Резюме

НОВЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ ТОПОЛОГИИ ПЛОСКОСТИ

ИЛЬЯ ЧЕРНЫ, (Ilja Černý), Прага

В статье доказываются наглядным способом три более глубокие теоремы по топологии плоскости, которые используются, например, в теории конформного отображения и доказательство которых, не опирающееся на целый ряд других теорем топологии, собственно говоря, в литературе не имеется. Для доказательства этих теорем в статье используется (из более важных теорем топологии плоскости) только теорема Жордана и несколько свойств т. наз. Θ-кривых.

Чтобы можно было дать формулировку упомянутых теорем, необходимо ввести некоторые понятия и обозначения:

Символом S (или же E) будем обозначать замкнутую (или же открытую) плоскость Гаусса. Каждое непрерывное отображение φ интервала $\langle\alpha, \beta\rangle \subset E_1$ в E мы назовем *кривой*; если будет $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ и если частичные отображения $\varphi|\langle\alpha, \beta)$, $\varphi|(\alpha, \beta\rangle$ будут простыми, то мы скажем, что φ — *жорданова кривая*. Если $T \subset E$ имеет вид $T = \varphi(\langle\alpha, \beta\rangle)$, где φ — жорданова кривая, то мы назовем T *топологической окружностью*. Область $\Omega \subset S$, границей которой служит топологическая окружность, мы назовем *жордановой областью*.

Если T — тополигическая окружность, то по теореме Жордана

$$S - T = \operatorname{Int} T \cup \operatorname{Ext} T,$$

где Int T, Ext T — непересекающиеся области, общей границей которых является T; при этом Int T ограничена, Ext T неограничена.

Главной целью работы является доказательство следующих утверждений:

Теорема 1. *Если G — область Жордана, то к любой точке $a \in H(G)$ (граница G) существует кривая φ, определенная, например, в $\langle 0, 1\rangle$, для которой $\varphi(1) = a$, $\varphi(\langle 0, 1)) \subset G$.(„Достижимость точек на границе жордановой области".)*

Теорема 2. *Если L_1, L_2 — дуги (т. е. гомеоморфные образы интервала $\langle 0, 1\rangle$), общей концевой точкой которых является точка a лежащая на границе жордановой области G, и если $L_1 \cup L_2 - \{a\} \subset G$, то для каждой окрестности $U(a)$ точки a существует кривая φ, определенная, например, в $\langle 0, 1\rangle$, для которой: $\varphi(0) \in L_1$, $\varphi(1) \in L_2$, $\varphi(\langle 0, 1\rangle) \subset U(a) \cap G$.*

Теорема 3. *Если G — область Жордана и если $a_n \in G \cap$ E — произвольные точки, сходящиеся к точке $a \in H(G)$, существует кривая φ, определенная в $\langle 0, 1\rangle$ так, что $a = \varphi(1)$, $a_m \in \varphi(\langle 0, 1\rangle)$ для всех m, $\varphi(\langle 0, 1)) \subset G$.*

Доказательство этих теорем опирается на вспомогательную теорему, которая в работе названа **леммой 6**:

Если G — область Жордана, $U(a)$ — окрестность точки $a \in H(G)$, для которой $H(G) - \overline{U(a)} = \emptyset$, то существует ровно одна компонента Ω множества $G \cap U(a)$, на границе которой лежит точка a. (Эта компонента является жордановой областью.)

При доказательстве леммы 6 играет важную роль лемма 5, в которой описан принцип, на котором основано эффективное построение компоненты Ω, когда заданы $U(a)$ и $H(G)$.

Лемма 5. *Пусть Γ^1, Γ^2 — дуги, общими точками которых являются как раз их концевые точки; пусть $\Gamma = \Gamma^1 \cup \Gamma^2$. Пусть дуги L_n ($n = 1, 2, \ldots,$ — конечная или бесконечная последовательность) удовлетворяют следующим условиям:*

1. *Крайние точки a_n, b_n дуги L_n лежат на Γ^1.*

2. *Никакие две из дуг $L_m, L_n (m \neq n)$ не имеют обе концевые точки общими, и если обозначить $\tilde{L}_n = L_n - \{a_n, b_n\}$, то $\tilde{L}_n$ не пересекается с L_m.*

3. $\tilde{L}_n \subset \operatorname{Int} \Gamma$.

4. *Если дуг L_n бесконечно много, то их диаметр стремится к нулю.*

Обозначим еще через C_n дугу, содержащуюся в Γ^1, крайними точками которой являются точки a_n, b_n; пусть, наконец, $T_n = C_n \cup L_n$.

Тогда T_n суть топологические окружности, для которых $\operatorname{Int} T_n \subset \operatorname{Int} \Gamma$, и множество $\Omega = \operatorname{Int} \Gamma - \bigcup\limits_n \overline{\operatorname{Int} T_n}$ является областью Жордана, граница которой удовлетворяет соотношению: $H(\Omega) \subset (\Gamma^1 - \bigcup\limits_n C_n) \cup \Gamma^2 \cup \bigcup\limits_n L_n$; при этом равенство имеет место тогда, когда $\tilde{C}_n = C_n - \{a_n, b_n\}$ не пересекаются.

От положения в лемме 6 перейдем к положению в лемме 5 следующим образом: Обозначим через T_1 замыкание компоненты множества $U(a) \cap H(G)$, содержащее точку a; концевые точки дуги T_1 обозначим через b, c. Пусть T_2, C_1, C_2 — дуги с концевыми точками b, c, для которых $H(G) = T_1 \cup T_2$, $H(U(a)) = C_1 \cup C_2$. Тогда $U(a) - T_1 = G_1 \cup G_2$, где G_j — непересекающиеся области Жордана, границами которых служат $C_j \cup T_1$.

Если $\tilde{L}_n^j$ — компоненты множества $G_j \cap T_2$, L_n^j — их зымыкания, $C_n^j \subset C_j$ — дуги с теми же конценвыми точками что L_n^j, $T_n^j = C_n^j \cup L_n^j$, то одно из множеств

$$\Omega_j = G_j - \bigcup_n \overline{\operatorname{Int} T_n^j} \quad (j = 1, 2)$$

является искомой компонентой множества $G \cap U(a)$ (а второе является единственной компонентой множества $U(a) - \bar{G}$, на границе которого лежит точка a).