O SOUSTAVÁCH ÚHLOPŘÍČEK V KONVEXNÍM n-ÚHELNÍKU

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha.

(Došlo dne 28. ledna 1955.)

DT: 513.34
: 513.82

Předpokládáme-li, že žádné tři úhlopříčky konvexního n-úhelníka ($n > 3$) nemají společný průsečík, lze množinu úhlopříček, jíž je určeno právě k průsečíků úhlopříček a přidáním každé další úhlopříčky se tento počet průsečíků zvětší, nazvat soustavou úhlopříček k-tého stupně. Soustavou nultého stupně je určen rozklad daného n-úhelníka na trojúhelníky. Počet těchto rozkladů určil RODRIGUES [1] — viz vzorec (1). Akademik E. ČECH položil otázku, zda pro malé k lze počet soustav k-tého stupně vyjádřit stejně jednoduchým způsobem, jak se to pro $k = 0$ podařilo Rodriguesovi. V tomto článku — kromě speciálních výsledků (věta 2) — je ukázáno, že pro $k = 1$ a 2 je odpověď kladná (věta 3 a 4). Závěrem jsou položeny dvě další otázky týkající se soustav úhlopříček.

V rovině buď dán konvexní n-úhelník ($n > 3$) $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, jehož žádné tři úhlopříčky nemají společný vnitřní bod. Označme M množinu všech úhlopříček daného n-úhelníka a pro $X \subset M$ nazveme *průsečíkem množiny* X průsečík dvou prvků množiny X. Buď $0 \leqq k \leqq \binom{n}{4}$, k celé; existuje-li množina $S_k^{(n)}$, která má tyto vlastnosti:

1. $S_k^{(n)} \subset M$, 2. $S_k^{(n)}$ má právě k průsečíků, 3. je-li $S_k^{(n)} \subset Y \subset M$, $S_k^{(n)} \neq Y$, pak počet průsečíků množiny Y je aspoň $k + 1$,

potom $S_k^{(n)}$ nazveme *soustavou k-tého stupně.* Vrchol n-úhelníka, který neleží na žádné úhlopříčce soustavy $S_k^{(n)}$, nazveme *volným vrcholem* této soustavy.

Je zřejmá existence soustavy $S_0^{(n)}$. Místo $S_0^{(n)}$ můžeme studovat též jistý rozklad $R_0^{(n)}$ daného n-úhelníka na trojúhelníky. Z úvahy o součtu vnitřních úhlů v n-úhelníku plyne, že $R_0^{(n)}$ má $n - 2$ prvků.

O soustavách $S_0^{(n)}$ platí věta:

Věta 1. *Buď a_n počet soustav stupně* 0. *Pak*

$$a_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}. \tag{1}$$

Důkaz. Strana A_1A_2 patří v každém rozkladu $R_0^{(n)}$ právě jednomu trojúhelníku. Budiž to trojúhelník $A_1A_2A_j$ $(3 \leqq j \leqq n)$. Označme $a_2 = a_3 = 1$ a uvažme dvě skupiny vrcholů: první $A_2, A_3, \ldots, A_j$, druhou $A_1, A_j, A_{j+1}, \ldots, A_n$. Počet rozkladů $R_0^{(n)}$, ve kterých existuje trojúhelník $A_1A_2A_j$, je zřejmě $a_{j-1} \,.\, a_{n-j+2}$. Platí tedy rekurentně

$$a_n = \sum_{i=2}^{n-1} a_i a_{n+1-i} \tag{2}$$

a methodou vytvořujících funkcí najdeme výsledek (1).

Při $n \geqq 6$ můžeme udat rozklady $R_0^{(n)}$, ve kterých existuje *úhlopříčkový trojúhelník*. Tak nazveme trojúhelník, jehož všechny strany jsou úhlopříčky n-úhelníka. O počtu takovýchto rozkladů (resp. soustav) platí

Věta 2. *Buď b_n počet rozkladů $R_0^{(n)}$, v nichž neexistuje úhlopříčkový trojúhelník. Pak $b_n = n \,.\, 2^{n-5}$.*

