## Werk

**Label:** Article

**Jahr:** 1961

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0086|log42


## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

# POZNÁMKA K DOPRAVNÍMU PROBLÉMU

Osvald Demuth, Praha

(Došlo dne 23. prosince 1959)

Při výpočtu dopravního problému na základě algoritmu uvedeného v pracích [1], [2] se vyhledávají řešení, ve kterých nastává minimum dané lineární formy a která odpovídají — při geometrisaci problému — vrcholům omezeného konvexního polyedru dimense $(m-1)(n-1)$ v lineárním prostoru $E_{mn}$. V práci jde o dolní odhad počtu vrcholů tohoto polyedru.

Buďte $m, n$ přirozená čísla, $m, n \geqq 1$. Mějme dány dvě soustavy kladných čísel $a_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $b_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Systém čísel $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ s uvedenými vlastnostmi budeme nazývat *M-systémem* typu $[m, n]$ a značit $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$. Řešením daného $M$-systému nazýváme každou matici $(x_{i,j})$ typu $(m, n)$, pro niž

$$x_{i,j} \geqq 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, m\,; \quad \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = b_j \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Považujeme-li řešení za bod prostoru $E_{mn}$, tvoří množina všech řešení omezený konvexní polyedr dimense $(m-1)(n-1)$; o definici vrcholů viz [1]. Vrcholy polyedru množiny všech řešení $M$-systému $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ budeme většinou pro stručnost nazývat vrcholy tohoto $M$-systému.

Tato poznámka je pokusem o odhad počtu vrcholů daného $M$-systému typu $[m, n]$ zdola.

$M$-systém typu $[m, n]$ nazveme *degenerovaným* $M$-systémem, existují-li přirozená čísla $l, k$, $1 \leqq l < m$, $1 \leqq k < n$ a prosté posloupnosti čísel $i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots, j_k$, pro něž $1 \leqq i_r \leqq m\,(r = 1, 2, \ldots, l)$, $1 \leqq j_s \leqq n\,(s = 1, 2, \ldots, k)$, takové, že $\sum_{r=1}^{l} a_{i_r} = \sum_{s=1}^{k} b_{j_s}$. $M$-systém, který není degenerovaným systémem, nazýváme *regulárním* systémem.

V dalším užíváme bez citace při důkazech následujících tvrzení, která jsou převzata z citované práce [1]:

Tvrzení 1. Mějme $M$-systém $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$. Buď $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_{mn}, j_{mn})$ libovolné předem dané pořadí množiny dvojic $(i, j)$, kde $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Definujeme-li postupně $x_{i,j}$ vzorcem

$$x_{i,j} = \min\left(a_i - \sum_{(i,k)<(i,j)} x_{i,k};\ b_j - \sum_{(k,j)<(i,j)} x_{k,j}\right),$$

kde znak $\sum_{(i,k)<(i,j)}$ značí, že sčítáme přes všechny dvojice $(i, k)$, které leží v daném pořadí před dvojicí $(i, j)$, je matice $(x_{i,j})$ řešením daného $M$-systému a bod v $E_{mn}$, který jí odpovídá, je vrcholem příslušného konvexního polyedru. Ke každému vrcholu existuje takové pořadí dvojic $(i, j)$, že souřadnice tohoto vrcholu můžeme získat shora uvedeným předpisem.

Tvrzení 2. Buď $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ daný $M$-systém. Řešení $(x_{i,j})$ tohoto $M$-systému je vrcholem právě tehdy, platí-li:

1. matice řešení $(x_{i,j})$ obsahuje alespoň jeden řádek nebo sloupec, ve kterém je právě jeden prvek různý od nuly;

2. vynecháme-li v matici řešení řádek resp. sloupec s vlastností zmíněnou v 1 a jestliže takto vzniklá submatice má nejméně dva řádky a nejméně dva sloupce, pak tato submatice obsahuje alespoň jeden řádek nebo sloupec, který obsahuje nejvýše jeden prvek různý od nuly;

3. vynecháme-li v submatici z tvrzení 2 řádek resp. sloupec s vlastností uvedenou v 2 a jestliže vzniklá submatice má alespoň dva řádky a dva sloupce, pak tato submatice obsahuje alespoň jeden řádek nebo sloupec, v němž je nejvýše jeden prvek různý od nuly. Uvedenou vlastnost má každá submatice vzniklá z matice řešení $(x_{i,j})$ naznačeným procesem a obsahující alespoň dva řádky a dva sloupce.

