Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

POZNÁMKY O LINEARITĚ ZOBRAZENÍ E_m DO E_m

ANTONÍN SOCHOR, Praha

(Došlo dne 14. prosince 1960, v nové úpravě dne 14. března 1961)

V této práci jsou udány postačující podmínky pro to, aby prosté zobrazení E_m do E_m, $m \geqq 2$, bylo lineární.

Ve speciální teorii relativity se při odvozování Lorentzových transformací vychází z požadavku, aby pohyb hmotné částice, který se jeví rovnoměrným a přímočarým jednomu pozorovateli P, byl rovnoměrným a přímočarým pohybem i vzhledem ke každému pozorovateli $\bar{P}$, který se vzhledem k P pohybuje rovnoměrně a přímočaře. Jedním ze základních poznatků, ze kterých vychází speciální teorie relativity, jest, že pohyb kterékoli hmotné částice se může dít pouze rychlostí menší než je rychlost světla c.

Užíváme-li k popisu pohybů prostoročasu, tj. čtyřrozměrného aritmetického prostoru E_4 (se speciální metrikou), jsou trajektorie rovnoměrně přímočaře se pohybujících hmotných částic přímkami v E_4, které lze popsat rovnicemi

$$x_k = V_k x_0 + A_k \quad (k = 1, 2, 3)\,,$$

kde x_0 je čas, x_1, x_2, x_3 prostorové souřadnice, V_k složky rychlosti ve směru k-té osy a A_k složky radiusvektoru, který udává polohu hmotného bodu v čase $x_0 = 0$. Tyto přímky splňují podle hořejšího požadavek $V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 < c^2$, který lze pro případ, že hmotný bod má v čase $x_0 = 0$ polohu $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, vyjádřit také takto: Jsou to přímky, pro jejichž každý bod $[x_1, \ldots, x_m] \neq [0, \ldots, 0]$ platí podmínka

$$\sum_{k=2}^{m} x_k^2 < c^2 x_1^2 \,. \tag{1}$$

Lorentzovy transformace jsou tedy prostá zobrazení E_4 na E_4, která převádějí každou přímku rovnoběžnou s některou přímkou z kužele (1) v přímku.

Tato práce vznikla zobecněním otázky, je-li zobrazení splňující tuto podmínku již lineární.

Je ukázáno, že předpokládáme-li spojitost uvažovaného zobrazení aspoň na jedné přímce, je toto zobrazení lineární již tehdy, přejdou-li všechny přímky rovnoběžné s jistými konečně mnoha přímkami v přímky. Na příkladě je ukázáno, že za těchto zeslabených předpokladů nelze požadavek spojitosti na jedné přímce vynechat.

Pro případ, že všechny přímky rovnoběžné s přímkami z nějakého kužele přejdou v přímky, je linearita uvažovaného zobrazení dokázána bez předpokladu spojitosti.

Zaveďme toto

Označení. Buď F prosté zobrazení prostoru E_m do E_m, $m \geqq 2$. Buď $\mathfrak{P}$ množina všech přímek P takových, že pro každou přímku Q, rovnoběžnou s P, je $F(Q)$ přímka. Dále buď $\mathfrak{R}$ množina všech rovin, obsahujících tři různé přímky z $\mathfrak{P}$, procházející týmž bodem.

Lemma 1. *Jsou-li P, Q různoběžky z $\mathfrak{P}$, jsou $F(P)$, $F(Q)$ opět různoběžky.*

Důkaz. Podle předpokladu jsou $F(P)$, $F(Q)$ přímky. Protože zobrazení F je prosté, je $F(P) \neq F(Q)$; zřejmě $F(P) \cap F(Q) \neq \emptyset$.

Lemma 2. *Je-li $\varrho \in \mathfrak{R}$, je $F(\varrho)$ část roviny.*

Důkaz. Buďte A, B, C různé přímky z $\mathfrak{P}$, ležící v ϱ a procházející týmž bodem. Přímky $F(A)$, $F(B)$ určují podle lemmatu 1 jakousi rovinu σ. Buď x libovolný bod množiny $\varrho - C$. Bodem x prochází přímka R rovnoběžná s C; $F(R)$ je přímka, mající společný bod jak s $F(A)$ tak i s $F(B)$, při čemž tyto body jsou různé. Je tedy $F(x) \in F(R) \subset \sigma$. Je-li $x \in C$, existuje přímka S rovnoběžná s A taková, že $x \in S$. Podle předpokladu je $S \in \mathfrak{P}$, takže $Q = F(S)$ je přímka. Podle toho, co jsme právě dokázali, je $y \in \sigma$ pro každý bod $y \in Q$, $y \neq F(x)$. Odtud plyne ihned, že $F(x) \in Q \subset \sigma$.

