ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

2

81

NAKLADATELSTVÍ ČSAV

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 81 • Č. 2 • STR. 137—266 • PRAHA 31. V. 1956

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky")

SVAZEK 81 (1956)

Vydává:

Matematický ústav Československé akademie věd

Redakce:

Matematický ústav Československé akademie věd
Praha II, Žitná 25

Obsah

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV

SVAZEK 81 * PRAHA, 31. V. 1956 * ČÍSLO 2

ČLÁNKY

PŘÍSPĚVEK K AFINNÍ GEOMETRII PLOCH

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha.

(Došlo dne 22. ledna 1955.) DT : 513.621

Účelem předloženého článku, který navazuje na dřívější práci autorovu: *Le vecteur affinonormal et la connexion de l'hypersurface dans l'espace affin* (Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. *75*, 1950, str. 179—209),*) je zavést pro plochu v rovném trojrozměrném afinním prostoru vhodnou normalisaci afinního normálního vektoru a to takovou, aby důležité relace v metrické geometrii ploch, jako Frenetovy formule, měly svou analogii v geometrii afinní. Jádrem theoretické části práce je zavedení dvou základních afinních tensorů, které jsou nezávislé na volbě faktoru tečného vektoru plochy. Pomocí těchto tensorů se dojde k formulím analogickým Frenetovým formulím pro plochu v metrice. Stručná diskuse méně známého druhého afinního tensoru ploch, označeného v práci symbolem L^c_a, vede k určité afinní klasifikaci ploch. Několik vět a hlavně příklady v II. části práce zdůvodňují geometrický význam theoretických výsledků.

Není žádnou obtíží zobecnit následující úvahy pro nadplochy v rovném nebo zakřiveném ekvivoluminárním n-rozměrném prostoru. Tensorová metoda v dalším používaná tuto cestu ukazuje.

Část I

1. Úvodní poznámky. V afinoeuklidovském prostoru E_3 o souřadnicích x^α ($\alpha = 1, 2, 3$) budiž definována plocha X_2 parametrickými rovnicemi

$$x^\alpha = x^\alpha(\eta^a)\,, \quad \alpha = 1, 2, 3;\ a = 1, 2 \tag{1,1}$$

v určité dvojrozměrné oblasti Ω parametrů η^1, η^2, při čemž předpokládáme:

*) Tato práce bude v dalším v poznámkách pod čarou citována pro stručnost pod symbolem (A).

a) funkce $x^\alpha(\eta^a)$ mají spojité parciální derivace v Ω nejméně čtvrtého řádu;

b) hodnost matice z elementů $B^\alpha_a \equiv \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \eta^a}$ je v každém bodě oblasti Ω rovna dvěma;

c) hodnost tensoru

$$h_{ab} \equiv B^\alpha_a \partial_b t_\alpha \;^{1)} \tag{1,2}$$

v oblasti Ω je dvě.

Za těchto předpokladů je možno definovat v každém bodě oblasti Ω tensor h^{ab} kontragredientní k tensoru h_{ab}, tedy takto:

$$h^{ac}h_{cb} = \delta^a_b \quad \left(\delta^a_b = \begin{cases} 0 \text{ pro } a \neq b \\ 1 \text{ pro } a = b \end{cases}\right). \tag{1,3}$$

Je-li t_α tečným vektorem plochy X_2, potom nenulový vektor $^*t_\alpha$ je rovněž tečným vektorem této plochy tehdy a jen tehdy, platí-li

$$^*t_\alpha = Pt_\alpha\,, \tag{1,4}$$

kde $P = P(\eta^a)$ je nenulový skalár plochy X_2.

Konexi v X_2 o koeficientech $\mathring{\Gamma}^c_{ab}$ takto definovaných

$$\mathring{\Gamma}^c_{ab} = h^{cd}(\partial_d t_\alpha)\, \partial_a B^\alpha_b \tag{1,5}$$

nazýváme vrozenou konexí plochy X_2 při volbě t_α tečného vektoru.[2])

Riemannovskou konexí z tensoru h_{ab} při určité volbě t_α tečného vektoru v X_2 nazýváme konexi o koeficientech

$$\begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} = \tfrac{1}{2}h^{cd}(\partial_a h_{bd} + \partial_b h_{ad} - \partial_d h_{ab})\,.^{3)} \tag{1,6}$$

Jak konexe (1,5), tak konexe (1,6) závisí na tom, jaké řešení t_α rovnic $B^\alpha_a t_\alpha = 0$ jsme si zvolili, čili, jak stručně říkáme, závisí na transformačním vztahu (1,4).[4])

Vektor v X_2 o složkách M_a takto definovaných

$$M_a = \frac{1}{2}\left(\begin{Bmatrix} c \\ ac \end{Bmatrix} - \mathring{\Gamma}^c_{ac}\right) {}^{5)} \tag{1,7}$$

má tyto vlastnosti:

1. při transformaci (1,4) platí:

$$^*M_a = M_a + \frac{1}{P}\,\partial_a P \;^{5)} \quad \left(\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial \eta^a}\right), \tag{1,8$_a$}$$

---

[1]) Zde t_α je tečným vektorem variety A_2, tedy nějaké nenulové řešení rovnic $B^\alpha_a t_\alpha = 0$, $a = 1, 2$. Snadno nahlédneme, že hodnost tensoru h_{ab} nezávisí na volbě nenulového faktoru tečného vektoru t_α.

[2]) (A), str. 185, definice 5.

[3]) (A), str. 192, formule (4,3).

[4]) (A), str. 194, (4,10), (4,11).

[5]) (A), str. 192, (4,5); str. 195, (4,12); str. 205, věta (7,1).

2. jest gradientem v X_2, to jest:

$$\partial_{[a}M_{b]} = 0 \,.^{5})\qquad (1,8)_b$$

V důsledku vztahu $(1,8)_b$ jest výraz $M_b\, d\eta^b$ totálním diferenciálem funkce proměnných η^a v definičním oboru Ω plochy X_2.

Je-li $M(\eta^a)$ jedna z funkcí té vlastnosti, že platí $\partial_a M = M_a$, potom všechny funkce této vlastnosti jsou tvaru

$$\overline{M} = M + c\,,\qquad (1,9)$$

kde c je libovolná konstanta.

Lemma 1,1. *Vektor T_α takto definovaný*

$$T_\alpha = e^{-M} t_\alpha\qquad (1,10)$$

má tyto vlastnosti:

a) *je tečným vektorem plochy X_2;*

b) *při transformaci* (1,4) *platí*

$$^*T_\alpha = \varepsilon T_\alpha\,,\qquad (1,10)_a$$

kde ε = signum P.

c) *Vyjdeme-li místo od funkce M od funkce $\overline{M}$, při čemž platí* (1,9), *pak je*

$$\overline{T}_\alpha = e^{-c} T_\alpha\,.\qquad (1,10)$$

Důkaz. Tvrzení a), c) jsou evidentní. Podle $(1,8)_a$ je $^*M = M + \log|P|$ [6]) a tedy $e^{-M^*} = e^{-M}\,.\,|P|^{-1}$. Odtud, z (1,4) a (1,10) plyne pak ihned tvrzení b) naší pomocné věty.

Poznámka 1,1. Vztahy $(1,10)_a$, $(1,10)_b$ nám říkají, že vektor T_α je celým postupem, kterým jsme k jeho konstrukci došli, definován až na nenulový konstantní faktor. Proto při dalším studiu stačí uvažovat „transformační" vztah:

$$'T_\alpha = cT_\alpha\,,\quad c \neq 0 \text{ je konstanta}\,.\qquad (1,11)$$

Poznámka 1,2. V dalším budeme vždy jako tečný vektor variety X_2 brát tečný vektor T_α. Abychom tento fakt zdůvodnili v matematické symbolice, budeme veličiny při této volbě T_α tečného vektoru označovat velkými písmeny. Bude tedy na př.:

$$H_{ab} \equiv B_a^\alpha \partial_b T_\alpha\,;\qquad (1,12)$$

H^{ab} je pak tensor kontragredientní k tensoru H_{ab}.

Věta 1,1. *Vrozená konexe v X_2 o koeficientech*

$$\Lambda_{ab}^c \equiv H^{cd}(\partial_d T_\alpha)\,\partial_a B_b^\alpha\qquad (1,13)$$

je nezávislá na transformaci (1,4).

---

[6]) Za funkci, jejímž totálním dif. je $\dfrac{1}{P}\dfrac{\partial P}{\partial \eta^a}\, d\eta^a$, bereme funkci $\log|P|$ přímo, nikoliv $\log|P|$ + konst.

Důkaz. Podle poznámky 1,1 stačí ukázat, že veličiny Λ^c_{ab} jsou nezávislé na transformaci (1,4). Z (1,12) plyne podle (1,4):

$$'H_{ab} = cH_{ab}\,, \quad 'H^{ab} = c^{-1}H^{ab}\,. \tag{1,14}$$

Z (1,13), (1,14), (1,8) pak dostaneme:

$$'\Lambda^c_{ab} = 'H^{cd}(\partial_d{}'T_\alpha)\,\partial_a B^\varkappa_b = H^{cd}(\partial_d T_\alpha)\,\partial_a B^\varkappa_b = \Lambda^c_{ab}\,.$$

Poznámka 1,3. Konexe Λ^c_{ab} definovaná v (1,13) je identická s konexí o koeficientech $\Gamma^c_{ab} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} + h_{ab}h^{cd}M_d$, nezávislých na transformaci (1,4).[7]

Definice 1. *Konexi v X_2 o koeficientech Λ^c_{ab}, definovaných v* (1,13), *budeme nazývat konexí indukovanou v ploše X_2. Varietu X_2 opatřenou touto konexí budeme označovat A_2.*

Afinnormální vektor N^ν plochy A_2, vázaný na konexi Λ^c_{ab},[8] je vektor takto definovaný:

$$N^\nu \equiv \tfrac{1}{2}H^{ab}(B^\nu_c\Lambda^c_{ab} - \partial_a B^\nu_b)\,. \tag{1,15}$$

Poznámka 1,4. Vektor N^ν, definovaný v (1,15), budeme v dalším nazývat afinnormálním vektorem variety A_2. Přímku jdoucí bodem plochy A_2 o směru N^ν v tomto bodě nazýváme afinní normálou plochy A_2.

Věta 1,2. *Při transformaci* (1,11) *jest*

$$'N^\nu = c^{-1}N^\nu\,. \tag{1,16}$$

Důkaz plyne bezprostředně z (1,15), (1,14) a věty 1,1.

Věta 1,3. *Pro afinnormální vektor N^ν platí:*

$$N^\nu T_\nu = 1\,, \quad N^\nu\partial_a T_\nu = 0 \tag{1,17}$$

nezávisle na transformaci (1,11).

Důkaz provádět nebudeme.[9] Vztahy (1,17) se dají snadno ověřit z definice vektorů T_ν, N^ν a definice indukované konexe Λ^c_{ab}.

2. Frenetovy formule pro plochu A_2 v E_3. Zvolíme-li indexy a, b pevně ($a, b \in 1, 2$), potom vzhledem k lineární nezávislosti vektorů $B^\varkappa_1$, $B^\varkappa_2$, N^α můžeme psát vektor $\partial_a B^\nu_b$ jako lineární kombinaci vektorů $B^\varkappa_1$, $B^\varkappa_2$, N^α, tedy

$$\partial_a B^\varkappa_b = \Pi^c_{ab}B^\varkappa_c + w_{ab}N^\alpha\,.$$

Snadným výpočtem[10] nalezneme pro koeficienty této lineární kombinace

$$\Pi^c_{ab} = \Lambda^c_{ab}\,, \quad w_{ab} = -\,H_{ab}\,.$$

Platí tedy pro každé $a, b = 1, 2$:

$$\partial_a B^\varkappa_b = \Lambda^c_{ab}B^\alpha_c - H_{ab}N^\alpha\,. \tag{1,18}$$

---

[7] (A), str. 206, věta (7,4).
[8] T. j. vázaný ve smyslu afinní indukce. Viz (A), str. 187, kap. 3.
[9] Viz též (A), str. 206, 207, věta (7,4).
[10] (A), str. 184, formule (2,6).

Podobně můžeme (při pevném indexu $a \in 1, 2$) vektor $\partial_a N^\alpha$ psát jako lineární kombinaci vektorů B_1^α, B_2^α, N^α, tedy

$$\partial_a N^\alpha = B_c^\alpha L_a^c + u_a N^\alpha .$$

Násobením této relace vektorem T_α (a sečtením přes $\alpha = 1, 2, 3$) dostaneme $u_a = T_\alpha \partial_a N^\alpha$, neboť $B_c^\alpha T_\alpha = 0$. Podle (1,17) je však

$$T_\alpha \partial_a N^\alpha = - N^\alpha \partial_a T_\alpha = 0 .$$

Tedy $u_a = 0$; máme tak

$$\partial_a N^\alpha = B_c^\alpha L_a^c . \tag{1,19}$$

Násobíme-li (1,19) veličinou $\partial_b T_\alpha$, dostaneme podle (1,12)

$$(\partial_b T_\alpha)\, \partial_a N^\alpha = H_{cb} L_a^c ;$$

odtúd plyne ihned

$$L_a^c = H^{cb} (\partial_b T_\alpha)\, \partial_a N^\alpha . \tag{1,20}$$

Při transformaci (1,11) platí pro elementy L_a^c, jak snadno plyne z (1,20), (1,11), (1,14),

$$'L_a^c = c^{-1} L_a^c . \tag{1,21}$$

Z (1,20) je ihned patrno, že elementy L_a^c jsou složky tensoru v A_2.

Vztahy (1,18) a (1,20) jsou analogické známým vztahům z metrické geometrie ploch v obyčejném prostoru. Nazveme je zde, jak je tomu analogicky v metrice, *Frenetovými formulemi pro plochu A_2 v E_3*.

Definice 2. *Tensor H_{ab} nazýváme prvým afinním tensorem, tensor L_a^c druhým afinním tensorem plochy A_2 v E_3.*

3. Afinní tensory plochy. Veličina v A_2 o složkách E_{ab} takto definovaných

$$E_{ab} \equiv L_a^c H_{bc} \tag{1,22}$$

je zřejmě tensorem v A_2. Tensor E_{ab} má pro afinní geometrii ploch význam pro některé své vlastnosti, které vyslovíme v dalších větách.

Věta 1,4. *Tensor E_{ab} je symetrický.*

Důkaz. Z (1,20) a definičních rovnic (1,22) plyne pro tensor E_{ab} přepis:

$$E_{ab} = (\partial_b T_\alpha)\, \partial_a N^\alpha . \tag{1,23}$$

Je však podle (1,17)

$$0 = \partial_a (N^\alpha \partial_b T_\alpha) = (\partial_a N^\alpha)\, \partial_b T_\alpha + N^\alpha \partial_a \partial_b T_\alpha ,$$

tedy $E_{ab} = - N^\alpha \partial_a \partial_b T_\alpha$, z čehož vyplývá $E_{[ab]} = - N^\alpha \partial_{[a} \partial_{b]} t_\alpha = 0$.[12])

Věta 1,5. *Tensor E_{ab} je nezávislý na volbě faktoru tečného vektoru, t. j. na transformaci (1,4).*

[11]) Mějme na paměti, že předpokládáme hodnost tensoru h_{ab} a tedy též H_{ab} rovnou dvěma.

[12]) Je totiž $\partial_{[a} \partial_{b]} T_\alpha = 0$ vzhledem k záměnnosti příslušných parciálních derivací.

Důkaz. Podle poznámky 1,1 stačí k důkazu tvrzení věty dokázat nezávislost tensoru E_{ab} na transformaci (1,11). Podle (1,22), (1,14), (1,21) dostaneme

$$'E_{ab} = 'L_a^{d'} H_{db} = c^{-1} c L_a^d H_{db} = E_{ab} .$$

Věta 1,6. *Pro tensory H_{ab}, L_a^c platí:*

$$R_{abc}^{\cdot\cdot\cdot d} = 2L_{[a}^d H_{b]c} , \qquad (1,24)_a$$

$$\nabla_{[a} H_{b]c} = 0 , \qquad (1,24)_b$$

$$\nabla_{[a} L_{b]}^c = 0 , \qquad (1,24)_c$$

kde $R_{abc}^{\cdot\cdot\cdot d}$ je tensor křivosti příslušný konexi Λ_{ab}^c v A_2 a ∇_a je symbol kovariantní derivace příslušný téže konexi.

Důkaz. Vztahy $(1,24)_{a,b}$ vyplývají z rovnic (1,18), vztahy $(1,24)_c$ z rovnic (1,19) jako podmínky integrability příslušného systému rovnic.[13])

Poznámka 1,5. Vztahy $(1,24)_{a,b,c}$ jsou Gauss-Codazziho rovnice známé z metrické geometrie. Rovnice $(1,24)_a$ nám dává jiné vyjádření tensoru L_a^c než je uvedeno v (1,20). Vynásobením rovnic (1,24) tensorem H^{bc} a sečtením přes indexy b, c dostaneme ihned přepis $L_a^d = H^{bc} R_{abc}^{\cdot\cdot\cdot d}$, z kterého plyne pro tensor E_{ab} definovaný v (1,22) $E_{ab} = R_{aec}^{\cdot\cdot\cdot d} H^{ec} H_{db}$.

Hodnost tensoru E_{ab} je zřejmě rovna hodnosti tensoru L_a^c.

4. Případ. $L_a^c = 0$. Nechť pro varietu A_2 v E_3 platí v každém bodě jejího definičního oboru

$$L_a^c = 0 \quad \text{pro} \quad c, a = 1, 2 . \qquad (1,25)$$

Věta 1,7. *Pro plochu A_2 v E_3 s vlastností (1,25) tvoří afinní normály o směru N^ν svazek rovnoběžných přímek.*

Důkaz. Z (1,19) plyne za platnosti (1,25) ihned $N^\nu = v^\nu$, kde v^ν je konstantní vektor.

Věta 1,8. *Pro plochu A_2 v E_3 s vlastností (1,25) je každá geodetika[14]) křivkou rovinnou. Rovina, v níž geodetika leží, je určena afinní normálou plochy a tečnou geodetiky (v libovolném jejím bodě).*

Důkaz. Nechť $x^\alpha = x^\alpha(\eta^a(t))$ jsou rovnice geodetiky plochy A_2. Zaveďme označení

$$\underset{1}{v^\alpha} \equiv \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} , \quad \underset{2}{v^\alpha} = \frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}t^2} , \quad \underset{3}{v^\alpha} = \frac{\mathrm{d}^3 x^\alpha}{\mathrm{d}t^3} , \quad \underset{1}{v^c} = \frac{\mathrm{d}\eta^c}{\mathrm{d}t} .$$

Potom je

$$\underset{1}{v^\alpha} = B_a^\alpha \underset{1}{v^a} , \quad \underset{2}{v^\alpha} = (\partial_b B_a^\alpha) \underset{1}{v^a} \underset{1}{v^b} + B_c^\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underset{1}{v^c} =$$

$$= B_c^\alpha \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underset{1}{v^c} + \Lambda_{ab}^c \underset{1}{v^a} \underset{1}{v^b} \right) - H_{ab} \underset{1}{v^a} \underset{1}{v^b} N^\alpha .^{15)}$$

13) Důkaz není zde proveden. Správnost uvedených vztahů vyplývá ihned z práce (A), str. 186, rovnice (2,18), (2,20), (2,21), kde stačí položit $v_\alpha = 0$, $R_{\alpha\beta\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta} = 0$.

14) T. j. geodetická křivka při konexi Λ_{ab}^c.

15) Zde jsme použili formule (1,18).

Předpokládejme, že je $H_{ab}\underset{1}{v^a}\underset{1}{v^b} \neq 0$. Potom je tedy

$$\underset{2}{v^\alpha} = B^\alpha_c \nabla_t \underset{1}{v^c} - \frac{1}{R} N^\alpha, \quad \left(\frac{1}{R} \equiv H_{ab}\underset{1}{v^a}\underset{1}{v^b}\right). \tag{1,26}$$

Pro afinní geodetiku je však

$$\nabla_t \underset{1}{v^c} = f(t)\, \underset{1}{v^c}.^{16)} \tag{1,27}$$

Podle věty (1,7) je vektor N^ν konstantní podél celé plochy, t. j. $N^\nu = \underset{\circ}{N^\nu}$ (symbol $\underset{\circ}{N^\nu}$ značí afinnormální vektor v některém bodě geodetiky). Můžeme tedy, vzhledem k (1,27), vztah (1,26) přepsat na tvar

$$\underset{2}{v^\alpha} = f(t)\, \underset{1}{v^\alpha} - \underset{\circ}{N^\alpha} \frac{1}{R}. \tag{1,28}$$

Odtud plyne derivováním podle parametru t

$$\underset{3}{v^\alpha} = f'(t)\, \underset{1}{v^\alpha} + f(t)\, \underset{2}{v^\alpha} - \underset{\circ}{N^\alpha} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{R}.$$

Dosadíme-li do poslední rovnice za $\underset{\circ}{N^\alpha}$ z rovnice předchozí, dostaneme po úpravě

$$\underset{3}{v^\alpha} = \underset{1}{v^\alpha} \left(f'(t) - R\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{R}\right) f(t)\right) + \underset{2}{v^\alpha}\left(f(t) + R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{R}\right)\right).$$

Odtud je vidět, že vektory $\underset{1}{v^\alpha}$, $\underset{2}{v^\alpha}$, $\underset{3}{v^\alpha}$ jsou lineárně závislé, t. j. křivka je křivkou rovinnou. Z (1,28) pak vyplývá, že rovina křivky obsahuje vektor $\underset{\circ}{N^\alpha}$.

Vynechaný případ, t. j. kdy $H_{ab}\underset{1}{v^a}\underset{1}{v^b} = 0$, je jednoduchý. V tomto případě je křivka jednak asymptotikou, jednak geodetikou (podle předpokladu); je tedy též geodetikou v E_3. Je tedy přímkou, což je opět rovinná čára. Tím je věta dokázána.

Poznámka 1,6. Plochou kvadratickou s vlastností (1,25) je paraboloid. Tento případ s příkladem jiné (nekvadratické) plochy, pro kterou platí (1,25), bude probrán v části II.

5. Případ, kdy hodnost tensoru L^c_a je rovna jedné. Uvažujme nyní takové plochy A_2 v E_3, pro které je $L^1_1 L^2_2 - L^2_1 L^1_2 = 0$, avšak aspoň jeden element L^c_a je od nuly různý.

Věta 1,9. *Nechť pro plochu A_2 v E_3 je hodnost tensoru L^c_a rovna jedné v celém definičním oboru této plochy. Potom každým bodem plochy prochází právě jedna křivka té vlastnosti, že podél této křivky jsou afinní normály plochy rovnoběžné.*

---

16) T. j. existuje taková funkce $f(t)$, že platí (1,27). Relace (1,27) je vlastně definicí afinní geodetiky.

Důkaz. Z předpokladu věty plyne existence takového vektoru $v^a(\eta^1, \eta^2)$ v bodech plochy, že platí

$$L^c_a v^a = 0 \,.^{17)} \qquad (1,29)$$

Řešením diferenciálních rovnic $\frac{d\eta^1}{dt} = v^1$, $\frac{d\eta^2}{dt} = v^2$ je pak křivka určena jednoznačně počátečními podmínkami, t. j. bodem na ploše (platí totiž, jak plyne z předpokladů v odst. 1, podmínky Cauchyova existenčního teorému). Nechť $\eta^a = \eta^a(t)$ je rovnice hledané křivky. Z rovnice (1,19) plyne pak podle (1,29):

$$\frac{d\eta^a}{dt}\,\partial_a N^\alpha = B^\alpha_c L^c_a v^a = 0\,,$$

t. j. $\frac{d}{dt} N^\alpha = 0$, tedy $N^\alpha = \underset{0}{N^\alpha}$ ($\underset{0}{N^\alpha}$ afinnormální vektor v libovolném bodě této křivky). Tím je věta dokázána.

Poznámka 1,7. Příklad plochy tohoto typu je uveden v části II.

6. Plochy středové.

Definice 3. *Plochy v E_3, pro které afinní normály procházejí pevným bodem, nazveme plochami středovými.*

Z vět odstavců 5, 4 plyne, že existují-li takové plochy, potom pro tyto plochy musí být nutně $L^1_1 L^2_2 - L^2_1 L^1_2 \neq 0$.

Předpokládejme tedy, že existuje v E_3 plocha A_2[18]) s vlastnostmi

a) $L^1_1 L^2_2 - L^2_1 L^1_2 \neq 0$,

b) afinní normály procházejí pevným bodem ξ^α_0.

Potom můžeme psát

$$x^\alpha = x^\alpha(\eta^a) \equiv \xi^\alpha_0 + \sigma N^\alpha\,, \quad \sigma \neq 0\,, \qquad (1,29)$$

kde $x^\alpha = x^\alpha(\eta^a)$ jsou parametrické rovnice plochy; $\sigma(\eta^a)$ je skalár dosud neurčený. Z (1,29) pak plyne podle (1,19):

$$B^\alpha_a = \sigma N^\alpha + \sigma B^\alpha_c L^c_a \quad \left(\sigma_a \equiv \frac{\partial}{\partial \eta^a}\sigma\right),$$

t. j.

$$B^\alpha_c(\delta^c_a - \sigma L^c_a) = \sigma_a N^\alpha = 0\,;$$

Odtud vzhledem k lineární nezávislosti vektoru B^α_1, B^α_2, N^α plyne

$$\sigma_a = 0, \quad \delta^c_a - \sigma L^c_a = 0$$

---

[17]) Jde tedy o systém dvou lineárních homog. rovnic pro dvě neznámé v^1, v^2, při čemž hodnost determinantu soustavy je jedna.

[18]) Pro kterou platí předpoklady odst. 1.

a tedy

$$\sigma = \text{konst}\,, \quad L_a^c = \frac{1}{\sigma}\,\delta_a^c\,,$$

$$\sigma = \text{konst} \neq 0\,, \quad L_1^1 = L_2^2 = \frac{1}{\sigma}\,, \quad L_1^2 = L_2^1 = 0\,.$$

Vyslovme nyní tuto větu:

Věta 1,10. *Nutná a postačující podmínka pro to, aby plocha A_2 v E_3*[19]*) byla plochou středovou, jest:*

$$L_1^1 = L_2^2 = c\,, \quad L_1^2 = L_2^1 = 0 \quad (c \neq 0 \text{ je konstanta})\,. \tag{1,30}$$

Důkaz. Nutnost podmínky věty byla již v úvahách vět předcházejících ověřena.

Pro důkaz postačitelnosti podmínky věty předpokládejme, že pro plochu A_2 v E_3 platí (1,30).

Položme pak $\xi^\alpha = x^\alpha(\eta^a) - \frac{1}{c}\,N^\alpha$. Odtud plyne:

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^a} = B_a^\alpha - \frac{1}{c}\,\partial_a N^\alpha = B_a^\alpha - \frac{1}{c}\,B_b^\alpha L_a^b = B_a^\alpha - B_b^\alpha \delta_a^b = 0\,,$$

t. j. $\xi^\alpha = \underset{0}{\xi^\alpha}$ je pevný bod v E_3. Pak můžeme psát:

$$x^\alpha(\eta^a) = \underset{0}{\xi^\alpha} + \frac{1}{c}\,N^\alpha\,, \tag{1,31}$$

odkud je zřejmé, že afinní normály procházejí bodem $\underset{0}{\xi^\alpha}$.

Věta 1,11. *Průsek středové plochy A_2 v E_3 s libovolnou rovinou obsahující bod plochy a afinní normálu plochy v tomto bodě je křivkou geodetickou v A_2*[20]).

Důkaz. Budiž $x^\alpha(\eta^a)$ libovolný bod dané plochy, N^α pak afinní normála v tomto bodě, $\underset{0}{\xi^\alpha}$ bod společný všem afinním normálám. Potom rovnici libovolné roviny jdoucí bodem $\underset{0}{\xi^\alpha}$ můžeme psát ve tvaru:

$$A_\alpha(X^\alpha - \underset{0}{\xi^\alpha}) = 0\,, \tag{1,32}$$

kde A_α, $\alpha = 1, 2, 3$ jsou konstanty ne vesměs rovné nule. Podmínka, že rovina (1,32) obsahuje afinní normálu bodu $x^\alpha(\eta^a)$, vede ke vztahu (podle (1,31))

$$A_\alpha N^\alpha = 0\,, \tag{1,33}$$

což je implicitní vztah mezi proměnnými η^a. Relací (1,33), tedy uvažovaným vztahem mezi proměnnými η^a, je v okolí uvažovaného bodu definována regu-

---

[19]) Pro kterou platí předpoklady odstavce 1.

[20]) T. j. geodetikou při konexi Λ_{ab}^c.

lární křivka.[21]) Nechť tato křivka, jakožto varieta v A_2, je popsána rovnicemi $\eta^a = \eta^a(t)$. Rovnice této křivky, uvažované jako varieta v E_3, jsou pak

$$x^\alpha = x^\alpha(\eta^a(t)) \,. \tag{1,34}$$

Označíme-li $\underset{1}{v}^a \doteq \frac{\mathrm{d}\eta^a}{\mathrm{d}t}$ tečný vektor v souřadnicích plochy a v^α tečný vektor křivky (1,34) v E_3, pak je

$$\underset{1}{v}^\alpha = B_a^\alpha \underset{1}{v}^a \,. \tag{1,35}$$

Derivováním podle parametru t dostaneme z (1,33) $A_\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N^\alpha = A_\alpha(\partial_a N^\alpha)\underset{1}{v}^a = 0$ a tedy podle (1,19), (1,30), (1,35) $A_\alpha B_b^\alpha L_a^b \underset{1}{v}^a = cA_\alpha B_a^\alpha \underset{1}{v}^a = cA_\alpha \underset{1}{v}^\alpha = 0$.

Tedy:

$$A_\alpha \underset{1}{v}^\alpha = A_\alpha B_a^\alpha \underset{1}{v}^a = 0 \,. \tag{1,35)*$$

Odtud plyne dalším derivováním podle t, přihlédneme-li k (1,18), (1,33),

$$A_\alpha \underset{2}{v}^\alpha = A_\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B_a^\alpha \underset{1}{v}^a = A_\alpha(B_d^\alpha \Lambda_{ab}^d \underset{1}{v}^a \underset{1}{v}^b - H_{ab} \underset{1}{v}^a \underset{1}{v}^b N^\alpha + B_d^\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underset{1}{v}^d) = 0 \,;$$

tedy

$$A_\alpha B_d^\alpha \nabla_t \underset{1}{v}^d = 0 \,, \tag{1,36}$$

kde ∇_t je symbol absolutní derivace příslušný konexi Λ_{ab}^c v A_2. Na vztah (1,36) spolu se vztahem (1,35)* se můžeme dívat jako na systém dvou rovnic pro dvě neznámé: $A_\alpha B_a^\alpha$, $a = 1, 2$. Poněvadž vektor $A_\alpha B_d^\alpha$ je nenulový, plyne odtud ihned existence takové funkce $f(t)$, že platí $\nabla_t \underset{1}{v}^d = f(t) \underset{1}{v}^d$, což značí, že křivka je geodetickou v A_2 při konexi Λ_{ab}^c. Tím je věta dokázána.

6. Hlavní směry tensoru L_a^c. Směr vektoru v^a (v bodě plochy A_2), pro který platí vztah

$$L_c^a v^c = \varrho v^a \,, \tag{1,37}$$

kde ϱ je skalár v A_2, nazýváme *směrem hlavním tensoru* L_c^a. Existuje-li v bodě plochy vektor v^a (nenulový) s vlastností (1,37), potom skalár ϱ musí nutně vyhovovat rovnici

$$\begin{vmatrix} L_1^1 - \varrho & L_1^2 \\ L_2^1 & L_2^2 - \varrho \end{vmatrix} = 0 \,, \tag{1,38}$$

což je rovnice druhého stupně pro skalár ϱ. Tato rovnice rozepsána podle mocnin ϱ dává kvadratickou rovnici v ϱ s absolutním členem rovným $L_1^1 L_2^2 - L_1^2 L_2^1$, t. j. rovným determinantu z tensoru L_a^c.

[21]) Pro funkci $A_\alpha N^\alpha(\eta^a)$ je $\partial_a(A_\alpha N^\alpha) = A_\alpha \partial_a N^\alpha = A_\alpha B_b^\alpha L_a^b = A_\alpha B_b^\alpha c\delta_a^b = cA_\alpha B_b^\alpha$. Kdyby bylo $A_\alpha B_b^\alpha = 0$, plynulo by odtud, že $A_\alpha = \varphi \,.\, T_\alpha$, t. j. rovina (1,32) by byla tečnou rovinou plochy v uvažovaném bodě, což není pravda.

Podle věty o implicit. funkcích je vztahem (1,33) definována lokálně funkce buď $\eta^1 = \eta^1(\eta^2)$ nebo $\eta^2 = \eta^2(\eta^1)$ se spojitými derivacemi až do řádu čtvrtého. Poslední tvrzení plyne z předpokl. odst. 1.

Předpokládejme, že rovnice (1,38) má nenulový reálný kořen ϱ.[22]) Potom platí:

Věta 1,12. *Vektor A^α takto definovaný*

$$A^\alpha \equiv \frac{1}{\varrho} N^\alpha, \tag{1,39}$$

kde ϱ je nenulovým řešením (reálným) rovnice (1,38) a N^α afinnormální vektor plochy, je nezávislý na volbě faktoru tečného vektoru, t. j. na transformaci (1,4).

Důkaz. Z (1,38) a z transformačního vztahu (1,21) plyne ihned $'\varrho = c^{-1}\varrho$. Z (1,39) a (1,16) plyne pak ihned tvrzení věty.

Poznámka 1,7. Jestliže $x^\alpha = x^\alpha(\eta^a)$ jsou jako předtím rovnice plochy A_2 v E_3, potom rovnicemi

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(\eta^a) = x^\alpha(\eta^a) - \frac{1}{\varrho} N^\alpha = x^\alpha(\eta) - A^\alpha \tag{1,40}$$

je popsána určitá varieta v E_3. Tato varieta může být bodem (jak je tomu v případě ploch středových), mohla by představovat křivku nebo plochu v E_3. V dalším uvedeme podmínky, za kterých je rovnicemi (1,40) popsána regulární plocha v E_3. Podrobný rozbor všech možností pro varietu (1,40) prováděti nebudeme.

Věta 1,13. *Nechť pro plochu A_2 v E_3 je $\varrho = \varrho(\eta^a)$ kořenem rovnice* (1,38)[23]) *těchto vlastností:*

a) *ϱ je nenulový jednoduchý kořen rovnice* (1,38),

b) $\varrho_1 L_2^1 \neq \varrho_2(L_1^1 - \varrho)$, *kde* $\varrho_a \equiv \frac{\partial}{\partial \eta^a}\varrho$ $(a = 1, 2)$.

Potom rovnicemi (1,40) je lokálně popsána regulární plocha v E_3.

Důkaz. Z předpokladů v odst. 1 plyne, že funkce definované v (1,40) mají spojité parciální derivace v uvažovaném oboru proměnných η^a. K tomu, aby rovnicemi (1,40) byla parametricky popsána plocha, stačí, zjistíme-li, že hodnost matice z elementů $C_a^\alpha \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \eta^a}$ je rovna dvěma, t. j., že vektory C_1^α, C_2^α jsou v uvažovaném oboru lineárně nezávislé.

Definujme vektor S_α, $\alpha = 1, 2, 3$ v bodech uvažovaného oboru takto:

$$S_\alpha = \mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma} C_1^\beta C_2^\gamma, \tag{1,41}$$

kde $\mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{jsou-li } \alpha, \beta, \gamma \text{ různé indexy a permutace sudá,} \\ -1, & \text{jsou-li } \alpha, \beta, \gamma \text{ různé indexy a permutace lichá,} \\ 0, & \text{jsou-li aspoň dva indexy stejné.} \end{cases}$

[22]) Nebudeme se zde zabývat podrobnou diskusí rovnice (1,38). Pomineme rovněž otázku reálnosti řešení této rovnice.

[23]) ϱ reálné.

Dokážeme-li, že za předpokladu věty je vektor S_α nenulový, budeme s důkazem věty hotovi.

Podle (1,40), (1,19) je

$$C_a^\alpha = B_a^\alpha - \frac{1}{\varrho} B_c^\alpha L_a^c + \frac{1}{\varrho^2} \varrho_a N^\alpha \quad \left(\varrho_a \equiv \frac{\partial \varrho}{\partial \eta^a}\right)$$

a tedy po úpravě

$$C_a^\alpha = - \varrho^{-1}(L_a^c - \varrho\delta_a^c) B_c^\alpha + \varrho^{-2}\varrho_a N^\alpha . \tag{1,42}$$

Poněvadž je ϱ jednoduchým kořenem charakteristické rovnice (1,38), je $L_a^c - \varrho\delta_a^c \neq 0$. Kdyby totiž platilo $L^c_a - \varrho\delta_a^c = 0$, potom by bylo $L_1^1 = L_2^2 = \varrho$, $L_1^2 = L_2^1 = 0$ a charakteristická rovnice (1,38) by měla dvojnásobný kořen $\varrho = L_1^1 = L_2^2$. Dosazením z (1,42) do (1,41) dostaneme

$$\begin{aligned} S_\alpha = \varrho^{-2} \mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma}[(L_1^c - \varrho\delta_1^c) B_c^\beta (L_2^d - \varrho\delta_2^d) B_d^\gamma] - \\ - \varrho^{-3}\mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma} B_c^\beta (L_1^c - \varrho\delta_1^c) \varrho_2 N^\gamma - \varrho^{-3}\mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma}\varrho_1 N^\beta (L_2^c - \delta_2^c) B_c^\gamma + \\ + \varrho^{-4}\mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma}\varrho_1\varrho_2 N^\beta N^\gamma , \end{aligned}$$

což lze přepsat na tvar

$$S_\alpha = \varrho^{-2}\mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma} B_1^\beta B_2^\gamma \begin{vmatrix} L_1^1 - \varrho & L_1^2 \\ L_2^1 & L_2^2 - \varrho \end{vmatrix} - \varrho^{-3}[\varrho_2(L_1^1 - \varrho) - \varrho_1 L_2^1] \,.$$
$$. \, \mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma} B_1^\beta N^\gamma - \varrho^{-3}[\varrho_2 L_1^2 - \varrho_1(L_2^2 - \varrho)] \, \mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma} B_2^\beta N^\gamma + \varrho^{-4}\varrho_1\varrho_2 \mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma} N^\beta N^\gamma .$$

Vzhledem k (1,38) a k definici elementů $\mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma}$ jsou prvý a čtvrtý sčítanec na pravé straně v předchozí rovnici rovny nule. Můžeme tedy psát

$$S_\alpha = a u_\alpha + b v_\alpha , \tag{1,43}$$

kde pro stručnost jsme položili

$$a = - \varrho^{-3}[\varrho_2(L_1^1 - \varrho) - \varrho_1 L_2^1] , \quad b = - \varrho^{-3}[\varrho_2 L_1^2 - \varrho_1(L_2^2 - \varrho)] , \tag{1,43}$$

$$u_\alpha = \mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma} B_1^\beta N^\gamma , \quad v_\alpha = \mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma} B_2^\beta N^\gamma . \tag{1,43}$$

Vektory u_α a v_α jsou však lineárně nezávislé.[24]) Kdyby bylo $S_\alpha = 0$, potom by tedy v důsledku lineární nezávislosti vektorů u_α, v_α muselo být (podle $(1,43)_a$) $a = b = 0$. Podle předpokladů věty je však $a \neq 0$. Tedy S_α je vektor nenulový. Odtud plyne — podle dřívější úvahy — tvrzení věty.

