K VÝKLADU TEORIE PROSTORŮ S KONEXÍ

ALOIS ŠVEC, Praha

(Došlo 16. června 1960)

V práci je ukázáno, že studium variet v prostoru s konexí je ekvivalentní s jistou částí studia variet v odpovídajícím rovném prostoru.

1. Všechny následující úvahy je možno provést pro prostor s libovolnou konexí, abychom však měli konkrétní příklad, budeme pracovat s prostorem s afinní konexí; čtenář si výsledky snadno přetransformuje na případ projektivní, euklidovské nebo jiné konexe.

Definujme nejprve celkem obvyklým způsobem *n-rozměrný prostor s afinní konexí* $\mathscr{A}_n$: Buď dána n-rozměrná oblast Ω_n parametrů $(\xi) \equiv (\xi^\alpha) \equiv (\xi^1, \ldots, \xi^n)$, každému bodu $(\xi) \in \Omega_n$ buď přiřazen lokální centroafinní prostor $A_n(\xi)$ s centrem $M(\xi)$, jež mohu přímo ztotožnit s bodem (ξ); v každém lokálním prostoru $A_n(\xi)$ buď dále zvolena lokální base $\{M(\xi); I_1(\xi), \ldots, I_n(\xi)\}$. Budiž dále dána soustava formálních rovnic

$$\nabla M = \omega^\alpha I_\alpha\,, \quad \nabla I_\alpha = \omega_\alpha^\beta I_\beta\,, \tag{2}$$

kde

$$\omega^\alpha = \Gamma_\beta^\alpha(\xi)\,\mathrm{d}\xi^\beta\,, \quad \omega_\beta^\alpha = \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta(\xi)\,\mathrm{d}\xi^\gamma\,;$$

ω^α, ω_α^β jsou libovolné Pfaffovy formy, splňující podmínku, že formy $\omega^1, \ldots, \omega^n$ jsou lineárně nezávislé čili

$$[\omega^1 \ldots \omega^n] \neq 0\,. \tag{3}$$

Geometrie prostoru $\mathscr{A}_n$ je dána soustavou afinit mezi jednotlivými lokálními prostory, přiřazených obloukům, spojujícím centra uvažovaných lokálních prostorů. Tyto afinity se konstruují na základě rovnic (2). Buď tedy dán oblouk γ parametrickými rovnicemi

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(t)\,, \quad {}^1t \leqq t \leqq {}^2t \tag{4}$$

a nechť spojuje body $({}^1\xi^\alpha) = (\xi^\alpha({}^1t))$ a $({}^2\xi^\alpha) = (\xi^\alpha({}^2t))$; sestrojím jistou afinitu $\mathbf{A}_\gamma$ mezi lokálními prostory $A_n({}^1\xi)$, $A_n({}^2\xi)$. Pomocí formálních rovnic (2) mohu sestaviti soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \Gamma_\gamma^\alpha(\xi(t))\,\frac{\mathrm{d}\xi^\gamma}{\mathrm{d}t}\,J_\alpha\,, \quad \frac{\mathrm{d}J_\alpha}{\mathrm{d}t} = \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta(\xi(t))\,\frac{\mathrm{d}\xi^\gamma}{\mathrm{d}t}\,J_\beta \tag{5}$$

a hledat její řešení

$$N = N(t)\,, \quad J_\alpha = J_\alpha(t) \tag{6}$$

v prostoru $A_n(^1\xi)$, určené počátečními podmínkami

$$N(^1t) = M(^1\xi)\,, \quad J_\alpha(^1t) = I_\alpha(^1\xi)\,, \tag{7}$$

kde $\{M(^1\xi); I_1(^1\xi), \ldots, I_n(^1\xi)\}$ je předem zvolená base lokálního prostoru $A_n(^1\xi)$. Afinita $\mathbf{A}^\gamma$: $A_n(^1\xi) \to A_n(^2\xi)$ přiřazuje potom bodu

$$X = N(^2t) + x^\alpha J_\alpha(^2t)$$

prostoru $A_n(^1\xi)$ bod

$$X' = M(^2\xi) + x^\alpha I_\alpha(^2\xi)$$

prostoru $A_n(^2\xi)$.