Lemma 3. *Jestliže P, Q jsou dvě různé rovnoběžky z $\mathfrak{P}$ a jestliže $P \cup Q \subset \sigma \in \mathfrak{R}$, pak $F(P)$, $F(Q)$ jsou opět rovnoběžky.*

Důkaz. Podle lemmatu 2 leží přímky $F(P)$, $F(Q)$ v téže rovině; protože F je prosté zobrazení, je $F(P) \cap F(Q) = \emptyset$.

Lemma 4. *Nechť $A, B, C \in \mathfrak{P}$. Budiž dán rovnoběžník o stranách rovnoběžných s A, B a jedné úhlopříčce rovnoběžné s C; druhou úhlopříčku označme písmenem D. Potom je $F(D)$ část přímky.*

Důkaz. Buďte x, y, z libovolné tři body přímky D. Sestrojme dva rovnoběžníky s vrcholem x a protějšími vrcholy po řadě y, z takové, že strany procházející bodem x jsou rovnoběžné s A, B. Podle lemmat 1 a 3 jsou obrazy těchto rovnoběžníků opět rovnoběžníky, které mají dvě strany totožné a jejichž úhlopříčky neprocházející bodem $F(x)$ jsou rovnoběžné. Odtud plyne, že i úhlopříčky procházející bodem $F(x)$ jsou rovnoběžné a tedy totožné. To znamená, že body $F(x)$, $F(y)$, $F(z)$ leží na jedné přímce.

Lemma 5. *Nechť $\varrho, \sigma \in \mathfrak{R}$, $P = \varrho \cap \sigma \in \mathfrak{P}$. Potom pro každou přímku Q rovnoběžnou s P je přímka $F(Q)$ rovnoběžná s $F(P)$.*

Důkaz. Jestliže Q leží v ϱ nebo v σ, použijeme lemmatu 3. Nechť tedy $Q \cap (\varrho \cup \sigma) = \emptyset$. Buď ϱ_1 rovina rovnoběžná s ϱ a procházející přímkou Q. Potom je $P_1 = \varrho_1 \cap \sigma$ přímka rovnoběžná s P a podle lemmatu 3 je $F(P_1)$ přímka rovnoběžná s $F(P)$. Snadno se zjistí, že je též $\varrho_1 \in \mathfrak{R}$. Odtud a z lemmatu 3 plyne, že jsou přímky $F(P_1)$ a $F(Q)$ a tedy i přímky $F(P)$ a $F(Q)$ rovnoběžné.

Označení. Je-li P k-rozměrný prostor se zvolenou souřadnou soustavou a jsou-li $a_1, \ldots, a_k$ reálná čísla, pak symbolem $[a_1, \ldots, a_k]$ nebo $[\{a_j\}_{j=1}^k]$ označíme bod o souřadnicích a_j; ze souvislosti bude vždy patrné, který prostor a která souřadná soustava se míní.

Buď dále $\varrho \in \mathfrak{R}$ a buďte A, B dvě různoběžky z $\mathfrak{P}$, které leží v ϱ. Zvolme v ϱ takovou souřadnou soustavu, aby přímka A (resp. B) byla množina těch bodů, jejichž druhá (resp. první) souřadnice je nula. V rovině, určené přímkami $F(A)$, $F(B)$ určeme takovou souřadnou soustavu, aby platilo $F([0, 0]) = [0, 0]$, $F([1, 0]) = [1, 0]$, $F([0, 1]) = [0, 1]$, což lze, neboť přímky $F(A)$ a $F(B)$ jsou podle lemmatu 1 různoběžné.

Definujme nyní na množině všech reálných čísel funkce Φ, Ψ předpisem $F([a, 0]) = [\Phi(a), 0]$, $F([0, a]) = [0, \Psi(a)]$.