---

[24]) Kdyby byly lineárně závislé, pak by existovaly skaláry λ_1, λ_2, ne současně rovné nule v uvažovaných bodech, takové, že by platilo

$$\underset{1}{\lambda} u_\alpha + \underset{2}{\lambda} v_\alpha = \underset{1}{\lambda}\mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma} B_1^\beta N^\gamma + \underset{2}{\lambda}\mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma} B_2^\beta N^\gamma = 0 ;$$

odtud vynásobením veličinou B_2^α bychom dostali $- \underset{1}{\lambda}\mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma} B_1^\alpha B_2^\beta N^\gamma = - \underset{1}{\lambda} [B_1^\alpha B_2^\alpha N^\alpha] = 0$, z čehož by plynulo $\underset{1}{\lambda} = 0$, neboť determinant $[B_1^\alpha B_2^\alpha N^\alpha]$ je různý od nuly. Podobně bychom dostali $\underset{2}{\lambda} = 0$, což je tedy spor.

Poznámka 1,8. Jak vyplývá z důkazu věty předchozí, bylo možné místo předpokladu b) v této větě zavést předpoklad, že aspoň jeden ze skalárů a, b definovaných v $(1{,}43)_b$ je různý od nuly v uvažovaném oboru. Podrobný rozbor by ukázal, že současné anulování skaláru a, b z $(1{,}43)_b$ by znamenalo, že skalár ϱ by byl funkcí jen jednoho parametru v případě, že parametrické křivky by byly křivkami hlavními, t. j. křivkami, jichž tečné vektory leží v každém bodě uvažovaného oboru v hlavním směru tensoru L_a^c.

Věta 1,14. *Plocha z věty (1,13) s parametrickým popisem (1,40) má tuto vlastnost: Tečná rovina plochy (1,40) v jejím bodě $\xi^\alpha(\eta^a)$ obsahuje afinní normálu v bodě $x^\alpha(\eta^a)$ plochy dané.*[25])

Důkaz. Dokážeme, že tečná rovina plochy (1,40) v jejím bodě $\xi^\alpha(\eta^a)$ obsahuje afinnormální vektor N^ν původní plochy v jejím bodě $x^\alpha(\eta^a)$. K tomu stačí dokázat, že determinant $D \equiv [C_1^\varkappa, C_2^\varkappa, N^\alpha]$, kde $C_a^\varkappa$ ($a = 1, 2$; $\varkappa = 1, 2, 3$) jsou elementy definované v (1,42), je roven nule. Podle (1,41), $(1{,}43)_a$ můžeme však psát

$$D = S_\alpha N^\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} C_1^\beta C_2^\gamma N^\alpha = a u_\alpha N^\alpha + b v_\alpha N^\alpha\,,$$

kde veličiny a, b, u_α, b_α jsou popsány v $(1{,}43)_a$, $(1{,}43)_b$. Z předchozích vztahů a z $(1{,}43)_b$ plyne však ihned $D = 0$, čímž je tvrzení věty dokázáno.

Část II

(Příklady na theorii z části I)

1. Plocha afinních normál prostorové křivky v E_3. Budiž v E_3 dána regulární křivka s parametrickým popisem

$$x^\alpha = x^\alpha(t)\,, \quad t \in (t_1, t_2)\,, \quad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{2,1}$$

při čemž předpokládáme, že

a) funkce $x^\alpha(t)$ ($\alpha = 1, 2, 3$) mají v (t_1, t_2) spojité derivace řádu nejméně čtvrtého;

b) derivace $\dot{x}^\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, 3$ nevymizí současně v žádném bodě intervalu (t_1, t_2);

c) determinant $\left[\dfrac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}t^2}, \dfrac{\mathrm{d}^3x^\alpha}{\mathrm{d}t^3}\right] \neq 0$ v (t_1, t_2).

Afinním obloukem křivky (2,1) nazýváme skalár $\sigma(t)$ takto definovaný

$$\sigma(t) \equiv \int_{t_0}^{t} \left\{\frac{[\dot{x}^\alpha, \ddot{x}^\alpha, \dddot{x}^\alpha]}{[\dot{x}^\alpha, \ddot{x}^\alpha, \dddot{x}^\alpha]_{t=t_0}}\right\}^{\frac{1}{6}} \mathrm{d}t \;^{26)} \tag{2,2}$$

[25]) T. j. plochy s parametrickým popisem $x^\alpha = x^\alpha(\eta^a)$.

[26]) *F. Nožička*, Křivka v afinním prostoru a její afinní oblouk. Časopis pro pěstování matematiky, roč. *78* (1953), str. 318, věta 6.

(pro stručnost značí tečky nad symbolem x^α derivace podle parametru t), kde t_0 je nějaká zvolená hodnota z intervalu (t_1, t_2).

Křivku (2,1) můžeme (lokálně) vztáhnout k jejímu afinnímu oblouku (definovaném v (2,2)) jakožto parametru. Parametrické rovnice křivky píšeme pak ve tvaru

$$x^\alpha = x^\alpha(\sigma)\,. \tag{2,2}$$

Zavedeme-li označení

$$\underset{1}{v}^\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\sigma}\,, \quad \underset{2}{v}^\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}\sigma^2}\,, \quad \underset{3}{v}^\alpha = \frac{\mathrm{d}^3x^\alpha}{\mathrm{d}\sigma^3}\,, \tag{2,3}$$

potom vektor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\underset{3}{v}^\alpha$ je lineární kombinací vektorů $\underset{1}{v}^\alpha$, $\underset{2}{v}^\alpha$, tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\underset{3}{v}^\alpha = \underset{1}{\lambda}\underset{2}{v}^\alpha + \underset{2}{\lambda}\underset{1}{v}^\alpha\,, \tag{2,4}$$

kde $\underset{a}{\lambda} = \underset{a}{\lambda}(\sigma)$ jsou veličiny charakteristické pro danou křivku.[27])

Přímku o směru $\underset{2}{v}^\alpha$ v uvažovaném bodě dané křivky nazýváme první afinní normálou, nebo krátce afinní normálou dané křivky v uvažovaném bodě.

Budeme se v dalším zabývat plochou vytvořenou afinními normálami dané křivky, tedy plochou s parametrickým popisem

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(\sigma, u) \equiv x^\alpha(\sigma) + u\underset{2}{v}^\alpha\,. \tag{2,5}$$

Označíme-li $B_1^\alpha \equiv \frac{\partial\xi^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = \partial_1\xi^\alpha$, $B_2^\alpha = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial u} = \partial_2\xi^\alpha$, potom dostaneme z (2,5), (2,3)

$$B_1^\alpha = \underset{1}{v}^\alpha + u\underset{3}{v}^\alpha\,, \quad B_2^\alpha = \underset{2}{v}^\alpha \tag{2,6}$$

a odtud, použijeme-li (2,4),

$$\partial_1 B_1^\alpha = \underset{2}{v}^\alpha + u(\underset{2}{\lambda}\underset{1}{v}^\alpha + \underset{1}{\lambda}\underset{2}{v}^\alpha)\,, \quad \partial_1 B_2^\alpha = \partial_2 B_1^\alpha = \underset{3}{v}^\alpha\,, \quad \partial_2 B_2^\alpha = 0\,. \tag{2,7}$$

Vektor t_α o složkách

$$t_\alpha = \mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma}B_1^\beta B_2^\gamma = \mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma}\underset{1}{v}^\beta\underset{2}{v}^\gamma + u\mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma}\underset{3}{v}^\beta\underset{2}{v}^\gamma\,\text{[28])} \tag{2,8}$$

je tečným vektorem plochy (2,5).

Z (2,8), (2,3), (2,4) plyne pak

$$\partial_1 t_\alpha = \mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma}\underset{1}{v}^\beta\underset{3}{v}^\gamma + u\underset{2}{\lambda}\mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma}\underset{1}{v}^\beta\underset{2}{v}^\gamma\,, \quad \partial_2 t_\alpha = \mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma}\underset{3}{v}^\beta\underset{2}{v}^\gamma\,. \tag{2,9}$$

---

[27]) Viz práci citovanou v pozn. 26, str. 317, 318.

[28]) $\mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma}$ je tensor v E_3 takto definovaný:

$$\mathfrak{e}_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{pro vesměs různé indexy a sudou permutaci,} \\ -1 & \text{pro vesměs různé indexy a lichou permutaci,} \\ 0 & \text{jsou-li aspoň dva indexy stejné.} \end{cases}$$

Z (2,9), (2,6) spočteme pak podle (1,2)

$$\begin{gathered} h_{11} = B_1^\alpha \partial_1 t_\alpha = u^2 \underset{2}{\lambda} \,.\, [\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha]\,, \\ h_{12} = h_{21} = B_1^\alpha \partial_2 t_\alpha = -\, [\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha]\,, \quad h_{22} = B_2^\alpha \partial_2 t_\alpha = 0\,. \end{gathered} \tag{2,10}$$

Pro plochu (2,5) je tedy determinant z tensoru h_{ab} záporný; tedy konkretně

$$h_{11} h_{22} - h_{12}^2 = -\, [\underset{1}{v}^\alpha \underset{2}{v}^\alpha \underset{3}{v}^\alpha]^2\,. \tag{2,11}$$

Pro složky tensoru h^{ab} kontragredientního k tensoru h_{ab} dostaneme:

$$h^{11} = 0\,, \quad h^{12} = -\, [\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha]^{-1}\,, \quad h^{22} = -\, u^2 \underset{2}{\lambda} [\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha]^{-1}\,. \tag{2,12}$$

Z (2,10) plyne vzhledem k (2,4)

$$\begin{gathered} \partial_1 h_{11} = u^2 \underset{2}{\lambda} [\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha]\,, \quad \partial_1 h_{12} = \partial_1 h_{21} = 0\,, \quad \partial_1 h_{22} = 0\,, \\ \partial_2 h_{11} = 2u \underset{2}{\lambda} [\underset{1}{v}^\alpha, \underset{2}{v}^\alpha, \underset{3}{v}^\alpha]\,, \quad \partial_2 h_{12} = \partial_2 h_{21} = 0\,, \quad \partial_2 h_{22} = 0\,. \end{gathered} \tag{2,13}$$

Z údajů (2,6) až (2,13) můžeme spočítat koeficienty konexí $\overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab}$, $\begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix}$ definovaných v (1,5), (1,6). Odtud spočteme pak vektor M_a definovaný v (1,7). Podrobný, ale poněkud zdlouhavý výpočet vede k výsledku

$$M_a = \frac{1}{2} \left(\begin{Bmatrix} c \\ ab \end{Bmatrix} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^c_{ab} \right) = 0\,. \tag{2,14}$$

Vzhledem k (1,10) můžeme tedy položit $T_\alpha = t_\alpha$. Podle (1,17) je afinnormální vektor plochy (2,5) řešením rovnic

$$N^\alpha T_\alpha = 1\,, \quad N^\alpha \partial_1 T_\alpha = 0\,, \quad N^\alpha \partial_2 T_\alpha = 0\,.$$

Řešením těchto rovnic dostaneme pro vektor N^α:

$$N^\alpha = (\underset{3}{v}^\alpha + u \underset{2}{\lambda} \underset{2}{v}^\alpha) \,.\, [\underset{1}{v}^\gamma, \underset{2}{v}^\gamma, \underset{3}{v}^\gamma]^{-1}\,, \tag{2,15}$$

o čemž se snadno dosazením do dřívějších definičních rovnic přesvědčíme.

Z (2,15) plyne vzhledem k (2,4)

$$\begin{gathered} \partial_1 N^\alpha = (\underset{2}{\lambda} \underset{1}{v}^\alpha + \underset{1}{\lambda} \underset{2}{v}^\alpha + u \underset{2}{\dot{\lambda}} \underset{2}{v}^\alpha + u \underset{2}{\lambda} \underset{3}{v}^\alpha) \,.\, [\underset{1}{v}^\gamma, \underset{2}{v}^\gamma, \underset{3}{v}^\gamma]^{-1}\,, \\ \partial_2 N^\alpha = \underset{2}{\lambda} \underset{2}{v}^\alpha [\underset{1}{v}^\gamma, \underset{2}{v}^\gamma, \underset{3}{v}^\gamma]^{-1}\,. \end{gathered} \tag{2,16}$$

Z (2,16) a (2,9) plyne pak pro složky tensoru E_{ab} definovaného v (1,22) resp. (1,23):

$$E_{11} = -\, (\underset{1}{\lambda} + u \underset{2}{\dot{\lambda}} - u^2 \underset{2}{\lambda}^2)\,, \quad E_{12} = E_{21} = -\, \underset{2}{\lambda}\,, \quad E_{22} = 0 \tag{2,17}$$

a tedy

$$E_{11} E_{22} - E_{12}^2 = -\, \underset{2}{\lambda}^2 \leq 0\,.$$

Poněvadž (jak plyne ze vztahu $T_\alpha = t_\alpha$) je $H_{ab} = h_{ab}$ (viz (1,12)), dostaneme pak pro tensor L_a^c podle definice (1,22) a vztahů (2,12) a (2,17)

$$L_a^c = E_{ab}H^{bc} = E_{ab}h^{bc}\,,$$

$$L_1^1 = E_{11}H^{11} + E_{12}H^{12} = \underset{2}{\lambda}[\underset{1}{v^\alpha}, \underset{2}{v^\alpha}, \underset{3}{v^\alpha}]^{-1}\,,$$

$$L_1^2 = E_{11}H^{12} + E_{12}H^{22} = (\underset{1}{\lambda} + u\underset{2}{\dot\lambda} - u^2\underset{2}{\lambda}^2 + u^2\underset{2}{\lambda}^2)\,.\,[\underset{1}{v^\alpha}, \underset{2}{v^\alpha}, \underset{3}{v^\alpha}]^{-1} = \qquad (2{,}18)$$

$$= (\underset{1}{\lambda} + u\underset{2}{\dot\lambda})[\underset{1}{v^\alpha}, \underset{2}{v^\alpha}, \underset{3}{v^\alpha}]^{-1}\,, \quad L_2^1 = E_{21}H^{11} + E_{22}H^{12} = 0\,,$$

$$L_2^2 = E_{21}H^{12} + E_{22}H^{22} = \underset{2}{\lambda}[\underset{1}{v^\alpha}, \underset{2}{v^\alpha}, \underset{3}{v^\alpha}]\,.$$

Je tedy

$$L_1^1 + L_2^2 = 2\underset{2}{\lambda}[\underset{1}{v^\alpha}, \underset{2}{v^\alpha}, \underset{3}{v^\alpha}]^{-1}\,, \quad L_1^1L_2^2 - L_1^2L_2^1 = \underset{2}{\lambda}^2[\underset{1}{v^\alpha}, \underset{2}{v^\alpha}, \underset{3}{v^\alpha}]^{-2}\,. \qquad (2{,}19)$$

Rovnice pro hlavní směry tensoru L_a^c, tedy rovnice (1,37), vede k charakteristické rovnici (viz (1,38))

$$\varrho^2 - 2\varrho\underset{2}{\lambda}[\underset{1}{v^\alpha}, \underset{2}{v^\alpha}, \underset{3}{v^\alpha}]^{-1} + \underset{2}{\lambda}^2[\underset{1}{v^\alpha}, \underset{2}{v^\alpha}, \underset{3}{v^\alpha}]^{-2} = 0\,,$$

která má dvojnásobný kořen

$$\varrho = \underset{2}{\lambda}[\underset{1}{v^\alpha}, \underset{2}{v^\alpha}, \underset{3}{v^\alpha}]^{-1}\,. \qquad (2{,}20)$$

Předpokládejme, že je $\underset{2}{\lambda} \neq 0$. Potom podle (2,15), (2,20), (1,39) je

$$A^\alpha = \frac{1}{\underset{2}{\lambda}}(\underset{3}{v^\alpha} + u\underset{2}{\lambda}\underset{2}{v^\alpha})\,. \qquad (2{,}21)$$

Definujme ve smyslu (1,40)

$$\xi^\alpha = x^\alpha - A^\alpha = x^\alpha(\sigma) + u\underset{2}{v^\alpha} - \frac{1}{\underset{2}{\lambda}}(\underset{3}{v^\alpha} + u\underset{2}{\lambda}\underset{2}{v^\alpha})\,,$$

t. j.

$$\xi^\alpha = x^\alpha(\sigma) - \frac{1}{\underset{2}{\lambda}}\underset{3}{v^\alpha}\,. \qquad (2{,}22)$$

Potom je podle (2,4)

$$\frac{\mathrm{d}\xi^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = \underset{1}{v^\alpha} - \frac{1}{\underset{2}{\lambda}}(\underset{2}{\lambda}\underset{1}{v^\alpha} + \underset{1}{\lambda}\underset{2}{v^\alpha}) + \underset{2}{\dot\lambda}\frac{1}{\underset{2}{\lambda}^2}\underset{3}{v^\alpha} = -\frac{\underset{1}{\lambda}}{\underset{2}{\lambda}}\underset{2}{v^\alpha} + \frac{\underset{2}{\dot\lambda}}{\underset{2}{\lambda}^2}\underset{3}{v^\alpha}\,. \qquad (2{,}23)$$

Z výsledků můžeme činiti tento závěr:

Věta 2,1. *Plocha afinních normál prostorové křivky v E_3 má tyto afinní vlastnosti:*

a) *Je-li pro danou křivku $\underset{1}{\lambda} = \underset{2}{\lambda} = 0$, potom afinní normály této plochy tvoří svazek rovnoběžných přímek.*

b) *Je-li* $\underset{2}{\lambda} = 0$, $\underset{1}{\lambda} \neq 0$, *potom hodnost tensoru* L_a^c *je rovna jedné a pro afinní normály této plochy platí věta* (1,9).

c) *Je-li* $\underset{2}{\lambda} \neq 0$ *konstanta*, $\underset{1}{\lambda} = 0$, *potom je hodnost tensoru* L_c^a *rovna dvěma a plocha afinních normál je plochou středovou,*

d) *Ve všech ostatních případech je hodnost tensoru* L_a^c *rovna dvěma a plocha afinních normál má tu vlastnost, že evoluta této plochy, t. j. varieta definovaná obecně rovnicemi* (1,40), *pro plochu afinních normál specielně pak rovnicemi* (2,22), *je prostorovou křivkou.*

Důkaz tvrzení a) plyne z (2,18) a věty (1,7). Dosadíme-li do (2,18) $\underset{2}{\lambda} = 0$, dostaneme $L_1^1 = L_2^1 = L_2^2 = 0$, $L_1^2 = \lambda[\underset{1}{v^\alpha}\underset{2}{v^\alpha}\underset{3}{v^\alpha}]^{-1} \neq 0$. Hodnost tensoru L_c^a je tedy jedna a můžeme aplikovat větu (1,9), čímž je ověřeno tvrzení b). Je-li $\underset{2}{\lambda}$ konstanta různá od nuly a $\underset{1}{\lambda} = 0$, potom plyne z (2,23) $\dfrac{d\xi^\alpha}{ds} = 0$ a tedy $\xi^\alpha =$ $=$ konst, což charakterisuje plochy středové. Z (2,22), (2,23) a (2,19) pak plyne zbývající tvrzení d) věty.

Poznámka 2,1. Vlastnost a) z věty (2,1) má plocha afinních normál každé prostorové křivky s parametrickým popisem $x^\alpha = a^\alpha t^3 + b^\alpha t^2 + c^\alpha t + d^\alpha$, kde $a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha, d^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) jsou konstanty, při čemž determinant $[a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha] \neq 0$. Ze všech křivek v E_3 (regulárních) křivky tohoto typu a jen tohoto typu mají vlastnost a) z věty (2,1).

Plocha afinních normál prostorové křivky s parametrickým popisem $x^\alpha =$ $= a^\alpha e^t + b^\alpha e^{-t} + c^\alpha t + d^\alpha$, $a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha, d^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) konstanty, $[a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha] \neq$ $\neq 0$, má vlastnost b) z věty (2,1).

Vlastnost c) z věty (2,1) má na př. plocha afinních normál prostorové křivky s parametrickým popisem

$$x^\alpha = a^\alpha \int e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t\right) dt + b^\alpha \int e^{-\frac{t}{2}} \left(\sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right) dt + c^\alpha e^t + d^\alpha ,$$

kde $a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) jsou konstanty, $[a^\alpha, b^\alpha, c^\alpha] \neq 0$.

2. Kvadratické nesingulární plochy v E_3. Parametrickými rovnicemi

$$x = a \sin \vartheta \cos \varphi , \quad y = b \sin \vartheta \sin \varphi , \quad z = c \cos \vartheta , \qquad (2,24)_a$$

kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, $\vartheta \in \langle 0, \pi\rangle$, je popsán elipsoid v E_3. Parametrické rovnice

$$x = a \cosh \vartheta \cos \varphi , \quad y = b \cosh \vartheta \sin \varphi , \quad z = c \sinh \vartheta , \qquad (2,24)_b$$

kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, $\vartheta \in (-\infty, \infty)$, představují popis jednodílného hyperboloidu v E_3. Konečně rovnicemi

$$x = a \sinh \vartheta \cos \varphi , \quad y = b \sinh \vartheta \sin \varphi , \quad z = c \cosh \vartheta , \qquad (2,24)_c$$

$\vartheta \in (-\infty, \infty)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ je popsán dvojdílný hyperboloid v E_3.

V uvažovaných případech $(2{,}24)_{a,b,c}$ jsou a, b, c kladná čísla. Podrobným výpočtem, který zde provádět nebudeme,[29]) vyjde při vhodné normalisaci funkce $M(\eta^a)$ z (1,9) pro afinnormální vektor N^α definovaný v (1,15) v každém z případů $(2{,}24)_{a,b,c}$: $x^\alpha = N^\alpha$ pro $\alpha = 1, 2, 3$; odtud plyne hned: $\frac{\partial x^\alpha}{\partial \eta^a} \equiv B_a^\alpha = \partial_a N^\alpha$ a tedy podle (Γ,19) $L_a^c = \delta_a^c$, kde δ_a^c je Kroneckerovo delta.

Podle věty (1,10) jsou tedy uvažované plochy plochami středovými, což je výsledek samozřejmý.

Rovnicemi

$$x = u\,, \quad y = v\,, \quad z = \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{p} + \varepsilon\,\frac{v^2}{q}\right), \quad \varepsilon = \pm 1\,, \quad p > 0\,, \quad q > 0$$

(p, q jsou konstanty) je popsán eliptický paraboloid pro $\varepsilon = +1$, hyperboloický paraboloid pro $\varepsilon = -1$. Pro uvažovanou plochu vyjde $N^\alpha = A^\alpha$, kde A^α jsou konstanty ne vesměs rovné nule. Z předchozího a z formule (1,19) vyčteme ihned, že v tomto případě je $L_a^c = 0$.

Všechny uvažované nesingulární kvadriky byly kvadrikami ve speciální poloze. Avšak výsledek $L_a^c - k\delta_a^c = 0$ (k konstanta) je zřejmě nezávislý na afinní transformaci souřadnic v E_3, t. j. na transformaci

$$^*x^\alpha = a_\beta^\alpha x^\beta + c^\alpha\,,$$

kde a_β^α, c^α jsou konstanty, determinant $[a_\beta^\alpha]$ je různý od nuly. Tedy výsledek platí pro nesingulární kvadriky vůbec.

Předchozí výsledky mají pro nesingulární kvadriky tento zajímavý d ů s l e d e k:

Podle věty (1,11) *jsou křivky na elipsoidu nebo hyperboloidu, které jsou průnikem těchto ploch s libovolnou rovinou jdoucí jejich středem, křivkami geodetickými při afinní konexi* (1,13). *Podle věty* (1,8) *protne rovina, obsahující afinní normálu* (*tedy průměr*) *paraboloidu, v geodetice ve smyslu konexe* (1,13).

ЗАМЕТКА К АФИННОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ФРАНТИШЕК НОЖИЧКА (František Nožička), Прага.

(Поступило в редакцию 22/I 1955 г.)

Статья является продолжением ранее опубликованной работы автора *Le vecteur afinnonormal et la connexion de l'hypersuface das l'espace affin,* Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, (Журнал для занятий по математике и физике), Prague, № 75, 1950). Подходящей нормализацией

[29]) Viz též *Nožička F.*, K problému afinní normály a indukované konexe nadplochy v afinním prostoru, Časopis pro pěstování matematiky, roč. *79*, č. 2, str. 130—133.

аффиннонормального вектора получаются т. наз. формулы Френэ для поверхности и к уравнениям Гаусса — которые указывают на полную аналогию с соответствующими соотношениями, известными в метрической геометрии Римана. Ядром работы является дискуссия так называемого второго афинного тензора поверхности, который в работе обозначен через L_a^c. Этот тензор не зависит (если не взирать на отличный от нуля числовой фактор) от выбора касательного вектора. Главные результаты следующие:

Пусть для поверхности A_2 в E_3 (E_3 *есть трехмерное линейное афинное пространство*), *для которой ранг основного афинного тензора* h_{ab} *равен* $n - 1$, *справедливо:*

а) $L_a^c = 0$ *для* c, $a = 1, 2$. *Тогда афинные нормали образуют пучек параллельных прямых;*

б) L_a^c *имеет во всей области, где определена поверхность* A_2, *ранг* 1. *Тогда через каждую точку поверхности* A_2 *проходит в точности одна кривая, обладающая тем свойством, что афинные нормали к поверхности вдоль этой кривой параллельны.*

в) *пусть* $L_a^c = \sigma\delta_a^c$ $(\sigma \neq 0)$ *в каждой точке области, на которой определена поверхность* (δ_a^c — *дельта Кронеккера*). *Тогда* σ *есть постоянная (отличная от нуля), и аффинные нормали проходят через одну точку.*

Zusammenfassung

EIN BEITRAG ZUR AFFINGEOMETRIE DER FLÄCHE

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha.

(Eingegangen am 22. Jänner 1955.)

Der vorliegende Artikel knüpft an die frühere Arbeit des Autors *Le vecteur affinonormal et la connexion de l'hypersurface dans l'espace affin*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Prag 1950, Nr. *75*, an. Durch geeignete affine Normalisation des Tangentialvektors einer Fläche (im linearen affinen Raum) gewinnt man die sogenannten Frenetschen Formeln der Fläche und die Gauss-Codazzischen Gleichungen, die den analogen Beziehungen der metrischen Geometrie entsprechen. Der Kern der Arbeit liegt in der Diskussion des sogenannten zweiten Affintensors, der mit dem Symbol L_a^c bezeichnet wird. Diese Grösse ist (bis auf einen von Null verschiedenen Faktor) von der Wahl des Tangentialvektors unabhängig. Die Hauptresultate lassen sich folgendermassen formulieren:

Es sei in einem linearen affinen Raum von drei Dimensionen eine reguläre Fläche gegeben. Man setzt voraus, dass der Rang des ersten Affintensors h_{ab} gleich $n-1$ sei.

a) Es sei $L_a^c = 0$ für $c, a = 1, 2$ im ganzen Definitionsbereich der Fläche. Dann bilden die Geraden in der Richtung der Affinnormalvektoren einen Band von parallelen Geraden.

b) L_a^c hat den Rang eins im ganzen Definitionsbereich der Fläche. Dann existiert in jedem Punkt der Fläche eine und nur eine Kurve mit der Eigenschaft, dass entlang dieser Kurve die Affinnormalvektoren parallel sind.

c) Es sei $L_a^c = \sigma\delta_a^c$ $(\sigma \neq 0)$ im ganzen Definitionsbereich der Fläche (δ_a^c ist das Kroneckersche Delta). Dann ist σ konstant und es existiert ein gewisser Punkt im Raum, durch den die Geraden in Richtung der Affinnormalvektoren durchgehen.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

O SOUSTAVÁCH ÚHLOPŘÍČEK V KONVEXNÍM n-ÚHELNÍKU

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha.

(Došlo dne 28. ledna 1955.)

DT: 513.34
: 513.82

Předpokládáme-li, že žádné tři úhlopříčky konvexního n-úhelníka ($n > 3$) nemají společný průsečík, lze množinu úhlopříček, jíž je určeno právě k průsečíků úhlopříček a přidáním každé další úhlopříčky se tento počet průsečíků zvětší, nazvat soustavou úhlopříček k-tého stupně. Soustavou nultého stupně je určen rozklad daného n-úhelníka na trojúhelníky. Počet těchto rozkladů určil RODRIGUES [1] — viz vzorec (1). Akademik E. ČECH položil otázku, zda pro malé k lze počet soustav k-tého stupně vyjádřit stejně jednoduchým způsobem, jak se to pro $k = 0$ podařilo Rodriguesovi. V tomto článku — kromě speciálních výsledků (věta 2) — je ukázáno, že pro $k = 1$ a 2 je odpověď kladná (věta 3 a 4). Závěrem jsou položeny dvě další otázky týkající se soustav úhlopříček.

V rovině buď dán konvexní n-úhelník ($n > 3$) $A_1A_2A_3 \dots A_n$, jehož žádné tři úhlopříčky nemají společný vnitřní bod. Označme M množinu všech úhlopříček daného n-úhelníka a pro $X \subset M$ nazveme *průsečíkem množiny* X průsečík dvou prvků množiny X. Buď $0 \leqq k \leqq \binom{n}{4}$, k celé; existuje-li množina $S_k^{(n)}$, která má tyto vlastnosti:

1. $S_k^{(n)} \subset M$, 2. $S_k^{(n)}$ má právě k průsečíků, 3. je-li $S_k^{(n)} \subset Y \subset M$, $S_k^{(n)} \neq Y$, pak počet průsečíků množiny Y je aspoň $k + 1$,

potom $S_k^{(n)}$ nazveme *soustavou k-tého stupně*. Vrchol n-úhelníka, který neleží na žádné úhlopříčce soustavy $S_k^{(n)}$, nazveme *volným vrcholem* této soustavy.

Je zřejmá existence soustavy $S_0^{(n)}$. Místo $S_0^{(n)}$ můžeme studovat též jistý rozklad $R_0^{(n)}$ daného n-úhelníka na trojúhelníky. Z úvahy o součtu vnitřních úhlů v n-úhelníku plyne, že $R_0^{(n)}$ má $n - 2$ prvků.

O soustavách $S_0^{(n)}$ platí věta:

Věta 1. *Buď a_n počet soustav stupně* 0. *Pak*

$$a_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}. \tag{1}$$

Důkaz. Strana A_1A_2 patří v každém rozkladu $R_0^{(n)}$ právě jednomu trojúhelníku. Budiž to trojúhelník $A_1A_2A_j$ $(3 \leqq j \leqq n)$. Označme $a_2 = a_3 = 1$ a uvažme dvě skupiny vrcholů: první $A_2, A_3, \ldots, A_j$, druhou $A_1, A_j, A_{j+1}, \ldots, A_n$. Počet rozkladů $R_0^{(n)}$, ve kterých existuje trojúhelník $A_1A_2A_j$, je zřejmě $a_{j-1} \cdot a_{n-j+2}$. Platí tedy rekurentně

$$a_n = \sum_{i=2}^{n-1} a_i a_{n+1-i} \tag{2}$$

a methodou vytvořujících funkcí najdeme výsledek (1).

Při $n \geqq 6$ můžeme udat rozklady $R_0^{(n)}$, ve kterých existuje *úhlopříčkový trojúhelník*. Tak nazveme trojúhelník, jehož všechny strany jsou úhlopříčky n-úhelníka. O počtu takovýchto rozkladů (resp. soustav) platí

Věta 2. *Buď b_n počet rozkladů $R_0^{(n)}$, v nichž neexistuje úhlopříčkový trojúhelník. Pak $b_n = n \cdot 2^{n-5}$.*

Důkaz. Případ $n = 4$ je zřejmý; buď tedy $n \geqq 5$. Dva sousední vrcholy nemohou být zřejmě volné v téže soustavě. Snadno určíme, že ke každé soustavě, která vytváří $R_0^{(n)}$ bez úhlopříčkových trojúhelníků, přísluší právě dva volné vrcholy n-úhelníka. Indukcí podle n nejdříve dokážeme, že počet rozkladů $R_0^{(n)}$, které mají volné právě vrcholy A_1, A_j (kde $3 \leqq j \leqq n - 1$), je $\binom{n-4}{j-3}$. Pro $n = 5$ je toto tvrzení zřejmě správné. Ať tedy $n > 5$ a předpokládejme, že tvrzení je správné pro m-úhelník $(5 \leqq m \leqq n - 1)$. Pro $j = 3, 4, n - 2, n - 1$ se snadno vidí, že je tvrzení správné i pro n-úhelník, takže zbývá dokázat tvrzení pro j, pro něž $4 < j < n - 2$. V tomto případě roztřídíme rozklady na dva (disjunktní) typy: Rozklad prvního (resp. druhého) typu je vytvořen pomocí úhlopříčky A_2A_{n-1} (resp. A_3A_n). Počet rozkladů prvního typu je roven počtu rozkladů $(n - 2)$-úhelníka $A_2A_3A_4 \ldots A_{n-1}$ s volnými vrcholy A_{n-1}, A_j nebo s volnými vrcholy A_2, A_j — a těch je podle indukčního předpokladu

$$\binom{n-6}{j-3} + \binom{n-6}{j-4} = \binom{n-5}{j-3}.$$

Počet rozkladů druhého typu je roven počtu rozkladů $(n - 2)$-úhelníka $A_3A_4A_5 \ldots A_{n-1}A_n$ s volnými vrcholy A_n, A_j nebo s volnými vrcholy A_3, A_j — a těch je

$$\binom{n-6}{j-4} + \binom{n-6}{j-5} = \binom{n-5}{j-4}.$$

Úhrnem počet rozkladů obou typů je

$$\binom{n-5}{j-3} + \binom{n-5}{j-4} = \binom{n-4}{j-3}, \text{ c. b. d.}$$

Platí tedy

$$b_n = \frac{n}{2}\sum_{j=3}^{n-1}\binom{n-4}{j-3} = n \,.\, 2^{n-5}$$

a důkaz je podán.

Každá soustava $S_0^{(n)}$ má zřejmě $n - 3$ úhlopříček. Odtud vyplývá

Věta 3. *Počet soustav prvního stupně je* $c_n = \frac{n-3}{2} a_n$.

Důkaz je jasný.

Soustavy druhého stupně rozdělíme na tři kategorie.

1. kategorie: Oba průsečíky soustavy leží na téže úhlopříčce.

2. kategorie: Existují vrcholy $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}$ tak, že jeden průsečík soustavy leží na $A_{i_1}A_{i_2}$ a druhý na $A_{i_1}A_{i_3}$ — a soustava není 1. kategorie.

3. kategorie: Ostatní.

Soustavy 3. kategorie existují jen pro $n \geqq 8$. O soustavách $S_2^{(n)}$ dokážeme větu:*)

Věta 4. a) *Počet soustav 1. kategorie je* $d_n = \frac{(13n-45)(n-4)}{2(n-1)} a_{n-1}$,

b) *počet soustav 2. kategorie je* $e_n = \frac{11n-45}{n+1}\binom{2n-7}{n-6}$,

c) *počet soustav 3. kategorie je*

$$f_n = 3n \sum_{i=4}^{n-4} \frac{1}{i-1}\binom{2i-6}{i-4}\binom{2n-2i-2}{n-i-4} .$$

Důkaz. a) Případ $n = 4$ je zřejmý. Při $n \geqq 5$ určeme počet soustav, jejichž průsečíky leží na úhlopříčkách A_1A_r, A_pA_q, A_uA_v, kde

$$2 \leqq p \leqq u < r < v \leqq q \leqq n\,, \quad |p-u| + |q-v| > 0\,.$$

Počet soustav, u nichž je $p < u$, $v < q$ (takové existují právě pro $n \geqq 6$), určíme úvahou o součinu

$$\pi = a_p a_{u-p+1} a_{r-u+1} a_{v-r+1} a_{q-v+1} a_{n-q+2}\,.$$

Pomocí vzorce (2) určíme

$$\sum_{q=6}^{n}\sum_{v=5}^{q-1}\sum_{r=4}^{v-1}\sum_{u=3}^{r-1}\sum_{p=2}^{u-1}\pi = a_{n+1} - 4a_n + 3a_{n-1}\,.$$

Je totiž

$$\sum_{p=2}^{u-1} a_p a_{u-p+1} = a_u\,, \quad \sum_{u=3}^{r-1} a_u a_{r-u+1} = a_r - a_{r-1}\,,$$

$$\sum_{r=4}^{v-1} (a_r - a_{r-1})\, a_{v-r+1} = a_v - 2a_{v-1}\,,$$

---

*) Pro $k < 0$ klademe $\binom{h}{k} = 0$.

$$\sum_{v=5}^{q-1} (a_v - 2a_{v-1})\, a_{q-v+1} = a_q - 3a_{q-1} + a_{q-2}\,,$$

$$\sum_{q=6}^{n} (a_q - 3a_{q-1} + a_{q-2})\, a_{n-q+2} = a_{n+1} - 4a_n + 3a_{n-1}\,.$$

Počet soustav, u nichž je $p = u$, určíme úvahou o součinu

$$\pi' = a_p a_{r-p+1} \cdot a_{v-r+1} \cdot a_{q-v+1} \cdot a_{n-q+2}\,.$$

Pomocí vzorce (2) analogicky jako prve vypočteme

$$\sum_{q=5}^{n} \sum_{v=4}^{q-1} \sum_{r=3}^{v-1} \sum_{p=2}^{r-1} \pi' = a_{n+1} - 3a_n + a_{n-1}\,.$$

Stejný je též počet soustav, u nichž je $v = q$. Platí tedy $d_n = \frac{n}{2}(3a_{n+1} - 10a_n + 5a_{n-1})$ čili po úpravě $d_n = \frac{(13n - 45)(n - 4)}{2(n - 1)}\, a_{n-1}$.

b) Případy $n = 4$, $n = 5$ jsou zřejmé. Při $n \geqq 6$ určíme počet soustav, jejichž průsečíky leží na úhlopříčkách A_1A_u, A_pA_r, A_wA_q, A_1A_v, kde

$$2 \leqq p < u < r \leqq w < v < q \leqq n\,.$$

Tento počet je

$$\pi'' = a_p a_{u-p+1} \cdot a_{r-u+1} \cdot a_{w-r+2} \cdot a_{v-w+1}\, a_{q-v+1} \cdot a_{n-q+2}\,.$$

Pro $w = r$ provedeme výpočet analogicky jako sub a).

$$\sum_{q=6}^{n} \sum_{v=5}^{q-1} \sum_{r=4}^{v-1} \sum_{u=3}^{r-1} \sum_{p=2}^{u-1} \pi'' = a_{n+1} - 4a_n + 3a_{n-1}\,.$$

Pro $w > r$ máme

$$\sum_{u=3}^{r-1} \sum_{p=2}^{u-1} a_p a_{u-p+1} a_{r-u+1} = a_r - a_{r-1}\,,$$

$$\sum_{r=4}^{w-1} (a_r - a_{r-1})\, a_{w-r+2} = a_{w+1} - 3a_w + a_{w-1}\,,$$

$$\sum_{w=5}^{v-1} (a_{w+1} - 3a_w + a_{w-1})\, a_{v-w+1} = a_{v+1} - 4a_v + 3a_{v-1}\,,$$

$$\sum_{v=6}^{q-1} (a_{v+1} - 4a_v + 3a_{v-1})\, a_{q-v+1} = a_{q+1} - 5a_q + 6a_{q-1} - a_{q-2}\,,$$

$$\sum_{q=7}^{n} (a_{q+1} - 5a_q + 6a_{q-1} - a_{q-2})\, a_{n-q+2} = a_{n+2} - 6a_{n+1} + 10a_n - 4a_{n-1}\,.$$

Je tedy

$$e_n = \frac{n}{2}(a_{n+1} - 4a_n + 3a_{n-1}) + n\,(a_{n+2} - 6a_{n+1} + 10a_n - 4a_{n-1})\,,$$

což po úpravě dává

$$e_n = \frac{11n - 45}{n + 1}\binom{2n - 7}{n - 6}.$$

c) Můžeme dokázat, že v n-úhelníku počet soustav $S_1^{(n)}$ takových, že průsečík soustavy leží na úhlopříčkách vycházejících z vrcholů A_1, A_n, je dán číslem $\frac{3}{n - 1}\binom{2n - 6}{n - 4}$. Podobně dokážeme, že počet soustav $S_1^{(n)}$ takových, že průsečík soustavy neleží na žádné úhlopříčce vycházející z vrcholů A_1, A_n, je dán číslem $2\binom{2n - 6}{n - 6}$. Důkazy obou lemmat přenechávám čtenáři.