Rozvinutím γ^* oblouku γ (4) do lokálního prostoru $A_n(^2\xi)$ rozumím pak oblouk γ^*, jenž vzniká takto: Označme γ_τ, $^1t \leqq \tau \leqq {}^2t$, část oblouku γ mezi body $\xi(\tau)$ a $\xi(^2t)$, tj. oblouk $\xi^\alpha = \xi^\alpha(t)$, $\tau \leqq t \leqq {}^2t$; oblouk γ^* je pak tvořen body $\mathbf{A}_{\gamma_\tau} M(\xi(\tau))$, $^1t \leqq \tau \leqq {}^2t$, kde $\mathbf{A}_{\gamma_\tau}$: $A_n(\xi(\tau)) \to A_n(^2\xi)$ je afinita mezi lokálními prostory v koncových bodech oblouku γ_τ a $M(\xi(\tau))$ je centrum lokálního prostoru $A_n(\xi(\tau))$.

Vzhledem k lineární nezávislosti forem ω^α je každý diferenciál $\mathrm{d}\xi^\beta$ jejich lineární kombinací, takže jistě mohu psát

$$\begin{aligned} [\mathrm{d}\omega^\alpha] &= [\omega^\beta \omega^\alpha_\beta] + S^\alpha_{\beta\gamma}[\omega^\beta \omega^\gamma]\,, \quad & S^\alpha_{\beta\gamma} + S^\alpha_{\gamma\beta} = 0\,, \\ [\mathrm{d}\omega^\alpha_\beta] &= [\omega^\gamma_\beta \omega^\alpha_\gamma] + R^\alpha_{\gamma\delta\beta}[\omega^\gamma \omega^\delta]\,, \quad & R^\alpha_{\gamma\delta\beta} + R^\alpha_{\delta\gamma\beta} = 0\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Soustava funkcí $S^\alpha_{\beta\gamma}$ resp. $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ se ze známých důvodů nazývá tensorem torse resp. křivosti prostoru $\mathscr{A}_n$.

Základním předmětem studia lokální diferenciální geometrie prostoru $\mathscr{A}_n$ je studium vlastností variet do tohoto prostoru vnořených resp. zjišťování existence variet předepsaných vlastností v daném prostoru $\mathscr{A}_n$. Je-li dána v $\mathscr{A}_n$ varieta V_r, mohu v každém jejím bodě specialisovat lokální repery tak, že $\{M; I_1, \ldots, I_r\}$ je basí tečného prostoru variety, takže V_r je dána soustavou rovnic

$$\omega^{r+1} = \omega^{r+2} = \ldots = \omega^n = 0\,. \tag{9}$$

Vyšetřování variety V_r se pak analyticky děje postupným vnějším diferencováním systému (9) a jeho prodlužováním. Účelem tohoto článku není však konkrétní studium některých geometrických objektů. Studium lokálních vlastností variety V_r v některém jejím bodě $M(\xi)$ spočívá ve vyšetřování vlastností soustavy rozvinutí všech oblouků, ležících na V_r a procházejících bodem $M(\xi)$, do lokálního prostoru $A_n(\xi)$. To, že na varietě V_r mohu uvažovat jen jednoparametrické útvary a neustále mluvit o jejich rozvinutí do některého lokálního prostoru, činí vyjadřování poměrně těžkopádným a v jisté míře nám nedovoluje jasný a jednoduchý geometrický pohled na studovaný objekt. Podle mého soudu jsou tyto nedostatky hlavní příčinou současného stavu, kdy naše znalosti o varietách, vnořených v prostory s konexí, jsou nesrovnatelně menší než o obdobných varietách, vnořených do rovného prostoru. Ve své práci [2] jsem se pokusil o geometrisaci studia variet v prostorech s konexí, která v podstatě vedla k získání nových vlastností např. ploch v trojrozměrných prostorech s projektivní konexí, vycházel jsem však z klasické definice a chápání prostoru s konexí, jak jsem je uvedl v předchozím. V dalším se pokusím ukázati, že studium variety v prostoru s konexí je možno vhodně interpretovat jako část studia variety v rovném prostoru.