Tvrzení 3. Každý vrchol $M$-systému $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$, kde $a_i$ a $b_j$ jsou vesměs přirozená čísla, je celočíselným řešením tohoto $M$-systému.

**Definice.** Výrok „Určitému obsazení $k$-tého řádku (resp. sloupce) matice řešení daného $M$-systému odpovídá $S$ vrcholů" znamená, že existuje $S$ vrcholů tohoto $M$-systému tak, že $k$-tý řádek (resp. sloupec) v příslušných maticích řešení je obsazen tím předepsaným způsobem.

**Definice.** Speciálním způsobem obsazení řádku (resp. sloupce) matice řešení daného $M$-systému nazýváme takové obsazení tohoto řádku (resp. sloupce), v němž je právě jeden prvek různý od nuly.

Pomocné tvrzení. Mějme $M$-systém $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$. Buď $(x_{i,j})_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n}}$ jeho řešením. Je-li $m \geqq 2$ a je-li pro jisté $i_0$ $(1 \leqq i_0 \leqq m)$ $i_0$-tý řádek matice $(x_{i,j})$ obsazen speciálním způsobem (tj. existuje-li $j_0$ $(1 \leqq j_0 \leqq n)$ tak, že $x_{i_0,j_0} \neq 0$, $x_{i_0,j} = 0$ pro $j \neq j_0$), je $(x_{i,j})_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n}}$ vrcholem $M$-systému $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ právě tehdy, je-li $(x_{i,j})_{1 \leqq i \leqq m, i \neq i_0, 1 \leqq j \leqq n}$ vrcholem $M$-systému

$$M(a_1, \ldots, a_{i_0-1}, a_{i_0+1}, \ldots, a_m;\ b_1, b_2, \ldots, b_{j_0-1}, b_{j_0} - a_{i_0}, b_{j_0+1}, \ldots, b_n)$$

v případě, že $b_{j_0} \neq a_{i_0}$, nebo je-li $(x_{i,j})_{1 \leqq i \leqq m, i \neq i_0, 1 \leqq j \leqq n, j \neq j_0}$ vrcholem $M$-systému $M(a_1, \ldots, a_{i_0-1}, a_{i_0+1}, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_{j_0-1}, b_{j_0+1}, \ldots, b_n)$ v případě, že $b_{j_0} = a_{i_0}$.

Platnost plyne ihned z tvrzení 2. Obdobné tvrzení platí pro speciální způsob obsazení sloupců.

**Věta 1.** *Buď $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ regulární $M$-systém typu $[m, n]$. Potom konvexní polyedr tvořený množinou všech řešení tohoto $M$-systému má nejméně $[\max(m, n)]^{\min(m,n)-1}$ vrcholů.*

Příklad. Buďte $m$, $n$ přirozená čísla $(1 \leqq m \leqq n)$. Položme

$$(1) \quad b_j = k \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad a_1 = n \,.\, k - m + 1, \quad a_i = 1 \quad (i = 2, \ldots, m),$$

kde $k$ je přirozené číslo, $k \geqq m$. Systém $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ je regulární. Příslušný konvexní polyedr má právě $n^{m-1}$ vrcholů.

Regularita systému definovaného rovnostmi (1) je zřejmá. Na základě citovaných tvrzení každý vrchol tohoto $M$-systému je celočíselným řešením a naopak vzhledem k tomu, že $a_i = 1$ pro $i = 2, \ldots, m$, každé celočíselné řešení je vrcholem. Je-li $m = 1$, má $M$-systém zřejmě právě jeden vrchol. Je-li $m \geqq 2$, je řešení daného $M$-systému jednoznačně určeno obsahem druhého až $m$-tého řádku matice řešení. Z uvedeného plyne, že vrcholy jsou vzájemně jednoznačně přiřazeny volbám rozložení jedniček a nul ve druhém až $m$-tém řádku matice řešení našeho $M$-systému. Vzhledem k (1) existuje právě $n^{m-1}$ možností rozložení jedniček a nul v uvedených řádcích, a tedy konvexní polyedr příslušný k $M$-systému definovanému rovnostmi (1) má právě $n^{m-1}$ vrcholů.