Rozdělme nyní n-úhelník úhlopříčkou A_1A_r ($4 \leq r \leq n - 1$) na r-úhelník a $(n - r + 2)$-úhelník a v každém sestrojme soustavu 1. stupně tak, aby sjednocení obou soustav (spolu s úhlopříčkou A_1A_r) byla soustava 2. stupně 3. kategorie. Položíme-li

$$ {}_r^{(n)} = 2\binom{2(n - r + 2) - 6}{(n - r + 2) - 6} \cdot \frac{3}{r - 1}\binom{2r - 6}{r - 4},$$

$$Q_r^{(n)} = 2\binom{2r - 6}{r - 6} \cdot \frac{3}{(n - r + 2) - 1}\binom{2(n - r + 2) - 6}{(n - r + 2) - 4},$$

vidíme, že počet způsobů, jimiž tuto konstrukci můžeme provést, je

$$\sigma_n = \sum_{r=4}^{n-2} (P_r^{(n)} + Q_r^{(n)}).$$

Ze vztahu $Q_r^{(n)} = P_{n-r+2}^{(n)}$ plyne

$$\sigma_n = 2\sum_{r=4}^{n-4} P_r^{(n)} = 12 \sum_{r=4}^{n-4} \frac{1}{r - 1}\binom{2r - 6}{r - 4} \cdot \binom{2n - 2r - 2}{n - r - 4}$$

a tedy $f_n = \frac{1}{4}n\sigma_n$, c. b. d.

Závěrem uvádíme ještě dvě otevřené otázky:

I. Pro která k existuje (při daném n) soustava $S_k^{(n)}$?

II. Odhadněte počet úhlopříček v soustavě $S_k^{(n)}$.

LITERATURA

[1] *O. Rodrigues*: Sur le nombre de manières d'effectuer un produit de n facteurs. Journal de mathématiques pures et appliquées III (1838), str. 549.

[2] *E. Netto*: Lehrbuch der Combinatorik, 2. vydání z r. 1927 doplnili *V. Brun* a *Th. Skolem.*

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

POJEM A EXISTENCE GEODETIKY V METRICKÝCH PROSTORECH

VĚRA KOPECKÁ, Praha.

(Došlo dne 15. března 1955.) DT: 519.54

Hlavním cílem tohoto článku je důkaz existence geodetiky mezi dvěma body v metrickém prostoru, jehož každá uzavřená omezená část je kompaktní (věta 4). Přitom všechny základní pomocné pojmy jsou zde definovány. Důkaz existence geodetiky spočívá na zavedení pomocné metriky, která v podstatě vyjadřuje délku hledané geodetiky. Článek je myšlen jako úvodní k dalšímu článku, který bude pojednávat o geodetikách v jistých speciálních prostorech.

Naším prvým úkolem bude zavést jisté pojmy, se kterými budeme dále pracovat, a dokázat pro ně jisté vztahy.

Úmluva 1. Vzdálenost dvou bodů a, b v metrickém prostoru P budeme značit $|a, b|$.

Definice 1. *Křivkou φ v intervalu J* budeme nazývat spojité zobrazení intervalu J do metrického prostoru P takové, že v žádném intervalu $J_1 \subset J$ není φ konstantní.

Je-li J uzavřený interval $\langle \alpha, \beta \rangle$, pak bodu $\varphi(\alpha)$ (resp. $\varphi(\beta)$) budeme říkat *počáteční* (resp. *koncový*) *bod* křivky φ.

Definice 2. Budiž φ křivka v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ $(-\infty < \alpha < \beta < +\infty)$. *Dělením D intervalu* $\langle \alpha, \beta \rangle$ nazveme každou konečnou posloupnost čísel $\{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, pro kterou $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta$.

Znakem $S(D) = S_\varphi(D)$ budeme značit součet

$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i)\,,\ \varphi(t_{i-1})|\,.$$

Supremum všech čísel $S(D)$ pro všechna možná dělení D intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ nazveme *délkou křivky* φ a tuto délku budeme značit $L(\alpha, \beta) = L_\varphi(\alpha, \beta)$.

Tedy $L_\varphi(\alpha, \beta) = \sup\limits_D S(D) > 0$.

Poznámka 1. Může ovšem být $L(\alpha, \beta) = +\infty$. Je-li $L(\alpha, \beta) < +\infty$, budeme říkat, že křivka φ má konečnou délku (v $\langle \alpha, \beta \rangle$).

Poznámka 2. Je zřejmé, že pro každou křivku φ v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ platí $L(\alpha, \beta) \geqq |\varphi(\alpha), \varphi(\beta)|$.

Věta 1. *Budiž $\alpha < \beta < \gamma$ a budiž φ křivka v intervalu $\langle \alpha, \gamma \rangle$. Potom platí* $L(\alpha, \gamma) = L(\alpha, \beta) + L(\beta, \gamma)$.

Důkaz: Budiž D libovolné dělení intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a D' libovolné dělení intervalu $\langle \beta, \gamma \rangle$. Je tedy $S(D) + S(D') \leqq L(\alpha, \gamma)$, neboli $S(D) \leqq L(\alpha, \gamma) - S(D')$. Tato nerovnost platí při pevném D' pro všechna D, je tedy $L(\alpha, \beta) \leqq (L(\alpha, \gamma) - S(D')$ neboli $S(D') \leqq L(\alpha, \gamma) - L(\alpha, \beta)$. To platí pro všechna D', tedy je $L(\beta, \gamma) \leqq L(\alpha, \gamma) - L(\alpha, \beta)$, t. j.

$$L(\alpha, \beta) + L(\beta, \gamma) \leqq L(\alpha, \gamma) \tag{1}$$

(přesně vzato odvození je správné jen pro $L(\alpha, \gamma) < +\infty$, ale výsledek je evidentní i pro $L(\alpha, \gamma) = +\infty$).

Naopak budiž D libovolné dělení intervalu $\langle \alpha, \gamma \rangle$ a D' dělení, které vznikne z D tím, že k němu přidáme dělicí bod β. Je pak $S(D) \leqq S(D') \leqq L(\alpha, \beta) + L(\beta, \gamma)$ pro každé D, tedy platí

$$L(\alpha, \gamma) \leqq L(\alpha, \beta) + L(\beta, \gamma)\,. \tag{2}$$

Z nerovností (1) a (2) plyne tvrzení naší věty.

Věta 2. *Budiž φ křivka konečné délky v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Definujme $L(\alpha, \alpha) = 0$. Pak $L(\alpha, \sigma)$ je spojitá rostoucí funkce proměnné σ pro $\sigma \in \langle \alpha, \beta \rangle$.*

Důkaz: Napřed dokážeme, že $L(\alpha, \sigma)$ je funkce rostoucí. Za tím účelem zvolme γ a δ tak, aby platilo $\alpha \leqq \gamma < \delta \leqq \beta$ a dokažme, že je $L(\gamma, \delta) > 0$. Je-li $\varphi(\gamma) \neq \varphi(\delta)$, plyne tato nerovnost ihned z poznámky 2. Je-li však $\varphi(\gamma) = \varphi(\delta)$, existuje číslo τ tak, že platí $\gamma < \tau < \delta$ a $\varphi(\gamma) \neq \varphi(\tau)$ (podle naší definice křivky není totiž zobrazení φ konstantní v žádném intervalu). Protože $\{\gamma, \tau, \delta\}$ je dělení intervalu $\{\gamma, \delta\}$, je $L(\gamma, \delta) \geqq |\varphi(\gamma), \varphi(\tau)| + |\varphi(\tau), \varphi(\delta)|$, tedy opět $L(\gamma, \delta) > 0$. Podle věty 1 je ovšem $L(\alpha, \sigma) < +\infty$ pro každé $\sigma \in \langle \alpha, \beta \rangle$, neboť křivka φ má, podle předpokladu, konečnou délku. Z věty 1 a nerovnosti $L(\gamma, \delta) > 0$ plyne dále $L(\alpha, \delta) = L(\alpha, \gamma) + L(\gamma, \delta) > L(\alpha, \gamma)$. Tím je tvrzení dokázáno.

Abychom dokázali, že funkce $L(\alpha, \sigma)$ je spojitá, zvolme číslo σ_0 tak, aby pla-platilo $\alpha \leqq \sigma_0 < \beta$. Protože funkce $L(\sigma_0, \sigma)$, definovaná pro σ z intervalu $\langle \sigma_0, \beta \rangle$, je rostoucí, existuje $\lim\limits_{\sigma \to \sigma_0} L(\sigma_0, \sigma) = B$. Dokážeme, že je $B = 0$. Zvolme tedy $\varepsilon > 0$ a dále $\sigma_1 > \sigma_0$ tak, aby bylo $L(\sigma_0, \sigma_1) - B \leqq \varepsilon$ (což zřejmě je možno). Dále zvolme $\tau \in (\sigma_0, \sigma_1)$ tak, aby pro každé σ z intervalu $\langle \sigma_0, \tau \rangle$ platilo $|\varphi(\sigma), \varphi(\sigma_0)| \leqq \varepsilon$ (existence takového τ plyne ze spojitosti φ). Budiž nyní D libovolné dělení intervalu $\langle \sigma_0, \sigma_1 \rangle$. Přidáním bodu τ k dělení D vznikne dělení $D' = \{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$, kde $\tau_0 = \sigma_0$, $\tau_n = \sigma_1$ a $\tau_1 \leqq \tau$. Protože $L(\sigma_0, \tau_1) \geqq B$, platí podle věty 1 $L(\tau_1, \sigma_1) = L(\sigma_0, \sigma_1) - B - (L(\sigma_0, \tau_1) - B) \leqq \varepsilon$. Je tedy

$$S(D) \leqq S(D') = |\varphi(\tau_1), \quad \varphi(\tau_0)| + \sum_{i=2}^{n} |\varphi(\tau_i), \quad \varphi(\tau_{i-1})| \leqq \varepsilon + L(\tau_1, \sigma_1) \leqq 2\varepsilon \text{ pro}$$

každé dělení D, tedy je $L(\sigma_0, \sigma_1) \leqq 2\varepsilon$. Odtud plyne snadno $\lim\limits_{\sigma \to \sigma_0+} L(\sigma_0, \sigma) = 0$ a podle věty 1 dostaneme ihned $\lim\limits_{\sigma \to \sigma_0+} L(\alpha, \sigma) = L(\alpha, \sigma_0)$.

Obdobně provedeme důkaz pro spojitost zleva.

Definice 3. Budiž φ křivka v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Budeme říkat, že φ *má za parametr oblouk*, platí-li $L_\varphi(\gamma, \delta) = \delta - \gamma$, kdykoli $\alpha \leqq \gamma < \delta \leqq \beta$.

Snadno nahlédneme, že na každé rektifikace schopné křivce lze zavésti parametr s tak, že tento parametr je oblouk. Přesně to vyjadřuje

Věta 3. *Budiž φ rektifikace schopná křivka v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Budiž f inversní funkce k funkci $L_\varphi(\alpha, \sigma)$ proměnné σ a položme $\psi(x) = \varphi(f(x))$ pro x z intervalu $\langle 0, L_\varphi(\alpha, \beta) \rangle$. Potom je ψ křivka v intervalu $\langle 0, L_\varphi(\alpha, \beta) \rangle$, která má za parametr oblouk.*

Důkaz: Funkce f (jejíž existenci zaručuje věta 2) zřejmě udává vzájemně jednoznačné zobrazení všech dělení intervalu $\langle 0, L_\varphi(\alpha, \beta) \rangle$ na všechna dělení intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Odtud plyne snadno, že platí $L_\psi(0, L_\varphi(\alpha, \beta)) = L_\varphi(\alpha, \beta)$. Stejně se dokáže, že platí $L_\psi(x, y) = L_\varphi(f(x), f(y)) = L_\varphi(\gamma, \delta)$, kde $L_\varphi(\alpha, \gamma) = x$, $L_\varphi(\alpha, \delta) = y$, tedy dle věty 1 $L_\psi(x, y) = L_\varphi(\alpha, \delta) - L_\varphi(\alpha, \gamma) = y - x$ (pokud $0 \leqq x < y \leqq L_\varphi(\alpha, \beta)$).

Definice 4. Nechť a, b jsou dva body z metrického prostoru P. O křivce φ v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ budeme říkat, že je *geodetickou křivkou (geodetikou) mezi body a, b*, když a (resp. b) je počátečním (resp. koncovým) bodem této křivky, a když tato křivka má ze všech křivek této vlastnosti nejmenší délku.

Naším prvým úkolem bude zaručit existenci geodetiky mezi dvěma body alespoň v některých důležitých případech. Hlavním cílem tohoto článku je důkaz této věty:

Věta 4. *Budiž U metrický prostor, jehož každá uzavřená omezená část je kompaktní (na př. uzavřená část n-dimensionálního kartézského prostoru). Lze-li dva různé body a, $b \in U$ spojit křivkou konečné délky, pak existuje v U geodetika mezi body a, b.*

Důkaz této věty vyžaduje zavedení řady pojmů a odvození několika pomocných vět.

Definice 5. Mějme metrický prostor P a kladné číslo ε. Potom *ε-řetězcem* spojujícím body a, $b \in P$ nazýváme každou konečnou posloupnost bodů $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, splňující tyto podmínky:

a) $x_i \in P$ pro $i = 0, 1, 2, \ldots, n$,

b) $|x_{i-1}, x_i| \leqq \varepsilon$ pro $i = 0, 1, 2, \ldots, n$,

c) $x_0 = a$, $x_n = b$.

Věta 5. *Budiž P souvislý metrický prostor a nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pak každé dva body $a, b \in P$ lze spojit jistým ε-řetězcem.*

Důkaz: Budiž R souhrn bodů z P, které lze s bodem a spojit ε-řetězcem. Pak platí:

a) R je množina otevřená v P, neboť je-li $x \in P$, je $O(x, \varepsilon) \subset R$ ($O(x, \varepsilon)$ je kulové okolí bodu x o poloměru ε),

b) R je množina uzavřená v P, neboť je-li $\{x_n\}$ posloupnost bodů z R, konvergující k bodu x, potom existuje přirozené číslo n_0 tak, že je $|x_{n_0}, x| \leqq \varepsilon$, tedy je $x \in R$.

Množina R je neprázdná (je $a \in R$), otevřená i uzavřená v P, tedy nutně $R = P$, neboť P je prostor souvislý.

Definice 6. Je-li $N = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ libovolná konečná posloupnost bodů ze souvislého metrického prostoru P, položme $|N| = \sum_{i=1}^{n} |x_{i-1}, x_i|$. Infimum všech čísel $|N|$, kde N probíhá všechny ε-řetězce spojující body $a, b \in P$ nazveme *ε-vzdáleností bodů a, b* a budeme ji značit $\varrho_\varepsilon(a, b)$.

Tedy $\varrho_\varepsilon(a, b) = \inf\limits_{N} |N|$.

Poznámka 3. Je ovšem

$$\varrho_\varepsilon(a, b) \geqq |a, b|. \tag{3}$$

Věta 6. *ϱ_ε představuje v P jistou metriku.*

Důkaz: a) Vždy je $\varrho_\varepsilon(a, b) \geqq 0$ a $\varrho_\varepsilon(a, b) = 0$ tehdy a jen tehdy, je-li $a = b$. (Plyne z (3) a z definice $\varrho_\varepsilon(a, b)$.)

b) Platí $\varrho_\varepsilon(a, b) = \varrho_\varepsilon(b, a)$. (Zřejmé.)

c) Pro každou trojici bodů $a, b, c \in P$ platí nerovnost $\varrho_\varepsilon(a, b) \leqq \varrho_\varepsilon(a, c) + \varrho_\varepsilon(c, b)$. (Budiž $\eta > 0$ a $N_1 = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (resp. $N_2 = \{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m\}$) ε-řetězec spojující body a, c (resp. c, b) tak, že $|N_1| \leqq \varrho_\varepsilon(a, c) + \frac{\eta}{2}$ (resp. $|N_2| \leqq \varrho_\varepsilon(c, b) + \frac{\eta}{2}$). Potom $N = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ je ε-řetězec spojující body a, b a platí $|N| = |N_1| + |N_2|$. Je tedy $\varrho_\varepsilon(a, b) \leqq |N| \leqq \varrho_\varepsilon(a, c) + \varrho_\varepsilon(c, b) + \eta$. Tato nerovnost platí pro všechna η, tedy skutečně je $\varrho_\varepsilon(a, b) \leqq \varrho_\varepsilon(a, c) + \varrho_\varepsilon(c, b)$.)

Je tedy ϱ_ε metrikou v P.

Poznámka 4. Je zřejmé, že pro $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ platí $\varrho_{\varepsilon_1}(a, b) \geqq \varrho_{\varepsilon_2}(a, b)$. Při libovolných $a, b \in P$ existuje tedy vlastní nebo nevlastní $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \varrho_\varepsilon(a, b)$; tuto limitu označíme $\varrho(a, b)$. Je tedy $0 \leqq \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \varrho_\varepsilon(a, b) = \varrho(a, b) \leqq +\infty$.

Úmluva 2. Předpokládejme až do konce tohoto pojednání, že prostor P má tyto vlastnosti:

a) P je souvislý metrický prostor, který je kompaktní (tedy P je kontinuum);

b) pro pevná $a, b \in P$ je $\varrho_\varepsilon(a, b)$ omezenou funkcí proměnné ε neboli $\varrho(a, b) < < +\infty$ pro $a, b \in P$.

Můžeme tedy vyslovit tuto definici:

Definice 7. Nechť jsou dány dva body $a, b \in P$. Potom limitu $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \varrho_\varepsilon(a, b) = = \varrho(a, b)$ nazveme *vlastní vzdáleností bodů a, b.*

Poznámka 5. Je $\varrho(a, b) \geqq |a, b|$ (viz poznámku 3).

Věta 7. *Vlastní vzdálenost ϱ představuje v P metriku.*

Důkaz: a) Vždy je $\varrho(a, b) \geqq 0$ a $\varrho(a, b) = 0$ tehdy a jen tehdy, je-li $a = b$. (Je $\varrho_\varepsilon(a, b) \geqq 0$, tedy podle poznámky 4 a definice $\varrho(a, b)$ je také $\varrho(a, b) \geqq \geqq 0$ a je-li $a \neq b$, potom je $\varrho(a, b) \geqq \varrho_\varepsilon(a, b) > 0$.)

b) Platí $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$. (Zřejmé.)

c) Pro každou trojici bodů a, b, $c \in P$ platí nerovnost $\varrho(a, b) \leqq \varrho(a, c) + + \varrho(c, b)$. (Tuto nerovnost dostaneme okamžitě přechodem k limitě pro $\varepsilon \to 0+$ v nerovnosti $\varrho_\varepsilon(a, b) \leqq \varrho_\varepsilon(a, c) + \varrho_\varepsilon(c, b)$ (viz větu 6).)

Je tedy ϱ metrikou v P.

Poznámka 6. Metrika $\varrho(a, b)$ nemusí být ekvivalentní s metrikou $|a, b|$. Na příkladě lze ukázat, že funkce $\varrho(a, b)$ na prostoru P nemusí být omezená; též se může stát, že prostor P s metrikou ϱ je sice omezený, ale přes to není kompaktní.

Věta 8. *Budiž $\varrho(a, b) = s > 0$, $s_1 > 0$, $s_2 > 0$, $s_1 + s_2 = s$. Pak existuje $c \in P$ tak, že platí $\varrho(a, c) = s_1$, $\varrho(c, b) = s_2$.*

Důkaz: Existenci bodu c dokážeme tak, že tento bod sestrojíme.

Budiž tedy n přirozené číslo vyhovující vztahu $\dfrac{1}{n} < s_2$. Položme $\eta = \dfrac{1}{n}$ a zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo $\varepsilon < \eta$ a $s - \eta < \varrho_\varepsilon(a, b)$. Je $\varrho_\varepsilon(a, b) \leqq \varrho(a, b) < < s + \eta$, tedy existuje ε-řetězec $N = \{y_0, y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ spojující body a, b tak, že platí $s - \eta < |N| < s + \eta$. Je tedy $|N| > s - \dfrac{1}{n} > s - s_2 = s_1$. Rozdělme nyní N na dva řetězce $N_1^{(k)} = \{y_0, y_1, \ldots, y_k\}$, $N_2^{(k)} = \{y_k, y_{k+1}, \ldots, y_m\}$. Platí tedy rovnice $|N| = |N_1^{(k)}| + |N_2^{(k)}|$. S rostoucím indexem k neklesá $|N_1^{(k)}|$ a je $|N_1^{(k)}| = 0 < s_1$ pro $k = 0$, $|N_1^{(k)}| = |N| > s_1$ pro $k = m$. Existuje tedy první index k tak, že je $|N_1^{(k)}| \geqq s_1$. Je tedy $|N_1^{(k-1)}| < s_1$, a protože je $|y_{k-1}, y_k| \leqq \varepsilon$, je $|N_1^{(k)}| \leqq |N_1^{(k-1)}| + \varepsilon < s_1 + \varepsilon < s_1 + \eta$, tedy je $s_1 \leqq |N_1^{(k)}| < < s_1 + \eta$. Dále je $|N_2^{(k)}| = |N| - |N_1^{(k)}| \leqq s + \eta - s_1 = s_2 + \eta$. Označme bod y_k znakem x_n (konstrukce bodu y_k závisí na původně zvoleném n). Je pak $\varrho_\eta(a, x_n) \leqq \varrho_\varepsilon(a, x_n) \leqq |N_1^{(k)}| \leqq s_1 + \eta$, $\varrho_\eta(x_n, b) \leqq \varrho_\varepsilon(x_n, b) \leqq |N_2^{(k)}| \leqq s_2 + \eta$,

t. j. $\underset{n}{\varrho_1}(a, x_n) \leqq s_1 + \frac{1}{n}$, $\underset{n}{\varrho_1}(x_n, b) \leqq s_2 + \frac{1}{n}$. Vyberme nyní z posloupnosti $\{x_n\}$ posloupnost $\{x_{n_i}\}$ (tedy je $n_i \geqq i$), která má tyto vlastnosti:

a) existuje $c \in P$ tak, že je $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i} = c$ (tomuto požadavku lze vyhovět, neboť předpokládáme, že prostor P je kompaktní),

b) platí $|x_{n_i}, c| < \frac{1}{i}$.

Potom je $\underset{i}{\varrho_1}(a, c) \leqq \underset{i}{\varrho_1}(a, x_{n_i}) + \underset{i}{\varrho_1}(x_{n_i}, c) \leqq \underset{n_i}{\varrho_1}(a, x_{n_i}) + \frac{1}{i} \leqq s_1 + {}$ $+ \frac{1}{n_i} + \frac{1}{i} \leqq s_1 + \frac{2}{i}$. Podobně dostaneme nerovnost $\underset{i}{\varrho_1}(c, b) \leqq s_2 + \frac{2}{i}$. Přechodem k limitě pro $i \to \infty$ obdržíme pak nerovnosti $\varrho(a, c) \leqq s_1$, $\varrho(c, b) \leqq$ $\leqq s_2$.

Kdyby však na příklad platilo $\varrho(a, c) < s_1$, bylo by $s = \varrho(a, b) \leqq \varrho(a, c) +$ $+ \varrho(c, b) < s_1 + s_2 = s$, což je spor. Je tedy $\varrho(a, c) = s_1$, $\varrho(c, b) = s_2$.

Poznámka 7. Věta 8 platí zřejmě i pro $s_1 = 0$ nebo $s_2 = 0$.

Věta 9. *Nechť jsou dány dva různé body $a, b \in P$; jejich vlastní vzdálenost $\varrho(a, b)$ označme písmenem s. Budiž dále M spočetná část intervalu $\langle 0, s\rangle$, obsahující body $0, s$. Pak existuje zobrazení φ množiny M do P takové, že platí:*

a) $\varphi(0) = a$, $\varphi(s) = b$,

b) *je-li $x, y \in M$, potom je $\varrho(\varphi(x), \varphi(y)) = |x - y|$.*

Důkaz: Srovnejme M v posloupnost $M = \{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$, kde $a_0 = 0$, $a_1 = s$, a předpokládejme, že již máme definováno zobrazení φ množiny $M_n = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ $(n \geqq 1)$ do P tak, že platí:

a) $\varphi(0) = \varphi(a_0) = a$, $\varphi(s) = \varphi(a_1) = b$,

b) $\varrho(\varphi(a_i), \varphi(a_k)) = |a_i - a_k|$ pro $0 \leqq i < k \leqq n$.

(Pro $n = 1$ stačí zřejmě volit $\varphi(a_0) = a$, $\varphi(a_1) = b$.)

Nyní je třeba definovat $\varphi(a_{n+1})$. To provedeme takto:

Budiž α ten z bodů x množiny M_n, pro který je rozdíl $a_{n+1} - x \geqq 0$ nejmenší (body x, pro které je $a_{n+1} - x \leqq 0$ v M existují, na př. $x = a_0$). Podobně budiž β ten z bodů x množiny M_n, pro který je rozdíl $x - a_{n+1} \geqq 0$ nejmenší ($x -$ $- a_{n+1} \geqq 0$ na př. pro $x = a_1$). Položme nyní ve větě 8 $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $s_1 = a_{n+1} - \alpha \geqq 0$, $s_2 = \beta - a_{n+1} \geqq 0$, tedy $s = \beta - \alpha$. Položme dále $\varphi(a_{n+1}) = c$, kde c je bod prostoru P, o jehož existenci hovoří věta 8.

Nyní zbývá dokázat, že platí $\varrho(\varphi(a_{n+1}), \varphi(a_k)) = |a_{n+1} - a_k|$ pro $k = 0, 1,$ $2, \ldots, n$ (pro $k = n + 1$ tato rovnice zřejmě platí).

Z věty 8 plyne, že platí $\varrho(\varphi(\alpha), \varphi(a_{n+1})) = a_{n+1} - \alpha$, $\varrho(\varphi(a_{n+1}), \varphi(\beta)) = \beta -$ $- a_{n+1}$.

Předpokládejme nejprve, že je $a_k \leqq a_{n+1}$. Je tedy $\varrho(\varphi(a_k), \varphi(\beta)) = \beta - a_k$ (je $\beta \in M_n$) a $\varrho(\varphi(a_k), \varphi(\alpha)) = \alpha - a_k$ (je $\alpha \in M_n$). Dále je $\varrho(\varphi(a_k), \varphi(a_{n+1})) \leqq$

$\leqq \varrho(\varphi(a_k), \varphi(\alpha)) + \varrho(\varphi(\alpha), \varphi(a_{n+1})) = (\alpha - a_k) + (a_{n+1} - \alpha) = a_{n+1} - a_k$. Kdyby bylo $\varrho(\varphi(a_k), \varphi(a_{n+1})) < a_{n+1} - a_k$, bylo by $\varrho(\varphi(a_k), \varphi(\beta)) \leqq \varrho(\varphi(a_k), \varphi(a_{n+1})) + \varrho(\varphi(a_{n+1}), \varphi(\beta)) < (a_{n+1} - a_k) + (\beta - a_{n+1}) = \beta - a_k$, což je spor, tedy je $\varrho(\varphi(a_k), \varphi(a_{n+1})) = a_{n+1} - a_k$.

Podobně provedeme důkaz pro $a_k \geqq a_{n+1}$.

Věta 10. *Nechť jsou dány dva body $a, b \in P$ a nechť je $\varrho(a, b) = s > 0$. Pak existuje zobrazení φ intervalu $\langle 0, s \rangle$ do P takové, že platí $\varrho(\varphi(x), \varphi(y)) = |x - y|$ pro $x, y \in \langle 0, s \rangle$.*

Toto zobrazení určuje křivku, která má za parametr oblouk (tedy její délka je s) a tato křivka je geodetikou mezi body a, b.

Důkaz: Budiž M hustá spočetná množina v intervalu $\langle 0, s \rangle$, která obsahuje body $0, s$. Podle věty 9 existuje zobrazení ψ množiny M do prostoru P takové, že platí:

a) $\psi(0) = a, \quad \psi(s) = b$,

b) je-li $x, y \in M$, potom je $\varrho(\psi(x); \psi(y)) = |x - y|$.

Budiž $z \in \langle 0, s \rangle$. Zvolme libovolnou posloupnost $\{x_i\}$ bodů z M takovou, že platí $x_i \to z$ (taková posloupnost existuje, neboť množina M je podle předpokladu hustá). Pak posloupnost $\{\psi(x_i)\}$ je konvergentní (je totiž $|\psi(x_i), \psi(x_k)| \leqq \varrho(\psi(x_i), \psi(x_k)) = |x_i - x_k|$, tedy je posloupnost $\{\psi(x_i)\}$ cauchyovská; prostor P je však kompaktní, a tedy úplný). Je-li $\{y_i\}$ jiná posloupnost bodů množiny M, která rovněž konverguje k bodu z, platí pro ni $\lim\limits_{i\to\infty} \psi(x_i) = \lim\limits_{i\to\infty} \psi(y_i)$ (ze vztahu $\lim\limits_{i\to\infty} |x_i - y_i| = 0$ plyne totiž — viz poznámku 5 — $\lim\limits_{i\to\infty} |\psi(x_i), \psi(y_i)| = 0$). Položme $\varphi(z) = \lim\limits_{i\to\infty} \psi(x_i)$, kde $\{x_i\}$ je libovolná posloupnost bodů množiny M, která má limitu z. Zřejmě pro $z \in M$ je $\varphi(z) = \psi(z)$ (jednou z posloupností $\{x_i\}$ žádaných vlastností je posloupnost, pro kterou stále $x_i = z$). Vezměme nyní kladné číslo ε a dva body $u, v \in \langle 0, s \rangle$. Zvolme dále $x, y \in M$ tak, aby platilo $|u - x| \leqq \varepsilon$, $|v - y| \leqq \varepsilon$ a $|\varphi(u), \psi(x)| \leqq \varepsilon$, $|\varphi(v), \psi(y)| \leqq \varepsilon$ (lze volit x žádaných vlastností, neboť když $x_i \to u$, potom $\psi(x_i) \to \varphi(u)$ a podobně pro y). Potom platí $\varrho_\varepsilon(\varphi(u), \varphi(v)) \leqq \varrho_\varepsilon(\varphi(u), \psi(x)) + \varrho_\varepsilon(\psi(x), \psi(y)) + \varrho_\varepsilon(\psi(y), \varphi(v)) \leqq \varepsilon + \varrho(\psi(x), \psi(y)) + \varepsilon = 2\varepsilon + |x - y| \leqq 2\varepsilon + |x - u| + |u - v| + |v - y| \leqq 2\varepsilon + \varepsilon + |u - v| + \varepsilon = |u - v| + 4\varepsilon$. Pro $\varepsilon \to 0+$ dostáváme tedy $\varrho(\varphi(u), \varphi(v)) \leqq |u - v|$. Kdyby v tomto vztahu platilo znaménko nerovnosti, bylo by (předpokládejme $0 \leqq u \leqq v \leqq s$) $s = \varrho(\psi(0), \psi(s)) = \varrho(\varphi(0), \varphi(s)) \leqq \varrho(\varphi(0), \varphi(u)) + \varrho(\varphi(u), \varphi(v)) + \varrho(\varphi(v), \varphi(s)) < u + (v - u) + (s - v) = s$, což je spor. Je tedy $\varrho(\varphi(u), \varphi(v)) = |u - v|$ pro každou dvojici bodů x, y z intervalu $\langle 0, s \rangle$ a tím je zobrazení, které má požadovanou vlastnost, sestrojeno.

Protože je $|\varphi(x), \varphi(y)| \leqq \varrho(\varphi(x), \varphi(y))$ (viz (3) a definici $\varrho(a, b)$), je tím spíše $|\varphi(x), \varphi(y)| \leqq |x - y|$ (pro $x, y \in \langle 0, s \rangle$); odtud plyne ihned, že zobrazení φ je spojité (je dokonce stejnoměrně spojité). Protože, podle věty 7, je ϱ metrika, je pro $x \neq y$ také $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ (kdyby totiž bylo $\varphi(x) = \varphi(y)$, bylo by $\varrho(\varphi(x), \varphi(y)) = 0$, tedy $x - y = 0$, a tedy $x = y$), tedy zobrazení φ je prosté. Z toho vyplývá, že zobrazení φ není v žádném intervalu konstantní. Podle definice 1 určuje tedy vskutku zobrazení φ křivku.

Nyní máme dokázat, že křivka φ má za parametr oblouk. Budiž tedy $u = z_0 < z_1 < \ldots < z_n = v$ nějaké dělení intervalu $\langle u, v\rangle$, kde $0 \leqq u < v \leqq s$. Je $S(D) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(z_{i-1}), \varphi(z_i)| \leqq \sum_{i=1}^{n} \varrho(\varphi(z_{i-1}), \varphi(z_i)) = \sum_{i=1}^{n} (z_i - z_{i-1}) = v - u$. Délka $L(u, v)$ křivky φ v intervalu $\langle u, v\rangle$ je supremem čísel $S(D)$ pro všechna možná dělení D. Je tedy $L(u, v) \leqq v - u$.

Naproti tomu budiž $\varepsilon > 0$ a zvolme dělení D intervalu $\langle u, v\rangle$ tak, aby bylo $|\varphi(z_{i-1}), \varphi(z_i)| \leqq \varepsilon$ (to lze vzhledem k stejnoměrné spojitosti zobrazení φ). Potom je $N = \{\varphi(z_0), \varphi(z_1), \ldots, \varphi(z_n)\}$ ε-řetězec, a je $S(D) = |N| \leqq \varrho_\varepsilon(\varphi(u), \varphi(v))$. Je tedy $L(u, v) \geqq \varrho_\varepsilon(\varphi(u), \varphi(v))$. Limitním přechodem pro $\varepsilon \to 0+$ dostáváme $L(u, v) \geqq \varrho(\varphi(u), \varphi(v)) = v - u$.

Je tedy $L(u, v) = v - u$.

Zbývá dokázat, že φ je geodetikou mezi body a, b. Buď tedy ψ spojité zobrazení intervalu $\langle 0, s\rangle$ do prostoru P, které v žádném intervalu není konstantní a které splňuje vztahy $\psi(0) = a$, $\psi(s) = b$. Budiž $\varepsilon > 0$ a zvolme dělení $D = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ intervalu $\langle 0, s\rangle$ tak jemné, že je $|\psi(t_{i-1}), \psi(t_i)| \leqq \varepsilon$ (to lze vzhledem k stejnoměrné spojitosti zobrazení ψ). Pro délku L_ψ křivky ψ platí potom $L_\psi \geqq S(D) \geqq \varrho_\varepsilon(a, b)$ pro každé $\varepsilon > 0$, tedy je $L_\psi \geqq \varrho(a, b)$.

Pro křivku φ máme však $L_\varphi = s = \varrho(a, b)$.

Nyní již můžeme provést důkaz věty 4: Spojme body a, b prostoru U křivkou konečné délky, která je definovaná v intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, a nechť je $L_\varphi(\alpha, \beta) = K$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Budiž Q souhrn těch bodů prostoru U, které lze spojit s bodem a křivkou, jejíž délka je nejvýše rovna číslu K. Leží tedy obraz křivky φ v množině Q. Protože obraz křivky, jakožto spojitý obraz intervalu, je množina souvislá, je množina Q souvislá. Je to také množina omezená, protože pro každé $x \in Q$ platí podle poznámky 2 nerovnost $|a, x| \leqq K$. Uzávěr $\overline{Q}$ množiny Q je tedy množina uzavřená a omezená, tedy podle předpokladu věty 4 je $\overline{Q}$ množina kompaktní a jakožto uzávěr souvislé množiny je to opět množina souvislá.

Položme $P = \overline{Q}$. Dokážeme, že prostor P splňuje předpoklady, vyslovené v úmluvě 2. Dokázali jsme již, že prostor P je kompaktní a souvislý a že je tedy splněn bod a) této úmluvy. Zvolme nyní $u \in P$ a číslo $\varepsilon > 0$. V prostoru Q existuje bod x tak, že je $|x, u| < \varepsilon$, a dále existuje v něm křivka o koncových bodech a, x a délce nejvýše rovné K. Jako v důkaze předešlé věty zjistíme, že platí $\varrho_\varepsilon(a, x) \leqq K$ a tedy $\varrho_\varepsilon(a, u) \leqq K + \varepsilon$. Odtud plyne ihned, že pro libovolné dva body u, v prostoru P platí $\varrho_\varepsilon(u, v) \leqq \varrho_\varepsilon(u, a) + \varrho_\varepsilon(a, v) \leqq 2K + 2\varepsilon$

a tedy $\varrho(u, v) \leqq 2K < +\infty$. Tím je dokázáno, že platí též bod b) úmluvy 2. Podle věty 10 existuje tedy v prostoru P geodetika mezi body a, b. Tato křivka je ovšem geodetikou mezi body a, b i v prostoru U; její délka je totiž nejvýše rovna K a každá kratší křivka, spojující body a, b v prostrou U, ležela by tedy celá v prostoru Q.

(Zároveň je vidět, že $P = Q$; pro libovolné $t \in P$ je totiž $\varrho(a, t) \leqq K$, takže podle věty 10 existuje křivka o délce nejvýše rovné K, spojující bod a s bodem t. To však znamená, že $t \in Q$.)

Резюме

ПОНЯТИЕ И СУЩЕСТВОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Вера Копецкая (Věra Kopecká), Прага.

(Поступило в редакцю 15/III 1955 г.)

Содержанием статьи является доказательство следующей теоремы: *Пусть U — метрическое пространство, каждая замкнутая ограниченная часть которого компактна. Тогда при условии, что две различные точки a, $b \in U$ можно соединить кривой конечной длины, в U существует геодезическая между точками a, b.*

Доказательство этой теоремы опирается на лемму, которая обеспечивает существование геодезической в связном компактном метрическом пространстве P, для любых двух гочек a, b которого функция $\varrho_\varepsilon(a, b) = \inf \sum_{i=1}^{n} |x_{i-1}, x_i|$ (где $x_i \in P$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $|x_{i-1}, x_i| \leqq \varepsilon$) является ограниченной функцией переменного $\varepsilon > 0$.

