POZNÁMKA O LIMITNÍM PŘECHODU DIFERENČNÍCH ROVNIC V ROVNICE DIFERENCIÁLNÍ

JIŘÍ ČERMÁK, Brno.

(Došlo dne 15. května 1955.)

Jako příklad na použití jedné metody řešení homogenních lineárních systémů diferenciálních a diferenčních rovnic s konstantními koeficienty založené na jistých pojmech maticového počtu, které zavedl EDUARD WEYR, je v tomto článku ukázáno, že fundamentální soustava řešení lineárního systému diferenčních rovnic s konstantními koeficienty

$$\underset{\omega}{\Delta} u_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, u_j(x)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

za určitých předpokladů přejde v limitě pro $\omega \to 0$ ve fundamentální soustavu řešení systému diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, u_j(x)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

1. Tato poznámka souvisí úzce s nedávno uveřejněným článkem prof. O. BORŮVKY [1] a mým článkem [2], kde jsem metodou použitou prof. Borůvkou v [1] odvodil explicitní vzorce pro obecné řešení homogenního lineárního systému diferenčních rovnic s konstantními koeficienty. Vzhledem k účelu následujících úvah použiji těchto vzorců v poněkud pozměněném tvaru.

Systém diferenciálních rovnic můžeme za jistých předpokladů pokládati za limitní případ vhodného systému rovnic diferenčních. Naskýtá se otázka, zda při limitním přechodu, který převede systém diferenčních rovnic v systém rovnic diferenciálních, také řešení systému diferenčních rovnic přejdou v řešení odpovídajícího systému diferenciálních rovnic. Zde se budu zabývati velmi speciálním případem, totiž že systémy, jež přicházejí v úvahu, jsou homogenní lineární s konstantními koeficienty. Protože methoda, jíž je použito v [1] a [2], dává explicitní vzorce pro řešení takových systémů, nečiní porovnání řešení obtíží. Podobný problém pro přechod lineární diferenční rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty v diferenciální rovnici stejného typu podrobně studoval A. WALTHER v [3]. Protože diferenční rovnici n-tého řádu lze převésti na systém n rovnic, je část jeho výsledků, která se týká homogenní rovnice, obsažena ve výsledcích tohoto článku.

Otázky tohoto druhu, které jsou v numerickém počtu známy pod názvem metoda sítí, jsou předmětem stálého zájmu a podrobného studia a jak známo [4], výsledky dosažené v tomto směru jsou mnohem obecnější než výsledek této poznámky, která se týká pouze velmi speciálního systému rovnic. Nicméně tato poznámka může býti užitečná z toho důvodu, že vyšetřování je zde provedeno za předpokladu, že jak proměnná x tak rozpětí ω nabývají komplexních hodnot, zatím co při vyšetřováních, která jsou zaměřena k numerickým výpočtům, proměnná i rozpětí jsou omezeny na reálný obor.

2. Uvažujme o systému diferenčních rovnic

$$\underset{\omega}{\Delta} u_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, u_j(x)\,, \quad \underset{\omega}{\Delta} u_i(x) = \frac{u_i(x+\omega) - u_i(x)}{\omega}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,; \tag{1}$$

v maticové notaci[1]) $\underset{\omega}{\Delta}\mathbf{u}(x) = A\,\mathbf{u}(x)$, kde x je proměnná v množině komplexních čísel, rozpětí ω komplexní číslo a A je konstantní čtvercová matice n-tého řádu, jejíž prvky a_{ij} jsou komplexní čísla.

Přejdeme-li k limitě pro $\omega \to 0$, přejde systém (1) v homogenní lineární systém diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}x} = A\,\mathbf{u}(x)\,. \tag{2}$$

Předpokládejme, že řešení systému (1) je tvaru

$$\mathbf{u}(x) = \lambda^x\,\mathbf{y}(x)\,, \tag{3}$$

kde λ je dosud neurčené číslo a $\mathbf{y}(x)$ vektor, jehož složky jsou vhodnými funkcemi neodvisle proměnné x.

Použijeme-li vztahů

$$\underset{\omega}{\Delta}[\mathbf{y}(x)\,\lambda^x] = \mathbf{y}(x)\,\underset{\omega}{\Delta}\lambda^x + \lambda^{x+\omega}\underset{\omega}{\Delta}\mathbf{y}(x)\,, \quad \underset{\omega}{\Delta}\lambda^x = \frac{1}{\omega}\,\lambda^x(\lambda^\omega - 1)\,,$$

snadno zjistíme, že $\mathbf{y}(x)$ musí býti řešením rovnice

$$\underset{\omega}{\Delta}\mathbf{y}(x) = \frac{1}{\lambda^\omega}\left[A - \frac{\lambda^\omega - 1}{\omega}\,E\right]\mathbf{y}(x)\,. \tag{4}$$

Položme

$$\frac{\lambda^\omega - 1}{\omega} = \lambda^*\,. \tag{5}$$

Potom rovnice (4) bude

$$\underset{\omega}{\Delta}\mathbf{y}(x) = \frac{1}{\lambda^*\omega + 1}\,[A - \lambda^* E]\,\mathbf{y}(x)\,. \tag{6}$$

[1]) Tučnými písmeny budeme označovati vektory v n-rozměrném vektorovém prostoru a budeme je identifikovati s jednosloupcovými maticemi o n prvcích (složkách vektoru). Matice budeme značit velkými písmeny. E je jednotková matice.