Důkaz věty 1. Označme $T(m, n)$ minimální počet vrcholů regulárních $M$-systémů typu $[m, n]$, kde $m \leqq n$. Na základě uvedeného příkladu dokážeme, že dokonce platí $T(m, n) = n^{m-1}$. Bez újmy na obecnosti se můžeme omezit na zkoumání těch regulárních $M$-systémů, pro něž počet řádků $(m)$ je nejvýše roven počtu sloupců $(n)$, $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_m$, $b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_n$. Dokazujeme indukcí podle $m + n = k$:

Je-li $k = 2 \Rightarrow m = n = 1$, zřejmě platí $T(1, 1) = 1 = n^{m-1}$.

Nechť pro jisté $k \geqq 2$ platí $T(m, n) = n^{m-1}$ pro všechny dvojice přirozených čísel $(m, n)$, pro něž $m \leqq n$, $m + n = k$. Mějme libovolný regulární $M$-systém typu $[m, n]$ $(m \leqq n, m + n = k)$,

$$(2) \qquad M(a_1, a_2, \ldots, a_1; b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

takový, že

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_m, \; b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_n \,.$$

1. $a_m < b_n \Rightarrow m \geqq 2$. Existuje právě $n$ speciálních obsazení $m$-tého řádku matice řešení $M$-systému (2). Pro každé $l$ $(1 \leqq l \leqq n)$ odpovídá obsazení $x_{m,j} = \delta_j^l \,.\, a_m$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ na základě pomocného tvrzení právě tolik vrcholů, kolik jich má regulární $M$-systém typu $[m - 1, n]$

$$M(a_1, \ldots, a_{m-1}; b_1, \ldots, b_{l-1}, b_l - a_m, b_{l+1}, \ldots, b_n) \,,$$

tj. alespoň $n^{m-2}$ vrcholů na základě indukčního předpokladu. Různým obsazením odpovídají různé vrcholy. $M$-systém (2) má tedy v případě 1 alespoň $n \,.\, n^{m-2} = n^{m-1}$ vrcholů.

2. $a_m > b_n$. Je-li $m = 1$, zřejmě platí $T(m, n) = 1 = n^{m-1}$. Je-li $m \geqq 2$, budeme rozeznávat dva případy: a) $n = m$, b) $n \geqq m + 1$.

a) Transponujeme-li systém, tj. vyměníme-li úlohy $a_i$ a $b_j$, dostáváme případ 1.

b) $n \geqq m + 1 \Rightarrow n - 1 \geqq m \geqq 2$. Existuje právě $m$ speciálních způsobů obsazení $n$-tého sloupce matice řešení $M$-systému (2). Pro každé $j$ $(1 \leqq j \leqq m)$ má regulární $M$-systém $M(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j - b_n, a_{j+1}, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_{n-1})$ typu $[m, n-1]$ alespoň $T(m, n-1) = (n-1)^{m-1}$ vrcholů na základě indukčního předpokladu. Podle pomocného tvrzení a na základě toho, že různým obsazením odpovídají různé vrcholy, má $M$-systém (2) v případě 2 b) alespoň $m \,.\, (n-1)^{m-1}$ vrcholů, tj. více než $n^{m-1}$ vrcholů

$$(n \geqq m + 1 > m \Rightarrow \binom{m-1}{s} = \frac{(m-1) \,.\, (m-2) \ldots (m-s)}{s!} < (n-1)^s$$

pro

$$s = 1, 2, \ldots, m-1, \binom{m-1}{0} = (n-1)^0 = 1 ;$$

$$m(n-1)^{m-1} = \sum_{s=0}^{m-1} (n-1)^s (n-1)^{m-1-s} > \sum_{s=0}^{m-1} \binom{m-1}{s} (n-1)^{m-1-s} = n^{m-1}) \,.$$

Shrnutím výsledků z 1 a 2 dostáváme po přihlédnutí k příkladu uvedenému za formulací věty 1, že pro každou dvojici přirozených čísel $(m, n)$, pro niž $m \leqq n$, $m + n = k + 1$, platí $T(m, n) = n^{m-1}$.