Résumé

LA NOTION ET L'EXISTENCE DE LIGNE GÉODÉSIQUE DANS LES ESPACES METRIQUES

VĚRA KOPECKÁ, Praha.

(Reçu le 15 mars 1955.)

Le contenu de l'article précédent est la démonstration du théorème suivant:

Soit U l'espace métrique dont chaque sous-espace fermé, borné, est compact: alors, si l'on peut joindre deux points distincts $a, b \in U$ par une ligne d'une longueur finie, il existe dans U une ligne géodésique entre les points a, b.

La démonstration de ce théorème est fondée sur le lemme qui garantie l'existence d'une ligne géodésique dans un espace métrique, connexe et compact P, dans lequel pour chaques deux de ses points a, b est $\varrho_\varepsilon(a, b) = \inf \sum_{i=1}^{n} |x_{i-1}, x_i|$ (où $x_i \in P$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $|x_{i-1}, x_i| \leqq \varepsilon$) une fonction bornée d'une variable $\varepsilon > 0$.

O MONOTONNÍCH SPOJITÝCH FUNKCÍCH, JEJICHŽ GRAF MÁ MAXIMÁLNÍ DÉLKU

JIŘÍ BEČVÁŘ, Liberec.

(Došlo dne 21. dubna 1955.) DT: 517.51

Článek se zabývá existencí neklesajících resp. rostoucích spojitých funkcí v uzavřeném intervalu, jejichž graf má maximální možnou délku. Mimo to je ukázáno, že délku grafu spojité funkce lze definovat pomocí délek vepsaných polygonů na základě konvergence bod po bodu. Podrobnějšímu studiu vlastností spojitých funkcí, jejichž graf má maximální délku, bude věnována práce M. Nekvindy.

1. Graf funkce φ, spojité a neklesající v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, $a < b$, má podle běžné definice konečnou délku d, pro kterou zřejmě platí

$$\sqrt{(b-a)^2 + (\varphi(b) - \varphi(a))^2} \leqq d \leqq (b-a) + (\varphi(b) - \varphi(a)). \tag{1.1}$$

Jsou-li dána čísla a, b, a', b', $a < b$, $a' < b'$, je otázkou, zda vždy existuje v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ rostoucí spojitá funkce φ, pro kterou platí $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$ a jejíž graf má právě maximální možnou délku, t. j. rovnou číslu $(b-a) + (b'-a')$. Tento problém podle sdělení doc. Fr. Nožičky formuloval akademik E. Čech. Ukážeme v dalším, že takové funkce existují a že tvoří hustou množinu v prostoru spojitých neklesajících funkcí ψ, definovaných v intervalu $\langle a, b\rangle$ a splňujících podmínky $\psi(a) = a'$, $\psi(b) = b'$. Je zřejmé, že to stačí dokázat pro případ $a = a' = 0$, $b = b' = 1$.

2. Nechť J je uzavřený interval $\langle a, b\rangle$, $a < b$, a nechť C značí metrický prostor reálných funkcí, spojitých v J. Metrika v C je jako obvykle definována vztahem

$$\varrho(\varphi_1, \varphi_2) = \max_{x \in J} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| .$$

Budiž dále L množina těch funkcí $\lambda \in \mathsf{C}$, jejichž grafem je lomená čára, skládající se z konečného počtu úseček. Je-li $\lambda \in \mathsf{L}$, budeme říkat, že bod roviny o souřadnicích x, $\lambda(x)$, kde $x \in J$, je úhlovým bodem funkce λ, mění-li tam graf funkce λ směrnici. Mezi úhlové body funkce λ budeme počítat i body $[a, \lambda(a)]$, $[b, \lambda(b)]$. Dva různé úhlové body A, B funkce λ nazveme sousední, neexistuje-li jiný její úhlový bod, jehož x-ová souřadnice by ležela ostře mezi x-ovými souřadnicemi bodů A, B.

Každé funkci $\varphi \in \mathsf{C}$ přiřaďme množinu $L_\varphi \subset \mathsf{L}$, která se skládá právě z těch funkcí $\lambda \in \mathsf{L}$, jež splňují tuto podmínku: jestliže bod $[x, \lambda(x)]$ je úhlovým bodem funkce λ, potom platí $\lambda(x) = \varphi(x)$.

Grafy funkcí z L_φ jsou tedy tvořeny lomenými čarami, vepsanými grafu funkce φ.

Každé funkci $\lambda \in \mathsf{L}$ přiřaďme číslo $d(\lambda)$, definované ve smyslu elementární geometrie jako délka lomené čáry, která je grafem funkce λ. Tím je na množině L definován nezáporný funkcionál, který značme d.

Délka grafu libovolné funkce $\varphi \in \mathsf{C}$ se běžně definuje buď jako supremum čísel $d(\lambda)$ pro všechna $\lambda \in L_\varphi$ nebo jako limita čísel $d(\lambda_n)$, utvořených pro nějakou posloupnost funkcí $\lambda_n \in L_\varphi$, která splňuje podmínku, že norma dělení (t. j. maximum z rozdílů x-ových souřadnic dvou sousedních „dělicích" bodů funkce λ_n) konverguje k nule. Ukážeme v tomto odstavci, že při tomto druhém způsobu definice délky stačí předpokládat, že posloupnost funkcí $\lambda_n \in L_\varphi$ konverguje k φ v intervalu J bod po bodu.

Dokažme nejprve toto lemma:

Lemma 2.1. *Nechť $\varphi \in \mathsf{C}$ a nechť $\{\lambda_n\}$ je posloupnost funkcí z L_φ taková, že pro každé $x \in J$ platí $\lambda_n(x) \to \varphi(x)$. Pak posloupnost funkcí λ_n konverguje k φ v intervalu J stejnoměrně.*

Důkaz: Předpokládejme naopak, že konvergence není stejnoměrná. Pak existuje číslo $\varepsilon > 0$ a rostoucí nekonečná posloupnost indexů k taková, že ke každému k existuje bod $y_k \in J$ takový, že platí

$$|\lambda_k(y_k) - \varphi(y_k)| > \varepsilon\,. \tag{2.1}$$

Posloupnost $\{y_k\}$ má v J alespoň jeden hromadný bod y. Z posloupnosti $\{y_k\}$ lze pak zřejmě vybrat ryze monotonní posloupnost $\{y_l\}$ takovou, že $y_l \to y$ a že nadto buď pro všechna l platí $\lambda_l(y_l) < \varphi(y_l) - \varepsilon$ nebo pro všechna l platí $\lambda_l(y_l) > \varphi(y_l) + \varepsilon$. Posloupnost $\{y_l\}$ je nekonečná a pro všechny indexy l platí $y_l \neq y$. Předpokládejme dále, že $\{y_l\}$ je rostoucí a že pro všechna l platí

$$\lambda_l(y_l) < \varphi(y_l) - \varepsilon\,. \tag{2.2}$$

Zbylé tři možné případy se vyřídí podobně. Je pak $y \neq a$ a ze spojitosti funkce φ plyne, že existuje δ takové, že $0 < \delta \leqq y - a$ a že pro všechna $x \in (y - \delta, y\rangle$ platí

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{2.3}$$

Protože φ je v J omezená, existuje kladné číslo $K > 1$ takové, že pro všechna $x \in J$ je

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon K}{3}\,. \tag{2.4}$$

Konečně ježto $y_l \to y$ zleva, existuje l_0 takové, že pro všechna $l > l_0$ je

$$y - \frac{\delta}{K} < y_l < y\,. \tag{2.5}$$

Z (2.2), (2.3), (2.5) pro všechna $l > l_0$ plyne

$$\lambda_l(y_l) < \varphi(y) - \frac{2\varepsilon}{3}\,. \tag{2.6}$$

Dokažme nyní, že pro každý index $l > l_0$ je

$$\lambda_l(y) < \varphi(y) - \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{2.7}$$

Uvažme libovolné $l > l_0$. Pak z (2.2) plyne, že bod $Y_l = [y_l, \lambda_l(y_l)]$ není úhlovým bodem funkce λ_l. Nechť $U = X'X''$ je úsečka grafu funkce λ_l, procházející bodem Y_l, při čemž $X' = [x', \lambda_l(x')]$, $X'' = [x'', \lambda_l(x'')]$ jsou sousední úhlové body funkce λ_l. Je pak

$$\lambda_l(x') = \varphi(x')\,, \quad \lambda_l(x'') = \varphi(x'')\,, \quad x' < y_l < x''\,. \tag{2.8}$$

Označme ještě U_x množinu x-ových souřadnic bodů úsečky U. Rozeznávejme dva případy:

A. Úsečka U nemá kladnou směrnici. Pak pro všechna $x \in (y_l, y\rangle$, splňující podmínku $x \in U_x$, platí vzhledem k (2.6) vztah $\lambda_l(x) < \varphi(y) - \frac{2\varepsilon}{3}$. Odtud užitím (2.3) plyne, že pro tato x platí $\lambda_l(x) < \varphi(x) - \frac{\varepsilon}{3}$. Vzhledem k (2.8) je tedy nutně $x'' \geqq y$; platí tedy $\lambda_l(x) < \varphi(y) - \frac{2\varepsilon}{3}$ i pro $x = y$ a tedy tím spíš platí (2.7).

B. Úsečka U má kladnou směrnici s. Dokažme, že pak nutně $s < \frac{\varepsilon K}{3\delta}$. Předpokládejme totiž naopak, že platí $s \geqq \frac{\varepsilon K}{3\delta}$. Pak pro všechna $x \leqq y_l$, splňující podmínku $x \in U_x$, dostáváme $\lambda_l(x) = \lambda_l(y_l) + s(x - y_l) \leqq \lambda_l(y_l) + \frac{\varepsilon K}{3\delta}(x - y_l)$ a odtud dle (2.6)

$$\lambda_l(x) < \varphi(y) - \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon K}{3\delta}(x - y_l)\,. \tag{2.9}$$

Rozeznávejme nyní dva logicky možné případy:

a) $y - \delta < x \leqq y_l$. Je pak $x - y_l \leqq 0$ a tedy z (2.9) plyne $\lambda_l(x) < \varphi(y) - \frac{2\varepsilon}{3} = \left(\varphi(y) - \frac{\varepsilon}{3}\right) - \frac{\varepsilon}{3}$ a odtud dle (2.3)

$$\lambda_l(x) < \varphi(x) - \frac{\varepsilon}{3} < \varphi(x)\,.$$

b) $x \leqq y - \delta$. Upravme (2.9) takto:

$$\lambda_l(x) < \varphi(y) + \frac{\varepsilon K}{3\delta}\left(-\frac{2\delta}{K}\right) + \frac{\varepsilon K}{3\delta}(x - y_l).$$

Dle (2.5) odtud plyne

$$\lambda_l(x) < \varphi(y) + \frac{\varepsilon K}{3\delta}(y_l - y) + \frac{\varepsilon K}{3\delta}(x - y_l) = \varphi(y) + \frac{\varepsilon K}{3\delta}(x - y).$$

Odtud a z nerovnosti $x \leqq y - \delta$ dostáváme

$$\lambda_l(x) < \varphi(y) + \frac{\varepsilon K}{3\delta}(y - \delta - y) = \varphi(y) - \frac{\varepsilon K}{3},$$

což vzhledem k (2.4) dává opět $\lambda_l(x) < \varphi(x)$.

Dokázali jsme tedy v obou případech a), b), že pro všechna $x \leqq y_l$, $x \in U_x$, platí $\lambda_l(x) < \varphi(x)$. Speciálně tedy i pro $x = x'$. To je však ve sporu s (2.8). Tedy nemůže být $s \geqq \frac{\varepsilon K}{3\delta}$, což jsme chtěli ukázat. Nechť tedy $s < \frac{\varepsilon K}{3\delta}$. Pro všechna $x \in (y_l, y\rangle$, $x \in U_x$, platí pak

$$\lambda_l(x) = \lambda_l(y_l) + s(x - y_l) < \lambda_l(y_l) + \frac{\varepsilon K}{3\delta}(x - y_l). \tag{2.10}$$

Ježto dle (2.5) je $x - y_l < \frac{\delta}{K}$, plyne z (2.10) $\lambda_l(x) < \lambda_l(y_l) + \frac{\varepsilon}{3}$, což dle (2.6) dává $\lambda_l(x) < \varphi(y) - \frac{\varepsilon}{3}$. Odtud vzhledem k (2.3) dostáváme $\lambda_l(x) < \varphi(x)$ pro všechna naše x. Vzhledem k (2.8) musí tedy být $x'' > y$, tedy nerovnost $\lambda_l(x) < \varphi(y) - \frac{\varepsilon}{3}$ platí i pro $x = y$. Tím dostáváme opět (2.7).

Úhrnem jsme tedy pro všech nekonečně mnoho vybraných indexů $l > l_0$ dokázali platnost vztahu (2.7). Tento výsledek je však ve sporu s předpokladem věty, podle něhož $\lambda_l(y) \to \varphi(y)$. Tedy konvergence funkcí λ_n k φ je v J stejnoměrná.[1])

Nyní již můžeme dokázat tuto větu:

Věta 2.1. *Nechť jsou splněny předpoklady lemmatu* 2.1. *Označme $s(\varphi)$ supremum všech čísel $d(\lambda)$ pro všechna $\lambda \in L_\varphi$. Potom posloupnost čísel $d(\lambda_n)$ má limitu a ta je rovna číslu $s(\varphi)$.*

Důkaz: Zvolme libovolné číslo $s' < s(\varphi)$. Pak existuje funkce $\lambda \in L_\varphi$ taková, že $d(\lambda) > s'$. Její úhlové body buďte $U_0, U_1, \ldots, U_r$, jejich x-ové souřadnice $x_0, x_1, \ldots, x_r$. Budiž dále λ' libovolná funkce z L_φ. Utvořme z λ, λ' novou funkci $\bar{\lambda} \in \mathsf{L}$ takovou, že a) každý úhlový bod funkcí λ, λ' leží na grafu funkce $\bar{\lambda}$,

---

[1]) Lemma 2.1 lze dokázat též takto: Dá se dokázat že všechny funkce z L_φ jsou stejně spojité, a odtud už jak známo stejnoměrná konvergence posloupnosti $\{\lambda_n\}$ plyne.

b) každý úhlový bod funkce $\bar{\lambda}$ je úhlovým bodem alespoň jedné z funkcí λ, λ'. Funkce $\bar{\lambda}$ je tím jednoznačně určena a je pak zřejmě $\bar{\lambda} \in L_\varphi$. Dále platí

$$d(\bar{\lambda}) \geqq d(\lambda'), \quad d(\bar{\lambda}) \geqq d(\lambda) > s'. \tag{2.11}$$

Funkce $\bar{\lambda}$ vznikne z λ' „přidáním" bodů $U_0, U_1, \ldots, U_r$. Několikerým užitím trojúhelníkové nerovnosti v rovině dostáváme odtud

$$d(\bar{\lambda}) \leqq d(\lambda') + 2 \sum_{i=0}^{r} |\lambda(x_i) - \lambda'(x_i)| = d(\lambda') + 2 \sum_{i=0}^{r} |\varphi(x_i) - \lambda'(x_i)|. \tag{2.12}$$

Odtud dále plyne

$$d(\bar{\lambda}) - d(\lambda') \leqq 2(r + 1)\, \varrho(\varphi, \lambda'). \tag{2.13}$$

Volme nyní za λ' postupně funkce λ_n z naší posloupnosti. Dle lemmatu 2.1 platí $\varrho(\varphi, \lambda_n) \to 0$. Odtud, z (2.13) a z (2.11) plyne, že pro dost velká n bude $d(\lambda_n) > s'$. Tím je věta dokázána a tím zároveň i naše tvrzení o možnosti definovat délku shora zmíněným způsobem.

Dokažme v tomto odstavci ještě lemma, kterého užijeme v dalším odstavci:

Lemma 2.2. *Funkcionál d je na množině C zdola polospojitý.*

Důkaz: Nechť φ je libovolná funkce z C a nechť $d' < d(\varphi)$ je libovolné číslo. Máme dokázat, že pak platí $d(\psi) > d'$ pro každou funkci $\psi \in \mathsf{C}$ takovou, že $\varrho(\varphi, \psi)$ je dost malé. Zvolme funkce $\lambda \in L_\varphi$, $\lambda' \in L_\psi$, přitom nechť λ splňuje podmínku $d(\lambda) > d'$. Funkce λ nechť má úhlové body $U_0, \ldots, U_r$ s x-ovými souřadnicemi $x_0, \ldots, x_r$. Utvořme novou funkci $\bar{\lambda} \in \mathsf{L}$, která je jednoznačně určena tím, že a) každý úhlový bod funkce λ leží na jejím grafu, b) každý úhlový bod funkce λ', který nemá společnou x-ovou souřadnici se žádným úhlovým bodem funkce λ, leží na jejím grafu, c) každý její úhlový bod je úhlovým bodem alespoň jedné z funkcí λ, λ'. Podobně jako v důkazu věty 2.1 dostáváme pak

$$d' < d(\lambda) \leqq d(\bar{\lambda}) \leqq d(\lambda') + 2 \sum_{i=0}^{r} |\lambda(x_i) - \lambda'(x_i)| =$$
$$= d(\lambda') + 2 \sum_{i=0}^{r} |\varphi(x_i) - \lambda'(x_i)| \leqq d(\lambda') + 2(r + 1)\, \varrho(\varphi, \lambda') \leqq$$
$$\leqq d(\psi) + 2(r + 1)\, [\varrho(\varphi, \psi) + \varrho(\psi, \lambda')].$$

Odtud je vidět, že bude-li $\varrho(\varphi, \psi)$ dost malé, bude $d(\psi) > d'$, neboť k danému ψ můžeme volit λ' tak, aby $\varrho(\psi, \lambda')$ bylo libovolně malé. Tím je lemma dokázáno.

3. V tomto odstavci se vraťme k problému formulovanému v odst. 1. Nechť symboly C, L, L_φ mají týž význam jako dříve, omezme se však nyní až do konce na případ $J = \langle 0, 1 \rangle$. Nechť dále C' značí množinu těch funkcí $\varphi \in \mathsf{C}$, pro něž $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. M budiž množina těch funkcí z C', které jsou neklesající, a konečně M^* množina rostoucích funkcí z C'. Ve všech případech jde o metrické prostory.

V souhlase s (1.1) platí pro každou $\varphi \in \mathsf{M}$

$$\sqrt{2} \leqq d(\varphi) \leqq 2. \tag{3.1}$$

Definujme nyní: D je množina všech $\varphi \in \mathsf{M}$ takových, že $d(\varphi) = 2$, D^* je množina všech $\varphi \in \mathsf{M}^*$ takových že $d(\varphi) = 2$. V tomto odstavci ukážeme, jak lze užít Baireovy věty k důkazu tvrzení, že D je hustá v M, což je tvrzení poněkud slabší než to, které je vysloveno v odst. 1. K tomu uveďme několik poznámek. Především prostor C' je zřejmě úplný. Dále: prostory M, M^* nejsou kompaktní a prostor M^* není ani úplný. Naproti tomu snadno dokážeme toto lemma:

Lemma 3.1. *Prostor* M *je úplný.*

Důkaz: Vzhledem k úplnosti prostoru C' stačí dokázat, že M je uzavřená množina v C'. Mějme tedy posloupnost funkcí $\varphi_n \in \mathsf{M}$, které ve smyslu metriky v C' konvergují k funkci $\varphi \in \mathsf{C}'$. Je-li $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, pak pro všechna n je $\varphi_n(x_1) \leqq \varphi_n(x_2)$. Protože $\varphi_n(x_1) \to \varphi(x_1)$, $\varphi_n(x_2) \to \varphi(x_2)$, je i $\varphi(x_1) \leqq \varphi(x_2)$. Tedy $\varphi \in \mathsf{M}$ a M je tedy uzavřená v C, c. b. d.

Nyní můžeme přistoupit k důkazu našeho tvrzení:

Věta 3.1. *Množina* D *je hustá v* M.

Důkaz: Definujme množiny $A_n \subset \mathsf{M}$ takto: A_n je množina všech funkcí $\varphi \in \mathsf{M}$ takových, že

$$d(\varphi) \leqq 2 - \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Zřejmě pro každé n platí $A_n \subset A_{n+1}$, $A_n \neq A_{n+1}$. Ježto funkcionál d je dle lemmatu 2.2 na M polospojitý zdola, jsou jak známo všechny množiny A_n uzavřené v M. Definujme $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$. Dokažme, že A_n jsou řídké v M a tedy že množina A je první kategorie v M. Protože každá A_n je uzavřená, stačí dokázat, že pro každé n je množina $\mathsf{M} - A_n$ hustá v M. Ježto však zřejmě množina $\mathsf{M} \cap \mathsf{L}$ je hustá v M, stačí k tomu dokázat, že $(\mathsf{M} \cap \mathsf{L}) - A_n$ je hustá v A_n. Nechť tedy $\varphi \in A_n$ a nechť $\varepsilon > 0$ je dané číslo. Pak existuje funkce $\bar{\lambda} \in L_\varphi$ taková, že $\varrho(\bar{\lambda}, \varphi) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Funkce $\bar{\lambda}$ je neklesající. Nechť α resp. β je minimální resp. maximální hodnota směrnic úseček, které tvoří graf funkce $\bar{\lambda}$. Čísla α, β jsou konečná a platí $0 \leqq \alpha \leqq \beta$. Sestrojme funkci $\lambda \in \mathsf{L} \cap \mathsf{M}$, jejíž graf se skládá ze dvou úseček, jejichž společný bod má x-ovou souřadnici $c \in (0, 1)$, při čemž a) v intervalu $\langle 0, c \rangle$ směrnice grafu funkce λ je α', $0 \leqq \alpha' \leqq \alpha$, b) v intervalu $\langle c, 1 \rangle$ směrnice grafu funkce λ je $\beta' \geqq \beta$, c) $d(\lambda) > 1 - \frac{1}{2^n}$.
Rozdělme nyní každou úsečku grafu funkce $\bar{\lambda}$ na m stejných dílů. Každou takovou částečnou úsečku (pokud není vodorovná, kdy ji ponecháme) na-

hraďme dvěma úsečkami, vycházejícími z jejích koncových bodů, z nichž jedna má směrnici α', druhá β'; jejich délku volme tak, aby vznikl graf nějaké funkce z $\mathsf{L} \cap \mathsf{M}$. Je vidět, že při dost velkém m dostaneme graf jisté funkce $\lambda' \in \mathsf{L} \cap \mathsf{M}$, pro kterou platí $\varrho(\lambda', \bar{\lambda}) < \frac{1}{2}\varepsilon$, $d(\lambda') = d(\lambda)$. Odtud plyne $\lambda' \in (\mathsf{L} \cap \mathsf{M}) - A_n$ a dále

$$\varrho(\lambda', \varphi) \leqq \varrho(\bar{\lambda}, \varphi) + \varrho(\bar{\lambda}, \lambda') < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Tím jsme dokázali, že $(\mathsf{M} \cap \mathsf{L}) - A_n$ je množina, hustá v A_n. Tedy A je první kategorie v M. Avšak M je dle lemmatu 3.1 úplný prostor. Tedy dle Baireovy věty množina $\mathsf{M} - A$ je hustá v M. Avšak zřejmě $\mathsf{M} - A = \mathsf{D}$. Tím je věta dokázána.

Ježto $\mathsf{M} \neq \emptyset$, plyne z věty 3.1 speciálně existence funkcí z M, jejichž graf má délku 2.

4. Dokažme nyní v plném rozsahu tvrzení, uvedené v odst. 1. V našem důkazu bude zároveň zahrnuta konstrukce rostoucí spojité funkce z C', jejíž graf má délku 2. Tuto konstrukci lze snadno doplnit tak, aby byla efektivní.

Věta 4.1. *Množina* D^* *je hustá v* M.

Důkaz: Budiž $\varphi \in \mathsf{M}$, $\varepsilon > 0$. Snadno se dokáže, že pak existuje funkce $\lambda \in L_\varphi \cap \mathsf{M}^*$ taková, že $\varrho(\lambda, \varphi) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Funkce λ je rostoucí, jejím grafem je stoupající lomená čára. Rozdělme nyní každou úsečku grafu funkce λ na m stejných dílů. Každou takovou částečnou úsečku AB (A je levý, B pravý její koncový bod) nahraďme dvěma úsečkami AC, BC se společným koncem C, a to tak, že AC je rovnoběžná s osou x, BC s osou y. Úhrnem dostaneme lomenou čáru λ^* (která ovšem není grafem žádné funkce), pro jejíž každý bod $[x, y]$ platí $y \leqq \lambda(x)$. Při dosti velkém m dosáhneme toho, že nadto pro každý bod $[x, y]$ čáry λ^* platí $\lambda(x) - y < \frac{1}{2}\varepsilon$. Uvažme nyní libovolnou vodorovnou úsečku čáry λ^*. Nechť její konce jsou body $[a, a']$, $[b, a']$, $0 \leqq a < b \leqq 1$, $a' = \lambda(a)$ a nechť na ni zprava navazuje úsečka rovnoběžná s osou y s koncovými body $[b, a']$, $[b, b']$, $b' = \lambda(b) > a'$. V intervalu $\langle a, b\rangle$ nyní zkonstruujeme funkci ψ, která tam bude rostoucí, jejíž graf tam bude mít délku $(b - a) + (b' - a')$, pro kterou bude platit

$$\psi(a) = a', \quad \psi(b) = b' \tag{4.1}$$

a která bude pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ vyhovovat vztahům

$$\psi(x) \leqq \lambda(x)\,, \qquad \lambda(x) - \psi(x) < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,. \tag{4.2}$$

Označme $\delta = (b - a) + (b' - a')$. Body $[a, a']$, $[b, b']$ a půlící bod úsečky, kterou tyto dva body určují, nazveme dělicími body řádu 0. (Dva dělicí body nazveme sousední v podobném smyslu, jako jsme to dělali dříve u úhlových bodů.) Úsečka $[a, a']$ $[b, b']$ je v intervalu $\langle a, b\rangle$ grafem funkce, kterou označme ψ_0. Každou úsečku, která je určena dvěma sousedními dělicími body A, B řádu 0, nahraďme dvěma úsečkami se společným koncem C, které vycházejí z bodů A resp. B, při čemž bod C je takový, že jeho x-ová souřadnice leží ostře mezi x-ovými souřadnicemi bodů A, B, podobně i y-ová souřadnice leží ostře mezi y-ovými souřadnicemi bodů A, B a bod C leží pod grafem funkce ψ_0. Nadto ještě volme bod C tak, aby úhrnná délka takto zkonstruované lomené čáry byla větší než $\delta(1 - \frac{1}{2})$. Tato lomená čára je grafem v $\langle a, b\rangle$ rostoucí spojité funkce, kterou označme ψ_1. Dělicími body řádu 1 nazveme dělicí body řádu 0 a dále body, které půlí úsečky, tvořící graf funkce ψ_1. Pro každé dva sousední dělicí body řádu 1 proveďme konstrukci zcela analogickou jako v předchozím případě, a to tak, aby úhrnná délka lomené čáry, kterou tak pro interval $\langle a, b\rangle$ dostaneme, byla větší než $\delta(1 - \frac{1}{2^2})$. Tato čára je v $\langle a, b\rangle$ grafem funkce, kterou označme ψ_2. Dále definujeme dělicí body řádu 2, konstruujeme funkci ψ_3, jejíž graf má délku větší než $\delta\left(1 - \frac{1}{2^3}\right)$ atd. Obecně graf funkce ψ_n nechť má délku větší než $\delta\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ (zřejmě vždy má délku $< \delta$). Úhrnem dostaneme v $\langle a, b\rangle$ posloupnost rostoucích funkcí ψ_n, jejichž grafy jsou lomené čáry. Označme D množinu dělicích bodů všech řádů, D_x resp. D_y množinu x-ových resp. y-ových souřadnic bodů z D. Zřejmě D_x je hustá v $\langle a, b\rangle$, D_y v $\langle a', b'\rangle$. Pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ je zřejmě posloupnost čísel $\psi_n(x)$ nerostoucí a zdola omezená číslem $\lambda(x) - \varepsilon/2$. Definujme tedy funkci ψ v $\langle a, b\rangle$ vztahem

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) \,. \tag{4.3}$$

Poznamenejme, že je-li $[x, y]$ dělicí bod řádu n, pak leží na grafu každé funkce ψ_m s $m \geqq n$. Dále zřejmě každý bod $[x, y] \in D$ leží na grafu funkce ψ, t. j. grafy funkcí ψ_n jsou polygony, vepsané grafu funkce ψ.

Dokažme, že ψ je v $\langle a, b\rangle$ rostoucí. Nechť $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$. Pak existuje dělicí bod $[x, y] \in D$ takový, že $x_1 < x < x_2$. Nechť $[x, y]$ je řádu n (a tedy i všech vyšších). Pak $y = \psi_n(x)$ a ježto ψ_n je rostoucí, je $\psi_n(x_1) < \psi_n(x) = y < \psi_n(x_2)$. Je však $y = \psi(x)$ a ježto posloupnost $\{\psi_n(x_1)\}$ je nerostoucí, máme dle (4.3) $\psi(x_1) \leqq \psi_n(x_1) < \psi_n(x) = \psi(x)$. S druhé strany pro každé $m \geqq n$ je $\psi(x) = \psi_m(x) < \psi_m(x_2)$, tedy v limitě i $\psi(x) \leqq \psi(x_2)$. Úhrnem tedy $\psi(x_1) < \psi(x_2)$, jak jsme chtěli dokázat.

Vztahy (4.1), (4.2) jsou z konstrukce zřejmé. Snadno je vidět, že půlením úseček v naší konstrukci jsme dosáhli toho, že (4.3) platí v $\langle a, b\rangle$ stejnoměrně; tedy ψ je v $\langle a, b\rangle$ spojitá. Můžeme tedy psát $\psi_n \in L_\psi$ pro každé n. Podle věty 2.1 tedy $d_{\langle a, b\rangle}(\psi_n) \to d_{\langle a, b\rangle}(\psi)$, označíme-li symbolem $d_{\langle a, b\rangle}$ délku grafu příslušné funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$. Avšak $d_{\langle a, b\rangle}(\psi_n) \to \delta$, tedy $d_{\langle a, b\rangle}(\psi) = \delta = (b - a) + (b' - a') = (b - a) + (\lambda(b) - \lambda(a))$. Tím jsme v $\langle a, b\rangle$ zkonstruovali funkci ψ žádaných vlastností. To provedeme v každém intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, který je tvořen x-ovými souřadnicemi vodorovných úseček grafu čáry λ^*, a to tak, aby platily vztahy, odpovídající vztahům (4.1), (4.2), a aby v $\langle\alpha, \beta\rangle$ graf příslušné funkce ψ měl délku $(\beta - \alpha) + (\lambda(\beta) - \lambda(\alpha))$. Všechny tyto funkce ψ tvoří dohromady v $\langle 0, 1\rangle$ funkci χ, která je rostoucí a spojitá. Je pak

$$d(\chi) = d_{\langle 0,1\rangle}(\chi) = \sum [(\beta - \alpha) + (\lambda(\beta) - \lambda(\alpha))] = 2\,,$$

neboť zřejmě $\sum(\beta - \alpha) = 1$, $\sum(\lambda(\beta) - \lambda(\alpha)) = 1$. Dále platí $\varrho(\chi, \lambda) < \frac{1}{2}\varepsilon$ a vzhledem k $\varrho(\lambda, \varphi) < \frac{1}{2}\varepsilon$ je $\varrho(\chi, \varphi) < \varepsilon$. Tedy D* je hustá v M, jak jsme chtěli dokázat.

Резюме

О МОНОТОННЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЯХ, ГРАФИК КОТОРЫХ ИМЕЕТ МАКСИМАЛЬНУЮ ДЛИНУ

Й. БЕЧВАРЖ (Jiří Bečvář), Либерец.
(Поступило в релакцию 21/IV 1955.)

Целью статьи является доказательство следующих двух теорем:

1. *Пусть* C — пространство функций, непрерывных в сегменте $J = \langle a, b\rangle$, $a < b$, с метрикой $\varrho(\varphi_1, \varphi_2) = \max\limits_{x \in J} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$, $\varphi_1, \varphi_2 \in$ C. *Пусть $\varphi \in$ C и пусть $\{\lambda_n\}$ есть последовательность функций из C, графиками которых являются ломанные, вписанные графику функции φ. Если $\lambda_n(x) \to \varphi(x)$ для каждого $x \in J$, то $\lambda_n \to \varphi$ равномерно в J и $d(\lambda_n) \to d(\varphi)$, где d означает длину графика соответствующей функции.*

2. *Пусть M есть пространство всех неубывающих функций $\varphi \in$ C, которые удовлетворяют условию $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$, $a' < b'$. Пусть D* (D) есть множество всех функций $\varphi \in$ M, которые возрастают (неубывают) и для которых $d(\varphi) = (b - a) + (b' - a')$. Тогда множество D* (тем более и D) является плотным в M.*

Доказательство проводится путём непосредственной конструкции; для случая множества D дается также доказательство, основанное на теореме Бэра.

Résumé

SUR LES FONCTIONS MONOTONES CONTINUES DONT LES REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES POSSÈDENT UNE LONGUEUR MAXIMALE

JIŘÍ BEČVÁŘ, Liberec.

(Reçu le 21 avril 1955.)

Le but de l'article précédent est la démonstration de deux théorèmes suivants:

1. *Soit* C *l'espace de toutes les fonctions continues, définies dans l'intervalle fermé* $J = \langle a, b \rangle$, $a < b$, *muni de la métrique* $\varrho(\varphi_1, \varphi_2) = \max_{x \in J} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathsf{C}$. *Soit* $\varphi \in \mathsf{C}$ *et soit* $\{\lambda_n\}$ *une suite de fonctions de* C *dont les représentations graphiques sont des polygones inscrits à la représentation graphique de* φ. *Soit* $\lambda_n(x) \to \varphi(x)$ *pour chaque* $x \in J$. *Alors* $\lambda_n \to \varphi$ *uniformément dans* J *et* $d(\lambda_n) \to d(\varphi)$, d *désignant la longuer de la représentation graphique de la fonction respective.*

2. *Soit* M *l'espace de toutes les fonctions* $\varphi \in \mathsf{C}$ *non-décroissantes qui satisfont à la condition* $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$, $a' < b'$. *Soit* $\mathsf{D}^*(\mathsf{D})$ *l'ensemble de toutes les fonctions* $\varphi \in \mathsf{M}$ *croissantes (non-décroissantes) qui satisfont à la condition* $d(\varphi) = (b - a) + (b' - a')$. *Alors l'ensemble* D^* *(et, à plus forte raison, l'ensemble* D*) est dense dans* M.

La démonstration est basée sur une construction directe; pour le cas de D encore une autre démonstration est donnée, usant le théorème de Baire.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

GEOMETRIE SIMPLEXU V E_n

(třetí část)

MIROSLAV FIEDLER, Praha.

(Došlo dne 21. dubna 1955.) DT:513.821.2

V této závěrečné třetí části práce*) se studují vlastnosti některých speciálních druhů simplexů, jako pravoúhlých simplexů určitého typu, ortocentrických simplexů a t. zv. simplexů s hlavním bodem.

8. Speciální simplexy. Považujeme-li podobné trojúhelníky za ekvivalentní, závisí obecný trojúhelník na dvou parametrech. Obdobně obecný simplex (v tomto smyslu) závisí na $\binom{n+1}{2} - 1$ parametrech, takže počet parametrů vzrůstá asi jako čtverec dimense. To vede k tomu, že se některé vlastnosti trojúhelníka ve vyšších dimensích ztrácejí: tak v obecném simplexu neexistuje pro $n > 2$ průsečík výšek a pod. V tomto odstavci uvedeme vlastnosti některých speciálních druhů simplexů (jež obvykle závisí na n parametrech), které mají nějakou zobecněnou vlastnost trojúhelníka. Je to (kromě rovnostranného simplexu a pravoúhlého simplexu určitého druhu) jednak ortocentrický simplex, v němž existuje průsečík výšek, dále simplex se zobecněným Gergonneovým bodem, simplex s Torricelliho bodem, simplex se dvěma průsečíky všech Apolloniových sfér (s isodynamickými body) a j. Je zajímavé, že tyto simplexy lze zahrnout do společné větší třídy simplexů a studovat některé jejich vlastnosti společně.

Věta 31. *Pro každé přirozené n existuje v E_n rovnostranný simplex, totiž simplex, jehož všechny hrany jsou si rovny.*

D ů k a z. Označme c společnou velikost všech hran, takže $c > 0$. Podle věty 4 stačí dokázat, že pro čísla e_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$, $e_{ij} = c^2$ pro $i \neq j$, $e_{ii} = 0$, je splněna implikace: kdykoliv pro reálnou nenulovou soustavu čísel $x_1, \ldots, x_{n+1}$

*) První část práce byla publikována v tomto časopise *79* (1954), 270—297, druhá rovněž v tomto časopise *80* (1955), 462—476.

je $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$, pak $\sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij}x_ix_j < 0$. Avšak $\sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij}x_ix_j = c^2(\sum_{i=1}^{n+1} x_i)^2 - c^2\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 < 0$ pro $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$ a $(x_i) \neq (0)$.

Poznámka. Rovnostranný simplex je zřejmě jediný simplex v E_n, jehož grupa automorfismů je isomorfní celé permutační grupě $(n + 1)$-ho stupně. Podle věty 20 má tento simplex jediný (vlastní) význačný bod, totiž těžiště. Další charakteristická vlastnost rovnostranného simplexu je, že opsaný Steinerův elipsoid je $(n - 1)$-koulí. To plyne ihned z (7,2) pro $m = 0$ a (7,1). Lze bez obtíží ukázat, že provedeme-li na eukleidovský prostor, v němž je dán pevný obecný simplex, takovou afinní transformaci, že Steinerův opsaný elipsoid tohoto simplexu přejde v $(n - 1)$-kouli (taková afinní transformace vždy existuje), pak vrcholy původního simplexu přejdou ve vrcholy rovnostranného simplexu. Lze také ukázat, že Steinerův opsaný elipsoid je jediná kvadrika opsaná simplexu, která má tuto vlastnost.

Obrátíme se teď ke studiu pravoúhlého simplexu určitého typu. Viděli jsme (odst. 4, věta 12), že existují v E_n simplexy, které mají právě n ostrých vnitřních úhlů a všechny ostatní vnitřní úhly pravé (takové simplexy jsme nazvali *pravoúhlé*). Nejdůležitější jsou dva typy pravoúhlých simplexů: první typ má charakteristickou vlastnost, že všechny $(n - 1)$-rozměrné stěny, které procházejí jedním pevným vrcholem, jsou po dvou navzájem kolmé. Takový simplex je zároveň ortocentrický a budeme se jím zabývat později.

Druhý, zajímavější typ, který teď budeme studovat, je charakterisován tím, že jeho vrcholy (a tedy také stěny) lze očíslovat tak, že právě vnitřní úhly $\varphi_{12}, \varphi_{23}, \varphi_{34}, \ldots, \varphi_{n,n+1}$ jsou ostré, zatím co všechny ostatní vnitřní úhly jsou pravé.