Důkaz. Případ $n = 4$ je zřejmý; buď tedy $n \geqq 5$. Dva sousední vrcholy nemohou být zřejmě volné v téže soustavě. Snadno určíme, že ke každé soustavě, která vytváří $R_0^{(n)}$ bez úhlopříčkových trojúhelníků, přísluší právě dva volné vrcholy n-úhelníka. Indukcí podle n nejdříve dokážeme, že počet rozkladů $R_0^{(n)}$, které mají volné právě vrcholy A_1, A_j (kde $3 \leqq j \leqq n - 1$), je $\binom{n-4}{j-3}$.
Pro $n = 5$ je toto tvrzení zřejmě správné. Ať tedy $n > 5$ a předpokládejme, že tvrzení je správné pro m-úhelník $(5 \leqq m \leqq n - 1)$. Pro $j = 3, 4, n - 2, n - 1$ se snadno vidí, že je tvrzení správné i pro n-úhelník, takže zbývá dokázat tvrzení pro j, pro něž $4 < j < n - 2$. V tomto případě roztřídíme rozklady na dva (disjunktní) typy: Rozklad prvního (resp. druhého) typu je vytvořen pomocí úhlopříčky A_2A_{n-1} (resp. A_3A_n). Počet rozkladů prvního typu je roven počtu rozkladů $(n - 2)$-úhelníka $A_2A_3A_4 \ldots A_{n-1}$ s volnými vrcholy A_{n-1}, A_j nebo s volnými vrcholy A_2, A_j — a těch je podle indukčního předpokladu

$$\binom{n-6}{j-3} + \binom{n-6}{j-4} = \binom{n-5}{j-3}.$$

Počet rozkladů druhého typu je roven počtu rozkladů $(n - 2)$-úhelníka $A_3A_4A_5 \ldots A_{n-1}A_n$ s volnými vrcholy A_n, A_j nebo s volnými vrcholy A_3, A_j — a těch je

$$\binom{n-6}{j-4} + \binom{n-6}{j-5} = \binom{n-5}{j-4}.$$

Úhrnem počet rozkladů obou typů je

$$\binom{n-5}{j-3} + \binom{n-5}{j-4} = \binom{n-4}{j-3}, \text{ c. b. d.}$$

Platí tedy

$$b_n = \frac{n}{2} \sum_{j=3}^{n-1} \binom{n-4}{j-3} = n \cdot 2^{n-5}$$

a důkaz je podán.

Každá soustava $S_0^{(n)}$ má zřejmě $n - 3$ úhlopříček. Odtud vyplývá

Věta 3. *Počet soustav prvního stupně je* $c_n = \frac{n-3}{2} a_n$.

Důkaz je jasný.

Soustavy druhého stupně rozdělíme na tři kategorie.

1. kategorie: Oba průsečíky soustavy leží na téže úhlopříčce.

2. kategorie: Existují vrcholy $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}$ tak, že jeden průsečík soustavy leží na $A_{i_1}A_{i_2}$ a druhý na $A_{i_1}A_{i_3}$ — a soustava není 1. kategorie.

3. kategorie: Ostatní.

Soustavy 3. kategorie existují jen pro $n \geqq 8$. O soustavách $S_2^{(n)}$ dokážeme větu:*)

Věta 4. a) *Počet soustav 1. kategorie je* $d_n = \frac{(13n - 45)(n - 4)}{2(n - 1)} a_{n-1}$,

b) *počet soustav 2. kategorie je* $e_n = \frac{11n - 45}{n + 1} \binom{2n - 7}{n - 6}$,

c) *počet soustav 3. kategorie je*

$$f_n = 3n \sum_{i=4}^{n-4} \frac{1}{i - 1} \binom{2i - 6}{i - 4} \binom{2n - 2i - 2}{n - i - 4}.$$

Důkaz. a) Případ $n = 4$ je zřejmý. Při $n \geqq 5$ určeme počet soustav, jejichž průsečíky leží na úhlopříčkách A_1A_r, A_pA_q, A_uA_v, kde

$$2 \leqq p \leqq u < r < v \leqq q \leqq n, \quad |p - u| + |q - v| > 0.$$

Počet soustav, u nichž je $p < u$, $v < q$ (takové existují právě pro $n \geqq 6$), určíme úvahou o součinu

$$\pi = a_p a_{u-p+1} a_{r-u+1} a_{v-r+1} a_{q-v+1} a_{n-q+2}.$$

Pomocí vzorce (2) určíme

$$\sum_{q=6}^{n} \sum_{v=5}^{q-1} \sum_{r=4}^{v-1} \sum_{u=3}^{r-1} \sum_{p=2}^{u-1} \pi = a_{n+1} - 4a_n + 3a_{n-1}.$$

