Časopis pro pěstování matematiky, roč. 86 (1961), Praha

REFERÁTY

O VZTAZÍCH MEZI VLASTNÍMI HROTY A MINIMÁLNÍMI KOMPONENTAMI l-GRUP

(Výtah z referátu FRANTIŠKA ŠIKA, předneseného dne 12. prosince 1960 v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků")

V referátě se zabýváme studiem struktury l-grup, které obsahují množinu vlastních hrotů předepsaných vlastností. Různé požadavky, položené na množinu vlastních hrotů v l-grupě, mají důsledky dvojího druhu. Jeden typ důsledku je vyjádřen jednak vnitřními prostředky l-grup, založenými na disjunktivitě a jednak vnějšími prostředky v termínech subdirektních součtů lineárně uspořádaných grup. Druhý typ je vyjádřen pouze vnitřními prostředky uvedeného druhu a nelze použít analogických metod vnějších jako v předešlém případě, pokud ovšem nechceme zavádět úvahy o lineárně uspořádaných multigrupách.

Ústředním pojmem úvah je pojem vlastního hrotu, zavedený J. JAKUBÍKEM.*) *Vlastní hrot* je prvek $x > 0$ l-grupy G, jestliže interval $\langle 0, x \rangle$ je řetězec. Existence vlastního hrotu vede vždy na existenci minimální komponenty a obráceně. Značíme-li A' množinu všech prvků $b \in G$, pro něž platí $|b| \wedge |a| = 0$ pro všechny prvky a podmnožiny $\emptyset \neq A \subseteq G$, pak pod *komponentou* v G rozumíme množinu $K \subseteq G$, k níž existuje podmnožina A s vlastností $K = A'$. (Čárka bude mít všude v dalším právě zavedený význam.) Systém komponent bude *úplný*, jestliže G je jediná komponenta, obsahující všechny komponenty systému. *Normální komponentou* nazýváme komponentu, která je normální podgrupou.

Jak je obvyklé, pod (1) *subdirektním součtem* lineárně uspořádaných grup $\{G_\nu \mid \nu \in \in N\}$ budeme rozumět takovou l-podgrupu G (2) *úplného přímého součtu* lineárně uspořádaných grup $\{G_\nu\}$ (tj. množiny všech funkcí f definovaných na množině N, $f(\nu) \in G_\nu$ pro každé $\nu \in N$, s přirozenou definicí algebraických operací), která pro libovolné $x_\nu \in G_\nu$ obsahuje funkci f takovou, že $f(\nu) = x_\nu$. Součet G se nazývá (3) *typu* α, jestliže ke každému ν existuje $f \in G$ tak, že $f(\nu) \neq 0, f(\mu) = 0$ pro $\mu \neq \nu$. Jestliže součet G obsahuje všechny funkce popsaného typu, nazývá se (4) *úplně subdirektním*. Funkce, které mají pouze konečně mnoho hodnot různých od nuly, tvoří (5) *přímý součet* lineárně uspořádaných grup $\{G_\nu\}$. Je-li l-grupa isomorfní se subdirektním součtem některého z popsaných typů (1) až (5), pak říkáme, že má (1) *realisaci*, (2) *úplnou přímou* realisaci, (3) realisaci *typu* α, (4) resp. (5) *úplnou* resp. *přímou* realisaci.

*) J. JAKUBÍK: K teórii čiastočne usporiadaných grúp. (Viz. str. 318—330.)

Vztahy mezi vlastními hroty a minimálními komponentami na l-grupách jsou vyjádřeny v následujících větách.

Věta 1. *Následující podmínky jsou na l-grupě G ekvivalentní:*

1. *Ke každému prvku* $a \in G$, $a > 0$, *existuje vlastní hrot* x *tak, že* $a \geqq x$.
2. *Systém všech minimálních komponent v* G *je úplný.*
3. *Každá nenulová komponenta obsahuje minimální komponentu.*

Věta 2. *Každý prvek* $a > 0$ *l-grupy* G *má vlastní hrot, když a jen když pro systém* $\{G_\nu \mid \nu \in N\}$ *všech minimálních komponent v* G *a pro libovolnou podmnožinu* R, $\emptyset \subseteq R \subset N$, *platí* $\bigcap_{\nu \in R} G'_\nu \subseteq \bigcup_{\mu \in N-R} (G_\mu + G'_\mu)$ *a jestliže je navíc splněna kterákoli z podmínek věty* 1.

Připojíme-li k požadavkům předešlých vět další, který uvádí do souvislosti vlastní hroty a prvky s nimi konjugované, vynutí se tím normalita komponent. I když se formální vyjádření vlastností l-grup v předešlém a v tomto případě jen málo liší, dochází k podstatné změně struktury; příslušné l-grupy mají realisaci.

Věta 3. *l-Grupa G má realisaci typu* α, *když a jen když je splněna některá z ekvivalentních podmínek* 1° *až* 3°:

1° a) $\equiv$ 1;

1° b) *Prvky* $b + x - b$, x *jsou srovnatelné, jakmile* x *je vlastní hrot,* $b \in G$.

2° *Všechny minimální komponenty jsou normální a tvoří úplný systém.*

3° *Každá nenulová komponenta obsahuje minimální normální komponentu.*

Analogicky lze modifikovat větu 2. Aplikaci předešlých výsledků k popisu dalších typů realisací představují věty:

Věta 4. *l-Grupa G má přímou realisaci, když a jen když je splněna jedna z ekvivalentních podmínek:*

1. *Každý prvek* $a \in G$, $a > 0$, *je součtem konečně mnoha vlastních hrotů.*
2. G *je součtem minimálních komponent.*

Věta 5. *l-Grupa G má úplnou realisaci, když a jen když platí jedna z ekvivalentních podmínek:*

1. *Libovolný prvek* $a \in G$, $a > 0$, *je suprémem svých vlastních hrotů.*
2. *Systém všech minimálních komponent* $\{G_\nu\}$ *je úplný a pro každé* ν *platí* $G = G_\nu + G'_\nu$.

František Šik, Brno