Věta 32. *Nutná a postačující podmínka, aby simplex v E_n o čtvercích délek hran e_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$, byl pravoúhlý druhého typu, je: existují navzájem různá reálná čísla*[1] $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ *tak, že*

$$e_{ij} = |c_i - c_j| . \tag{8,1}$$

Důkaz. Předně platí, jak se lze snadno přesvědčit vynásobením, že součin AB (pro navzájem různá čísla $c_1, \ldots, c_{n+1}$) matic

$$A = \left\| \begin{matrix} 0, & 1, & 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ 1, & 0, & c_2 - c_1, & c_3 - c_1, & \ldots, & c_{n+1} - c_1 \\ 1, & c_2 - c_1, & 0, & c_3 - c_2, & \ldots, & c_{n+1} - c_2 \\ 1, & c_3 - c_1, & c_3 - c_2, & 0, & \ldots, & c_{n+1} - c_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & c_{n+1} - c_1, & c_{n+1} - c_2, & c_{n+1} - c_3, & \ldots, & 0 \end{matrix} \right\| ,$$

[1]) Je možno ještě požadovat na př. $\sum_{i=1}^{n+1} c_i = 0$.

$$B = \begin{Vmatrix} c_{n+1}, & -1, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & -1 \\ -1, & -C_{12}, & C_{12}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & C_{12}, & C_{22}, & C_{23}, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & C_{23}, & C_{33}, & C_{34}, & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \multicolumn{10}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & C_{n-1,n}, & C_{nn}, & C_{n,n+1} \\ -1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & C_{n,n+1}, & -C_{n,n+1} \end{Vmatrix},$$

kde $C_{ij} = \dfrac{1}{c_i - c_j}$ pro $i \neq j$, $C_{rr} = \dfrac{c_{r+1} - c_{r-1}}{(c_r - c_{r-1})(c_{r+1} - c_r)}$ pro $r = 2, \ldots, n$, je roven

$$AB = -2I_{n+2},$$

kde I_{n+2} je jednotková matice řádu $n + 2$. Dále si všimněme, že jsou-li c_1, $c_2, \ldots, c_{n+1}$ navzájem různá reálná čísla, pak existuje v E_n simplex s $e_{ij} = |c_i - c_j|$. Můžeme totiž předpokládat, že $c_1 < c_2 < \ldots < c_{n+1}$ (znamená to jen přečíslování vrcholů). Potom body v eukleidovském prostoru E_n^* reálných n-tic s obvyklou metrikou

$$\begin{aligned} O_1 &= (0, 0, \ldots, 0), \\ O_2 &= (\sqrt{c_2 - c_1}, 0, \ldots, 0), \\ O_3 &= (\sqrt{c_2 - c_1}, \sqrt{c_3 - c_2}, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ O_{n+1} &= (\sqrt{c_2 - c_1}, \sqrt{c_3 - c_2}, \ldots, \sqrt{c_{n+1} - c_n}) \end{aligned} \tag{8,2}$$

jsou lineárně nezávislé, a přitom pro $i < j$ je

$$[\varrho(O_i, O_j)]^2 = e_{ij} = (\sqrt{c_j - c_{j-1}})^2 + \ldots + (\sqrt{c_{i+1} - c_i})^2 = c_j - c_i = |c_j - c_i|.$$

Nechť nyní je dán simplex v E_n tak, že (je již přečíslován) právě vnitřní úhly $\varphi_{12}, \varphi_{23}, \ldots, \varphi_{n,n+1}$ jsou ostré a všechny ostatní vnitřní úhly pravé. Podle věty 6 a rovnic (4,2) lze pomocí vnitřních úhlů φ_{ij} najít čísla g'_{ij} tak, že pro příslušná g_{ij} daného simplexu, nalezená z rovnic (2,15), platí

$$g'_{ij} = \varrho g_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n + 1, \quad \varrho \neq 0, \; g'_{11} > 0.$$

Vzhledem k (4,2) jsou z čísel g'_{ij}, $i < j$, jen čísla $g'_{12}, g'_{23}, \ldots, g'_{n,n+1}$ různá od nuly, a to vesměs ($g'_{11} > 0$) záporná. Zvolme teď libovolně reálné číslo c_1 a definujme čísla $c_2, \ldots, c_{n+1}$ vztahy

$$c_2 = c_1 - \frac{1}{g'_{12}}, \quad c_3 = c_2 - \frac{1}{g'_{23}}, \ldots, c_{n+1} = c_n - \frac{1}{g'_{n,n+1}}.$$

Jak jsme ukázali, existuje v E_n simplex, jehož čtverce délek hran $\bar{e}_{ij} = \bar{e}_{ji} = c_j - c_i$ pro $i < j$. Matice A je pak maticí $\|\bar{e}_{rs}\|$ tohoto simplexu s $\bar{e}_{00} = 0$, $\bar{e}_{0i} = 1$. To znamená, že matice B je až na nenulový faktor maticí $\|\bar{g}_{rs}\|$ z (2,15). Avšak čísla $\bar{g}_{rs}$ jsou, jak plyne ze zavedení čísel c_i a z toho, že jsou splněny i podmínky (podle 2,15d) $\sum_{j=1}^{n+1} g'_{ij} = 0$, úměrná číslům g'_{ij} ($\bar{g}_{ij} = \sigma g'_{ij}$), t. j. vnitřní úhly simplexu $\bar{e}_{ij}$ jsou rovněž φ_{ij}. Potom simplex $\bar{e}_{ij} = |\bar{c}_i - \bar{c}_j|$, kde $\bar{c}_i = \frac{e_{12}}{\bar{e}_{12}} c_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, je shodný podle věty 8 se simplexem e_{ij}, neboť $\bar{\bar{e}}_{12} = e_{12}$, $\bar{\bar{\varphi}}_{ij} = \varphi_{ij}$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$ (simplexy $\bar{\bar{e}}_{ij}$ a $\bar{e}_{ij}$ mají stejné vnitřní úhly), t. j. (čísla $\bar{c}_i$ jsou opět navzájem různá)

$$e_{ij} = |\bar{c}_i - \bar{c}_j| .$$

Že obráceně simplex $e_{ij} = |c_i - c_j|$ je pravoúhlý druhého typu, plyne ihned vhodným přečíslováním na tvar $e_{ij} = c'_j - c'_i$ pro $i < j$ a z tvaru matice B, odpovídající matici g_{rs} tohoto simplexu (až na nenulový faktor).

Věta 33. *Každá m-rozměrná stěna pravoúhlého simplexu druhého typu, $1 < m \leqq n - 1$, je opět pravoúhlým simplexem druhého typu v příslušném E_m.*

Důkaz. Plyne ihned z věty 32, neboť každé stěně odpovídá podmnožina M_1 indexů $1, 2, \ldots, n + 1$, a pro příslušný simplex z E_m tedy platí

$$e_{ij} = |c_i - c_j| , \quad i, j \in M_1 ;$$

c_i, $i \in M_1$, jsou opět navzájem různá reálná čísla, t. j. podle věty 32 je stěna opět pravoúhlým simplexem druhého typu.

Speciálně každá dvojdimensionální stěna je pravoúhlý trojúhelník. Je zajímavé, že platí i obráceně:

Věta 34. *Každý simplex v E_n, jehož každá dvojdimensionální stěna je pravoúhlý trojúhelník, je pravoúhlý druhého typu.*

Důkaz. Nechť tedy simplex $\sum$ s vrcholy $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$ má vlastnost, že všechny jeho dvojdimensionální stěny jsou pravoúhlé trojúhelníky. Všimněme si předně: je-li $\overline{O_iO_j}$ jedna z množiny nejdelších hran simplexu $\sum$, je to přepona ve všech trojúhelnících $O_iO_jO_k$ pro $k \neq i, j$, t. j. $(n - 1)$-koule, utvořená nad O_iO_j jako nad průměrem, je opsaná $(n - 1)$-koule simplexu $\sum$. To znamená, že taková nejdelší hrana je jen jedna (jinak by alespoň dvě různé hrany měly společný střed a čtyři vrcholy simplexu by ležely v rovině).

Dokážeme teď: jsou-li O_i, O_j, O_k, O_l čtyři různé vrcholy a platí-li, že O_iO_j je nejdelší ze šesti hran, spojujících tyto vrcholy, pak není možné, aby úhel $\sphericalangle O_kO_iO_l$ byl pravý. Předpokládejme totiž naopak, že $\sphericalangle O_kO_iO_l = \frac{1}{2}\pi$. Jsou dvě možnosti:

a) $\sphericalangle O_kO_jO_l = \frac{1}{2}\pi$; avšak střed S kulové plochy opsané čtyřstěnu $O_iO_jO_kO_l$ je podle předchozího ve středu hrany O_iO_j. Střed S_1 kružnice opsané trojúhelníku $O_kO_iO_l$ je ve středu strany O_kO_l, rovněž střed S_2 kružnice opsané trojúhelníku $O_kO_jO_l$ je ve středu strany O_kO_l. Nyní SS_1 je přímka kolmá k rovině $O_kO_iO_l$ a rovněž k rovině $O_kO_jO_l$. Obě tyto roviny mají společný bod O_k a jsou tedy totožné. To je spor, neboť všechny čtyři vrcholy neleží v rovině.

b) Jeden z úhlů $\sphericalangle O_kO_lO_j$, $\sphericalangle O_lO_kO_j$ je pravý. Protože oba případy se liší jen výměnou indexů k a l, můžeme předpokládat, že $\sphericalangle\, O_k O_l O_j = \frac{1}{2}\pi$. Pak platí pro čtverce délek hran podle Pythagorovy věty

$$e_{ik} + e_{jk} = e_{ij}\,, \quad e_{il} + e_{jl} = e_{ij}\,,$$
$$e_{ik} + e_{il} = e_{kl}\,, \quad e_{kl} + e_{jl} = e_{jk}\,.$$

Avšak odtud je

$$e_{ik} + e_{il} + e_{jl} = e_{kl} + e_{jl} = e_{jk}\,,$$

a současně

$$e_{ik} + e_{il} + e_{jl} = e_{ik} + e_{ij} = 2e_{ik} + e_{jk}\,, \quad \text{t. j.} \quad e_{ik} = 0\,.$$

Z tohoto sporu už plyne, že $\sphericalangle\, O_k O_i O_l \neq \frac{1}{2}\pi$.

Přejdeme teď k vlastnímu důkazu věty 34. Nechť $O_i O_j$ je nejdelší hrana. Zvolme libovolně reálné číslo c_i a položme pro každé $k = 1, 2, \ldots, n+1$

$$c_k = c_i + e_{ik}\,. \tag{8,3}$$

Dokážeme, že platí (8,1) a že čísla c_k jsou navzájem různá. Kdyby předně $c_k = c_l$ pro $k \neq l$, pak nutně $j \neq k$, $j \neq l$ ($O_i O_j$ je jediná nejdelší hrana) a podle předchozího je $\sphericalangle\, O_k O_i O_l \neq \frac{1}{2}\pi$, t. j. právě jedna z hran $O_i O_k$, $O_i O_l$ je přeponou v pravoúhlém trojúhelníku $O_i O_k O_l$, t. j. $e_{ik} \neq e_{il}$ ve sporu s $c_k = c_l$. Z (8,3) plyne

$$e_{ik} = c_k - c_i = |c_k - c_i|\,; \tag{8,4a}$$

poněvadž je $e_{ij} = e_{ik} + e_{jk}$ pro všechna k, je rovněž

$$e_{jk} = c_j - c_k = |c_j - c_k|\,. \tag{8,4b}$$

Jsou-li k, l, i, j vesměs navzájem různé, pak podle předchozího je $\sphericalangle\, O_k O_i O_l \neq \neq \frac{1}{2}\pi$, t. j. platí buď $e_{ik} + e_{kl} = e_{il}$ nebo $e_{il} + e_{kl} = e_{ik}$. V prvním případě je $e_{kl} = c_l - c_i - c_k + c_i = c_l - c_k$, v druhém je $e_{kl} = c_k - c_l$, tedy vždy

$$e_{kl} = |c_k - c_l|\,. \tag{8,4c}$$

Rovnice (8,4a), (8,4b) a (8,4c) dávají celkem (8,1) a věta je dokázána.

Věta 35. *Pravoúhlý simplex druhého typu v E_n má ještě tyto vlastnosti:*

1. *Střed opsané $(n-1)$-koule leží ve středu nejdelší hrany, která je jediná.*

2. *Existuje v E_n kvádr, mezi jehož vrcholy jsou obsaženy všechny vrcholy tohoto simplexu.*

Důkaz. První část jsme dokázali v důkazu věty 34. Druhá část plyne takto: Z rovnic (8,2) je zřejmé, že body $O_1, \ldots, O_{n+1}$ jsou obsaženy v množině vrcholů kvádru (vyjádřených v E_n^*)

$$V(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = (\eta_1\sqrt{c_2 - c_1}, \eta_2\sqrt{c_3 - c_2}, \ldots, \eta_n\sqrt{c_{n+1} - c_n})\,,$$

kde $\eta_i = 0$ nebo 1. Protože každý takový pravoúhlý simplex lze po případném přečíslování umístit jako v (8,2), je tím věta 35 dokázána.

Přejdeme teď ke studiu t. zv. ortocentrických simplexů v E_n, t. j. simplexů, pro které existuje průsečík výšek (kolmic s vrcholu na protější $(n-1)$-rozměrnou stěnu). Uvedeme nejprve některé známé výsledky o ortocentrických simplexech:[2])

A) Simplex v E_n o vrcholech O_i, $i = 1, \ldots, n + 1$, $[\varrho(O_i, O_j)]^2 = e_{ij}$, je ortocentrický tehdy a jen tehdy, existují-li reálná čísla $\pi_1, \ldots, \pi_{n+1}$ tak, že pro $i \neq j$ je $e_{ij} = \pi_i + \pi_j$, při čemž nejvýše jedno z čísel π_i je nekladné; je-li jedno z nich záporné, jsou ostatní kladná a $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\pi_i} < 0$.

B) Průsečík výšek pro nulový ortocentrický simplex [3]) splývá s vrcholem O_k pro $\pi_k = 0$. Průsečík výšek nenulového ortocentrického simplexu je v barycentrických souřadnicích bod $O = \left(\frac{1}{\pi_1}, \frac{1}{\pi_2}, \ldots, \frac{1}{\pi_{n+1}}\right)$.

C) Vrcholy a průsečík výšek nenulového ortocentrického simplexu tvoří v E_n t. zv. ortocentrickou soustavu $n + 2$ bodů, která má tyto vlastnosti:

a) každých m, $2 < m \leqq n + 1$, z bodů této soustavy tvoří ortocentrický simplex (o $m - 1$ dimensích), který má za průsečík výšek bod, který leží i v lineárním prostoru, vytvořeném zbylými $(n - m + 2)$-ma body (speciálně každých $n + 1$ bodů této soustavy tvoří ortocentrický simplex, který má zbylý bod za průsečík výšek);

b) čtverce vzájemných vzdáleností těchto bodů $O_1, \ldots, O_{n+1}$ a $O_{n+2} \equiv O$ splňují vztahy $(i \neq j)$

$$e_{ij} = \pi_i + \pi_j\,, \quad \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{\pi_k} = 0\,, \quad i, j = 1, \ldots, n + 2\,.$$

D) Průsečík výšek, těžiště a střed opsané $(n - 1)$-koule leží v přímce (zobecněné Eulerově přímce, viz Enciclopedia [4], str. 186).

E) Existuje $n - 1$ zobecněných Feuerbachových $(n - 1)$-koulí[4]) $K_1, \ldots, K_{n-1}$ (opsanou $(n - 1)$-kouli lze považovat za nultou K_0), těchto vlastností:

1. K_m prochází těžišti a průsečíky výšek ve všech m-rozměrných stěnách daného simplexu;

2. K_m patří témuž svazku $(n - 1)$-koulí vytvořenému opsanou $(n - 1)$-koulí a polární $(n - 1)$-sférou, která existuje právě jen v ortocentrickém simplexu;

---

[2]) Na př. *E. Egerváry:* On orthocentric simplexes, Acta Math. Szeged; IX (1940), str. 218—226.

[3]) Budeme zde užívat tohoto označení: jsou-li všechna čísla π_i kladná, $i = 1, \ldots, n + 1$, budeme ortocentrický simplex nazývat kladný; je-li pro některé k $\pi_k = 0$, nazveme ortocentrický simplex nulový. Je-li konečně pro jedno k $\pi_k < 0$, nazveme ortocentrický simplex záporný $\left(\text{v tom případě je ještě } \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\pi_i} < 0\right)$. Simplexy kladné a záporné nazveme souhrnně nenulové. Nulové ortocentrické simplexy jsou pravoúhlé ve smyslu naší definice (prvního typu).

[4]) Jejich rovnice v bar. souřadnicích jsou

$$K_m \equiv -2(m + 1) \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i x_i \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0\,.$$

3. středy všech K_m (a všech $(n-1)$-koulí svazku 2) leží v Eulerově přímce.

Tyto známé výsledky doplníme ještě ve větách 36 a 37, v nichž se zobecňují známé vlastnosti příslušných útvarů v rovině.

Nejprve nazveme *rovnoosou n-hyperbolou v E_n* takovou racionální normální křivku n-tého stupně v E_n, která má n asymptotických směrů po dvou navzájem kolmých. Dále dvě takové rovnoosé n-hyperboly budeme na okamžik nazývat *nezávislé*, jestliže obě n-tice jejich asymptotických směrů jsou *nezávislé*, t. j. platí-li: v žádném k-rozměrném (nevlastním) lineárním prostoru, $k = 0, 1, \ldots, n-2$, určeném $k+1$ z asymptotických směrů jedné určité z obou n-hyperbol (nezáleží na tom, které), neleží víc než k asymptotických směrů druhé.[5])

Věta 36. *Jestliže existují dvě nezávislé rovnoosé n-hyperboly, procházející $(n+2)$-ma různými body v E_n, pak soustava těchto $n+2$ bodů v E_n je ortocentrická. Každá racionální algebraická křivka n-tého stupně, procházející $(n+2)$-ma body ortocentrické soustavy v E_n, je rovnoosá n-hyperbola.*

Důkaz. Dokážeme nejprve tuto pomocnou větu:

Jsou-li v projektivním $(n-1)$-rozměrném prostoru P_{n-1} dvě soustavy po n lineárně nezávislých bodech nezávislé (ve smyslu uvedeném před chvílí), existuje nejvýše jedna regulární kvadrika v P_{n-1}, která má obě tyto soustavy za polární.

Důkaz pomocné věty. Zvolme body jedné soustavy za vrcholy soustavy projektivních souřadnic $O_1, O_2, \ldots, O_n$. V druhé soustavě nechť jsou pak body $Y_i = (\overset{i}{y}_1, \overset{i}{y}_2, \ldots, \overset{i}{y}_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Předpokládejme, že existují dvě různé regulární kvadriky, které mají obě soustavy za polární. Jejich rovnice jsou

$$a \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 = 0\,, \quad b \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2 = 0\,,$$

kde a_i, b_i jsou nenulová čísla, a přitom hodnost matice $\left\|\begin{matrix} a_i \\ b_i \end{matrix}\right\|$ je 2. Z podmínky, že i druhá soustava je polární vzhledem k a i b, plyne, že existují nenulová čísla $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ tak, že pro $r = 1, 2, \ldots, n$ je identicky

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \overset{r}{y}_i x_i \equiv \sigma_r \sum_{i=1}^{n} b_i \overset{r}{y}_i x_i \tag{8,5}$$

čili

$$(a_i - \sigma_r b_i)\, \overset{r}{y}_i = 0 \tag{8,5'}$$

pro $i, r = 1, \ldots, n$.

---

[5]) To je na př. splněno, jestliže jeden z asymptotických směrů jedné n-hyperboly neleží v žádném $(n-2)$-rozměrném lineárním prostoru, určeném vždy $n-1$ asymptotickými směry druhé.

Definujme teď mezi indexy $1, \ldots, n$ tuto ekvivalenci: $i \sim j$, jestliže $a_i b_j - a_j b_i = 0$.

Kdyby všechny indexy $1, \ldots, n$ byly v téže třídě vzhledem k této ekvivalenci, pak by matice $\begin{Vmatrix} a_i \\ b_i \end{Vmatrix}$ měla hodnost menší než 2, což je spor.

Odtud plyne, že označíme-li M_1 třídu indexů, ekvivalentních s indexem 1, pak množina M_2 zbylých indexů je neprázdná. Nechť s je počet prvků M_1, tedy $1 \leqq s \leqq n - 1$, pak počet prvků M_2 je $n - s$.

Je-li nyní $Y_r = (\overset{r}{y}_k)$ jeden z bodů Y, pak nenulové souřadnice $\overset{r}{y}_k$ mají indexy buď vesměs z M_1, nebo vesměs z M_2: kdyby totiž pro $i \in M_1$, $j \in M_2$ platilo $\overset{r}{y}_i \neq 0$, $\overset{r}{y}_j \neq 0$, pak by z (8,5') plynulo

$$a_i = \sigma_r b_i\,, \quad a_j = \sigma_r b_j\,,$$

t. j. $i \sim j$, což je spor s definicí M_1 a M_2.

Označme p_1 resp. p_2 počet bodů Y_r, pro které nenulové souřadnice jsou z M_1 resp. M_2. Je $p_1 + p_2 = n$; z lineární nezávislosti bodů Y_r plyne, že $p_1 \leqq s$, $p_2 \leqq n - s$. To však znamená, že $p_1 = s$, $p_2 = n - s$. Leží tedy v lineárním prostoru dimense $s - 1$, vytvořeném body O_i pro $i \in M_1$, s bodů Y_r, ve sporu s nezávislostí obou soustav.

Nyní přejdeme k důkazu vlastní věty. Předpokládejme, že existují dvě nezávislé rovnoosé n-hyperboly, procházející $(n + 2)$-ma body v E_n. Vyberme z nich libovolných $n + 1$ bodů $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$; ty jsou nutně lineárně nezávislé (kdyby ležely v nadrovině, pak by rovnoosá n-hyperbola měla s touto nadrovinou alespoň $n + 1$ bodů společných a ležela by celá v této nadrovině). Nechť zbylý bod má v barycentrických souřadnicích vzhledem k simplexu s těmito $n + 1$ vrcholy souřadnice $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$; ze stejných důvodů jako dříve je $y_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n + 1$. Označme opět e_{ij} čtverce vzdáleností bodů $O_i O_j$.

Snadno se zjistí, že každá reálná racionální normální křivka n-tého stupně, procházející body $O_1, \ldots, O_{n+1}, Y$, má tvar

$$x_1 = \frac{y_1}{t - t_1}, \quad x_2 = \frac{y_2}{t - t_2}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{y_{n+1}}{t - t_{n+1}}, \text{ [6]} \tag{8,6}$$

kde $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ jsou navzájem různá reálná čísla. Mají tedy obě rovnoosé n-hyperboly tento tvar (druhá s čísly $t'_1, t'_2, \ldots, t'_{n+1}$). Poněvadž jsou podle předpokladu nezávislé, jsou obě n-tice jejich asymptotických směrů nezávislé a existuje podle předchozí pomocné věty v nevlastní nadrovině jediná regulární kvadrika, k níž jsou obě n-tice polární. Jedna taková kvadrika je imaginární průsečnice opsané $(n - 1)$-koule $\sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij} x_i x_j = 0$ s nevlastní nadrovinou $\sum x_i = 0$.

[6]) Na obvyklý parametrický tvar se tyto rovnice převedou vynásobením pravých stran součinem $(t - t_1) \ldots (t - t_{n+1})$.

Ukážeme teď, že i průsečnice kvadriky $a \equiv \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_ix_j = 0$, $a_{ij} = 0$ pro $i = j$, $a_{ij} = \frac{1}{y_i} + \frac{1}{y_j}$ pro $i \neq j$, s nevlastní nadrovinou má tu vlastnost. Je totiž první n-hyperbola tvaru (8,6); označme Z_r, $r = 1, \ldots, n$, její nevlastní body. Jsou to body $Z_r = (\overset{r}{z}_1, \ldots, \overset{r}{z}_{n+1})$, kde $\overset{r}{z}_i = \frac{y_i}{\tau_r - t_i}$ a $\tau_1, \ldots, \tau_n$ jsou kořeny rovnice

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_i}{\tau - t_i} = 0 . \tag{8,7}$$

Platí však pro $r \neq s$

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}\overset{r}{z}_i\overset{s}{z}_j = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n+1} \left(\frac{1}{y_i} + \frac{1}{y_j}\right) \frac{y_iy_j}{(\tau_r - t_i)(\tau_s - t_j)} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{y_i + y_j}{(\tau_r - t_i)(\tau_s - t_j)} - 2\sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_i}{(\tau_r - t_i)(\tau_s - t_i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_i}{\tau_r - t_i} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\tau_s - t_j} + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{y_j}{\tau_s - t_j} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\tau_r - t_i} -$$

$$- \frac{2}{\tau_s - \tau_r} \left[\sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_i}{\tau_r - t_i} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{y_i}{\tau_s - t_i}\right] = 0$$

vzhledem k (8,7); přitom $\tau_s \neq \tau_r$, protože příslušné asymptotické směry jsou ortogonální podle předpokladu. Jsou tedy body Z_r a Z_s sdružené vzhledem ke kvadrice a.

Odtud plyne, že kvadrika a je $(n - 1)$-koule, a protože prochází vrcholy $O_1, \ldots, O_{n+1}$, je to opsaná $(n - 1)$-koule. Je proto pro $\varrho \neq 0$ a $i \neq j$

$$e_{ij} = \varrho \left(\frac{1}{y_i} + \frac{1}{y_j}\right), \tag{8,8}$$

t. j.

$$e_{ij} = \pi_i + \pi_j \quad \text{pro} \quad i \neq j .$$

Simplex $O_1, \ldots, O_{n+1}$ je tedy ortocentrický a bod $Y = \left(\frac{1}{\pi_i}\right)$ je jeho průsečíkem výšek. Protože tento ortocentrický simplex není nulový, je daná soustava $n + 2$ bodů ortocentrická.

Je-li obráceně soustava $n + 2$ bodů ortocentrická, pak volbou $n + 1$ z těchto bodů za vrcholy základního simplexu $O_1, \ldots, O_{n+1}$ dosáhneme, že platí (8,8), kde $Y = (y_i)$ je zbylý bod. Již jsme zjistili, že pro každou reálnou racionální normální křivku n-tého stupně, procházející body $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}, Y$, platí vzhledem k (8,6), že její nevlastní body jsou po dvou sdruženy vzhledem ke kvadrice $\sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij}x_ix_j = 0$, t. j. vzhledem k opsané $(n-1)$-kouli. To však znamená, že každá taková křivka je rovnoosou n-hyperbolou.

Věta 37. *Nechť v nenulovém ortocentrickém simplexu v E_n průsečík výšek neleží v žádné z nadrovin souměrnosti hran. Potom existuje (právě jedna) rovnoosá n-hyperbola, která prochází všemi vrcholy, průsečíkem výšek a těžištěm.*

Její asymptotické směry splývají se směry os Steinerových elipsoidů (ty jsou jednoznačně stanoveny); je Apolloniovou křivkou průsečíku výšek vzhledem ke Steinerovu opsanému elipsoidu[7]*) a obsahuje paty všech normál spuštěných s průsečíku výšek simplexu na libovolnou kvadriku ze Steinerova systému kvadrik* (viz pozn. za větou 24).

Důkaz. Nechť v tomto simplexu je $e_{ij} = \pi_i + \pi_j$, $i \neq j$. To, že průsečík výšek neleží v žádné z nadrovin souměrnosti hran, znamená, že

$$\pi_i \neq \pi_j \quad \text{pro} \quad i \neq j \tag{8,9}$$

a rovněž $\pi_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n+1$, t. j. $O = \left(\frac{1}{\pi_i}\right)$.

Racionální křivka K n-tého stupně tvaru $(i = 1, \ldots, n+1)$

$$x_i = \frac{1}{t - \pi_i}, \tag{8,10}$$

skutečně má (po transformaci parametru) tvar (8,6); je to tedy podle věty 36 rovnoosá n-hyperbola, která zřejmě prochází těžištěm (pro $t \to \infty$).

Dokážeme teď, že K je Apolloniovou křivkou průsečíku výšek vzhledem ke každé kvadrice ze Steinerova systému. Odtud již budou zřejmé ostatní vlastnosti ve větě uvedené.

Předně čísla

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{00} &= \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\pi_i} - (n-1)^2, \\
\bar{g}_{0i} &= \frac{n-1}{\pi_i} - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\pi_j}, \\
\bar{g}_{ii} &= \frac{1}{\pi_i}\left(\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\pi_j} - \frac{1}{\pi_i}\right), \\
\bar{g}_{ij} &= -\frac{1}{\pi_i\pi_j} \quad (i \neq j)
\end{aligned} \tag{8,11}$$

jsou, jak se snadno zjistí dosazením do vztahů (2,15), úměrná (se společným nenulovým koeficientem) číslům g_{ij}, příslušným k $e_{ij} = \pi_i + \pi_j$ pro $i \neq j$.

---

[7]) Apolloniova křivka bodu P k regulární kvadrice je množina bodů takových, že přímka x, procházející bodem X a kolmá k polární nadrovině bodu X, obsahuje bod P.

Budiž pro pevné $m > -1$

$$(m+1)\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^2 = 0 \tag{8,12}$$

kvadrika ze Steinerova systému. Předpokládejme, že nějaký bod $Y = (y_1, \ldots, y_{n+1})$ má vlastnost bodu Apolloniovy křivky průsečíku výšek vzhledem k (8,12). Potom $(m+1)\sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n+1} x_i \sum_{i=1}^{n+1} y_i = 0$ je rovnice polární nadroviny bodu Y dle (8,12); pro směr $Z = (z_1, \ldots, z_{n+1})$ k ní kolmý je $z_j = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{g}_{ij}[(m+1) y_i - \sum_{k=1}^{n+1} y_k]$, čili po dosazení z (8,11) a po úpravě je (až na nenulový faktor)

$$z_j = \frac{y_j}{\pi_j}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{\pi_i} - \frac{1}{\pi_j}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{y_i}{\pi_i}.$$

Podle předpokladu je $z_j = \alpha y_j + \beta \frac{1}{\pi_j}$;[8]) sečteme-li tyto rovnice, dostaneme $\alpha \sum_{i=1}^{n+1} y_i + \beta \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\pi_i} = 0$; existuje tedy číslo ϱ tak, že

$$\alpha = \varrho \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\pi_i}, \quad \beta = -\varrho \sum_{i=1}^{n+1} y_i.$$

Celkem je

$$\frac{y_j}{\pi_j}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{\pi_i} - \frac{1}{\pi_j}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{y_i}{\pi_i} = \varrho y_j \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{\pi_i} - \varrho\frac{1}{\pi_j}\sum_{i=1}^{n+1} y_i,$$

t. j. až na faktor $y_j = \dfrac{1}{1 - \varrho\pi_j}$. Položíme-li ještě $\varrho = \dfrac{1}{t}$ (a připouštíme-li i hodnotu $t = \infty$), dostaneme skutečně, že bod Y leží na K. Že obráceně každý bod z K má uvedenou vlastnost, zjistí se obrácením postupu nebo přímo výpočtem.

Poznámka. Křivka z věty 37 je zobecněním t. zv. Kiepertovy hyperboly trojúhelníka (viz Enciclopedia [4], str. 207).

Věta 38. *Simplex je kladně ortocentrický tehdy a jen tehdy, existuje-li takový jeho vnitřní bod P, že pro každý samodružný bod S (pokud je různý od P) reciproké transformace*[9]) *vzhledem k simplexu, v níž si odpovídají těžiště T a bod P, platí, že přímka PS je kolmá k harmonické poláře*[10]) *bodu S vzhledem k simplexu. Bod P je pak průsečíkem výšek.*

---

[8]) Pro $Y \neq O$; že O vyhovuje, je evidentní.

[9]) Reciproká transformace vzhledem k simplexu má v barycentrických souřadnicích tvar $x_i' = \dfrac{c_i}{x_i}$, kde c_i jsou nenulová reálná čísla.

[10]) Harmonická polára bodu $Y = (y_1, \ldots, y_{n+1})$, $y_i \neq 0$ pro $i = 1, \ldots, n+1$, vzhledem k základnímu simplexu je nadrovina o rovnici $\sum_{i=1}^{n+1} \dfrac{x_i}{y_i} = 0$.

Důkaz. Nejprve dokážeme tuto pomocnou větu:

Simplex v E_n, $n > 1$, je ortocentrický tehdy a jen tehdy, existují-li čísla $c_1, \ldots, c_{n+1}$ tak, že pro čísla g_{ij} z (2,15) je hodnost matice

$$M = \left\| \begin{matrix} c_1, & g_{12}, & g_{13}, & \ldots & g_{1,n+1} \\ g_{21}, & c_2, & g_{23}, & \ldots & g_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n+1,1}, & g_{n+1,2}, & g_{n+1,3}, & \ldots & c_{n+1} \end{matrix} \right\|$$

rovna jedné. Průsečík výšek má pak barycentrické souřadnice úměrné libovolnému nenulovému řádku této matice.

Důkaz. Je-li simplex ortocentrický, věta platí vzhledem ke vztahům (8,11). Je-li obráceně pro čísla c_i hodnost matice M rovna jedné, pak bod, jehož barycentrické souřadnice jsou úměrné libovolnému nenulovému řádku matice M, je vlastní (jinak by $c_i = g_{ii}$ a matice $\|g_{ij}\|$ by měla hodnost 1) a kolmice, spuštěné na $(n - 1)$-rozměrné stěny simplexu, procházejí vždy příslušným protějším vrcholem; tento bod je tedy průsečíkem výšek a simplex je ortocentrický.

Budiž nyní dán kladně ortocentrický simplex, $e_{ij} = \pi_i + \pi_j$ pro $i \neq j$, $\pi_i > 0$. Potom pro průsečík výšek je $P = \left(\frac{1}{\pi_i}\right)$, příslušná reciproká transformace

$$x_i' = \frac{1}{\pi_i x_i}.$$

Každý samodružný bod této transformace je tvaru $S = \left(\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{\pi_i}}\right)$, kde $\varepsilon_i = \pm 1$. Nechť $S \neq P$; máme dokázat, že přímka PS je kolmá k nadrovině (která je pak vlastní)

$$\sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i x_i \sqrt{\pi_i} = 0.$$

Podle (8,11) je tato podmínka ekvivalentní s tím, že matice

$$\left\| \sum_{j=1}^{n+1} g_{ij} \varepsilon_j \sqrt{\pi_j}, \quad \frac{1}{\varepsilon_i \sqrt{\pi_i}}, \quad \frac{1}{\pi_i} \right\| =$$

$$= \left\| \left(\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\pi_j} \right) \frac{1}{\varepsilon_i \sqrt{\pi_i}} - \frac{1}{\pi_i} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\varepsilon_j \sqrt{\pi_j}}, \quad \frac{1}{\varepsilon_i \sqrt{\pi_i}}, \quad \frac{1}{\pi_i} \right\|$$

má hodnost 2. To však zřejmě platí.

Nechť obráceně je $P = (p_i)$ bod, který má požadovanou vlastnost; můžeme tedy předpokládat, že všechna $p_i > 0$.

I. Nechť $P \neq T$. Potom každý samodružný bod S transformace $x_i' = \frac{p_i}{x_i}$,

$S = (\varepsilon_i \sqrt{p_i})$, $\varepsilon_i = \pm 1$, je různý od P. Podle předpokladu má pro každou soustavu $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n+1}$ čísel 1 a -1 matice

$$\left\| \sum_{j=1}^{n+1} \frac{g_{ij}}{\varepsilon_j \sqrt{p_j}}, \quad \varepsilon_i \sqrt{p_i}, \quad p_i \right\|$$

hodnost dvě.

a) Budiž $n > 2$ a i, j, k navzájem různé indexy z $1, 2, \ldots, n + 1$. Pak platí, označíme-li $\sum^*$ sčítání přes indexy $l = 1, 2, \ldots, n + 1$, různé od i, j a k:

$$\begin{vmatrix} \sum_l^* \frac{g_{il}}{\varepsilon_l \sqrt{p_l}} + \frac{g_{ii}}{\varepsilon_i \sqrt{p_i}} + \frac{g_{ij}}{\varepsilon_j \sqrt{p_j}} + \frac{g_{ik}}{\varepsilon_k \sqrt{p_k}}, & \varepsilon_i \sqrt{p_i}, & p_i \\ \sum_l^* \frac{g_{jl}}{\varepsilon_l \sqrt{p_l}} + \frac{g_{ji}}{\varepsilon_i \sqrt{p_i}} + \frac{g_{jj}}{\varepsilon_j \sqrt{p_j}} + \frac{g_{jk}}{\varepsilon_k \sqrt{p_k}}, & \varepsilon_j \sqrt{p_j}, & p_j \\ \sum_l^* \frac{g_{kl}}{\varepsilon_l \sqrt{p_l}} + \frac{g_{ki}}{\varepsilon_i \sqrt{p_i}} + \frac{g_{kj}}{\varepsilon_j \sqrt{p_j}} + \frac{g_{kk}}{\varepsilon_k \sqrt{p_k}}, & \varepsilon_k \sqrt{p_k}, & p_k \end{vmatrix} = 0 . \tag{8,13}$$

Odtud vhodnými záměnami $\varepsilon_s \to -\varepsilon_s$ a sčítáním resp. odčítáním příslušných výrazů plyne, že pro všechny trojice $i, j, l, i \neq j \neq l \neq i$, je

$$\begin{vmatrix} g_{il}, & p_i \\ g_{jl}, & p_j \end{vmatrix} = 0 .$$

Podle pomocné věty je daný simplex ortocentrický s průsečíkem výšek P; je tedy kladně ortocentrický.

b) Pro $n = 2$ plyne z (8,13) (pro prázdný součet $\sum^*$) platnost rovnic

$$\begin{aligned} \frac{g_{11}}{p_1} - \frac{g_{22}}{p_2} + \frac{g_{23} - g_{13}}{p_3} &= 0 , \\ \frac{g_{13} - g_{12}}{p_1} + \frac{g_{22}}{p_2} - \frac{g_{33}}{p_3} &= 0 , \\ -\frac{g_{11}}{p_1} + \frac{g_{12} - g_{23}}{p_2} + \frac{g_{33}}{p_3} &= 0 . \end{aligned} \tag{8,14}$$

Snadno se přesvědčíme vzhledem k (2,15d), že této soustavě pro $\frac{1}{p_i}$ vyhovují čísla $p_1 = \frac{1}{g_{23}}$, $p_2 = \frac{1}{g_{13}}$, $p_3 = \frac{1}{g_{12}}$; přitom čísla g_{12}, g_{13}, g_{23} jsou nutně různá od nuly (kdyby $g_{12} = 0$, pak z (2,15d) a (8,14) by $g_{13} = g_{23} = -g_{11} = -g_{22}$, $p_1 = p_2$ a z poslední z rovnice (8,14) $g_{33} = 0$, což je spor) a matice soustavy (8,14) má hodnost 2. To však podle pomocné věty znamená, že P je průsečík výšek; trojúhelník $O_1O_2O_3$ je tedy *kladně* ortocentrický.

II. Pro $P = T$ se obdobným postupem jako v a) zjistí, že T je průsečík výšek (simplex je rovnostranný) a věta 38 rovněž platí.

