, \underset{2}{\mathrm{d}^2}u^c(t_1))\, J_a\,. \end{aligned}$$

En vertu de (9), nous avons

$$(4.15) \qquad \mathscr{A}_c \underset{2}{\mathrm{d}^2}A = \omega^a_c(t)\, \underset{2}{\mathrm{d}^2}u^c(t_1)\, J_a\,.$$

En posant $L = \underset{2}{\mathrm{d}}^2 B - \mathscr{A}_c \underset{2}{\mathrm{d}}^2 A$, nous obtenons évidemment

$$L = \underset{2}{\mathrm{d}}\omega^a_c(t)\, \underset{2}{\mathrm{d}}u^c(t_1)\, J_a\,. \tag{4.16}$$

Dans l'étoile de droites dans $A_n(x(t))$ de sommet $A(x(t))$ nous avons maintenant une transformation quadratique qui associe à toute droite $\{B, \underset{2}{\mathrm{d}}u^a(t)\, J_a\}$ la droite $\{B, L\}$. Nous parlons alors *d'une transformation linéarisante* (voir [3]). La droite $\{B, L\}$ s'appelle *droite linéarisante* et la direction déterminée par le vecteur L s'appelle *direction linéarisante* correspondant à la direction $\underset{2}{\mathrm{d}}u^a(t)$. La connexion non-linéaire étant donnée, la direction L dépend: 1) du choix du point A, 2) de la courbe c sur X_m et de la position de l'espace local sur c, 3) de la direction $\underset{2}{\mathrm{d}}u^a(t_1)\, I_a$.

Supposons que nous ayons $\omega = \operatorname{Det} |\omega^b_a| \neq 0$ le long de la courbe correspondante sur X_m. Nous définissons alors $\tilde{\omega}^b_a$ par la relation

$$\omega^a_c(t)\, \tilde{\omega}^b_a(t) = \delta^b_c\,. \tag{4.17}$$

L'affinité $\mathscr{A}_c$ fait correspondre à la direction L dans $A_n(x(t))$ la direction $L^{-1} = \mathscr{A}^{-1} L$ dans $A_n(x)$. Un calcul direct fait voir que

$$L^{-1} = \lambda^b I_b \tag{4.18}$$

où

$$\lambda^b = \underset{2}{\mathrm{d}}\omega^a_c(t)\, \underset{2}{\mathrm{d}}u^c(t_1)\, \tilde{\omega}^b_a(t)\,. \tag{4.19}$$

Si nous écrivons

$$\Omega^a_\alpha = \Gamma^a_\alpha + u^b \Gamma^a_{b\alpha}\,, \quad \Omega^a_{\alpha b} = \partial_b \Omega^a_\alpha\,, \qquad M^b_{ac\alpha} = \partial_{ac}(\Gamma^b_\alpha + u^l \Gamma^b_{l\alpha})\,, \tag{4.20}$$

alors (19) devient

$$\lambda^b = \left\{ -(M^b_{cl\alpha}\dot{x}^\alpha)_{t_1} - \frac{t}{2}(\partial_\beta M^b_{cl\alpha}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + 2\Omega^b_{\beta a} M^a_{cl\alpha}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta + M^a_{cl\alpha}\ddot{x}^\alpha)_{t_1} + \ldots \right\} . \; t\, \underset{2}{\mathrm{d}}u^l(t_1)\, \mathrm{d}u^c(t_1)\,. \tag{4.21}$$

Si $M^a_{bc\alpha} = 0$, nous avons $\lambda^a = 0$, donc $L = 0$. Réciproquement, si $L = 0$ pour toutes les courbes c sur X_m, pour toutes les courbes γ dans $A_n(x)$ et pour tout $t \in \underset{1}{I}$, on a $M^a_{bc\alpha} = 0$. Nous avons donc la proposition suivante:

$$M^a_{bc\alpha} = 0 \tag{4.22}$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que la connexion affine tangente