3. Nyní nechť a je jeden z charakteristických kořenů matice A o násobnosti α. Ke kořenu a existuje $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = \alpha$ lineárně nezávislých vektorů, které tvoří t. zv. normální soustavu vektorů příslušnou k charakteristickému kořenu a. Označíme je

$$\begin{array}{l} \mathbf{a}_{11}, \ldots, \mathbf{a}_{1,\alpha_r}, \\ \mathbf{a}_{21}, \ldots, \mathbf{a}_{2,\alpha_r}, \mathbf{a}_{2,\alpha_r+1}, \ldots, \mathbf{a}_{2,\alpha_{r-1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{a}_{r1}, \ldots, \mathbf{a}_{r,\alpha_r}, \mathbf{a}_{r,\alpha_r+1}, \ldots, \mathbf{a}_{r,\alpha_{r-1}}, \mathbf{a}_{r,\alpha_{r-1}+1}, \ldots, \mathbf{a}_{r,\alpha_1}. \end{array} \tag{7}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ($\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_r$) jsou Weyrova charakteristická čísla příslušná ke kořenu a. Vektory (7) splňují tyto vztahy:

$$(A - aE)\,\mathbf{a}_{\mu\nu} = \left.\begin{array}{ll} \mathbf{a}_{\mu+1,\nu} \text{ pro } 1 \leqq \mu \leqq r-1 \\ 0 \quad \text{pro} \quad \mu = r \end{array}\right\} \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{r-\mu+1}. \tag{8}$$

Položme dále

$$\mathbf{a}^{\mu\nu} = \left(\frac{1}{a\omega + 1}\right)^{\mu-1} \mathbf{a}_{\mu\nu}, \quad 1 \leqq \mu \leqq r, \ \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{r-\mu+1}. \tag{9}$$

Vektory (9) jsou zřejmě nezávislé a splňují vztahy podobné vztahům (8):

$$\frac{1}{a\omega + 1}(A - aE)\mathbf{a}^{\mu\nu} = \left\{\begin{array}{ll} \mathbf{a}^{\mu+1,\nu} \text{ pro } 1 \leqq \mu \leqq r-1 \\ 0 \quad \text{pro} \quad \mu = r \end{array}\right\} \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{r-\mu+1}. \tag{10}$$

Dále pro ně platí $\lim\limits_{\omega \to 0} \mathbf{a}^{\mu\nu} = \mathbf{a}_{\mu\nu}$, $1 \leqq \mu \leqq r$, $\nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{r-\mu+1}$.

4. S pomocí vztahů (10), (5) a (3) plyne, jak jsem ukázal v [2], toto tvrzení: *Vektory*

$$\mathbf{u}^{\mu\nu} = (1 + a\omega)^{\frac{x}{\omega}} \left\{\mathbf{a}^{\mu\nu} + \frac{x}{1!}\mathbf{a}^{\mu+1,\nu} + \frac{x(x-\omega)}{2!}\mathbf{a}^{\mu+2,\nu} + \right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{x(x-\omega)\ldots(x - \overline{r-\mu-1}\,\omega)}{(r-\mu)!}\mathbf{a}^{r\nu}\right\} \tag{11}$$

pro

$$\mu = 1, 2, \ldots, r-1; \quad \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{r-\mu+1} \tag{11}$$

a

$$\mathbf{u}^{\mu\nu} = (1 + a\omega)^{\frac{x}{\omega}} \mathbf{a}^{\mu\nu} \quad \textit{pro} \quad \mu = r; \ \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_1$$

tvoří α lineárně nezávislých řešení systému (1).

Takto každému charakteristickému kořenu matice A odpovídá množina nezávislých řešení systému (1), která se skládá právě z tolika řešení, kolik činí násobnost příslušného charakteristického kořene.

Označíme-li $a, b, \ldots, f$ všechny navzájem různé charakteristické kořeny matice A a jejich násobnosti $\alpha, \beta, \ldots, \varphi$, dostaneme podle uvedeného tvrzení celkem $\alpha + \beta + \ldots + \varphi = n$ řešení, které tvoří, jak je také v [2] ukázáno, fundamentální soustavu řešení systému (1).