Z uvedené pomocné věty a rovnic (4,2) ihned plyne věta:

Věta 39. *Simplex v E_n s vnitřními úhly φ_{ij} je ortocentrický tehdy a jen tehdy, existují-li reálná čísla $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$, z nichž nejvýše jedno je rovno nule, tak, že*

$$\cos \varphi_{ij} = c_i c_j \quad pro \ i \neq j \, .$$

Dokážeme teď dvě věty o jiných druzích simplexů:

Věta 40. *Nutná a postačující podmínka, aby v simplexu splývaly dva z těchto bodů: těžiště, střed vepsané $(n - 1)$-koule a Lemoinův bod, je, aby simplex byl rovnostěnný, t. j., aby $(n - 1)$-dimensionální obsahy všech jeho $(n - 1)$-rozměrných stěn byly stejné. Potom splývají všechny tři z uvedených bodů.*

D ů k a z. Dva z uvedených bodů (podle věty 30) splývají právě tehdy, je-li $g_{11} = g_{22} = \ldots = g_{n+1,n+1}$. Podle (3,11) je čtverec $(n - 1)$-dimensionálního obsahu stěny protější k O_i roven

$$\frac{|g_{ii}|}{2^{n-1}(n-1)!} \, ;$$

odtud snadno plyne věta vzhledem k (4,3).[11]

Věta 41. *Nutná a postačující podmínka, aby v simplexu splývalo těžiště se středem opsané $(n - 1)$-koule, je: součet čtverců délek hran, jdoucích do jednoho vrcholu, je pro všechny vrcholy stejný.*

D ů k a z plyne ihned odtud, že čtverec vzdálenosti těžiště od vrcholu O_i je podle (2,9) roven

$$\varrho^2(T, O_i) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} e_{ij} - \frac{1}{2(n+1)^2} \sum_{j,k=1}^{n+1} e_{jk} \, .$$

P o z n á m k a. Lze ukázat, že pro $n = 3$ jsou simplexy tohoto typu jediné simplexy (čtyrstěny), které mají jediný vlastní význačný bod.

Pro $n > 3$ rovněž existují nerovnostranné simplexy, které mají jediný význačný bod. To vyplývá z této věty:

Věta 42. *Pro každé $n > 2$ existuje n-rozměrný simplex, který není rovnostranný a který má jediný význačný bod.*

D ů k a z. Podle věty 4 existuje simplex Σ se čtverci délek hran $e_{ij} = 2 - \cos \dfrac{2\pi(i-j)}{n+1}$ pro $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n+1$, $e_{ii} = 0$, neboť $\sum_{i,j=1}^{n+1} e_{ij} x_i x_j =$

$$= 2\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - \sum_{i,j=1}^{n+1} \left(\cos \frac{2\pi i}{n+1} \cos \frac{2\pi j}{n+1} + \sin \frac{2\pi i}{n+1} \sin \frac{2\pi j}{n+1}\right) x_i x_j =$$

$$= 2\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i \cos \frac{2\pi i}{n+1}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i \sin \frac{2\pi i}{n+1}\right)^2 < 0$$

pro $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$, $(x) \neq (0)$. Tento simplex není rovnostranný. Protože lineární

[11]) Plyne to ostatně ze známých vět z elementární geometrie v E_n, že těžiště dělí těžnice ve stejném poměru, že n-dimensionální obsah simplexu je až na faktor $\frac{1}{n}$ roven součinu $(n - 1)$-dimensionálního obsahu stěny a délky příslušné výšky a z věty, že splynou-li dva z uvedených bodů, splynou všechny tři (z věty 30).

transformace prostoru, která převádí vrcholy simplexu O_1 v O_2, O_2 v O_3, ..., O_{n+1} v O_1, zachovává délky všech hran simplexu, je to isometrie a v grupě automorfismů simplexu Σ lze každý vrchol O_i převést v každý jiný. Má tedy grupa automorfismů tohoto simplexu jediný systém transitivity. Podle věty 20 (z druhé části) má Σ jediný význačný bod (těžiště), což jsme měli dokázat.

Než přejdeme k dalším typům simplexů, dokážeme tuto pomocnou větu.

Věta 43. *Nutná a postačující podmínka, aby existoval v E_n, $n > 1$, simplex, jehož čtverce délek hran e_{ij} vyhovují (kromě $e_{ii} = 0$) pro $i \neq j$ vztahům (α, β, t_i reálná)*

$$e_{ij} = \alpha(t_i^2 + t_j^2) + 2\beta t_i t_j\,, \tag{8,15}$$

je, aby jednak

$$\alpha + \beta > 0\,, \tag{8,16}$$

jednak, aby nastala jedna z těchto eventualit:

A) *pro všechna $i = 1, \ldots, n+1$ je $t_i \neq 0$ a platí*

$$\beta\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{t_i}\right)^2 + (\alpha - n\beta) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{t_i^2} > 0\,; \quad ^{12)} \tag{8,17}$$

B) *právě pro jeden index k je $t_k = 0$, a přitom*

$$\alpha > (n-1)\beta\,. \tag{8,18}$$

Důkaz. Podle obecné věty 4 je podmínka existence simplexu ekvivalentní s tím, že pro každou nenulovou soustavu (reálných) čísel $x_1, \ldots, x_{n+1}$ takovou, že $\sum_i x_i = 0$,[13]) platí $\sum_{i,j} e_{ij} x_i x_j < 0$. Avšak po snadném výpočtu

$$\sum_{i,j} e_{ij} x_i x_j = 2\alpha \sum_i t_i^2 x_i \sum_i x_i + 2\beta(\sum_i t_i x_i)^2 - 2(\alpha + \beta) \sum_i t_i^2 x_i^2\,; \tag{8,19}$$

stačí tedy vyšetřit, kdy pro $\sum_i x_i = 0$ je

$$f = \beta(\sum_i t_i x_i)^2 - (\alpha + \beta) \sum_i t_i^2 x_i^2 < 0\,. \tag{8,20}$$

Kdyby předně $\alpha + \beta \leqq 0$, pak by pro každé nenulové společné řešení rovnic $\sum_i x_i = 0$, $\sum_i t_i x_i = 0$ bylo $f \geqq 0$. Odtud plyne nutnost (8,16).

Nechť tedy platí (8,16), nechť všechna $t_i \neq 0$ a nechť neplatí (8,17). Potom pro

$$x_k = \frac{1}{t_k} \sum_i \frac{1}{t_i^2} - \frac{1}{t_k^2} \sum_i \frac{1}{t_i}$$

---

[12]) Vzhledem k (8,16) je podle Schwarzovy nerovnosti tato podmínka splněna automaticky pro $\alpha > n\beta$ (anebo pro $\alpha = n\beta$ a $\sum_{-}^{n+1} \frac{1}{t_i} \neq 0$).

[13]) Ve všech součtech v tomto důkazu se u indexů i, j sčítá od 1 do $n + 1$.

je

$$\sum_i x_i = 0\,,$$

avšak

$$f = \beta\left[(n+1)\sum_i \frac{1}{t_i^2} - \left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2\right]^2 - (\alpha+\beta)\left[(n+1)\left(\sum_i \frac{1}{t_i^2}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2 \sum_i \frac{1}{t_i^2}\right] = -\left[(n+1)\sum_i \frac{1}{t_i^2} - \left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2\right]\left[\beta\left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + (\alpha - n\beta)\sum_i \frac{1}{t_i^2}\right] \geqq 0\,,$$

neboť první závorka je podle Schwarzovy nerovnosti nezáporná a druhá podle předpokladu o (8,17) nekladná. Příslušný simplex tedy v tomto případě neexistuje.

Nechť opět platí (8,16) a nechť pro alespoň jedno k je $t_k = 0$. Je-li pro $l \neq k$ také $t_l = 0$, je $e_{kl} = 0$ a simplex neexistuje. Nechť tedy všechna ostatní t_l jsou nenulová; předpokládejme, že neplatí (8,18). Potom pro

$$x_k = -\sum_{i, i \neq k} \frac{1}{t_i}\,, \quad x_i = \frac{1}{t_i} \text{ pro } i \neq k, \text{ je } \sum_i x_i = 0\,,$$

a přitom příslušné

$$f = \beta n^2 - (\alpha+\beta)\,n = n[(n-1)\,\beta - \alpha] \geqq 0\,.$$

Tím jsme ukázali, že uvedená podmínka ve větě je nutná.

Předpokládejme teď, že platí podle A) nerovnosti (8,16) a (8,17). Nechť $x_1, \ldots, x_{n+1}$ je nějaká nenulová soustava, pro kterou $\sum_i x_i = 0$. Dokážeme, že $f < 0$. Rozlišujme tyto případy:

1. $\beta \leqq 0$; podle (8,16) a (8,20) je zřejmě $f < 0$;

2. $\beta > 0$, $\alpha > n\beta$; potom $f = \beta(\sum_i t_i x_i)^2 - (\alpha+\beta)\sum_i t_i^2 x_i^2 < \beta[(\sum_i t_i x_i)^2 - (n+1)\,.\sum_i t_i^2 x_i^2] \leqq 0$;

3. $\beta > 0$, $\alpha = n\beta$; pak $f = \beta[(\sum_i t_i x_i)^2 - (n+1)\sum_i t_i^2 x_i^2] \leqq 0$; přitom však nemůže nastat rovnost: pak by totiž pro $\lambda \neq 0$ bylo $x_i = \dfrac{\lambda}{t_i}$, $\sum_i \dfrac{1}{t_i} = 0$, což vede ke sporu s (8,17);

4. $\beta > 0$, $\alpha < n\beta$; je opět $\sum_i \dfrac{1}{t_i} \neq 0$ vzhledem k (8,17). Platí tedy postupně

$$f = \beta(\sum_i t_i x_i)^2 - (\alpha + \beta)\sum_i t_i^2 x_i^2 = \frac{1}{n+1}\Big\{(n\beta - \alpha)(\sum_i t_i x_i)^2 -$$

$$-(\alpha + \beta)[(n+1)\sum_i t_i^2 x_i^2 - (\sum_i t_i x_i)^2]\Big\} =$$

$$= \frac{n\beta - \alpha}{(n+1)\left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2}\left\{-\frac{\alpha + \beta}{n\beta - \alpha}\left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2\left[(n+1)\left(\sum_i t_i x_i\right)^2 - \sum_i t_i^2 x_i^2\right] + \right.$$

$$\left. + \left[(n+1)\sum_i x_i - \sum_i \frac{1}{t_i}\sum_i t_i x_i\right]^2\right\} <$$

$$< \frac{n\beta - \alpha}{(n+1)\left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2}\left\{\left[(n+1)\sum_i x_i - \sum_i \frac{1}{t_i}\sum_i t_i x_i\right]^2 - \right.$$

$$\left. - \left[(n+1)\sum_i \frac{1}{t_i^2} - \left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2\right]\left[(n+1)\sum_i t_i^2 x_i^2 - \left(\sum_i t_i x_i\right)^2\right]\right\} =$$

$$= \frac{n\beta - \alpha}{(n+1)\left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2}\left\{\left[\sum_{\substack{i,j\\ i<j}}\left(\frac{1}{t_i} - \frac{1}{t_j}\right)(t_i x_i - t_j x_j)\right]^2 - \right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{i,j\\ i<j}}\left(\frac{1}{t_i} - \frac{1}{t_j}\right)^2 \sum_{\substack{i,j\\ i<j}}(t_i x_i - t_j x_j)^2\right\} \leqq 0$$

podle Schwarzovy nerovnosti.

Zbývá dokázat, že je-li splněno B), t. j. $t_k = 0$, $t_l \neq 0$ pro $l \neq k$, a (8,18), že pro $(x_i) \neq (0)$, $\sum_i x_i = 0$ je $f < 0$. Rozlišujme dva případy:

1. $\beta \leqq 0$; pak podle (8,16) a (8,20) je zřejmě $f < 0$;
2. $\beta > 0$; potom

$$f = \beta(\sum_{\substack{i\\ i \neq k}} t_i x_i)^2 - (\alpha + \beta)\sum_{\substack{i\\ i \neq k}} t_i^2 x_i^2 <$$

$$< \beta[(\sum_{\substack{i\\ i \neq k}} t_i x_i)^2 - n\sum_{\substack{i\\ i \neq k}} t_i^2 x_i^2] \leqq 0\,.$$

Tím je věta 43 úplně dokázána.

Uveďme teď několik vět o určitých typech simplexů; o dimensi E_n v nich předpokládejme, že $n > 1$.

Věta 44. *Nutná a postačující podmínka, aby v simplexu o vrcholech $O_1, O_2, \ldots O_{n+1}$ v E_n existoval vlastní bod $P \neq O_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n+1$, takový, že úhly (neorientovaných) přímek PO_i, PO_j pro $i \neq j$ jsou si vesměs navzájem rovny,*[13]) *je, aby platilo* (8,15) *pro $\alpha = n\beta$ a $t_i \neq 0$.*

[13]) Bod P je pak zřejmě zobecněným Torricelliho bodem trojúhelníka (viz Enciclopedia [4], str. 193).

Důkaz. Nechť předně v simplexu $O_1, \ldots, O_{n+1}$ existuje bod P uvedených vlastností. To znamená, že existuje v E_n rovnostranný simplex $\overline{O}_1, \overline{O}_2, \ldots, \overline{O}_{n+1}$ o hraně délky $c > 0$ s těžištěm P tak, že vrcholy daného simplexu O_i leží na přímkách $P\overline{O}_i$. Jsou-li (v barycentrických souřadnicích vzhledem k simplexu $\overline{O}_1, \ldots, \overline{O}_{n+1}$) O_i body [14]) $O_i = (z_k^i)$, $z_k^i = 1 - t_i + (n+1)\, t_i \delta_{ik}$, $t_i \neq 0$ vzhledem k $P \neq O_i$, pak čtverce vzdáleností bodů O_i, O_j jsou[15]) pro $i \neq j$

$$e_{ij} = c^2 \left[- \frac{\sum\limits_{k \neq l} z_k^i z_l^i}{2\left(\sum\limits_k z_k^i\right)^2} + \frac{\sum\limits_{k \neq l} z_k^i z_l^j}{\sum\limits_k z_k^i \sum\limits_l z_l^j} - \frac{\sum\limits_{k \neq l} z_k^j z_l^j}{2\left(\sum\limits_k z_k^j\right)^2} \right] =$$

$$= \frac{c^2}{2(n+1)^2} [-(n+1)^2 + (n+1)(1-t_i)^2 + 2(n+1)\, t_i(1-t_i) + (n+1)^2 t_i^2 +$$
$$+ 2(n+1)^2 - 2(n+1)(1-t_i)(1-t_j) - 2(n+1)\, t_i(1-t_j) -$$
$$- 2(n+1)\, t_j(1-t_i) - (n+1)^2 + (n+1)(1-t_j)^2 + 2(n+1)\, t_j \,.$$
$$. (1-t_j) + (n+1)^2\, t_j^2] = \frac{c^2}{2(n+1)} [n(t_i^2 + t_j^2) + 2t_i t_j] \,,$$

t. j. skutečně tvaru (8,15) pro $\alpha = n\beta$, $t_i \neq 0$.

Jestliže obráceně v simplexu platí (8,15) pro $\alpha = n\beta$ a $t_i \neq 0$, pak se výpočtem z (2,9) a (8,19) pro $\alpha = n\beta$ zjistí, že pro vlastní bod $P = \left(\frac{1}{t_i}\right)$ v barycentrických souřadnicích[16]) je $\varrho^2(O_i, P) = \alpha t_i^2$. Z kosinové věty pro trojúhelník $O_i, O_j, P, i \neq j$, ihned plyne, že kosinus úhlu přímek PO_i, PO_j je roven $\frac{1}{n}$, a tedy stejný pro všechny dvojice $i, j, i \neq j$.

Věta 45. *Nutná a postačující podmínka, aby dotykové body $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ $(n-1)$-koule, vepsané*[17]) *simplexu s vrcholy $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$, v příslušných stěnách ω_i měly vlastnost, že přímky P_iO_i procházejí týmž bodem Q, je, aby platilo* (8,15) *pro $\alpha = (n-1)\,\beta$ a $t_i \neq 0$.*

Důkaz. Nechť předně v simplexu existuje bod Q uvedené vlastnosti. Protože dotykové body vepsané $(n-1)$-koule leží vždy v jediné $(n-1)$-rozměrné stěně, neleží bod $Q = (q_i)$ v žádné stěně, $q_i \neq 0$ pro $i = 1, \ldots, n+1$. Dále existuje jediná (regulární) kvadrika, dotýkající se stěn ω_i v průmětech P_i bodu Q z O_i, o rovnici

$$n \sum_i \left(\frac{x_i}{q_i}\right)^2 - \left(\sum_i \frac{x_i}{q_i}\right)^2 = 0 \,. \quad ^{18)} \qquad (8,21)$$

Poněvadž je to právě vepsaná $(n-1)$-koule podle předpokladu, má (8,21) také rovnici (podle (5,1))

[14]) Vhodnou volbou t_i toho lze vždy dosáhnout.
[15]) V těchto vzorcích se sčítá pro k, l od 1 do $n+1$.
[16]) Bod P je vlastní podle poznámky [12]) na str. 24.
[17]) V širším slova smyslu, přesněji vepsané nebo připsané.
[18]) To je projektivně ekvivalentní věta s větou 24 pro $n - 1$. Bod Q je zobecněným Gergonneovým bodem (viz Enciclopedia [4], str. 190).

$$\alpha_0 \sum_{i,j} e_{ij} x_i x_j - 2 \sum_i x_i \sum_i \alpha_i x_i = 0 \,; \quad \alpha_0 \neq 0 \,;$$

srovnáním vyplývá $\alpha_i = -\dfrac{n-1}{2q_i^2}$; pro $i \neq j$

$$-2\alpha_0 e_{ij} = (n-1)\left(\frac{1}{q_i^2} + \frac{1}{q_j^2}\right) + \frac{2}{q_i q_j},$$

t. j. platí (8,15) pro $\alpha = (n-1)\,\beta$ a $t_i = \dfrac{1}{q_i}$.

Obráceně se snadno zjistí, že pro $\alpha = (n-1)\,\beta$ a $t_i = \dfrac{1}{q_i}$ je (8,21) rovnice vepsané $(n-1)$-koule a že bod $Q = \left(\dfrac{1}{t_i}\right)$ má uvedenou vlastnost.

Věta 46. *Nutná a postačující podmínka, aby v simplexu v E_n existovala $(n-1)$-koule, dotýkající se všech jeho (i prodloužených) hran, je, aby platilo (8,15) pro $\alpha = \beta$ a $t_i \neq 0$.*

Potom existuje bod R, který leží ve všech nadrovinách, spojujících dotykový bod v některé hraně s $(n-2)$-dimensionální stěnou, protější k této hraně.[19])

Důkaz. Nechť předně existuje $(n-1)$-koule, jak o ní mluví věta. Její rovnice budiž podle věty 5

$$\alpha_0 \sum_{i,j} e_{ij} x_i x_j - 2 \sum_i x_i \sum_i \alpha_i x_i = 0 \,, \quad \alpha_0 \neq 0 \,.$$

Poněvadž se pro $i \neq j$ podle předpokladu dotýká hrany $O_i O_j$, je diskriminant rovnice

$$-\alpha_i x_i^2 + (\alpha_0 e_{ij} - \alpha_i - \alpha_j)\, x_i x_j - x_j x_j^2 = 0$$

roven nule,

$$(\alpha_0 e_{ij} - \alpha_i - \alpha_j)^2 = 4\alpha_i \alpha_j \,.$$

Odtud plyne, že všechna nenulová α_k jsou téhož znamení; nechť $\alpha_i \geqq 0$. Pak

$$\alpha_0 e_{ij} = \alpha_i + \alpha_j + 2\varepsilon_{ij} \sqrt{\alpha_i} \sqrt{\alpha_j} = (\sqrt{\alpha_i} + \varepsilon_{ij} \sqrt{\alpha_j})^2 \,, \qquad (8,22)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \pm 1 \,.$$

Ukážeme, že platí pro $i \neq j \neq k \neq i$

$$\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jk} = 1 \,. \qquad (8,23)$$

Kdyby totiž $\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jk} = -1$, pak by pro $x_l = 0$ pro $l \neq i, j, k$, $x_i + x_j + x_k = 0$ platilo předně $\sum\limits_{r=1}^{n+1} x_r = 0$, jednak po úpravě

$$\sum_{p,q} e_{pq} x_p x_q = e_{ij} x_i x_j + e_{ik} x_i x_k + e_{jk} x_j x_k = -\alpha_i x_i^2 - \alpha_j x_j^2 -$$
$$- \alpha_k x_k^2 + 2\varepsilon_{ij} \sqrt{\alpha_i} \sqrt{\alpha_j} x_i x_j + 2\varepsilon_{ik} \sqrt{\alpha_i} \sqrt{\alpha_k} x_i x_k +$$
$$+ 2\varepsilon_{jk} \sqrt{\alpha_j} \sqrt{\alpha_k} x_j x_k = -(\varepsilon_{jk} \sqrt{\alpha_i} x_i + \varepsilon_{ik} \sqrt{\alpha_j} x_j + \varepsilon_{ij} \sqrt{\alpha_k} x_k)^2 \,,$$

---

[19]) Tento bod R je tedy jiným zobecněním Gergonneova bodu trojúhelníka.

což nabývá pro některá nenulová $x_i, x_j, x_k, x_i + x_j + x_k = 0$; hodnoty nula ve sporu s větou 4.

Označme nyní $t_1 = \sqrt{\alpha_1}$ a definujme pro $i > 1$ $t_i = \varepsilon_{1i}\sqrt{\alpha_i}$. Potom platí podle (8,22)

$$\alpha_0 e_{1i} = (t_1 + t_i)^2 \text{ pro } i > 1 ;$$

jsou-li $i, j > 1$, $i \neq j$, pak

$$\alpha_0 e_{ij} = (\varepsilon_{1i} t_i + \varepsilon_{ij}\varepsilon_{1j} t_j)^2 = (t_i + t_j)^2$$

podle (8,23). Platí tedy

$$\alpha_0 e_{ij} = t_i^2 + t_j^2 + 2t_i\, t_j\,,$$

t. j. skutečně (8,15) pro $\alpha = \beta$. Kdyby některé $t_k = 0$, pak podle věty 43 by platilo (8,18), tedy $\alpha > (n - 1)\,\alpha$, což je spor s $n > 1$.

Snadno se zjistí, že potom bod $R = \left(\frac{1}{t_i}\right)$ má vlastnost uvedenou ve větě.

Obráceně, platí-li (8,15) pro $\alpha = \beta$ a $t_i \neq 0$, je, jak plyne z (8,19),

$$2\sum_i t_i^2 x_i^2 - (\sum_i t_i x_i)^2 = 0$$

rovnice $(n - 1)$-koule, která se dotýká hran v průmětech bodu $R = \left(\frac{1}{t_i}\right)$ z protější $(n - 2)$-rozměrné stěny. Tím je věta 46 dokázána.

Věta 47. *Nutná a postačující podmínka, aby pro simplex v E_n mělo $\frac{1}{2}(n^2 - 1)\,n$ $(n - 1)$-sfér $K_{ij}^k = K_{ji}^k$, $i \neq j \neq k \neq i$, které budeme nazývat Apolloniovými $(n - 1)$-sférami simplexu*[20]*), společný vlastní bod,*[21]*) je, aby pro $\alpha = 0$ platilo (8,15) a $t_i \neq 0$.*

Důkaz. Nechť předně se všechny K_{ij}^k protínají ve (vlastním) bodě $D = (d_i)$. Ze vztahu v poznámce[20]) plyne, že K_{ij}^k má rovnici

$$e_{ik}[\sum_{p,q=1}^{n+1} e_{pq} x_p x_q - 2\sum_p e_{jp} x_p \sum_q x_q] -$$
$$- e_{jk}[\sum_{p,q=1}^{n+1} e_{pq} x_p x_q - 2\sum_p e_{ip} x_p \sum_q x_q] = 0\,. \qquad (8,23)$$

Označíme-li t_i čísla

$$t_i = \sum_{p,q=1}^{n+1} e_{pq} d_p d_q - 2\sum_p e_{ip} d_p \sum_q d_q\,,$$

nejsou všechna rovna nule, neboť pak by $D = O_1, D = O_2, \ldots, D = O_{n+1}$ (je $\varrho^2(D, O_i) = -\dfrac{t_i}{2(\sum \alpha_i)^2}\Big)$.

[20]) K_{ij}^k je $(n - 1)$-sféra, která obsahuje právě ty body $X \in E_n$, pro které $\overline{XO_i} : \overline{XO_j} = \overline{O_k O_i} : \overline{O_k O_j}$.

[21]) Takový bod je zobecněním isodynamického centra trojúhelníka (viz Enciclopedia [4], str. 194).

Budiž tedy $t_k \neq 0$ a nechť $l \neq k$; pro index i, $i \neq l \neq k \neq i$, který vzhledem k $n > 1$ existuje, platí podle (8,23), které bod D vyhovuje, $e_{ik}t_l = e_{il}t_k$, takže i $t_l \neq 0$ pro $l \neq k$. Z (8,23) pak plyne, že čísla $\frac{e_{ik}}{t_it_k}$ jsou pro $i \neq k$ vesměs navzájem stejná, že tedy

$$e_{ij} = \varrho t_i t_j\,; \tag{8,24}$$

platí tudíž skutečně (8,15) a $t_i \neq 0$.

Jestliže obráceně jsou splněny vztahy (8,24), pak se snadno zjistí, že bod $D = \left(\frac{c}{t_i} + \frac{1}{t_i^2}\right)$, kde c je kořenem rovnice $n(n+1)\,c^2 + 2cn\sum\frac{1}{t_i} + \left(\sum\frac{1}{t_i}\right)^2 - \sum\frac{1}{t_i^2} = 0$ (její diskriminant je $n\left[(n+1)\sum\frac{1}{t_i^2} - \left(\sum\frac{1}{t_i}\right)^2\right] \geqq 0$ a tedy c existuje), vyhovuje všem rovnicím (8,23) a má tedy vlastnost vyslovenou ve větě.

Než uvedeme další větu, podáme dvě definice. Nazveme *pravidelnou $(n+1)$-hvězdou* množinu $n+1$ navzájem různých orientovaných přímek v E_n, procházejících jedním bodem (*středem* hvězdy) a svírajících navzájem týž úhel.[22]) Dále nazveme *neúplnou n-hvězdou* množinu n navzájem různých orientovaných přímek v E_n, procházejících jedním bodem, neležících v nadrovině a svírajících navzájem týž úhel.

Věta 48. *Nutná a postačující podmínka, aby k danému simplexu v E_n existovala v E_{n+1}, obsahujícím E_n, neúplná $(n+1)$-hvězda tak, že vrcholy tohoto simplexu jsou průsečíky přímek této $(n+1)$-hvězdy s E_n, je, aby platilo* (8,15) *pro $\alpha > n\beta$ a $t_i \neq 0$.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že existuje v E_{n+1} neúplná $(n+1)$-hvězda uvedených vlastností. Potom existuje simplex v E_{n+1} s vrcholy O_1', $O_2', \ldots, O_{n+2}'$ tak, že přímky $(n+1)$-hvězdy jsou přímky $O_{n+2}'O_i'$ pro $i < n+2$ a že pro nějaká čísla $\bar\alpha$, $\bar\beta$ platí (pro $i, j < n+2$, $i \neq j$)

$$\varrho^2(O_i', O_{n+2}') = \bar\alpha\,, \quad \varrho^2(O_i', O_j') = 2(\bar\alpha + \bar\beta)\,. \tag{8,25}$$

Protože vrcholy O_i daného simplexu jsou různé od O_{n+2}' a leží na přímkách $O_{n+2}'O_i'$ (tak lze body O_i' očíslovat), existují čísla φ_i, $i = 1, \ldots, n+1$, tak, že v barycentrických souřadnicích vzhledem k simplexu $O_1', \ldots, O_{n+2}'$ je

$$\begin{aligned}
O_1 &= (1, 0, \ldots, 0, \varphi_1 - 1)\,,\\
O_2 &= (0, 1, \ldots, 0, \varphi_2 - 1)\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
O_{n+1} &= (0, 0, \ldots, 1, \varphi_{n+1} - 1)\,.
\end{aligned}$$

[22]) Je to na př. množina orientovaných přímek TO_i, kde O_i jsou vrcholy a T těžiště rovnostranného simplexu v E_n. Jestliže obráceně zvolíme na přímkách pravidelné $(n+1)$-hvězdy se středem T body O_i ve stejné (orientované) vzdálenosti od T, dostaneme rovnostranný simplex $O_1, \ldots, O_{n+1}$ s těžištěm T. Ze vzorců (3,2) pro úhel orientovaných přímek se zjistí, že úhel φ dvou z těchto přímek je už jednoznačně určen a že $\cos\varphi = -\frac{1}{n}$.

Čísla φ_i jsou nenulová, neboť O_i jsou vlastní body E_n, a tedy i E_{n+1}. Pro čtverce vzdáleností bodů O_i, O_j pro $i \neq j$, t. j. pro e_{ij}, platí podle (2,9) vzhledem k

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n+1} e'_{\mu\nu} x'_\mu x'_\nu = 2(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} x'_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{n+1} x'^2_i \right] + 2\bar{\alpha} x'_{n+2} \sum_{i=1} x'_i :$$

$$e_{ij} = -\frac{2\bar{\alpha}(\varphi_i - 1)}{2\varphi_i^2} + \frac{2(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) + \bar{\alpha}(\varphi_i - 1) + \bar{\alpha}(\varphi_j - 1)}{\varphi_i \varphi_j} - \frac{2\bar{\alpha}(\varphi_j - 1)}{2\varphi_j^2} =$$

$$= \bar{\alpha} \left(\frac{1}{\varphi_i^2} + \frac{1}{\varphi_j^2} \right) + \frac{2\bar{\beta}}{\varphi_i \varphi_j} .$$

Je tedy vztah (8,15) splněn pro $\alpha = \bar{\alpha}$, $\beta = \bar{\beta}$, $t_i = \dfrac{1}{\varphi_i} \neq 0$. Že je $\alpha > n\beta$, plyne z existence simplexu $O'_1, \ldots, O'_{n+2}$: pro $x'_i = 1$, $i = 1, \ldots, n + 1$, $x'_{n+2} = -(n + 1)$ je $\sum_{\mu=1}^{n+2} x'_\mu = 0$, takže podle (2,9)

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n+2} e'_{\mu\nu} x'_\mu x'_\nu = 2(\bar{\alpha} + \bar{\beta})[(n + 1)^2 - (n + 1)] - 2\bar{\alpha}(n + 1)^2 =$$

$$= 2(n + 1)(n\bar{\beta} - \bar{\alpha}) < 0 .$$

Nechť obráceně platí (8,15) pro $\alpha > n\beta$ a $t_i \neq 0$. Podle věty 43 existuje v E_{n+1} simplex $O_1, O_2, \ldots, O_{n+2}$ tak, že platí (8,15) pro $i, j = 1, 2, \ldots, n + 2$, položíme-li $t_{n+2} = 0$ (je totiž splněna nerovnost (8,18) i nerovnost (8,16), která je splněna vzhledem k existenci simplexu $O_1, \ldots, O_{n+1}$). Podle kosinové věty je kosinus úhlu φ_{ij} orientovaných přímek $O_{n+2}O_i$ a $O_{n+2}O_j$ pro $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n + 1$ (přitom orientace je provedena souhlasně se směrem O_{n+2}, O_i nebo opačně podle toho, je-li $t_i > 0$ nebo $t_i < 0$), roven $\cos \varphi_{ij} = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ (je $(n + 1)\,\alpha > n(\alpha + \beta) > 0$, t. j. $\alpha > 0$), nezávisí tedy na dvojici i, j a existuje neúplná $(n + 1)$-hvězda požadované vlastnosti.

Poznámka. Snadno se zjistí, že osa neúplné hvězdy[23]) protíná E_n v bodě $B = \left(\dfrac{1}{t_i} \right)$ v barycentrických souřadnicích vzhledem k $O_1, \ldots, O_{n+1}$. Nadrovina bodem O_{n+2}, k této ose kolmá, protíná E_n v nadrovině (v E_n) o rovnici

$$\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i = 0 . \tag{8,26}$$

Nazveme nyní *pravidelnou $(n + 2)$-soustavou v E_n* množinu $n + 2$ vlastních bodů v E_n takových, že v E_{n+1}, obsahujícím E_n, existuje pravidelná $(n + 2)$-hvězda se středem mimo E_n tak, že body $(n + 2)$-soustavy jsou průsečíky přímek této hvězdy s E_n.

---

[23]) Je to orientovaná přímka společným průsečíkem, svírající se všemi přímkami hvězdy týž úhel. Osa existuje právě jedna (může být různě orientována).

Věta 49. *Nutná a postačující podmínka, aby soustava $n + 2$ bodů $O_0, O_1, \ldots, O_{n+1}$ v E_n byla pravidelná, je, aby existovala nenulová čísla $t_0, t_1, \ldots, t_{n+1}$ tak, že*

$$\sum_{r=0}^{n+1} \frac{1}{t_r} = 0 \tag{8,27}$$

a že

$$\varrho^2(O_r, O_s) = (n + 1)(t_r^2 + t_s^2) + 2t_r t_s \,. \tag{8,28}$$

Důkaz. Nechť předně soustava $n + 2$ vlastních bodů $O_0, \ldots, O_{n+1}$ v E_n je pravidelná. Pak v nějakém E_{n+1}, obsahujícím E_n, existuje bod O_{n+2} (nikoliv v E_n) tak, že (podle pozn.[22]) na str. 202) pro úhly ψ_{ij} orientovaných (v $(n + 2)$-hvězdě) přímek $O_{n+2}O_r$, $O_{n+2}O_s$ je $\cos \psi_{rs} = -\dfrac{1}{n + 1}$. Označíme-li orientované vzdálenosti bodů $O_{n+2}O_r$ čísly $t_r\sqrt{n + 1}$, platí podle kosinové věty skutečně (8,28).

Kdyby $\sum\limits_{r=0}^{n+1} \dfrac{1}{t_r} \neq 0$, pak by podle poznámky[12]) na str. 196 existoval v E_{n+1} simplex $\bar{O}_0, \ldots, \bar{O}_{n+1}$ ve sporu (vzhledem k jednoznačnosti útvaru $O_0, \ldots, O_{n+1}$ až na isometrii) s tím, že body $O_0, \ldots, O_{n+1}$ jsou lineárně závislé a mají stejné vzdálenosti. Odtud plyne (8,27).

Nechť obráceně pro $n + 2$ bodů v E_n platí (8,27) a (8,28). Podle věty 48 existuje v E_{n+1}, obsahujícím E_n, simplex $O_1, O_2, \ldots, O_{n+2}$ tak, že vhodně orientované přímky $O_{n+2}O_i$ svírají navzájem úhel φ, $\cos \varphi = -\dfrac{1}{n + 1}$. Lze tedy osu této neúplné $(n + 1)$-hvězdy orientovat tak, že připojením této osy vznikne v E_{n+1} pravidelná $(n + 2)$-hvězda. Věta bude dokázána, ukážeme-li, že průsečík O_0^* osy s E_n, který má podle poznámky na str. 203 barycentrické souřadnice (vzhledem k $O_1, \ldots, O_{n+1}$) $O_0^* = \left(\dfrac{1}{t_1}, \dfrac{1}{t_2}, \ldots, \dfrac{1}{t_{n+1}}\right)$, splývá s O_0. Snadno se však zjistí, že čtverce vzdáleností bodu O_0^* od O_i jsou vzhledem k (8,27) rovny

$$(n + 1)(t_i^2 + t_{n+2}^2) + 2t_i t_{n+2}\,,$$

takže jsou stejné jako pro bod O_0. Podle pomocné věty ve větě 2 tedy body O_0 a O_0^* splývají.

Vzhledem k poznámce[12]) na str. 196 odtud ihned plyne věta:

Věta 50. *Nutná a postačující podmínka, aby vrcholy simplexu $O_1, \ldots, O_{n+1}$ v E_n bylo možno doplnit dalším bodem O_0 v pravidelnou $(n + 2)$-soustavu, je, aby pro simplex platilo (8,15) pro $\alpha = (n + 1)\,\beta$ a $t_i \neq 0$, $\sum \dfrac{1}{t_i} \neq 0$. Bod O_0 má pak barycentrické souřadnice $O_0 = \left(\dfrac{1}{t_i}\right)$.*

Pro úplnost vyslovíme zřejmou větu, vyplývající z vět o ortocentrických simplexech:

Věta 51. *Nutná a postačující podmínka, aby simplex $O_1, \ldots, O_{n+1}$ v E_n byl kladně ortocentrický, je, aby platilo* (8,15) *pro* $\beta = 0$ *a* $t_i \neq 0$.

Věta 44 až 51 ukazují, že řadu typů simplexů lze zahrnout do širší třídy simplexů tvaru (8,15) s $t_i \neq 0$. Z jednotlivých vět je patrno, že v nich hraje roli bod $\left(\frac{1}{t_i}\right)$ (tak i ve větě 51 je bod $\left(\frac{1}{t_i}\right)$ totožný s některým z bodů S ve větě 38). Všechny uvedené typy zachytíme touto definicí, v níž předpokládáme $n > 1$.

Bod H simplexu (vlastní nebo nevlastní) se nazývá *hlavním bodem simplexu* (a příslušný simplex *simplexem s hlavním bodem*), jestliže je *buď* $H \neq T$ (T je těžiště simplexu) a platí

a) H neleží na žádné $(n - 1)$-rozměrné stěně simplexu;

b) kvadratická polára Q bodu H vzhledem k simplexu je rotační kolem osy HS, kde S je střed Q (je $S \neq H$ a přímka HS je vlastní[24])), *anebo* $H = T$ a simplex je rovnostranný.[25])

Věta 52. *Nechť* $\sum$ *je simplex s hlavním bodem* $H \neq T$. *Ve svazku kvadrik určeném kvadratickou polárou* Q *bodu* H *vzhledem k* $\sum$ *a dvojnásobnou lineární polárou bodu* H *dle* $\sum$ *existuje právě jedna* $(n - 1)$*-sféra.*[26])

Důkaz. Že v uvedeném svazku kvadrik existuje nejvýše jedna $(n - 1)$-sféra, plyne odtud, že podle poznámky na předchozí straně je lineární polára bodu H vlastní nadrovina, a tedy její čtverec nemůže patřit do svazku $(n - 1)$-sfér. Že existuje alespoň jedna $(n - 1)$-sféra, vzhledem k $n > 1$ vyplývá takto: každá kvadrika uvedeného svazku kvadrik je rotační kolem osy HS, kde S je střed kvadratické poláry, neboť i lineární polára bodu H má tuto vlastnost. Protože však v rovině platí, že k regulární kuželosečce a vlastní přímce, kolmé k ose této kuželosečky, existuje alespoň jedna 1-sféra (reálná, bodová nebo formálně reálná kružnice) ve svazku určeném touto kuželosečkou a dvojnásobnou přímkou, platí i naše věta.

Definice. Je-li Σ simplex s hlavním bodem $H \neq T$, pak $(n - 1)$-sféru z věty 52 budeme nazývat *hlavní* $(n - 1)$*-sférou*, polární nadrovinu bodu H vzhledem k simplexu (čili vzhledem k této hlavní $(n - 1)$-sféře) *hlavní nadrovinou* sim-

---

[24]) Kdyby $S = H$, pak by pro $H = (h_i)$ v barycentrických souřadnicích $Q \equiv \left(\sum_i \frac{x_i}{h_i}\right)^2 - \sum_i \frac{x_i^2}{h_i^2} = 0$ byla polára bodu H dle Q o rovnici $\sum_i \frac{x_i}{h_i} = 0$ nevlastní nadrovina a $H = T$. Je-li bod H nevlastní, pak střed kvadriky Q je bod $S = (h_i^2)$ a je tedy vlastní.