2. Naším úkolem budiž tedy studium variety V_r v afinním prostoru A_n. Všimněme si nejprve podrobněji analytického aparátu, který nám umožní naši práci. V prostoru A_n nebo v jeho určité oblasti, která nás zajímá, buďtež zavedeny souřadnice — obecně křivočaré — $(\xi) \equiv (\xi^1, \ldots, \xi^n)$, v každém bodě M prostoru A_n buď dále dána soustava basí $\{M; I_1, \ldots, I_n\}$, jež závisí na bodě M a na dalších tzv. sekundárních neboli vedlejších parametrech $t^1, \ldots, t^q$; předpokládám-li, že všechny sekundární parametry jsou podstatné, je ovšem $q \leqq n^2$, neboť obecný reper v bodě $M \in A_n$ je udán n^2 souřadnicemi svých n vektorů. Je tedy celkem

$$M = M(\xi) \equiv M(\xi^1, \ldots, \xi^n), \quad I_\alpha = I_\alpha(\xi, t) \equiv I_\alpha(\xi^1, \ldots, \xi^n; t^1, \ldots, t^q) \tag{10}$$

a zřejmě dostávám rovnice

$$\mathrm{d}M = \omega^\alpha I_\alpha, \quad \mathrm{d}I_\alpha = \omega_\alpha^\beta I_\beta, \tag{11}$$

kde

$$\omega^\alpha = \Gamma_\beta^\alpha \,\mathrm{d}\xi^\beta, \; \omega_\beta^\alpha = \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta \,\mathrm{d}\xi^\gamma + \gamma_{a\alpha}^\beta \,\mathrm{d}t^a\,; \quad a = 1, \ldots, q\,;$$

vzhledem k tomu, že bod M probíhá n-rozměrnou oblast prostoru A_n, platí (3). Vnějším diferencováním předchozích rovnic dostávám tzv. podmínky integrability ve tvaru

$$[\mathrm{d}\omega^\alpha] = [\omega^\beta \omega_\beta^\alpha], \quad [\mathrm{d}\omega_\beta^\alpha] = [\omega_\beta^\gamma \omega_\gamma^\alpha]\,; \tag{12}$$

tyto rovnice označme souhrnně **I**. Mám-li nyní studovat varietu V_r, vnořenou v A_n, přiřadím každému jejímu bodu podsoustavu z uvažovaných basí, pro niž vektory $I_1, \ldots, I_r$ jsou tečné vektory variety V_r. Varieta V_r je pak dána soustavou rovnic (9), další studium variety je založeno na studiu této soustavy s užitím podmínek integrability **I**.

Nechť v prostoru A_n je dána určitá varieta V_r. Její vlastnosti mohu rozdělit do tří skupin na

1° vlastnosti, jež mohu odvodit z rovnic (9) bez užití podmínek integrability **I**;
2° vlastnosti, odvoditelné z rovnic (9) a **I**, jež však není možno odvodit pouze z (9);
3° speciální vlastnosti variety V_r, neodvoditelné z rovnic (9) a **I**.

Nyní budu říkat, že vlastnosti 1° jsou vlastnostmi variety V_r, vnořené v prostor s afinní konexí; vlastnosti 1° a 2° jsou vlastnostmi V_r, vnořené v afinní prostor. V průběhu dalšího se ukáže, že studium variety vnořené do prostoru s afinní konexí (jak bylo uvedeno v první části) je založeno na témž analytickém aparátu jako hledání vlastností 1° variety v afinním prostoru.