Lemma 6. *Pro všechna reálná a, b je*

$$\Phi(\tfrac{1}{2}(a + b)) = \tfrac{1}{2}(\Phi(a) + \Phi(b)).$$

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $a \neq b$. Existuje přímka $C \in \mathfrak{P}$ taková, že $A \neq C \neq B$, $C \subset \varrho$ a že $A \cap B \cap C \neq \emptyset$. Nad úsečkou o koncových bodech $[a, 0]$, $[b, 0]$ sestrojme rovnoběžník o stranách rovnoběžných s B, C. Bod $[\frac{1}{2}(a + b), 0]$ je pak průsečíkem obou úhlopříček. Podle lemmat 1 a 3 přejde při zobrazení F tento rovnoběžník opět v rovnoběžník; úhlopříčky se protínají v bodě $[\frac{1}{2}(\Phi(a) + \Phi(b)), 0] \in F(A)$. Podle lemmatu 4 je tento bod obrazem bodu $[\frac{1}{2}(a + b), 0]$.

Lemma 7. *Pro všechna reálná a, b je $\Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b)$.*

Důkaz. Z definice funkce Φ plyne ihned, že $\Phi(0) = 0$. Podle lemmatu 6 je tedy $\Phi(a) = \Phi(\frac{1}{2}(2a + 0)) = \frac{1}{2}\Phi(2a) + \frac{1}{2}\Phi(0) = \frac{1}{2}\Phi(2a)$, takže $\Phi(a + b) = \Phi(\frac{1}{2}(2a + 2b)) = \frac{1}{2}\Phi(2a) + \frac{1}{2}\Phi(2b) = \Phi(a) + \Phi(b)$.

Lemma 8. *Pro každé racionální a je $\Phi(a) = a$.* (Plyne snadno ze vztahu $\Phi(1) = 1$ a z lemmatu 7.)

Lemma 9. *Buď C taková přímka, že $A \neq C \neq B$, $C \in \mathfrak{P}$, $C \subset \varrho$, $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ (taková přímka C existuje). Buď c takové číslo, že přímka, procházející body $[c, 0]$ a $[0, 1]$, je rovnoběžná s C. Potom existuje takové reálné k, že pro všechna a je $\Psi(a) = k \cdot \Phi(ca)$.*

Důkaz. Zvolme $a \neq 0$. Přímka, procházející body $[ac, 0]$ a $[0, a]$, je rovnoběžná s přímkou C; její obraz je přímka, procházející body $[\Phi(ac), 0]$ a $[0, \Psi(a)]$, a podle lemmatu 3 je rovnoběžná s přímkou $F(C)$. Poměr $\Psi(a) : \Phi(ac)$ nezávisí tedy na a.

Věta 1. *Buď $m \geqq 2$. Nechť existují přímky $A_1, \ldots, A_m \in \mathfrak{P}$ s těmito vlastnostmi:*

1. *Všechny přímky A_i procházejí jedním bodem x, ale neleží v téže $(m - 1)$-rozměrné nadrovině.*

2. *Rovina, určená přímkami A_{i-1}, A_i,* patří do $\mathfrak{R}$ pro $i = 1, \ldots, m$ (klademe $A_0 = A_m$).

3. *Zobrazení F je spojité na přímce A_1.*
Potom je zobrazení F lineární.

Důkaz. Zvolme takový souřadný systém, aby bod x byl počátkem a přímky A_i souřadnými osami. Buď v_i vektor o počátečním bodě $y = F(x) = F([0, \ldots, 0])$ a koncovém bodě $F([\{\delta_{ij}\}_{j=1}^m])$. Definujme funkce Φ_i vztahem $F([a\{\delta_{ij}\}_{j=1}^m]) = y + \Phi_i(a)\, v_i$ (a reálné, $i = 1, \ldots, m$). Je-li P přímka rovnoběžná s některou přímkou A_i, jsou podle předpokladu 2 a podle lemmatu 5 (pro $m = 2$ podle lemmatu 3) přímky $F(P)$, $F(A_i)$ rovnoběžné. Odtud snadno plyne, že pro libovolná reálná $a_1, \ldots, a_m$ je