Je totiž

$$\sum_{p=2}^{u-1} a_p a_{u-p+1} = a_u, \quad \sum_{u=3}^{r-1} a_u a_{r-u+1} = a_r - a_{r-1},$$

$$\sum_{r=4}^{v-1} (a_r - a_{r-1}) a_{v-r+1} = a_v - 2a_{v-1},$$

*) Pro $k < 0$ klademe $\binom{h}{k} = 0$.

$$\sum_{v=5}^{q-1} (a_v - 2a_{v-1})\, a_{q-v+1} = a_q - 3a_{q-1} + a_{q-2}\,,$$

$$\sum_{q=6}^{n} (a_q - 3a_{q-1} + a_{q-2})\, a_{n-q+2} = a_{n+1} - 4a_n + 3a_{n-1}\,.$$

Počet soustav, u nichž je $p = u$, určíme úvahou o součinu

$$\pi' = a_p a_{r-p+1} \cdot a_{v-r+1} \cdot a_{q-v+1} \cdot a_{n-q+2}\,.$$

Pomocí vzorce (2) analogicky jako prve vypočteme

$$\sum_{q=5}^{n} \sum_{v=4}^{q-1} \sum_{r=3}^{v-1} \sum_{p=2}^{r-1} \pi' = a_{n+1} - 3a_n + a_{n-1}\,.$$

Stejný je též počet soustav, u nichž je $v = q$. Platí tedy $d_n = \frac{n}{2}(3a_{n+1} - 10a_n + 5a_{n-1})$ čili po úpravě $d_n = \frac{(13n - 45)(n - 4)}{2(n - 1)}\, a_{n-1}$.

b) Případy $n = 4$, $n = 5$ jsou zřejmé. Při $n \geqq 6$ určíme počet soustav, jejichž průsečíky leží na úhlopříčkách A_1A_u, A_pA_r, A_wA_q, A_1A_v, kde

$$2 \leqq p < u < r \leqq w < v < q \leqq n\,.$$

Tento počet je

$$\pi'' = a_p a_{u-p+1} \cdot a_{r-u+1} \cdot a_{w-r+2} \cdot a_{v-w+1}\, a_{q-v+1} \cdot a_{n-q+2}\,.$$

Pro $w = r$ provedeme výpočet analogicky jako sub a).

$$\sum_{q=6}^{n} \sum_{v=5}^{q-1} \sum_{r=4}^{v-1} \sum_{u=3}^{r-1} \sum_{p=2}^{u-1} \pi'' = a_{n+1} - 4a_n + 3a_{n-1}\,.$$

Pro $w > r$ máme

$$\sum_{u=3}^{r-1} \sum_{p=2}^{u-1} a_p a_{u-p+1} a_{r-u+1} = a_r - a_{r-1}\,,$$

$$\sum_{r=4}^{w-1} (a_r - a_{r-1})\, a_{w-r+2} = a_{w+1} - 3a_w + a_{w-1}\,,$$

$$\sum_{w=5}^{v-1} (a_{w+1} - 3a_w + a_{w-1})\, a_{v-w+1} = a_{v+1} - 4a_v + 3a_{v-1}\,,$$

$$\sum_{v=6}^{q-1} (a_{v+1} - 4a_v + 3a_{v-1})\, a_{q-v+1} = a_{q+1} - 5a_q + 6a_{q-1} - a_{q-2}\,,$$

$$\sum_{q=7}^{n} (a_{q+1} - 5a_q + 6a_{q-1} - a_{q-2})\, a_{n-q+2} = a_{n+2} - 6a_{n+1} + 10a_n - 4a_{n-1}\,.$$

Je tedy

$$e_n = \frac{n}{2}(a_{n+1} - 4a_n + 3a_{n-1}) + n\,(a_{n+2} - 6a_{n+1} + 10a_n - 4a_{n-1})\,,$$