Uvažujme tedy afinní prostor A_n, v každém jeho bodě buď dána soustava basí (jak bylo popsáno výše), takže platí rovnice (11); nepředpokládejme však platnost rovnic I nebo lépe řečeno zakažme jejich užívání. Základním lemmatem naší celé teorie v tomto případě bude pak tvrzení, že *vnější kvadratické formy*

$$(13)\qquad \Omega^\alpha = [\mathrm{d}\omega^\alpha] - [\omega^\beta\omega^\alpha_\beta]\,, \quad \Omega^\alpha_\beta = [\mathrm{d}\omega^\alpha_\beta] - [\omega^\gamma_\beta\omega^\alpha_\gamma]$$

jsou formami pouze v diferenciálech hlavních parametrů $\mathrm{d}\xi^1, \ldots, \mathrm{d}\xi^n$ čili jsou tvaru

$$(14)\qquad \Omega^\alpha = S^\alpha_{\beta\gamma}[\omega^\beta\omega^\gamma]\,, \quad \Omega^\alpha_\beta = R^\alpha_{\gamma\delta\beta}[\omega^\gamma\omega^\delta]\,;$$

$S^\alpha_{\beta\gamma}$, $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ jsou ovšem funkcemi v ξ^α, t^a.

Důkaz podává např. E. CARTAN v [1] celkem neuspokojivým způsobem užíváním nepřesných infinitesimálních úvah, o nichž se sám vyjadřuje značně kriticky. Zde podám důkaz, založený na přímém výpočtu. V každém bodě prostoru A_n nebo jeho uvažované oblasti buď zvolena určitá base $\{M; I_{1'}, \ldots, I_{n'}\}$,[1]) takže je $M = M(\xi)$, $I_{\alpha'} = I_{\alpha'}(\xi)$. Potom jistě platí rovnice

$$(19)\qquad \begin{aligned} \mathrm{d}M &= \omega^{\alpha'}I_{\alpha'}\,, & \mathrm{d}I_{\alpha'} &= \omega^{\beta'}_{\alpha'}I_{\beta'}\,,\\ \omega^{\alpha'} &= \Gamma^{\alpha'}_\beta\,\mathrm{d}\xi^\beta\,, & \omega^{\beta'}_{\alpha'} &= \Gamma^{\alpha'}_{\gamma\beta'}\,\mathrm{d}\xi^\gamma \end{aligned}$$

a formy $\Omega^{\alpha'}$, $\Omega^{\alpha'}_{\beta'}$ jsou jistě tvaru

$$(20)\qquad \Omega^{\alpha'} = S^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}[\omega^{\beta'}\omega^{\gamma'}]\,, \quad \Omega^{\alpha'}_{\beta'} = R^{\alpha'}_{\gamma'\delta'\beta'}[\omega^{\gamma'}\omega^{\delta'}]\,.$$

Nyní pro každou z předem uvažovaných basí $\{M(\xi); I_1(\xi, t), \ldots, I_n(\xi, t)\}$ platí

$$(21)\qquad I_\alpha(\xi, t) = c^{\alpha'}_\alpha(\xi, t)\, I_{\alpha'}(\xi)$$

čili

$$(22)\qquad I_{\alpha'}(\xi) = c^\alpha_{\alpha'}(\xi, t)\, I_\alpha(\xi, t)\,,$$

kde

$$(23)\qquad c^{\alpha'}_\alpha c^\beta_{\alpha'} = \delta^\beta_\alpha\,, \quad c^{\alpha'}_\alpha c^\alpha_{\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'}$$

a δ^β_α, $\delta^{\alpha'}_{\beta'}$ jsou Kroneckerova delta ($=1$ pro stejné a $=0$ pro různé indexy). Diferencováním rovnice (23_1) dostávám $c^\beta_{\alpha'}\,\mathrm{d}c^{\alpha'}_\alpha + c^{\alpha'}_\alpha\,\mathrm{d}c^\beta_{\alpha'} = 0$ a po vynásobení $c^\alpha_{\gamma'}$ a vhodných změnách indexů, v nichž se sčítá, dostávám konečně

$$(24)\qquad \mathrm{d}c^\alpha_{\alpha'} = -\, c^\beta_{\alpha'}c^\alpha_{\beta'}\,\mathrm{d}c^{\beta'}_\beta\,.$$