$$F([a_1, \ldots, a_m]) = y + \sum_{i=1}^{m} \Phi_i(a_i)\, v_i\,. \tag{2}$$

Pomocí spojitosti zobrazení F na přímce A_1 a pomocí lemmatu 8 zjistíme, že $\Phi_1(a) = a$ pro každé a. Položme nyní v lemmatu 9 $A = A_1$, $B = A_2$. Existují taková k, c, že $\Phi_2(a) = k\,\Phi_1(ac) = kca$. Dosadíme-li sem $a = 1$, dostaneme vztah $kc = 1$, takže $\Phi_2(a) = a$ pro všechna a. Stejně se nahlédne, že $\Phi_3(a) = a$ atd. Podle (2) je tedy $F([a_1, \ldots, a_m]) = y + \sum_{i=1}^{m} a_i v_i$. Tím je věta dokázána.

Věta 2. *Buď $c > 0$. Buď $\mathfrak{P}_0$ množina všech přímek, jejichž každý bod různý od počátku leží v kuželi $\sum_{i=2}^{m} x_i^2 < c x_1^2$. Předpokládejme, že $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}$. Potom je F lineární.*

Důkaz. Zvolme takovou souřadnou soustavu, aby přímky

$$A_i = \{x_1 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_m = 0\} \quad (i = 1, \ldots, m)$$

patřily do $\mathfrak{P}_0$ a aby přímky

$$C_i = \{x_1 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+2} = \ldots = x_m = 0,\ x_i + x_{i+1} = 1\}$$
$$(i = 1, \ldots, m)$$

patřily do $\mathfrak{P}$. Taková volba je možná. Buď nyní v_i vektor o počátečním bodě $y = F([0, \ldots, 0])$ a koncovém bodě $F([\{\delta_{ij}\}_{j=1}^m])$. Definujme funkce Φ_i předpisem $F([\{a\delta_{ij}\}_{j=1}^m]) = y + \Phi_i(a)\, v_i$. Položme v lemmatu 9 $A = A_1$, $B = A_2$, $C = C_1$. Podle volby přímky C je $c = 1$, takže $\Phi_2(a) = k\,\Phi_1(a)$; dosadíme-li sem $a = 1$, vidíme, že $\Phi_2(a) = \Phi_1(a)$. Stejně se dokáže, že $\Phi_3(a) = \Phi_1(a)$ atd. Pišme tedy $\Phi_i(a) = \Phi(a)$. Každá rovina, obsahující nějakou přímku z $\mathfrak{P}_0$, patří zřejmě do $\mathfrak{R}$; odtud snadno plyne, že pro $m > 2$ je každá z přímek A_i průnikem dvou rovin z $\mathfrak{R}$. Podobnou úvahou jako v důkaze předešlé věty zjistíme, že pro libovolná reálná $a_1, \ldots, a_m$ platí

$$F([a_1, \ldots, a_m]) = y + \sum_{i=1}^{m} \Phi(a_i)\, v_i\,. \tag{3}$$

Zvolme nyní reálné a; dokážeme, že

$$(\Phi(a))^2 = \Phi(a^2)\,. \tag{4}$$

Můžeme předpokládat, že $a \neq 0$. Snadno se zjistí, že aspoň jedna z úhlopříček rovnoběžníka o vrcholech $[0, \ldots, 0]$,

$$x_1 = [\{\delta_{1j}\}_{j=1}^m], \quad x_2 = [\{a\delta_{2j}\}_{j=1}^m], \; [\{\delta_{1j} + a\delta_{2j}\}_{j=1}^m]$$

leží v $\mathfrak{P}$. Buď P přímka, procházející body x_1, x_2. Podle lemmatu 4 je $F(P)$ část přímky Q, která prochází body $F(x_1) = y + v_1$, $F(x_2) = y + v_2\,\Phi(a)$. Přímka P je určena rovnicemi $ax_1 + x_2 = a$, $x_3 = \ldots = x_m = 0$; bod $\mathbf{Z} = [\{a\delta_{1j} + (a - a^2)\,\delta_{2j}\}_{j=1}^m]$ leží tedy na P. Přímka Q je množina bodů $y + \alpha v_1 + \beta v_2$, kde $\alpha\,\Phi(a) + \beta = \Phi(a)$. Protože $F(\mathbf{Z}) = y + \Phi(a)\,v_1 + \Phi(a - a^2)\,v_2 \in Q$, je $(\Phi(a))^2 + \Phi(a - a^2) = \Phi(a)$. Odtud a z lemmatu 7 plyne ihned (4).