[25]) Vylučujeme tedy případ, kdy $H = T$, kvadratická polára je rotační, ale simplex není rovnostranný.

[26]) V širším slova smyslu, t. j. reálná, bodová nebo formálně reálná.

plexu, osu rotace kvadratické poláry bodu H *hlavní osou*. Dále nazveme hlavní bod *hlavním bodem typu* μ, platí-li, že dvojpoměr

$$(P, Q, L^2, K) = -\mu\,, \tag{8,29}$$

kde L je lineární polára bodu H dle simplexu, Q kvadratická polára, P polární kvadrika dle simplexu[27]) ve svazku určeném Q a L^2 a K hlavní $(n - 1)$-sféra. Je-li pro simplex s hlavním bodem $H = T$ (t. j. simplex je rovnostranný), pak typem μ označíme libovolné číslo $\mu \neq -1$.[28]) Dále hlavní $(n - 1)$-sféru K k bodu H a typu μ definujeme vztahem (8,29).

Poznámka. Slovo „hlavní" v definicích má ten smysl, že útvar patří k příslušnému hlavnímu bodu. Nebudeme se zde zabývat otázkou, zda simplex může mít několik hlavních bodů (to se ostatně může stát). Je-li však dán hlavní bod, potom všechny ostatní hlavní útvary i typ už jsou jednoznačně stanoveny (kromě případu $H = T$).

Věta 53. *Nerovnostranný simplex v E_n má hlavní bod typu μ tehdy a jen tehdy, existují-li reálná čísla $t_1, \ldots, t_{n+1}, \alpha, \beta$ ($t_i \neq 0$ pro $i = 1, \ldots, n + 1$) tak, že pro čtverce délek hran simplexu platí ($i \neq j$)*

$$e_{ij} = \alpha(t_i^2 + t_j^2) + 2\beta t_i t_j\,, \tag{8,15'}$$

kde

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta}\,.\ ^{29}) \tag{8.30}$$

Důkaz. Nechť předně v simplexu existuje hlavní bod $H = (h_i)$ (v barycentrických souřadnicích) typu μ. Potom v (8,29) je ($h_i \neq 0$)

$$L \equiv \sum_i \frac{x_i}{h_i} = 0\,, \quad P \equiv \sum_i \frac{x_i^2}{h_i^2} = 0\,, \quad Q \equiv \left(\sum_i \frac{x_i}{h_i}\right)^2 - \sum_i \frac{x_i^2}{h_i^2} = 0\,,$$

tedy $L^2 = P + Q$.

Kvadrika $K \equiv \bar\alpha P - \bar\beta Q = 0$ má dvojpoměr

$$(P, Q, L^2, K) = -\frac{\bar\alpha}{\bar\beta}\,, \tag{8,31}$$

takže podle (8,29) pro $\dfrac{\bar\alpha}{\bar\beta} = \mu$ platí, že

$$K \equiv (\bar\alpha + \bar\beta) \sum_i \frac{x_i^2}{h_i^2} - \bar\beta \left(\sum_i \frac{x_i}{h_i}\right)^2 = 0$$

je rovnicí regulární $(n - 1)$-sféry. Podle věty 14 a poznámky II za větou 15 má tedy K tvar

---

[27]) Je-li opět $H = (h_i)$, pak $P \equiv \sum_i \left(\frac{x_i}{h_i}\right)^2 = 0$.

[28]) Připouštíme i $\mu = \infty$.

[29]) Této rovnici v širším smyslu vyhovují $\beta = 0$, $\mu = \infty$.

$$\alpha_0(exx) - 2\sum_i \alpha_i x_i \sum x_i = 0 \quad \text{čili} \quad (\alpha_0 \neq 0)$$

$$(exx) = \frac{2}{\alpha_0} \sum_i \alpha_i x_i \sum x_i + \frac{1}{\alpha_0} (\bar{\alpha} + \bar{\beta}) \sum_i \frac{x_i^2}{h_i^2} - \frac{\bar{\beta}}{\alpha_0} \left(\sum_i \frac{x_i}{h_i} \right)^2 .$$

Odtud ($e_{ii} = 0$) $2\alpha_i = -\dfrac{\bar{\alpha}}{h_i^2}$, takže

$$e_{ij} = -\frac{\bar{\alpha}}{2\alpha_0} \left(\frac{1}{h_i^2} + \frac{1}{h_j^2} \right) - \frac{2\bar{\beta}}{2\alpha_0} \cdot \frac{1}{h_i h_j} .$$

Položíme-li $h_i = \dfrac{1}{t_i}$, $-\dfrac{\bar{\alpha}}{2\alpha_0} = \alpha$, $-\dfrac{\bar{\beta}}{2\alpha_0} = \beta$, pak skutečně platí (8,15') i (8,30).

Nechť obráceně platí (8,15'). Potom

$$(exx) \equiv 2\alpha \sum_i t_i^2 x_i \sum x_i + 2\beta(\sum_i t_i x_i)^2 - 2(\alpha + \beta) \sum_i t_i^2 x_i^2 ,$$

takže podle věty 14 je

$$K \equiv (\alpha + \beta) \sum_i t_i^2 x_i^2 - \beta(\sum_i t_i x_i)^2 = 0 \qquad (8,32)$$

rovnice (n — 1)-sféry. To znamená, že každá kvadrika svazku $\sigma K + \tau L^2 = 0$, kde $L \equiv \Sigma t_i x_i = 0$, je buď ($n$ — 1)-sféra, je-li L nevlastní nadrovina, anebo rotační s osou rotace r procházející středem (n — 1)-sféry K a kolmou k L, je-li L vlastní nadrovina. V prvním případě je simplex rovnostranný s hlavním bodem T, který je každého typu $\mu \neq -1$. V druhém případě je bod $H = \left(\dfrac{1}{t_i}\right)$ buď středem K pro $\alpha = n\beta$ (a pak ovšem H leží na r), nebo pro $\alpha \neq n\beta$ polára bodu H dle K je L, což opět znamená, že H leží na r. Je tedy bod H hlavním bodem simplexu, a to typu μ podle (8,30) a (8,31) pro $h_i = \dfrac{1}{t_i}$.

Z této věty ihned plyne věta:

Věta 54. *Vlastnost simplexu mít hlavní bod typu μ je dědičná, t. j., má-li simplex v E_n, $n > 2$, hlavní bod typu μ, pak každá jeho m-rozměrná stěna, $1 < m < n$, má hlavní bod typu μ* (dokonce takový hlavní bod, který vznikne promítnutím hlavního bodu simplexu do této stěny z protějšího vrcholového prostoru).

Věta 55. *Nechť m je přirozené číslo, $m \leqq n - 1$. Pro každý simplex s hlavním bodem typu m existuje (n — 1)-koule, dotýkající se všech m-rozměrných stěn simplexu. Přitom lineární prostory, spojující dotykový bod v takové stěně*[30]) *s protějším vrcholovým prostorem, procházejí jedním bodem. Tato vlastnost je charakteristická pro simplexy s hlavním bodem typu m, $m = 1, \ldots, n - 1$.*

Důkaz. Nechť $H = \left(\dfrac{1}{t_i}\right)$ je hlavní bod typu m. Z věty 53 plyne, že (8,32) pro $\alpha = m\beta$ je rovnice (n — 1)-sféry

[30]) Tento bod je pro $m > 1$ hlavním bodem (typu m) v té stěně a je tedy Torricelliho bodem této stěny (viz též pozn. [13])).

$$(m + 1)\sum_i t_i^2 x_i^2 - (\sum_i t_i x_i)^2 = 0\,. \tag{8,32'}$$

Ostatní plyne úplně analogicky jako v důkazu věty 24.

Věta 56. *Nechť $\sum$ je simplex v E_n, $n > 2$, s hlavním bodem H typu μ s osou rotace r. Pak existuje kladně ortocentrický simplex $\sum_0$, jehož dilatací[31]) ve směru osy r vznikne simplex $\sum$.*

Důkaz. Označme P_i, $i = 1, 2, \dots, n + 1$, paty kolmic spuštěných s vrcholů O_i simplexu $\sum$ na r. Je-li koeficient dilatace $k > 0$, pak dilatací dostaneme ze $\sum$ opět simplex $\sum^*$ s vrcholy $O_1^*, \dots, O_{n+1}^*$, pro jehož čtverce délek hran e_{ij}^* platí podle Pythagorovy věty

$$e_{ij}^* = e_{ij} - \varrho^2(P_i, P_j) + k^2\varrho^2(P_i, P_j)$$

čili

$$e_{ij}^* = e_{ij} + (k^2 - 1)\,\varrho^2(P_i, P_j)\,. \tag{8,33}$$

Jestliže hlavní bod H splývá s těžištěm simplexu T, je simplex rovnostranný a takový simplex $\sum_0$ existuje pro $k = 1$. Nechť tedy dále $H \neq T$. Potom bod $M = \left(\frac{1}{t_i^2}\right)$ je různý od H a je středem kvadriky P z (8,29). Leží tedy M rovněž na ose r. Bod P_k najdeme jako průsečík přímky HM s nadrovinou $\sum_i t_i x_i - t_k \sum x_i = 0$, která prochází bodem O_k kolmo k HM. Je-li $P_k = (\overset{k}{p}_i)$, platí

$$\overset{k}{p}_i = \frac{n+1}{t_i^2} - \frac{1}{t_i}\sum_j \frac{1}{t_j} + t_k\left(\frac{1}{t_i}\sum_j \frac{1}{t_j^2} - \frac{1}{t_i^2}\sum_j \frac{1}{t_j}\right),$$

takže

$$\sum_i \overset{k}{p}_i = (n + 1)\sum_i \frac{1}{t_i^2} - \left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2 = \sum_{i,j}\left(\frac{1}{t_i} - \frac{1}{t_j}\right)^2 = V > 0$$

vzhledem k $H \neq T$. Čtverec vzdálenosti P_k, P_l je tedy podle (2,9) roven

$$\varrho^2(P_k, P_l) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} e_{ij}\left(\frac{\overset{k}{p}_i}{\sum_m \overset{k}{p}_m} - \frac{\overset{l}{p}_i}{\sum_m \overset{l}{p}_m}\right)\left(\frac{\overset{k}{p}_j}{\sum_m \overset{k}{p}_m} - \frac{\overset{l}{p}_j}{\sum_m \overset{l}{p}_m}\right) = -\frac{W}{2V^2}(t_k - t_l)^2\,,$$

kde

$$W = \sum_{i,j} e_{ij} z_i z_j\,, \quad z_i = \frac{1}{t_i}\sum_j \frac{1}{t_j^2} - \frac{1}{t_i^2}\sum_j \frac{1}{t_j}\,.$$

Je-li e_{ij} dáno vztahem (8,15), pak po snadném výpočtu

$$(ezz) = -2V\left[\beta\left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2 + (\alpha - n\beta)\sum_i \frac{1}{t_i^2}\right],$$

---

[31]) Dilatací ve směru r s koeficientem $k > 0$ rozumíme transformaci v E_n, která zachovává všechny body nějaké nadroviny v, kolmé k r, zatím co ostatním vlastním bodům X, X non $\in v$, přiřazuje body X' tak, že X' leží jednak na přímce bodem X, rovnoběžné s r, jednak v témže poloprostoru dle v jako X, avšak vzdálenost bodu X' od v je k-násobek vzdálenosti X od v.

takže celkem

$$\varrho^2(P_k, P_l) = c(t_k - t_l)^2\,, \tag{8,34}$$

kde

$$c = \frac{\beta\left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2 + (\alpha - n\beta)\sum_i \frac{1}{t_i^2}}{(n+1)\sum_i \frac{1}{t_i^2} - \left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2}\,. \tag{8,35}$$

Je tedy

$$e_{ij}^* = [\alpha + c(k^2 - 1)](t_i^2 + t_j^2) + 2[\beta - c(k^2 - 1)]\,t_i t_j\,, \tag{8,36}$$

t. j.

$$e_{ij}^* = \alpha^*(t_i^2 + t_j^2) + 2\beta^* t_i t_j\,. \tag{8,15*}$$

Protože $c > 0$ podle (8,17) a $c > -\beta$ $\left(\text{neboť z (8,35) } c + \beta = \frac{\alpha + \beta}{V}\sum_i \frac{1}{t_i^2} > 0\right)$, lze najít $k > 0$ tak, aby $\beta^* = 0$. Tím je věta 56 dokázána. Zároveň je dokázána věta:

Věta 57. *Dilatací simplexu s hlavním bodem různým od těžiště ve směru hlavní osy se dostane opět simplex s hlavním bodem, který má stejné barycentrické souřadnice jako hlavní bod původního simplexu, ale případně jiný typ. Každý simplex s hlavním bodem lze utvořit dilatací z kladně ortocentrického simplexu ve směru jeho hlavní osy, procházející průsečíkem výšek a některým z bodů S z věty 24.*

Z věty 56 a 57 plynou dva důsledky:

Věta 58. *Je-li $\sum$ simplex s hlavním bodem, různým od těžiště, pak všechny výšky simplexu protínají hlavní osu.*

Důkaz. Vznikne-li totiž $\sum$ dilatací z kladně ortocentrického simplexu $\sum_0$ ve směru hlavní osy, pak výšky ortocentrického simplexu procházejí bodem na hlavní ose (neboť hlavní osa je společná všem takto vzniklým simplexům). Dilatací však každá výška zůstane v rovině, určené hlavní osou a příslušným vrcholem, takže všechny výšky protínají hlavní osu.

Věta 59. *Střed opsané $(n - 1)$-koule simplexu s hlavním bodem $H \neq T$ leží v (každé) rovině, která obsahuje hlavní osu simplexu a těžiště simplexu.*

Důkaz. Poněvadž opsaná $(n - 1)$-koule simplexu s hlavním bodem patří síti (případně degenerované), která obsahuje kvadriky P, Q a kvadriku, která odpovídá $(n - 1)$-kouli opsané ortocentrickému simplexu $\sum_0$, jehož dilatací daný simplex vznikne, leží střed této $(n - 1)$-koule v rovině (příp. přímce) středů všech kvadrik uvedené sítě. Tato rovina obsahuje osu rotace, kde leží střed Q a P, a také těžiště simplexu: střed $(n - 1)$-koule opsané $\sum_0$ leží totiž na spojnici průsečíku výšek $\sum_0$ a těžiště $\sum_0$, při dilataci však těžiště zůstane na přímce rovnoběžné s hlavní osou. Tím je věta dokázána.

Podáme teď tuto definici, kterou se zobecňuje pojem úhlu (orientovaných) $(n - 1)$-koulí:

Nechť K_1, K_2 jsou orientované regulární $(n - 1)$-sféry[32]) o čtvercích poloměrů e_1, e_2 (v širším slova smyslu, t. j. připouštíme i e_k záporná), které jsou téhož druhu, t. j. $e_1 e_2 > 0$. Nazveme *charakteristikou* té dvojice číslo

$$\chi(K_1, K_2) = \frac{e_{12} - e_1 - e_2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{e_1 e_2}}\,\varepsilon\,, \tag{8,36}$$

kde e_{12} je čtverec vzdálenosti obou středů, $\varepsilon_i = \pm 1$ je znaménko orientace K_i a $\varepsilon = \operatorname{sign} e_1 = \operatorname{sign} e_2$ je $+1$ pro K_i reálné, -1 pro K_i formálně reálné.

Pomocná věta. *Ve sférických barycentrických souřadnicích z odst.* 5 *je* (při označení jako v tomto odst.) *pro* $K_1 = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$, $K_2 = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n+1})$ *a znaménka orientací* $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \operatorname{sign} \alpha_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \operatorname{sign} \beta_0$ $(\alpha_0\beta_0 \neq 0)$, $\varepsilon_0 = \pm 1$

$$\chi(K_1, K_2) = \frac{-\eta(g\alpha\beta)}{\sqrt{(g\alpha\alpha)(g\beta\beta)}}\,, \tag{8,37}$$

kde $\eta = \operatorname{sign}(g\alpha\alpha) = \operatorname{sign}(g\beta\beta)$.

Důkaz. Pomocí vzorců (5,4) a (2,15) se zjistí, že $(\alpha_0\beta_0 \neq 0)$

$$e_{12} = -\frac{1}{2\Delta}\left[\frac{(g\alpha\alpha)}{\alpha_0^2} - 2\frac{(g\alpha\beta)}{\alpha_0\beta_0} + \frac{(g\beta\beta)}{\beta_0^2}\right], \tag{8,38}$$

$e_1 = -\dfrac{(g\alpha\alpha)}{2\Delta\alpha_0^2}$, $e_2 = -\dfrac{(g\beta\beta)}{2\Delta\beta_0^2}$. Je tedy $(g\alpha\alpha)(g\beta\beta) > 0$, $\eta = -\varepsilon \operatorname{sign} \Delta$ a

$$\chi(K_1, K_2) = \frac{-\eta(g\alpha\beta)\operatorname{sign}\alpha_0 \operatorname{sign}\beta_0}{\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{(g\alpha\alpha)(g\beta\beta)}}\,,$$

takže pro $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \operatorname{sign} \alpha_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \operatorname{sign} \beta_0$ (což pro $\varepsilon_0 = \pm 1$ zachycuje obě možnosti společné orientace) platí (8,37).

Poznámka. Mají-li K_1, K_2 společný bod, pak jejich charakteristika je kosinus úhlu obou (orientovaných) $(n - 1)$-koulí.

Věta 60. *Nechť K_1, K_2 jsou orientované regulární $(n - 1)$-sféry téhož druhu v E_n a nechť K je regulární $(n - 1)$-sféra. Označíme-li K_1^* resp. K_2^* orientované $(n - 1)$-sféry, vzniklé inversí*[33]) *K_1 resp. K_2 vzhledem ke K, pak jestliže K_1^* i K_2^* jsou opět regulární $(n - 1)$-sféry, jsou obě téhož druhu a charakteristiky obou dvojic K_1, K_2 a K_1^*, K_2^* jsou si rovny:*

$$\chi(K_1, K_2) = \chi(K_1^*, K_2^*)\,. \tag{8,39}$$

Důkaz. Bez důkazu uvedeme, že je-li $K_1 = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$, $K = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n+1})$, pak $K^* = (\alpha_0^*, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_{n+1}^*)$, kde $\alpha_r^* = (-1)^{n+1}[(g\omega\omega)\,\alpha_r - 2(g\alpha\omega)\,\omega_r]$. Z tohoto faktu plyne ihned, že $(g\alpha^*\alpha^*) = (g\omega\omega)^2(g\alpha\alpha)$, $(g\alpha^*\beta^*) = (g\omega\omega)^2(g\alpha\beta)$ atd., takže zřejmě obě $(n - 1)$-sféry K_1^*, K_2^* jsou téhož druhu $((g\alpha\alpha)(g\beta\beta) > 0)$ a podle (8,37) platí (8,39).

---

[32]) To jsou, stručně řečeno, $(n - 1)$-sféry opatřené znaménkem $+$ nebo $-$.

[33]) Inverse vzhledem k regulární $(n - 1)$-sféře o čtverci poloměru e (v širším smyslu) a středu S je příbuznost, která bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že X i X' leží v přímce bodem S a orientované vzdálenosti SX, SX' vyhovují vztahu $GX \cdot SX' = e$.

Zavedeme ještě tento pojem:

Soustava $n + 1$ orientovaných regulárních $(n - 1)$-sfér $K_1, K_2, \ldots, K_{n+1}$ v E_n vesměs téhož druhu se nazývá *pravidelná* $(n + 1)$-*soustava* $(n - 1)$-*sfér*, jestliže charakteristiky

$$\chi(K_i, K_j) = c \neq -1$$

pro $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n + 1$. Číslo $\mu = \dfrac{1}{c}$ se nazývá *typem* té soustavy (připouštíme i typ ∞).

Platí teď věta:

Věta 61. *Jsou-li středy* $(n - 1)$-*sfér pravidelné* $(n + 1)$-*soustavy typu* μ *v* E_n *lineárně nezávislé, pak simplex s těmito vrcholy je simplex s hlavním bodem typu* μ. *Obráceně ke každému simplexu s hlavním bodem typu* μ, $\mu \neq 0$, *existuje pravidelná* $(n + 1)$-*soustava* $(n - 1)$-*sfér typu* μ *se středy ve vrcholech simplexu.*

Důkaz. Předpokládejme předně, že je dána pravidelná $(n + 1)$-soustava $(n - 1)$-sfér $K_i = (\overset{i}{\alpha}_0, \overset{i}{\alpha}_1, \ldots, \overset{i}{\alpha}_{n+1})$, $i = 1, \ldots, n + 1$, takže $\overset{i}{\alpha}_0 \neq 0$, $\eta(g\overset{i}{\alpha}\overset{i}{\alpha}) > 0$ pro pevné $\eta = \pm 1$,

$$\chi(K_i, K_j) = \frac{1}{\mu}, \tag{8,40}$$

a přitom středy O_i $(n - 1)$-sfér K_i jsou lineárně nezávislé. Podle (8,38) tedy s použitím (8,37) platí

$$\varrho^2(O_i, O_j) = e_{ij} = -\frac{1}{2\Delta}\left[\frac{(g\overset{i}{\alpha}\overset{i}{\alpha})}{\overset{i}{\alpha}{}_0^2} + 2\frac{\sqrt{(g\overset{i}{\alpha}\overset{i}{\alpha})(g\overset{j}{\alpha}\overset{j}{\alpha})}}{\eta\mu\overset{i}{\alpha}_0\overset{j}{\alpha}_0} + \frac{(g\overset{j}{\alpha}\overset{j}{\alpha})}{\overset{j}{\alpha}{}_0^2}\right] =$$
$$= \alpha(t_i^2 + t_j^2) + 2\beta t_i t_j$$

pro

$$\alpha = -\frac{1}{2\Delta\eta}, \quad \beta = -\frac{1}{2\Delta\eta}, \quad t_i = \frac{\sqrt{\eta(g\overset{i}{\alpha}\overset{i}{\alpha})}}{\overset{i}{\alpha}_0}.$$

Je tedy $\mu = \dfrac{\alpha}{\beta}$, $t_i \neq 0$, a podle věty 52 je simplex $O_1, \ldots, O_{n+1}$ simplex s hlavním bodem typu μ; přitom $\mu \neq 0$.

Jestliže obráceně jsou body $O_1, O_2, \ldots, O_{n+1}$ vrcholy simplexu s hlavním bodem typu $\mu \neq 0$, pak platí (8,15) a $t_i \neq 0$. Označme $e_i = \alpha t_i^2$ a definujme orientované $(n - 1)$-sféry K_i vždy středem O_i, čtvercem poloměru (v širším smyslu) e_i a znamením $\varepsilon_i = \operatorname{sign} t_i$. Potom charakteristika dvojice K_i, K_j je podle (8,36) (je $\alpha \neq 0$)

$$\chi(K_i, K_j) = \frac{2\beta t_i t_j \varepsilon}{2\varepsilon_i\varepsilon_j|\alpha||t_i||t_j|} = \frac{\beta}{|\alpha|}\varepsilon = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\mu},$$

neboť K_i je reálné pro $\alpha > 0$, imaginární pro $\alpha < 0$. Je tedy $K_1, \ldots, K_{n+1}$ pravidelná $(n + 1)$-soustava $(n - 1)$-sfér typu μ, vyhovující větě.

Jak snadno plyne z věty 60, dostaneme z pravidelné $(n + 1)$-soustavy $(n - 1)$-sfér typu μ inversí dle regulární $(n - 1)$-sféry (za předpokladu, že žádná transformovaná $(n - 1)$-sféra nebude planární) opět pravidelnou $(n + 1)$-soustavu typu μ. Poněvadž jedna taková pravidelná soustava typu μ se dostane, zvolíme-li za středy $(n - 1)$-sfér vrcholy rovnostranného simplexu a jejich poloměry stejné (vhodně volené), máme tím možnost pomocí věty 61 studovat různé simplexy s hlavním bodem jednoho typu μ, obdobně jako věta 57 dává možnost studovat simplexy různých typů, avšak s hlavními body o stejných barycentrických souřadnicích.

Poznámka. Jako doplněk k větě 61 lze bez obtíží ukázat, že vrcholy simplexu s hlavním bodem typu 0 vzniknou inversí z vrcholů rovnostranného simplexu.

Věta 62. *Nechť $\sum$ je simplex v E_n s hlavním bodem H typu $\mu \neq n$ a nechť střed hlavní $(n - 1)$-sféry K neleží na žádné stěně simplexu. Pak polární nadroviny vrcholů simplexu $\sum$ vzhledem ke K tvoří $(n - 1)$-rozměrné stěny simplexu $\sum^*$, který má týž hlavní bod H typu*

$$\mu^* = n - \mu - 1 \tag{8,40}$$

(tedy $\mu^* \neq n$) a touž hlavní $(n - 1)$-sféru K.

Poznámka. Protože stejným postupem dostaneme ze $\sum^*$ opět $\sum$, nazveme takové simplexy sdružené.

Důkaz věty 62. Je pro $H = \left(\frac{1}{t_i}\right)$, $\mu = \frac{\alpha}{\beta}$

$$K \equiv (\alpha + \beta) \sum_i t_i^2 x_i^2 - \beta(\sum_i t_i x_i)^2 = 0\,,$$

střed K je bod $S = (s_k)$,

$$s_k = (\alpha - n\beta)\frac{1}{t_k} + \beta \sum_i \frac{1}{t_i}\,, \tag{8,41}$$

neboť jeho polára dle K je $\sum x_i = 0$.

Polární nadrovina bodu O_k je

$$\bar{\omega}_k \equiv (\alpha + \beta)\, t_k x_k - \beta \sum t_i x_i = 0\,.$$

Protože $\mu \neq n$, je K regulární a $\bar{\omega}_k$ lineárně nezávislé. Podle předpokladu neleží S na žádné stěně $\sum$, takže póly těchto stěn jsou vesměs vlastní body a tvoří tedy vrcholy simplexu $\sum^*$. Vyjádříme barycentrické souřadnice x_k^* v $\sum^*$ pomocí barycentrických souřadnic v $\sum$. Je pro $\varrho_k \neq 0$

$$\varrho_k x_k^* = (\alpha + \beta)\, t_k x_k - \beta \sum_i t_i x_i\,,$$

a přitom $\sum x_k^* \equiv \lambda \sum x_k$. Odtud vzhledem k (8,41) $\varrho_k s_k = c \neq 0$,

$$x_k^* = s_k((\alpha + \beta)\, t_k x_k - \beta \sum_i t_i x_i)\,. \tag{8,42}$$

Bod H má v nových souřadnicích tvar $H = (s_k)$; jeho kvadratická polára dle $\sum^*$ je

$$\left(\sum_k \frac{x_k^*}{s_k}\right)^2 - \sum_k \left(\frac{x_k^*}{s_k}\right)^2 = 0 .$$

V původních souřadnicích je její rovnice podle (8,42) tvaru

$$\lambda(\sum_k t_k x_k)^2 + \sigma \sum_k t_k^2 x_k^2 = 0 ,$$

je to tedy rotační kvadrika a H je hlavní bod $\sum^*$. Je-li jeho typ μ^*, $\alpha^* = \mu^*\beta^*$, pak

$$(\alpha^* + \beta^*) \sum_k \left(\frac{x_k^*}{s_k}\right)^2 - \beta^* \left(\sum_k \frac{x_k^*}{s_k}\right) = 0$$

je $(n - 1)$-sféra. To však nastane, jak se snadno zjistí dosazením z (8,42), pro

$$\alpha^* = (n - 1)\,\beta - \alpha\,, \quad \beta^* = \beta\,,$$

kdy dostáváme právě K. Je tedy $\mu^* = n - \mu - 1$, t. j. platí (8,40) a věta je dokázána ($\mu \neq -1$, takže $\mu^* \neq n$).

Z této věty plynou důsledky pro simplexy různých druhů z vět 45—51, které již nebudeme formulovat. Závěrem dokážeme tuto větu:

Věta 63. *Je-li hlavní bod H simplexu $O_1, \ldots, O_{n+1}$ v E_n vlastní, pak má tuto vlastnost: Označme Q_i, $i = 1, \ldots, n + 1$, průsečíky (vlastní nebo nevlastní) lineární poláry L bodu H dle simplexu s přímkami HO_i. Potom existuje na kolmici z H k L vlastní bod R (neexistuje-li kolmice, pak $R = H$), z něhož se body Q_i promítají pravidelnou $(n + 1)$-hvězdou (jsou-li tedy všechny Q_i vlastní, tvoří Q_i pravidelnou $(n + 1)$-soustavu v L).*

Důkaz. Je-li $H = T$, věta platí pro $R = H$. Je-li $H \neq T$, pak nejprve ukážeme, že v soustavě simplexů, které vzniknou dilatací daného simplexu ve směru osy, existuje simplex typu n: znamená to dokázat, že v (8,36) existuje k tak, že $\alpha + c(k^2 - 1) = n(\beta + c(k^2 - 1))$, kde c je definováno v (8,35) a $H = \left(\frac{1}{t_i}\right)$. Uvedená rovnice však skutečně platí pro

$$k^2 = \frac{(\alpha + \beta)\left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2}{(n + 1)\left[\beta\left(\sum_i \frac{1}{t_i}\right)^2 + (\alpha - n\beta)\sum_i \frac{1}{t_i^2}\right]}$$

(pravá strana je vzhledem k (8,16), (8,17) a $\sum \frac{1}{t_i} \neq 0$ skutečně kladná).

Poznámka. Lze bez obtíží ukázat, že uvedená vlastnost je charakteristická pro vlastní hlavní bod.

Simplexy s hlavním bodem mají řadu dalších vlastností, a to jednak pro specialisovaná μ resp. t_i, jednak v rámci vlastností soustav $n + 2$ bodů v E_n, z nichž každých $n + 1$ tvoří simplex s hlavním bodem (tyto soustavy existují pro každé μ, $-1 < \mu \leq n$). Studium těchto soustav však přesahuje rámec geometrie simplexu.

9. Závěr. Tato práce byla pojata trochu šíře, aby byl získán materiál, o který se může zájemce o studium geometrie simplexů opřít. Z neřešených problémů zde stojí za zmínku zobecnění Brocardových útvarů pro simplex. Rovněž kvalitativní stránka geometrie simplexu (t. j. studium nejen rovností, ale i nerovností) zasluhuje pozornosti.

LITERATURA

[1] *B. Bydžovský:* Základy teorie determinantů a matic a jich užití, Praha 1930.

[2] *E. Čech:* Základy analytické geometrie, I, II, Praha 1951, 1952.

[3] *E. Egerváry:* On orthocentric simplexes, Acta Math. Szeged. IX (1950), 218—226.

[4] Enciclopedia d. matematiche elementari, II. 1, Milano 1937.

[5] *I. M. Gelfand:* Lineární algebra, Praha 1953.

[6] *D. König:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

[7] *P. H. Schoute:* Mehrdimensionale geometrie I, Leipzig 1902.

Резюме

ГЕОМЕТРИЯ СИМПЛЕКСА В E_n, III

МИРОСЛАВ ФИДЛЕР (Miroslav Fiedler), Прага.

(Поступило в редакцию 21/IV 1955 г.)

В этой третьей, завершающей части работы, первая часть которой была опубликована в настоящем журнале *79* (1954), 270—297, а вторая часть также в настоящем журнале *80* (1955), 462—476, автор исследует специальные виды симплексов.

Прежде всего рассматривается прямоугольный n-симплекс определенного типа, $(n - 1)$-мерные грани которого можно занумеровать номерами $1, 2, \ldots, n + 1$ так, что как раз внутренние углы φ_{12} (между гранями 1 и 2), $\varphi_{23}, \varphi_{34}, \ldots, \varphi_{n,n+1}$ являются острыми, все же остальные внутренние углы между этими гранями — прямые.

В теореме 32 доказывается, что *необходимым и достаточным условием для того, чтобы n-симплекс был прямоугольным симплексом этого типа, является существование отличных друг от друга чисел $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ таких, что квадраты длин ребер e_{ij} удовлетворяют соотношениям*

$$e_{ij} = |c_i - c_j| \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n + 1)\ .$$

Отсюда непосредственно следует (теорема 33), что *каждая m-мерная грань* ($1 < m \leqq n - 1$) *является в свою очередь прямоугольным симплексом этого типа*. В частности каждая двумерная грань будет прямоугольным треугольником. Справедливо, однако, и обратное урверждение (теорема 34): *n-симплекс, каждая двумерная грань которого является прямоугольным треугольником, представляет собой прямоугольный симплекс рассматриваемого типа.*

В теореме 35 доказываются еще два свойства прямоугольного n-симплекса этого типа:

1. *Центр описанного (n — 1)-шара лежит в центре единственного самого длинного ребра;*

2. *в E_n, содержащем этот n-симплекс, существует прямоугольный параллелепипед, среди вершин которого встречаются все вершины n-симплекса.*

В дальнейших теоремах 36—39 исследуются некоторые свойства ортоцентрических симплексов и ортоцентрических систем $n + 2$ точек в E_n (т. е. $n + 1$ вершин ортоцентрического n-симплекса и точки пересечения его высот).

Прежде всего для сжатости изложения вводится понятие *равносторонней n-гиперболы*, как рациональной алгебраической кривой n-й степени в E_n, имеющей n взаимно перпендикулярных асимптотических направлений. Две такие n-гиперболы в E_n называются для краткости *независимыми*, если обе системы их n асимптотических направлений *независимы* в следующем смысле: ни в одном k-мерном (несобственном) линейном пространстве ($0 \leqq k \leqq n - 1$), определенном $k + 1$ асимптотическими направлениями одной n-гиперболы, не лежит больше чем k асимптотических направлений другой.

Если теперь (теорема 36) *система $n + 2$ точек в E_n обладает тем свойством, что существуют две независимые равносторонние n-гиперболы, проходящие обе через все точки системы, то эта система является ортоцентрической. Всякая рациональная алгебраическая кривая n-й степени, проходящая через $n + 2$ точки ортоцентрической системы в E_n, является равносторонней n-гиперболой.*

Доказательство теоремы основывается на вспомогательной теореме, утверждающей, что *для двух независимых* (в указанном выше смысле) *систем, состоящих из n линейно независимых точек каждая, в проективном (n — 1)-мерном пространстве существует не более одной регулярной гиперквадрики, по отношению к которой обе системы являются автополярными.*

Далее (теорема 37), *для ортоцентрического n-симплекса, точка пересечения высот которого не лежит ни в одной из гиперплоскостей симметрии ребер, существует точно одна равносторонняя n-гипербола, проходящая* *через вереины и через центр тяжести. Эта равносторонняя n-гипербола,* являющаяся обобщением известной гиперболы Киперта для треугольника, *имеет асимптотические направления, тождественные с направлениями осей гиперэллипсоидов Штейнера* (эти оси определяются однозначно) *и содержит основания всех нормалей, опущенных из точки пересечения высот симплекса на произвольную регулярную гиперквадрику из штейнеровской системы гиперквадрик* (это связка гиперквадрик, содержащая описанный гиперэллипсоид Штейнера и двойную несобственную гиперплоскость).

В следующей теореме 38 сформулировано одно характерное свойство ортоцентрических симплексов, для которых точка пересечения высот является внутренней точкой (т. наз. *положительно ортоцентрических симплексов*). *Симплекс является положительно ортоцентрическим тогда и только тогда, если существует такая внутренняя его точка P, что для каждой самосопряженной точки S* (*поскольку она отлична от P*) *того взаимно-обратного преобразования по отношению к симплексу* (т. е. преобразования, имеющего в барицентрических координатах вид $x'_i = \frac{c_i}{x_i}$ для действительных $c_i \neq 0$), *при котором центр тяжести и точка P соответствуют друг другу, справедливо утверждение, что прямая PS перпендикулярна к гармонической поляре точки S относительно симплекса. P будет тогда точкой пересечения высот симплекса.*

Другой *характерной* особенностью ортоцентрических n-симплексов (теорема 39) является то, что *для внутренних углов φ_{ij} $(n-1)$-мерных граней существуют действительные числа c_i так, что*

$$\cos \varphi_{ij} = c_i c_j \quad \text{для} \quad i \neq j\ .$$

В теореме 40 показано, что *характерным свойством т. наз. равногранних n-симплексов, у которых объёмы всех $(n-1)$-мерных граней одинаковы, является то, что совпадают две* (а тогда и все три) *из следующих трех точек: центр тяжести, центр вписанного $(n-1)$-шара и точка Лемуана. Для того, чтобы в n-симплексе центр тяжести совпадал с центром описанного $(n-1)$-шара, необходимо и достаточно, чтобы сумма квадратов длин ребер, выходящих из одной вершины, была для всех вершин одна и та же* (теорема 41).

В теореме 42 показано, что *для любого $n > 2$ существуют неравносторонние n-симплексы с одной единственной замечательной точкой* (центром тяжести).

В дальнейших теоремах исследуется другой класс симплексов, а именно тех, для которых существуют действительные числа α, β и ненулевые действительные числа $t_1, \ldots, t_{n+1}$ так, что квадраты длин ребер e_{ij} n-симплекса можно выразить в виде

$$e_{ij} = \alpha(t_i^2 + t_j^2) + 2t_it_j\,, \quad i \neq j\,. \qquad (*)$$

В этот класс симплексов можно при специальном выборе отношения $\alpha : \beta$ включить ряд типов симплексов, имеющих определенное простое свойство, получающееся путем обобщения какого-либо свойства треугольника.

Итак (теорема 44) *для того, чтобы для n-симплекса с вершинами $O_1, \ldots, \ldots, O_{n+1}$ существовала точка $P \neq O_i$ так, что все углы между (неориентированными) прямыми PO_i, PO_j для $i \neq j$ равны между собой (таким образом P является обобщенной точкой Торричелли в треугольнике), необходимо и достаточно, чтобы симплекс был типа* (*) *для $\alpha = n\beta$.*

Для того, чтобы (теорема 45) *точки касания $P_1, \ldots, P_{n+1}$* (n — 1)*-шара, вписанного (в более широком смысле слова) в n-симплекс с вершинами $O_1, \ldots, \ldots, O_{n+1}$ (P_i лежат в грани, противолежащей O_i), обладали тем свойством, что прямые O_iP_i проходят через одну и ту же точку Q, необходимо и достаточно, чтобы n-симплекс был типа* (*) *для $\alpha = (n - 1)\,\beta$. Точка Q является таким образом обобщенной точкой Жергонна в треугольнике.*

В теореме 46, далее, показано, что *необходимое и достаточное условие для того, чтобы для n-симплекса существовал* (n — 1)*-шар, касающийся всех его* (если нужно, продолженных) *ребер, имеет вид: n-симплекс принадлежит типу* (*) *для $\alpha = \beta$. Тогда существует точка R* (другое обобщение жергонновой точки треугольника), *которая лежит во всех гиперплоскостях, соединяющих точки касания* (n — 1)*-шара в каком-либо ребре с* (n — 2)*-мерной гранью, противолежащей этому ребру.*

В указанный класс можно включить и *изодинамические симплексы*, для которых существуют два (или один) изодинамических центра, в которых пересекаются все (n — 1)-шары K_{ij}^k, $k \neq i \neq j \neq k$, содержащие точки X, для которых

$$\overline{XO_i} : \overline{XO_j} = \overline{O_kO_i} : \overline{O_kO_j}\,,$$

где $O_1, \ldots, O_{n+1}$ — вершины симплекса.

Изодинамические симплексы (теорема 47) — *это те симплексы типа* (*), *для которых $\alpha = 0$.*

К симплексам типа (*) можно отнести еще другие типы специальных симплексов, напр., положительно ортоцентрические симплексы для $\beta = 0$ и т. п.