Dosazením (21) do (11) dostávám

$$\mathrm{d}M = \omega^\alpha c^{\alpha'}_\alpha I_{\alpha'}\,, \quad \mathrm{d}c^{\alpha'}_\alpha\,.\,I_{\alpha'} + c^{\alpha'}_\alpha\,\mathrm{d}I_{\alpha'} = \omega^\beta_\alpha c^{\alpha'}_\beta I_{\alpha'}\,,$$

---

[1]) Užívám označení čárkovaných indexů z tensorového počtu, viz např. SCHOUTENŮV Ricci-Calculus.

čili formy ω^α, ω^β_α se transformují podle rovnic — jak plyne srovnáním s (19) —

$$\omega^{\alpha'} = c^{\alpha'}_\alpha \omega^\alpha\,, \quad \omega^{\beta'}_{\alpha'} = c^\alpha_{\alpha'} c^{\beta'}_\beta \omega^\beta_\alpha - c^\alpha_{\alpha'}\,\mathrm{d}c^{\beta'}_\alpha\,. \tag{25}$$

Dále je

$$\begin{aligned} \Omega^{\alpha'} \equiv [\mathrm{d}\omega^{\alpha'}] - [\omega^{\beta'}\omega^{\alpha'}_{\beta'}] = [\mathrm{d}c^{\alpha'}_\alpha \omega^\alpha] + c^{\alpha'}_\alpha[\mathrm{d}\omega^\alpha] - \\ - c^{\beta'}_\gamma c^\alpha_{\beta'} c^{\alpha'}_\beta [\omega^\gamma \omega^\beta_\alpha] + c^{\beta'}_\gamma c^\alpha_{\beta'}[\omega^\gamma\,\mathrm{d}c^{\alpha'}_\alpha]\,, \end{aligned}$$

pomocí (23) se zjistí, že první a čtvrtý člen mají nulový součet, takže konečně

$$\Omega^{\alpha'} = c^{\alpha'}_\alpha \Omega^\alpha \quad \text{čili} \quad \Omega^\alpha = c^\alpha_{\alpha'}\Omega^{\alpha'}\,. \tag{26}$$

Je

$$\begin{aligned} \Omega^{\alpha'}_{\beta'} \equiv [\mathrm{d}\omega^{\alpha'}_{\beta'}] - [\omega^{\gamma'}_{\beta'}\omega^{\alpha'}_{\gamma'}] = c^{\alpha'}_\alpha[\mathrm{d}c^\beta_{\beta'}\omega^\alpha_\beta] + c^\beta_{\beta'}[\mathrm{d}c^{\alpha'}_\alpha\,\omega^\alpha_\beta] + \\ + c^{\alpha'}_\alpha c^\beta_{\beta'}[\mathrm{d}\omega^\alpha_\beta] - [\mathrm{d}c^\beta_{\beta'}\mathrm{d}c^{\alpha'}_\beta] - c^\beta_{\beta'} c^{\gamma'}_\gamma c^\delta_{\gamma'} c^{\alpha'}_\alpha[\omega^\gamma_\beta \omega^\alpha_\delta] + \\ + c^\beta_{\beta'} c^{\gamma'}_\gamma c^\varphi_{\gamma'}[\omega^\gamma_\beta\,\mathrm{d}c^{\alpha'}_\varphi] + c^\varepsilon_{\beta'} c^\delta_{\gamma'} c^{\alpha'}_\alpha[\mathrm{d}c^{\gamma'}_\varepsilon \omega^\alpha_\delta] - c^\varepsilon_{\beta'} c^\varphi_{\gamma'}[\mathrm{d}c^{\gamma'}_\varepsilon\,\mathrm{d}c^{\alpha'}_\varphi]\,. \end{aligned}$$

