Werk

Label: Abstract

Jahr: 1957

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0082|log10

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

жащей точку A и имеющей направление z. При помощи аксиом I—IV доказан ряд теорем о существовании и определенности прямых.

Плоскость определяется так: *множество $\tau \subset \mathbf{P}$ мы называем плоскостью, если*

1. *оно содержит хотя бы две различные точки,*

2. *существует такое направление z, что τ является максимальным множеством, имеющим следующее свойство:*

$$A, B \in \tau,\ A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) \perp z\,. \qquad (*)$$

Показано, что если τ — плоскость, то существует в точности одно такое направление z, что τ является максимальным множеством со свойством (*). Это направление z мы называем неориентированным направлением, перпендикулярным к плоскости τ или, короче, направлением плоскости τ и обозначаем через $\zeta(\tau)$. Плоскости τ_1, τ_2 мы называем параллельными, соотв. перпендикулярными, если $\zeta(\tau_1) = \zeta(\tau_2)$ соотв. $\zeta(\tau_1) \perp \zeta(\tau_2)$. Мы их называем пересекающимися, если они пересекаются в прямой. Прямую p называем параллельной плоскости τ, если $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. Мы называем ее перпендикулярной к плоскости τ, если $\zeta(p) = \zeta(\tau)$. Мы говорим, что прямая p и плоскость τ пересекаются, если они имеют в точности одну общую точку. Две прямые называем скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

Исходной точкой рассуждений о плоскостях является теорема:

Пусть A — точка и z — направление; тогда множество всех точек X, для которых имеет место или $X = A$ или $\zeta(AX) \perp z$, будет плоскостью, содержащей точку A и имеющей направление z.

Отсюда затем выводятся основные теоремы стереометрии о существовании и определенности плоскости, равно как и известные теоремы о параллельности и перпендикулярности плоскостей и прямых.

В работе уделяется внимание вопросам о существовании для того, чтобы показать, что сформулированные теоремы непусты.

Résumé

UNE ÉTUDE DES FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE
I. LES FIGURES NON ORIENTÉES

BORIS GRUBER, Poděbrady.

(Reçu le 3 octobre 1955.)

Le présent travail construit, par la méthode axiomatique, les fondements de la géometrie euclidienne. La première partie publiée étudie des propriétés d'incidence, de parallélisme, de perpendicularité, et les conséquences du cin-

quième postulat euclidien des parallèles. Les notions fondamentales sont „point", „direction non orientée"*) et „perpendiculaire". A chaques deux points différents A, B est associée une direction, que nous désignons par $\zeta(AB)$. Deux directions z_1, z_2 sont ou perpendiculaires (signe $z_1 \perp z_2$), ou non perpendiculaires (z_1 non $\perp z_2$). L'ensemble de tous les points est appelé espace et il est désigné par $\mathbf{P}$. Ces notions accomplissent les neuf axiomes suivants:

I. *Il existe au moins un point et une direction.*

II. $A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(BA)$.

III. $\zeta(AB) = \zeta(AC), \quad B \neq C \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(BC)$.

IV. *Soit A un point et z une direction. Il existe des points B, C tels que* $\zeta(AB) = z, \quad \zeta(AC) \neq z$.

V. $z_1 \perp z_2 \Rightarrow z_2 \perp z_1$.

VI. $z_1 \perp z_2 \Rightarrow z_1 \neq z_2$.

VII. *Soit $z_1 \neq z_2$. Il n'existe qu'une direction z, pour laquelle $z_1 \perp z \perp z_2$.*

VIII. $\zeta(AB) \perp z, \ \zeta(AC) \perp z, \ B \neq C \Rightarrow \zeta(BC) \perp z$.

IX. *Soit $A \neq B$, z_1 non $\perp z_2$. Il existe un point C tel que $\zeta(AC) = z_1$, $\zeta(BC) \perp \perp z_2$.*

La notion de droite est construite avec les quatre premiers axiomes. En ajoutant les quatre axiomes suivants, la notion de plan est fondée. Le cinquième postulat euclidien des parallèles résulte du neuvième axiome.

La droite est introduite ainsi: *Un ensemble $M \subset \mathbf{P}$ est appelé ensemble maximal de la propriété V, si*

1° *M possède la propriété V,*

2° *si $M \subset M' \subset \mathbf{P}$, $M \neq M'$, alors M' ne possède pas la propriété V.*

Nous entendons par droite l'ensemble $p \subset \mathbf{P}$ qui

1° *contient au moins deux points différents,*

2° *est l'ensemble maximal de la propriété suivante:*

$$A, B, C, D \in p, \ A \neq B, \ C \neq D \Rightarrow \zeta(AB) = \zeta(CD) \ .$$

A chaques deux points différents de la droite p appartient évidemment la même direction que nous appelons direction de la droite p; nous la désignons par $\zeta(p)$. Deux droites sont appelées parallèles, si elles ont la même direction. On les apelle perpendiculaires, si leurs directions sont perpendiculaires.

Avec la notion de „droite" on manipule avec facilité en appliquant le théorème suivant:

Soit A un point, z une direction; la droite de la direction z qui passe par le point A est ainsi l'ensemble de tous les points X pour lesquels on a ou bien $X = A$, ou bien

---

*) Ci-après „direction" seulement.

$\zeta(AX) = z$. A l'aide des axiomes I—IV on démontre quelques théorèmes d'existence et d'unicité des droites.

Le plan est défini ainsi: *L'ensemble* $\tau \subset \mathbf{P}$ *sera appelé „plan", s'il*

1° *contient au moins deux points différents,*

2° *il existe une direction* z, *telle que* τ *est l'ensemble maximal de la propriété suivante:*

$$A, B \in \tau\,, \quad A \neq B \Rightarrow \zeta(AB) \perp z\,. \tag{*}$$

De cette définition découle: si τ est un plan, il n'existe qu'une direction z telle que τ est l'ensemble maximal de la propriété (*). Cette direction z est appelée direction perpendiculaire au plan τ ou en peu de mots direction du plan τ. Nous la désignons par $\zeta(\tau)$. On appelle deux plans parallèles, s'ils possèdent la même direction. On les appelle perpendiculaires, si leurs directions sont perpendiculaires. Une droite p est dite parallèle au plan τ, si $\zeta(p) \perp \zeta(\tau)$. On l'appelle perpendiculaire au plan τ, si $\zeta(p) = \zeta(\tau)$.

Pour ce qui concerne le plan, on applique le théorème suivant:

Soit A *un point,* z *une direction; l'ensemble de tous les points* X *pour lesquels on a ou* $X = A$, *ou* $\zeta(AX) = z$, *est le plan qui contient le point* A, *et qui possède la direction* z.

De là on déduit des théorèmes stéréométriques d'existence et d'unicité d'un plan ainsi que des théorèmes bien connus sur le parallélisme et la perpendicularité des plans et des droites.

Dans ce travail on concentre l'attention sur les questions d'existence.