Je-li nyní $x < y$, existuje reálné číslo a takové, že $x - y = a^2$. Podle lemmatu 7 a podle (4) je tedy $\Phi(y) - \Phi(x) = (\Phi(a))^2 > 0$. Vidíme, že zobrazení Φ zachovává uspořádání; odtud a z lemmatu 8 ihned plyne, že Φ je identita. Podle (3) je tedy zobrazení F lineární.

Následující příklad ukazuje, že věta 1 neplatí bez předpokladu spojitosti.

P ř í k l a d. Ze známého Zornova lemmatu snadno plyne, že existuje množina $M \subset \mathbf{E}_1$ s těmito vlastnostmi:

a) $1 \in M$;

b) žádný prvek množiny M nelze vyjádřit jako lineární kombinaci s racionálními koeficienty jiných prvků z M;

c) každé reálné číslo lze vyjádřit jako lineární kombinaci s racionálními koeficienty prvků z M.

Zvolme čísla $x_1, x_2 \in M$ tak, aby bylo $1 \neq x_1 \neq x_2 \neq 1$; buď K množina všech lineárních kombinací s racionálními koeficienty prvků množiny $M - \{1, x_1, x_2\}$. Každé $x \in \mathbf{E}_1$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $x = k_0 + k_1x_1 + k_2x_2 + z$, kde k_i jsou racionální a $z \in K$. Položme nyní $\Phi(x) = k_0 + k_2x_1 + k_1x_2 + z$ a pro každý bod $[x, y] \in \mathbf{E}_2$ definujme $F([x, y]) = [\Phi(x), \Phi(y)]$. Zřejmě $\Phi(\Phi(x)) = x$, $F(F([x, y]) = [x, y]$; odtud plyne, že F je prosté zobrazení $\mathbf{E}_2$ na $\mathbf{E}_2$.

Buďte α, β racionální čísla, $|\alpha| + |\beta| > 0$, a buď P přímka $\alpha x + \beta y = 0$. Dokážeme, že zobrazení F převádí každou přímku Q, která je rovnoběžná s P, zase v přímku. Buď tedy Q přímka $\alpha x + \beta y = \gamma$ ($\gamma \in \mathbf{E}_1$) a buď $[x_0, y_0] \in Q$. Existují racionální čísla r_i, s_i a prvky t, v množiny K tak, že

$$x_0 = r_0 + r_1x_1 + r_2x_2 + t\,, \qquad y_0 = s_0 + s_1x_1 + s_2x_2 + v\,;$$

zřejmě $\gamma = \alpha r_0 + \beta s_0 + (\alpha r_1 + \beta s_1)\,\bar{z}_1 + (\alpha r_2 + \beta s_2)\,\bar{z}_2 + \alpha t + \beta v$. Snadno se přesvědčíme, že $\Phi(\gamma) = \alpha\,\Phi(x_0) + \beta\,\Phi(y_0)$; to však znamená, že bod $F([x_0, y_0])$ leží na přímce Q_1 o rovnici $\alpha x + \beta y = \Phi(\gamma)$. Dokázali jsme, že $F(Q) \subset Q_1$. Stejně se zjistí, že množina $F(Q_1)$ je částí přímky o rovnici $\alpha x + \beta y = \Phi(\Phi(\gamma))$; protože $\Phi(\Phi(\gamma)) = \gamma$, je $F(Q_1) \subset Q$ a tedy $Q_1 = F(F(Q_1)) \subset F(Q)$. Odtud a ze vztahu $F(Q) \subset Q_1$ plyne, že $F(Q) = Q_1$.

Vidíme, že existuje nekonečně mnoho přímek, které procházejí počátkem a patří do $\mathfrak{P}$. Označme ještě symbolem R množinu všech $[x, y] \in \mathbf{E}_2$, kde x, y jsou racionální. Množina R je hustá v $\mathbf{E}_2$ a pro každý bod $[x, y] \in R$ je $F(x, y) = [x, y]$. Protože zobrazení F není identické, není spojité a není tedy ani lineární.