Pomocí rovnic (23) a (24) se snadno zjistí, že součet prvního a sedmého resp. druhého a šestého resp. čtvrtého a osmého členu je nulový, takže dostávám

$$\Omega^{\alpha'}_{\beta'} = c^{\alpha'}_\alpha c^\beta_{\beta'}\Omega^\alpha_\beta \quad \text{čili} \quad \Omega^\alpha_\beta = c^\alpha_{\alpha'} c^{\beta'}_\beta \Omega^{\alpha'}_{\beta'}\,. \tag{27}$$

Protože nyní $\Omega^{\alpha'}$, $\Omega^{\alpha'}_{\beta'}$ jsou tvaru (20), dostávám

$$\begin{aligned} \Omega^\alpha &= c^\alpha_{\alpha'} S^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}[\omega^{\beta'}\omega^{\gamma'}] = c^\alpha_{\alpha'} c^{\beta'}_\beta c^{\gamma'}_\gamma S^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}[\omega^\beta\omega^\gamma]\,, \\ \Omega^\alpha_\beta &= c^\alpha_{\alpha'} c^{\beta'}_\beta c^{\gamma'}_\gamma c^{\delta'}_\delta R^{\alpha'}_{\gamma'\delta'\beta'}[\omega^\gamma\omega^\delta]\,, \end{aligned} \tag{28}$$

což dokazuje naše základní lemma. Pro soustavu vybraných basí $\{M(\xi); I_1(\xi, t), \ldots, \ldots, I_n(\xi, t)\}$ platí tedy rovnice (11) a bez použití podmínek integrability **I** je možno dokázat, že platí i rovnice (8). Rovnice **I** nám ovšem říkají, že

$$S^\alpha_{\beta\gamma} = R^\alpha_{\gamma\delta\beta} = 0\,. \tag{29}$$

Studium vlastností 1° variety V_r v prostoru A_n je tedy ekvivalentní se studiem vlastností variety V_r v prostoru s afinní konexí $\mathscr{A}_n$, neboť k obojímu užívám téhož analytického aparátu, vycházejícího z rovnic (2) resp. (11), (8) a (9).

Při přechodu od jedné soustavy basí $\{M; I_1(\xi, t), \ldots, I_n(\xi, t)\}$ k jiné soustavě $\{M; I_{1'}(\xi, t'), \ldots, I_{n'}(\xi, t')\}$, jež jsou spojeny vztahy

$$I_{\alpha'} = c^\alpha_{\alpha'} I_\alpha \quad \text{čili} \quad I_\alpha = c^{\alpha'}_\alpha I_{\alpha'}\,, \tag{30}$$

ukazuje výpočet, totožný s důkazem základního lemmatu, že z platnosti rovnic (11), (19) plynou pro formy (13) rovnice (27) a tedy

$$S^\alpha_{\beta\gamma} = c^\alpha_{\alpha'} c^{\beta'}_\beta c^{\gamma'}_\gamma S^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}\,, \quad R^\alpha_{\gamma\delta\beta} = c^\alpha_{\alpha'} c^{\beta'}_\beta c^{\gamma'}_\gamma c^{\delta'}_\delta R^{\alpha'}_{\gamma'\delta'\beta'}\,. \tag{31}$$

Tyto rovnice nás opravňují říkati, že soustava funkcí $S^\alpha_{\beta\gamma}$ resp. $R^\alpha_{\gamma\delta\beta}$ je *tensorem torse* resp. *křivosti* uvažovaného prostoru. Rovnice **I** jsou pak ekvivalentní s tvrzením, že torse a křivost prostoru A_n je nulová, čili že platí rovnice (29).