**Věta 2.** *Buď $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ degenerovaný $M$-systém typu $[m, n]$. Potom konvexní polyedr tvořený množinou všech řešení tohoto $M$-systému má alespoň*

$$\frac{(\max(m, n))!}{(\max(m, n) - \min(m, n) + 1)!} \text{ vrcholů} \,.$$

Příklad. Buďte $m, n$ přirozená čísla, pro něž $2 \leqq m \leqq n$. Položme

$$(3) \qquad a_1 = n - m + 1 \,, \quad a_i = 1 \quad (i = 2, \ldots, m) \,; \quad b_j = 1 \quad (j = 1, \ldots, n) \,.$$

$M$-systém $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ je degenerovaný. Příslušný konvexní polyedr má právě $\frac{n!}{(n-m+1)!}$ vrcholů. Degenerovanost systému definovaného rovnostmi (3) je zřejmá. Počet vrcholů dokazujeme obdobným způsobem jako u prvého příkladu. Vzhledem k (3) existuje v tomto případě právě $n(n-1) \ldots (n-m+2) = \frac{n!}{(n-m+1)!}$ možností rozložení nul a jedniček v druhém až $m$-tém řádku matice řešení. Konvexní polyedr příslušný k $M$-systému definovanému rovnostmi (3) má tedy právě $\frac{n!}{(n-m+1)!}$ vrcholů.

Poznámka. Pro $m, n$ přirozená, $n \geqq m$, platí $\frac{n!}{(n-m+1)!} = n(n-1)\ldots$ $\ldots(n-m+2) \leqq n^{m-1}$.

Důkaz věty 2. Označme $V(m, n)$ minimální počet vrcholů degenerovaných $M$-systémů typu $[m, n]$, kde $m \leqq n$. Na základě právě uvedeného příkladu ukážeme, že dokonce platí $V(m, n) = \frac{n!}{(n-m+1)!}$. Bez újmy na obecnosti se můžeme omezit na zkoumání těch degenerovaných $M$-systémů, pro něž je počet řádků $(m)$ nejvýše roven počtu sloupců $(n)$ a platí $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_m$, $b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_n$. Dokazujeme indukcí podle $m + n = k$.

Každý $M$-systém typu $[1, n]$ je zřejmě regulární. Nechť $k = 4$. Mějme libovolný degenerovaný $M$-systém typu $[m, n]$, kde $m \leqq n$, $m + n = 4 \Rightarrow m = n = 2$. Konvexní polyedr příslušný k $M$-systému typu $[2, 2]$ má vždy dva vrcholy, takže $V(2, 2) = 2 = \frac{2!}{(2-2+1)!}$.

Nechť pro jisté $k \geqq 4$ platí, že $V(m, n) = n!/(n-m+1)!$ pro každou dvojici $(m, n)$, pro niž $n \geqq m \geqq 2$, $m + n \leqq k$. Mějme libovolný degenerovaný $M$-systém (3), $M(a_1, a_2, \ldots, a_m; b_1, b_2, \ldots, b_n)$ typu $[m, n]$, kde $n \geqq m$, $n + m = k + 1$, takový, že $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_m$; $b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_n$. Vzhledem k degenerovanosti $M$-systému (3) musí platit $m \geqq 2$.

1. $a_m \leqq b_n$. Existuje právě $n$ speciálních způsobů obsazení $m$-tého řádku matice řešení $M$-systému (3). Různým obsazením odpovídají různé vrcholy. Pro $i$ $(1 \leqq i \leqq n)$, pro něž $a_m < b_i$ odpovídá obsazení $x_{m,j} = \delta^i_j . a_m$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ právě tolik vrcholů, kolik jich má $M$-systém typu $[m-1, n]$ $M(a_1, \ldots, a_{m-1}; b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i - a_m, b_{i+1}, \ldots, b_n)$, tj. podle indukčního předpokladu resp. podle věty 1 a poznámky alespoň $\frac{n!}{(n-m+2)!}$ vrcholů. Je-li $a_m = b_i$, odpovídá témuž obsazení právě tolik vrcholů, kolik jich má $M$-systém $M(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}; b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n)$ typu $[m-1, n-1]$, tj. podle indukčního předpokladu resp. podle věty 1 a poznámky alespoň $\frac{(n-1)!}{(n-m+1)!}$ vrcholů. Jelikož pro $n \geqq m \geqq 2$ platí $n \geqq n - m + 2 \geqq 2$ čili $\frac{n}{n-m+2} \geqq 1$, odpovídá v každém z obou možných případů uvedenému obsazení alespoň $\frac{(n-1)!}{(n-m+1)!}$ vrcholů. Celkem má tedy $M$-systém (3) v případě 1 alespoň $n . \frac{(n-1)!}{(n-m+1)!} = \frac{n!}{(n-m+1)!}$ vrcholů.

2. $a_m > b_n$.

a) Je-li $m = n$, transponujeme systém a dostáváme případ 1.