3. V předchozím jsem tedy ukázal, že studium variety V_r v prostoru s afinní konexí je možno interpretovat jako studium variety V_r v afinním prostoru A_n, zde používám téhož analytického aparátu a postupu, na který jsme zvyklí při užívání Cartanových metod, pouze podmínky integrability I jsou nahrazeny rovnicemi struktury (8). Na základě tohoto postupu mohu snadno studovat i existenční otázky pro speciální typy variet s předem předepsanými vlastnostmi.

Jestliže chci studovat pouze vlastnosti variety V_r v $\mathscr{A}_n$ a nemám zájem o řešení existenčních otázek, je možno postupovat způsobem, který se mi zdá početně výhodnějším. Buď v A_n dána varieta V_r a zkoumejme její vlastnosti, uvedené v 1°. Každému jejímu bodu $M = M(\xi)$ přiřadím jistý lokální reper $\{M(\xi); I_1(\xi), \ldots, I_n(\xi)\}$ tak, aby $\{M(\xi); I_1(\xi), \ldots, I_r(\xi)\}$ byla basí tečného prostoru variety V_r v bodě $M(\xi)$. Systém diferenciálních rovnic, určujících varietu V_r, jest tedy

(32)
$$\mathrm{d}M = \Gamma^\alpha_b \,\mathrm{d}\xi^b \,.\, I_\alpha\,, \quad \mathrm{d}I_\alpha = \Gamma^\beta_{\alpha a}\,\mathrm{d}\xi^a \,.\, I_\beta$$
$$(\alpha, \beta, \ldots = 1, \ldots, n; \quad a, b, \ldots = 1, \ldots, r)\,;$$

jeho podmínek integrability nebudu v dalším užívat. Přechod k jiným lokálním reperům týchž vlastností se uskuteční pomocí rovnic

(33)
$$M = M'\,, \quad I_\alpha = \sigma^{\alpha'}_\alpha I_{\alpha'}\,,$$

kde

$$\sigma^{A'}_a = 0 \quad \text{pro} \quad a = 1, \ldots, r\,; \; A' = r + 1, \ldots, n\,; \; \det|\sigma^{\alpha'}_\alpha| \neq 0\,;$$

resp.

(34)
$$M' = M\,, \quad I_{\alpha'} = \sigma^{\alpha}_{\alpha'} I_\alpha\,,$$

kde

$$\sigma^A_{a'} = 0 \quad \text{pro} \quad a' = 1, \ldots, r\,; \; A = r + 1, \ldots, n\,; \; \sigma^{\alpha'}_\alpha \sigma^\beta_{\alpha'} = \delta^\beta_\alpha\,.$$

Při užití (33) a (34) a současné změně parametrů

(35)
$$\xi^a = \xi^a(\xi^{a'}) \quad \text{resp.} \quad \xi^{a'} = \xi^{a'}(\xi^a)$$

jsou rovnice (32) nahrazeny rovnicemi

(36)
$$\mathrm{d}M = \Gamma^{\alpha'}_{b'}\,\mathrm{d}\xi^{b'} \,.\, I_{\alpha'}\,, \quad \mathrm{d}I_{\alpha'} = \Gamma^{\beta'}_{\alpha' a'}\,\mathrm{d}\xi^{a'} \,.\, I_{\beta'}\,;$$

po snadném výpočtu, sestávajícím pouze z dosazení (33) do (32), vychází

(37)
$$\Gamma^{\alpha'}_{b'} = \sigma^{\alpha'}_\alpha A^b_{b'} \Gamma^\alpha_b\,, \quad \Gamma^{\beta'}_{\alpha' a'} = \sigma^\alpha_{\alpha'} \sigma^{\beta'}_\beta A^a_{a'} \Gamma^\beta_{\alpha a} - \sigma^\alpha_{\alpha'}\,\partial_{a'} \sigma^{\beta'}_\alpha\,,$$

kde

(38)
$$\partial_{a'} f = \frac{\partial f}{\partial \xi^{a'}}\,, \quad A^a_{a'} = \partial_{a'} \xi^a\,.$$