В теореме 53 дана геометрическая характеристика n-симплексов указанного типа. Прежде всего вводится понятие *главной точки* n-симплекса: *это* (поскольку такая точка существует) *точка H, которая не лежит ни* *в одной грани симплекса и или не совпадает с центром тяжести, и тогда его квадратичная поляра относительно симплекса является квадрикой вращения с осью, проходящей через H, или совпадает с центром тяжести, и тогда симплекс равносторонний.* В первом случае соответственная ось вращения называется *главной осью* n-симплекса, а (единственный) $(n-1)$-шар, входящий в связку, определенную квадратичной полярой точки H относительно симплекса и двойной линейной полярой точки H относительно симплекса, называется *главным* $(n-1)$-*шаром*. Если еще ввести число μ (*тип* главной точки) при помощи определенного двойного отношения в указанной связке квадрик, то можно утверждать, что *n-симплекс будет вида* (*) *тогда и только тогда, если это n-симплекс с главной точкой (типа $\mu = \alpha/\beta$).*

Из выражения (*) следует, что *все грани n-симплекса с главной точкой типа μ являются в свою очередь симплексами с главной точкой типа μ* (теорема 54).

Если дан n-симплекс с главной точкой типа μ, где μ — целое, $0 < \mu \leqq \leqq n-1$, то (теорема 55) *существует $(n-1)$-шар* (главный $(n-1)$-шар), *касающийся всех μ-мерных граней n-симплекса, причем все линейные пространства, каждое из которых соединяет точку касания в такой грани с противолежащей $(n-\mu-1)$-мерной гранью, проходят через одну и ту же точку* (главную точку). *Это свойство характерно для n-симплексов с главной точкой типа μ, $\mu = 1, \ldots, n-1$.*

В дальнейших теоремах показано, что *всякий n-симплекс с главной точкой возникает из некоторого положительно ортоцентрического n-симплекса путем растяжения в определенном направлении* (теорема 56). Отсюда легко следует (теорема 58), что *n-симплекс с главной точкой обладает тем* (не характерным) *свойством, что все высоты пересекают одну прямую* (главную ось).

Другое свойство n-симплекса с главной точкой, являющиеся *характерным*, состоит в том, что *для симплекса существует система $n+1$ ориентированных $(n-1)$-шаров (причем центр каждого из них лежит в одной из вершин), пересекающихся под одним и тем же (обобщенным) углом* (теорема 61). С этим связан второй способ образования n-симплексов с главной точкой: *Если построить вокруг всех вершин равностороннего n-симплекса $(n-1)$-шары одинаковых радиусов* (действительных или чисто мнимых) *и если преобразовать эту систему $n+1$ $(n-1)$-шаров при помощи какой-либо шаровой инверсии, то центры преобразованных $(n-1)$-шаров, если они не лежат в гиперплоскости, образуют вершины n-симплекса с главной точкой. Этим способом можно образовать каждый n-симплекс с главной точкой.*

В теореме 62 показано, что *если центр главного $(n-1)$-шара K n-сим-*

плекса $\sum$ *с главной точкой типа* $\mu \neq n$ *не лежит ни в одной грани, то полярные гиперплоскости вершин* $\sum$ *образуют опять n-симплекс* $\sum^*$ *с той же самой главной точкой, с тем же самым главным* $(n - 1)$*-шаром, однако типа* $\mu^* = n - \mu - 1$ (и здесь $\mu^* \neq n$).

Summary

GEOMETRY OF THE SIMPLEX IN E_n (3^{rd} part)

MIROSLAV FIEDLER, Praha.

(Received April 21, 1955.)

This is the third and final part of the paper, the first part of which was published in Čas. pro pěst. mat. *79* (1954), 297—320, the second in the same journal *80* (1955), 462—476. In the present part special types of simplexes in Euclidean spaces are studied.

First, a special type of rectangular n-simplexes is treated, the $(n - 1)$-dimensional faces of which may be numerated in such a way that exactly the interior angles φ_{12} (of the faces 1 a 2), φ_{23}, φ_{34}, ..., $\varphi_{n,n+1}$ are acute, all remaining interior angles right.

In the theorem 32 is shown that *the necessary and sufficient condition for an n-simplex to be rectangular of the type mentioned is that real numbers $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ (different from each other) exist so that the lengths d_{ij} of the edges of the simplex satisfy the relations*

$$d_{ij}^2 = |c_i - c_j| \quad (i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, n + 1)\,.$$

It follows (theorem 33) that *every m-dimensional face* $(1 < m \leq n - 1)$ *of such an n-simplex is a rectangular m-simplex of this type*. Especially, every two-dimensional face of such an n-simplex is a rectangular triangle. Conversely, *an n-simplex, each two-dimensional face of which is rectangular, is rectangular of the type mentioned* (theorem 34). In the theorem 35 the following properties of such a rectangular n-simplex are proved:

(i) *the centre of the circumscribed hypersphere is in the middle of the (unique) longest edge,*

(ii) *in the E_n considered there exists a rectangular parallelepiped the vertices of which include all vertices of the simplex.*

In the further theorems 36—39 some properties of the *orthocentric n-simplex* and *orthocentric sets of $n + 2$ points* in E_n (i. e. $n + 1$ vertices and the orthocentre) are studied.

First, the idea of an *orthogonal n-hyperbola* is established as such a rational

algebraic curve of degree n in E_n, the n asymptotic directions of which are mutually rectangular. For the sake of brevity two of such n-hyperbolae in E_n are called *independent* if there is no k-dimensional $(0 \leq k \leq n - 1)$ linear improper subspace of E_n spanned by $k + 1$ asymptotic directions of one n-hyperbola containing more than k asymptotic directions of the other (i. e. if the asymptotic n-tuples of the both n-hyperbolae are *independent*).

Let a set of $n + 2$ points in E_n be of that kind that there exist two independent orthogonal n-hyperbolae both passing through all the points of the set. Then the set is orthocentric. Conversely, every rational algebraic curve of degree n passing through $n + 2$ points of an orthocentric set in E_n is an orthogonal n-hyperbola (theorem 36). The proof of this theorem is based upon this lemma: *if in the projective $(n - 1)$-space S_{n-1} two independent* (in the preceding sense) *sets of n points are given then there exists at most one regular hyperquadric with respect to which both n-tuples are autopolar.*

For an orthocentric n-simplex, the orthocentre of which not lying in any hyperplane of symmetry of an edge, there exists (theorem 37) *exactly one orthogonal n-hyperbola passing through all the vertices and the centre of gravity of the n-simplex.* This n-hyperbola being a generalized Kiepert's hyperbola of the triangle, has the following properties:

(i) *the asymptotic directions of it are the axes-directions* (uniquely determined) *of Steiner hyperellipsoids,*

(ii) *it contains the feet of all normals from the orthocentre to any regular hyperquadric of the Steiner system* (i. e. the pencil of hyperquadrics including the Steiner's circumscribed hyperellipsoid and the double improper hyperplane).

In the next theorem 38 a characteristic property of those orthocentric simplexes is formulated, the orthocentre of which is an interior point of the simplex (so called *positively orthocentric simplexes*). *An n-simplex is positively orthocentric if and only if there exists such an interior point P (the orthocentre) that for every selfadjoint point S (as far as $S \neq P$) of the reciprocal transform with respect to the simplex* (i. e. a transform of the type $x'_i = \dfrac{c_i}{x_i}$ for $c_i \neq 0$ real where x_i and x'_i are the barycentric homogeneous coordinates), *for which the centre of gravity and the point P correspond each other, holds that the line PS is orthogonal to the harmonic polar of S with respect to the simplex.*

Another characteristic property of an orthocentric n-simplex (theorem 39) is that *there exist real numbers $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$, such that* ($\varphi_{ij}$ being interior angles)

$$\cos \varphi_{ij} = c_i c_j \text{ for } i \neq j .$$

Theorem 40 shows that *a characteristic property of equifacial simplexes* (with all the $(n - 1)$-dimensional faces of the same volume) *is that two* (and then three) *of the three points coincide: the centre of gravity, the centre of the inscribed* *hypersphere and the Lemoine point of the simplex* (i. e. the point with the property the sum of the squares of the distances between this point and the $(n-1)$-dimensional faces is minimum).

A necessary and sufficient condition (theorem 41) *for an n-simplex with the vertices* $O_1, \ldots, O_{n+1}$ *that its centre of gravity and the centre of the circumscribed hypersphere coincide is that for* $i = 1, \ldots, n+1$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \overline{O_i O_j^2} = \text{const} .$$

Theorem 42 shows that *for every* $n > 2$ *there exist not equilateral n-simplexes with a unique distinguished point.*

In the further theorems other types of n-simplexes are treated. For these n-simplexes there exist real numbers $\alpha, \beta, t_1 \neq 0, \ldots, t_{n+1} \neq 0$, such that ($\sqrt{e_{ij}}$ is the length of the edge $O_i O_j$)

$$e_{ij} = \alpha(t_i^2 + t_j^2) + 2\beta t_i t_j\,, \quad i \neq j\,. \tag{*}$$

This class (*) of n-simplexes includes for special $\alpha : \beta$ some types of simplexes with certain generalized properties of the triangle.

Let Σ *be an n-simplex in* E_n *with vertices* $O_1, \ldots, O_{n+1}$. *A necessary and sufficient condition for the existence of such a point* $P \neq O_i$ *in* E_n *that the angles of the (not oriented) lines* PO_i, PO_j $[i \neq j]$ *be all equal is that* Σ *be of the type* (*) *with* $\alpha = n\beta$ [theorem 44; P is then the generalized point of Torricelli].

Let $P_1, \ldots, P_{n+1}$ *be the points in which a hypersphere inscribed (in the wider sense) in* Σ *touches the faces* $\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}$ (ω_i opposite to O_i). *The lines* $O_i P_i$ *pass through a point* Q *if and only if* Σ *is of the type* (*) *for* $\alpha = (n-1)\beta$ [theorem 45; Q is a generalized point of Gergonne].

Further, *a hypersphere touching all the lines* $O_i O_j$ $(i \neq j)$ *exists if and only if* Σ *is of the type* (*) *for* $\alpha = \beta$ [theorem 46]. *Then a point* R *exists* [another generalization of the point of Gergonne] *such that all hyperplanes joining the point of contact in the line* $O_i O_j$ *with the* $(n-2)$*-dimensional face opposite to* $O_i O_j$, *pass through* R.

If for Σ *all the hyperspheres* K_{ij}^k $(k \neq i \neq j \neq k)$ *containing the points* X *such that*

$$\overline{XO_i} : \overline{XO_j} = \overline{O_k O_i} : \overline{O_k O_j}$$

intersect (in two or one points called *isodynamic centres*) *then* Σ *is of the type* (*) *with* $\alpha = 0$. Conversely, *an n-simplex of the type* (*) *with* $\alpha = 0$ *is isodynamic*, i. e. the hyperspheres intersect in isodynamic centres (theorem 47).

The class (*) includes some more types of special simplexes, for example the positively orthocentric simplexes etc.

In the theorem 53 a geometrical characteristic of these simplexes is given. At first, *the principal point of an n-simplex* Σ $(n \geqq 2)$ is defined (as far as it exists): *it is a point H not lying in any* $(n-1)$*-dimensional face of* Σ, *of the manner that either* $H \neq T$ (T being the centre of gravity of Σ) *and the quadratic polar Q of H with respect to* Σ *is a hyperquadric of revolution with its axis passing through H, or* $H = T$ *and* Σ *is equilateral.* In the first case the axis mentioned is called *the principal axis of* Σ, the (unique) hypersphere in the pencil of hyperquadrics determined by Q and the double linear polar of H with respect to Σ *the principal hypersphere of* Σ. (A definition of the principal hypersphere in the second case is also added.) The principal point H is of *the type* μ if a certain crossratio in the pencil mentioned is $-\mu$. For such *n-simplexes with a principal point* the following theorem 53 holds:

An n-simplex Σ *is of the type* (*) *if and only if* Σ *is an n-simplex with a principal point* $\left(\text{of the type } \mu = \dfrac{\alpha}{\beta}\right)$.

From (*) it follows immediately that *all faces of an n-simplex with a principal point of the type* μ *are also simplexes with a principal point of the type* μ (theorem 54).

Let Σ be an n-simplex with a principal point of the type μ. *If* μ *is an integer,* $0 < \mu \leqq n - 1$, *then* (theorem 55) *there exists a hypersphere* (the principal hypersphere) *touching all the* μ*-dimensional faces of* Σ. Besides, *all the linear spaces joining the point of contact in such a* μ*-dimensional face with the opposite* $(n - \mu - 1)$*-dimensional face of* Σ, *pass through a common point* (the principal point). *This property is characteristic for the n-simplexes with a principal point of the types* μ, $\mu = 1, \ldots, n - 1$.

Further it is shown that *every n-simplex with a principal point may be obtained from some positively orthocentric simplex by a dilatation in a certain direction* (theorem 57). It follows (theorem 58) that *all the altitudes of an n-simplex with a principal point intersect a line* (the principal axis). This last property is not yet characteristic.

Another *characteristic* property of an n-simplex with a principal point is the following: *there exists a set of* $n + 1$ *oriented hyperspheres in* E_n *with the centres in the vertices* O_i *intersecting each another under equal* (generalised) *angles.* From this, another way of constructing the simplexes with a principal point follows:

Let Σ' *be an equilateral n-simplex in* E_n *and let* $S'_1, \ldots, S'_{n+1}$ *be hyperspheres with centres in the vertices of* Σ' *and with equal radii* (real or purely imaginary). *By every hyperspherical inversion the* S'_i *are transformed in the hyperspheres* S_i, *the centres of which* (if not in a hyperplane) *are vertices of an n-simplex* Σ *with a principal point. Every n-simplex with a principal point may be constructed this way.*

Finally, in the theorem 62 it is shown that a kind of duality in the class of

n-simplexes with a principal point of the type $\mu \neq n$ may be defined. *Let Σ be an n-simplex with a principal point H of the type $\mu \neq n$. If the centre of the principal hypersphere S is not lying in any $(n - 1)$-dimensional face of Σ, the polar hyperplanes of the vertices of Σ with respect to S are faces of another n-simplex Σ^* with the same principal point H, with the same principal hypersphere S, but of the type $\mu^* = n - \mu - 1$.*

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

POZNÁMKA O LIMITNÍM PŘECHODU DIFERENČNÍCH ROVNIC V ROVNICE DIFERENCIÁLNÍ

JIŘÍ ČERMÁK, Brno.

(Došlo dne 15. května 1955.)

Jako příklad na použití jedné metody řešení homogenních lineárních systémů diferenciálních a diferenčních rovnic s konstantními koeficienty založené na jistých pojmech maticového počtu, které zavedl EDUARD WEYR, je v tomto článku ukázáno, že fundamentální soustava řešení lineárního systému diferenčních rovnic s konstantními koeficienty

$$\underset{\omega}{\Delta} u_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, u_j(x)\,, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

za určitých předpokladů přejde v limitě pro $\omega \to 0$ ve fundamentální soustavu řešení systému diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, u_j(x)\,, \quad i = 1, 2, \dots, n\,.$$

1. Tato poznámka souvisí úzce s nedávno uveřejněným článkem prof. O. BORŮVKY [1] a mým článkem [2], kde jsem metodou použitou prof. Borůvkou v [1] odvodil explicitní vzorce pro obecné řešení homogenního lineárního systému diferenčních rovnic s konstantními koeficienty. Vzhledem k účelu následujících úvah použiji těchto vzorců v poněkud pozměněném tvaru.

Systém diferenciálních rovnic můžeme za jistých předpokladů pokládati za limitní případ vhodného systému rovnic diferenčních. Naskýtá se otázka, zda při limitním přechodu, který převede systém diferenčních rovnic v systém rovnic diferenciálních, také řešení systému diferenčních rovnic přejdou v řešení odpovídajícího systému diferenciálních rovnic. Zde se budu zabývati velmi speciálním případem, totiž že systémy, jež přicházejí v úvahu, jsou homogenní lineární s konstantními koeficienty. Protože methoda, jíž je použito v [1] a [2], dává explicitní vzorce pro řešení takových systémů, nečiní porovnání řešení obtíží. Podobný problém pro přechod lineární diferenční rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty v diferenciální rovnici stejného typu podrobně studoval A. WALTHER v [3]. Protože diferenční rovnici n-tého řádu lze převésti na systém n rovnic, je část jeho výsledků, která se týká homogenní rovnice, obsažena ve výsledcích tohoto článku.

Otázky tohoto druhu, které jsou v numerickém počtu známy pod názvem metoda sítí, jsou předmětem stálého zájmu a podrobného studia a jak známo [4], výsledky dosažené v tomto směru jsou mnohem obecnější než výsledek této poznámky, která se týká pouze velmi speciálního systému rovnic. Nicméně tato poznámka může býti užitečná z toho důvodu, že vyšetřování je zde provedeno za předpokladu, že jak proměnná x tak rozpětí ω nabývají komplexních hodnot, zatím co při vyšetřováních, která jsou zaměřena k numerickým výpočtům, proměnná i rozpětí jsou omezeny na reálný obor.

2. Uvažujme o systému diferenčních rovnic

$$\underset{\omega}{\Delta} u_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, u_j(x)\,, \quad \underset{\omega}{\Delta} u_i(x) = \frac{u_i(x+\omega) - u_i(x)}{\omega}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,; \tag{1}$$

v maticové notaci[1]) $\underset{\omega}{\Delta}\mathbf{u}(x) = A\,\mathbf{u}(x)$, kde x je proměnná v množině komplexních čísel, rozpětí ω komplexní číslo a A je konstantní čtvercová matice n-tého řádu, jejíž prvky a_{ij} jsou komplexní čísla.

Přejdeme-li k limitě pro $\omega \to 0$, přejde systém (1) v homogenní lineární systém diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}x} = A\,\mathbf{u}(x)\,. \tag{2}$$

Předpokládejme, že řešení systému (1) je tvaru

$$\mathbf{u}(x) = \lambda^x\,\mathbf{y}(x)\,, \tag{3}$$

kde λ je dosud neurčené číslo a $\mathbf{y}(x)$ vektor, jehož složky jsou vhodnými funkcemi neodvisle proměnné x.

Použijeme-li vztahů

$$\underset{\omega}{\Delta}[\mathbf{y}(x)\,\lambda^x] = \mathbf{y}(x)\,\underset{\omega}{\Delta}\lambda^x + \lambda^{x+\omega}\underset{\omega}{\Delta}\mathbf{y}(x)\,, \quad \underset{\omega}{\Delta}\lambda^x = \frac{1}{\omega}\,\lambda^x(\lambda^\omega - 1)\,,$$

snadno zjistíme, že $\mathbf{y}(x)$ musí býti řešením rovnice

$$\underset{\omega}{\Delta}\mathbf{y}(x) = \frac{1}{\lambda^\omega}\left[A - \frac{\lambda^\omega - 1}{\omega}\,E\right]\mathbf{y}(x)\,. \tag{4}$$

Položme

$$\frac{\lambda^\omega - 1}{\omega} = \lambda^*\,. \tag{5}$$

Potom rovnice (4) bude

$$\underset{\omega}{\Delta}\mathbf{y}(x) = \frac{1}{\lambda^*\omega + 1}\,[A - \lambda^* E]\,\mathbf{y}(x)\,. \tag{6}$$

[1]) Tučnými písmeny budeme označovati vektory v n-rozměrném vektorovém prostoru a budeme je identifikovati s jednosloupcovými maticemi o n prvcích (složkách vektoru). Matice budeme značit velkými písmeny. E je jednotková matice.

3. Nyní nechť a je jeden z charakteristických kořenů matice A o násobnosti α. Ke kořenu a existuje $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = \alpha$ lineárně nezávislých vektorů, které tvoří t. zv. normální soustavu vektorů příslušnou k charakteristickému kořenu a. Označíme je

$$\begin{array}{l} \mathbf{a}_{11}, \ldots, \mathbf{a}_{1,\alpha_r}, \\ \mathbf{a}_{21}, \ldots, \mathbf{a}_{2,\alpha_r}, \mathbf{a}_{2,\alpha_r+1}, \ldots, \mathbf{a}_{2,\alpha_{r-1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{a}_{r1}, \ldots, \mathbf{a}_{r,\alpha_r}, \mathbf{a}_{r,\alpha_r+1}, \ldots, \mathbf{a}_{r,\alpha_{r-1}}, \mathbf{a}_{r,\alpha_{r-1}+1}, \ldots, \mathbf{a}_{r,\alpha_1}. \end{array} \tag{7}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ($\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_r$) jsou Weyrova charakteristická čísla příslušná ke kořenu a. Vektory (7) splňují tyto vztahy:

$$(A - aE)\,\mathbf{a}_{\mu\nu} = \left.\begin{array}{ll} \mathbf{a}_{\mu+1,\nu} \text{ pro } & 1 \leqq \mu \leqq r-1 \\ 0 \quad \text{pro} & \mu = r \end{array}\right\} \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{r-\mu+1}. \tag{8}$$

Položme dále

$$\mathbf{a}^{\mu\nu} = \left(\frac{1}{a\omega + 1}\right)^{\mu-1} \mathbf{a}_{\mu\nu}, \quad 1 \leqq \mu \leqq r,\ \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{r-\mu+1}. \tag{9}$$

Vektory (9) jsou zřejmě nezávislé a splňují vztahy podobné vztahům (8):

$$\frac{1}{a\omega + 1}(A - aE)\mathbf{a}^{\mu\nu} = \left\{\begin{array}{ll} \mathbf{a}^{\mu+1,\nu} \text{ pro } & 1 \leqq \mu \leqq r-1 \\ 0 \quad \text{pro} & \mu = r \end{array}\right\} \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{r-\mu+1}. \tag{10}$$

Dále pro ně platí $\lim\limits_{\omega \to 0} \mathbf{a}^{\mu\nu} = \mathbf{a}_{\mu\nu}$, $1 \leqq \mu \leqq r$, $\nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{r-\mu+1}$.

4. S pomocí vztahů (10), (5) a (3) plyne, jak jsem ukázal v [2], toto tvrzení: *Vektory*

$$\mathbf{u}^{\mu\nu} = (1 + a\omega)^{\frac{x}{\omega}} \left\{ \mathbf{a}^{\mu\nu} + \frac{x}{1!}\mathbf{a}^{\mu+1,\nu} + \frac{x(x-\omega)}{2!}\mathbf{a}^{\mu+2,\nu} + \right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{x(x-\omega)\ldots(x - \overline{r-\mu-1}\,\omega)}{(r-\mu)!}\mathbf{a}^{r\nu} \right\} \tag{11}$$

pro

$$\mu = 1, 2, \ldots, r-1;\quad \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{r-\mu+1} \tag{11}$$

a

$$\mathbf{u}^{\mu\nu} = (1 + a\omega)^{\frac{x}{\omega}}\,\mathbf{a}^{\mu\nu} \quad \textit{pro} \quad \mu = r;\ \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_1$$

tvoří α lineárně nezávislých řešení systému (1).

Takto každému charakteristickému kořenu matice A odpovídá množina nezávislých řešení systému (1), která se skládá právě z tolika řešení, kolik činí násobnost příslušného charakteristického kořene.

Označíme-li $a, b, \ldots, f$ všechny navzájem různé charakteristické kořeny matice A a jejich násobnosti $\alpha, \beta, \ldots, \varphi$, dostaneme podle uvedeného tvrzení celkem $\alpha + \beta + \ldots + \varphi = n$ řešení, které tvoří, jak je také v [2] ukázáno, fundamentální soustavu řešení systému (1).

5. Vidíme nyní, že právě nalezenou fundamentální soustavu řešení systému (1) tvoří vektory, jejichž složky jsou při pevném x mnohoznačné funkce proměnné ω. Tyto funkce mají jednoduchý charakter. Konečné body rozvětvení jsou v číslech $-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}, \ldots, -\frac{1}{f}$. Vedeme-li v ω-rovině řezy od bodů rozvětvení do bodu ∞, na př. ve směru radiusvektorů spojujících počátek s body rozvětvení, a volíme-li nyní v takto řezy opatřené rovině za logaritmy veličin $1 + a\omega, 1 + b\omega, \ldots, 1 + f\omega$, hlavní hodnoty $\operatorname{Log}(1 + a\omega)$, $\operatorname{Log}(1 + b\omega)$, $\operatorname{Log}(1 + f\omega)$, které pro $\omega \to 0$ jsou rovny nule, potom můžeme provésti limitní přechod $\omega \to 0$. Při tomto přechodu přejde systém (1) v systém diferenciálních rovnic (2) a vektory nalezené fundamentální soustavy řešení systému (1) přejdou ve vektory,[2]) z nichž vypíšeme pouze skupinu odpovídající kořenu a:

$$\mathbf{u}_{\mu\nu} = e^{ax}\left\{\mathbf{a}_{\mu\nu} + \frac{x}{1!}\mathbf{a}_{\mu+1,\nu} + \frac{x^2}{2!}\mathbf{a}_{\mu+2,\nu} + \ldots + \frac{x^{r-\mu}}{(r-\mu)!}\mathbf{a}_{r\nu}\right\}, \tag{12}$$

$$1 \leqq \mu \leqq r,\ \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{r-\mu+1}\,.$$

Tyto vektory tvoří podle [1] fundamentální soustavu řešení systému diferenciálních rovnic (2).

Ukázali jsme tedy, že námi nalezená fundamentální soustava řešení systému diferenčních rovnic (1) přejde za předpokladů uvedených v tomto odstavci při limitním přechodu,který převede systém (1) v odpovídající systém diferenciálních rovnic (2), ve fundamentální soustavu řešení systému (2) ve tvaru, který odvodil prof. Borůvka v [1].

LITERATURA

[1] *O. Borůvka*: Poznámka o použití Weyrovy theorie matic k integraci systému diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, Časopis pro pěst. mat., 2 (79), 1954, 151—156.

[2] *J. Čermák*: On a new method of solving homogeneous systems of linear difference equations with constant coefficients, Annales Mathematici Polonici, t. *1* (1954), fasc. 1, 195—202.

[3] *A. Walther*: Zum Grenzübergange von Differenzengleichungen in Differentialgleichungen, Math. Annalen, *95* (1926), 257—266.

[4] Na př. *L. V. Kantorovič* i *V. I. Krylov*: Približennye metody vysšego analiza, Moskva 1952, 179—256.

[2]) Podrobněji o limitním přechodu $\lim\limits_{\omega \to 0}(1 + a\omega)^{\frac{x}{\omega}}$ viz na př. v [3], s. 261—262.

Резюме

ЗАМЕТКА О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ

ЙИРЖИ ЧЕРМАК (Jiří Čermák), Брно.

(Поступило в редакцию 15/V 1955 г.)

Рассмотрим однородную линейную систему разностных уравнений с постоянными коэффициентами (1). В статье показано, что при определенных условиях фундаментальная система решений этой системы перейдет при предельном переходе $\omega \to 0$ в фундаментальную систему решений системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (2), в которую перейдет система (1) при $\omega \to 0$. В этом результате содержатся результаты А. Вальтера [3], касающиеся подобного рода проблемы относительно однородного линейного разностного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Zusammenfassung

BEMERKUNG ZUM GRENZÜBERGANGE VON DIFFERENZENGLEICHUNGEN IN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

JIŘÍ ČERMÁK, Brno.

(Eingelangt 15. V. 1955.)

Es sei vorgelegt das homogene lineare System von Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten (1). In der Arbeit ist gezeigt, dass unter gewissen Voraussetzungen das Fundamentalsystem der Lösungen von (1) bei dem Grenzübergange $\omega \to 0$ in das Fundamentalsystem der Lösungen des Systems von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (2) übergeht, in welches sich (1) für $\omega \to 0$ verwandelt. In diesem Resultat sind ähnliche Resultate des Herrn A. Walther [3] über die homogene lineare Differenzengleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten enthalten.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

POZNÁMKA K NUMERICKÉMU ŘEŠENÍ ROVNIC

ALFONS HYŠKA, Olomouc.

(Došlo dne 6. července 1955.)

DT : 512.34, 518.6

Při numerickém řešení rovnic jako při všech přibližných výpočtech je kromě určení výsledku stejně důležité udat nepřesnost výsledku. Ale o tom se v tomto případě zpravidla vůbec nemluví, stejně jako při jiných přibližných výpočtech. Také v posledním pojednání o numerickém řešení rovnic (viz [5]) uvádí FR. BRANDLER zajímavé přibližné metody pro numerické řešení rovnic třetího stupně, ale neuvádí, jak určit nepřesnost výsledku. A ukazuje také na jednom konkretním příkladě, že nemá valný praktický význam určovat aritmetický průměr výsledků, získaných metodou regula falsi a metodou Newtonovou: Uvážíme-li podstatnou různost obou metod, nemůžeme ani nic jiného očekávat.

A přece již prof. M. LERCH pojednal o nepřesnosti při numerickém výpočtu kořenů rovnic a také v knize „Teorie a prakse numerického počítání“ prof. V. LÁSKY a V. HRUŠKY jsou úvahy o této nepřesnosti.

V tomto příspěvku chci se touto nepřesností zabývat podrobněji a opravit jednu poznámku z citované knihy.

Vyšetřování nepřesností při numerickém výpočtu kořenů nás povede také k tomu, jak můžeme v praxi metody výpočtu kořenů zpřesnit.

A. **Obecné úvahy.** Vyšetřujme rovnici

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

a učiňme o funkci $f(x)$ tyto předpoklady:

1. $f(x)$ má v jistém okolí hledaného kořene x_0 derivace až do n-tého řádu včetně ($n \geqq 1$);

2. v tomto okolí hledaného kořene x_0 je všude

$$f'(x) \neq 0\,; \tag{2}$$

z toho plyne, že $f(x)$ je aspoň v tomto okolí funkce prostá a proto také schopna inverse.

3. Známe již přibližnou hodnotu x_1 hledaného kořene, která ovšem leží v uvedeném okolí správné hodnoty x_0.

Je snadno patrno, že tyto předpoklady jsou zpravidla splněny a neomezují nijak řešení problému.

V uvažovaném okolí bodu x_0 tedy platí

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = g(y)\,, \tag{3}$$

$$y_0 = f(x_0) = 0\,, \tag{3a}$$

$$y_1 = f(x_1) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = g(y_1)\,. \tag{3b}$$

4. Učiňme konečně poslední předpoklad, že je možno inversní funkci $g(y)$ rozvinout v Taylorovu řadu podle mocnin $y - y_1$:

$$x = g(y) = g(y_1) + \left(\frac{dg}{dy}\right)_1 (y - y_1) + \left(\frac{d^2g}{dy^2}\right)_1 \frac{(y - y_1)^2}{2!} + \ldots + \\ + \left(\frac{d^{n-1}g}{dy^{n-1}}\right)_1 \cdot \frac{(y - y_1)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\,. \tag{4}$$

Při určování kořene dosadíme sem $y_0 = 0$; podle (3a) a (3b) pak dostaneme

$$x_0 = x_1 - \left(\frac{dg}{dy}\right)_1 y_1 + \left(\frac{d^2g}{dy^2}\right)_1 \cdot \frac{y_1^2}{2!} - \ldots + \\ + (-1)^{n-1} \left(\frac{d^{n-1}g}{dy^{n-1}}\right)_1 \cdot \frac{y_1^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots\,. \tag{4a}$$

Pro numerický výpočet potřebujeme ještě znát derivace inversní funkce $g(y)$. Ty určíme snadno podle základních pravidel diferenciálního počtu (přitom budeme používat obvyklého označení čárek k označení derivace podle nezávisle proměnné x):

$$\frac{dg}{dy} = \frac{1}{\frac{df}{dx}} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{y'}\,,$$

$$\frac{d^2g}{dy^2} = -\frac{y''}{y'^2} \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{y'^3}\,,$$

$$\frac{d^3g}{dy^3} = -\frac{y'''y' - 3y''^2}{y'^5}\,, \tag{5}$$

$$\frac{d^4g}{dy^4} = -\frac{y^{IV}y'^2 - 10y'''y''y' + 15y''^3}{y'^7}\,,$$

$$\frac{d^5g}{dy^5} = -\frac{y^{V}y'^3 - 15y^{IV}y''y'^2 - 10y'''^2y'^2 + 105y'''y''^2y' - 105y''^4}{y'^9}\,, \quad \text{atd.}$$

V praxi s těmito členy vystačíme. Použijeme-li ještě indexu 1 k vyznačení, že se jedná o hodnoty funkce resp. jejích derivací v bodě $x = x_1$, pak místo rozvoje (4a) můžeme psát po jednoduché úpravě

$$x_0 = x_1 - \frac{y_1}{y_1'} - \left(\frac{y_1}{y_1'}\right)\left(\frac{y_1}{y_1'^2}\right) \cdot \frac{y_1''}{2!} + \left(\frac{y_1}{y_1'}\right) \cdot \left(\frac{y_1}{y_1'^2}\right)^2 \cdot \frac{y_1'''y_1' - 3y_1''^2}{3!} - \\ - \left(\frac{y_1}{y_1'}\right)\left(\frac{y_1}{y_1'^2}\right)^3 \cdot \frac{y_1^{IV}y_1'^2 - 10y_1'''y_1''y_1' + 15y_1''^3}{4!} + \ldots\,, \tag{6}$$

po případě i s méně členy, když se nám nejedná o velikou přesnost výsledku, na př.

$$x_0 \doteq x_1 - \frac{y_1}{y_1'} + \left(\frac{y''}{y'^3}\right)_1 \cdot \frac{y_1^2}{2!}\,.$$

První dva členy výrazu na pravé straně určují výsledek podle metody Newtonovy a třetí člen udává zhruba nepřesnost tohoto výsledku.

V uvedeném článku řeší Fr. Brandler rovnici

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

a vychází z přibližné hodnoty $x_1 = 0{,}35$; k dané funkci sestavme nejprve tabulku jejich derivací:

$$y = x^3 - 3x + 1\,, \quad y' = 3x^2 - 3\,, \quad y'' = 6x\,, \quad y''' = 6\,;$$

všechny vyšší derivace jsou identicky rovny nule. Pro hodnotu $x_1 = 0{,}35$ dostaneme odtud:

$$y_1 = -\,0{,}007\,125\,, \quad y_1' = -\,2{,}63\,25\,, \quad y_1'' = +\,2{,}10\,, \quad y_1''' = +\,6\,.$$

K určení největší možné nepřesnosti určíme absolutní maximum absolutní hodnoty výrazu $\frac{y''}{y'^3}$ jako funkce proměnné y. Tento výraz je však právě opačný k výrazu $\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}y^2}$ (viz (5)) a jeho derivace podle proměnné y je tedy také opačná k další derivaci z té soustavy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{y''}{y'^3}\right) = -\frac{\mathrm{d}^3g}{\mathrm{d}y^3} = \frac{y'''y' - 3y''^2}{y'^5} = -\frac{18}{y'^5}(5x^2 + 1) > 0$$

v okolí bodu x_1, neboť $y_1' < 0$. Funkce $\frac{y''}{y'^3}$ tedy v tom okolí stoupá; pro $y = y_1$ je to však číslo záporné,

$$\frac{y_1''}{y_1'^3} = \frac{+\,2{,}10}{(-\,2{,}6325)^3} < 0\,;$$

hledanou absolutně maximální hodnotu absolutní hodnoty tohoto výrazu tedy dostaneme, když zvolíme za y hodnotu nejmenší; ale ($y' < 0 \Rightarrow y$ klesá) nejmenší hodnotu veličiny y dostaneme, když za proměnnou x volíme hodnotu největší. Pro polovinu šířky intervalu dostáváme

$$\left|\frac{y_1}{y_1'}\right| = \frac{0{,}007\,125}{2{,}63\,25} \doteq 0{,}003\,,$$

nejmenší hodnotu veličiny y dostaneme při volbě $x = 0{,}353$

$$\left|\left(\frac{y''}{y'^3}\right)\right|_{\max} = \frac{6 . 0{,}353}{27(1 - 0{,}353)^3} \doteq 0{,}116\,9\,;$$

nepřesnost při výpočtu Newtonovou metodou je

$$|\Delta x| \leqq 0{,}116\,9 \,.\, \frac{0{,}007\,125^2}{2} \doteq 0{,}0^5 3 \,.$$

Budeme tedy druhý člen $\frac{y_1}{y_1'}$ počítat na 6 desetinných míst:

$$x_{11} = 0{,}35 - 0{,}002\,706 = 0{,}347\,294 \,,$$

přesnější hodnota kořene je $0{,}347\,296\,4$
a skutečná nepřesnost $0{,}000\,002\,4 < 0{,}0^5 3$.

Podle úpravy, kterou jsme provedli v rozvoji (6), poznáme podle autorů „Teorie a prakse numerického počítání" snadno, že tato řada konverguje patrně tím rychleji, čím je menší absolutní hodnota podílu (viz [3], str. 286)

$$|q_1| = \left| \frac{y_1}{y_1'^2} \right| . \tag{7}$$

Tento úsudek není naprosto oprávněn; jednak koeficienty

$$\frac{y_1''}{2} , \quad \frac{y_1'''y_1' - 3y_1''^2}{3!} , \quad \frac{y_1^{\mathrm{IV}}y_1'^2 - 10y_1'''y_1''y_1' + 15y_1''^3}{4!} \ldots$$

mohou svou velikostí vliv činitele q_1^k zcela porušit, jak hned ukážeme, jednak není výraz v čitateli a jmenovateli stejného stupně.

V daném případě je $|q_1| = 0{,}007\,125 : 2{,}6325^2 \doteq 0{,}001\,028$, tedy číslo poměrně velmi malé. Použijeme-li k výpočtu přesnější hodnoty kořene čtyř členů, určíme opět nejprve maximální nepřesnost. Úvahou obdobnou předešlé dostaneme

$$|\Delta x| \leqq 0{,}0^9\,120 \,;$$

budeme tedy počítat každý člen pro jistotu na 12 desetinných míst:

$$\begin{array}{rr} x_{12} \doteq 0{,}35 \qquad\qquad & -\,0{,}002\,706\,552\,707 \\ +\,0{,}000\,002\,921\,823 & -\,0{,}000\,000\,013\,840 \\ \hline 0{,}350\,002\,921\,823 & -\,0{,}002\,706\,566\,547 \end{array} ,$$

$$x_{12} \doteq 0{,}347\,296\,355\,276 \,;$$

správněji je

$$x \doteq 0{,}347\,296\,355\,333 \,,$$

skutečná nepřesnost tedy je $0{,}0^{10}57 < 0{,}0^9 120$.

Potřebujeme-li znát kořen x_0 ještě přesněji, určíme kořeny rozvoje

$$f(x - x_{12})$$

pomocí Hornerova schematu. Přitom zpravidla celý výpočet rozdělíme na několik kroků, v daném případě na tři:

$$\begin{aligned} u &= x - 0{,}35\,, \\ v &= u + 0{,}002\,7\,, \\ w &= v + 0{,}000\,003\,644\,7\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Již při druhém kroku dostaneme vhodnou rovnici (levou stranu příslušné rovnice budeme označovat příslušným velkým písmenem):

$$V = v^3 + 1{,}041\,9\,v^2 - 2{,}628\,148\,13\,v - 0{,}0^5 9\,615\,183\,. \tag{8a}$$

Přitom budeme v dalším vycházet od přibližné hodnoty kořene $v_1 = 0$ (pro původní rovnici to tedy značí, že vycházíme od přibližné hodnoty $x_1 = 0{,}347\,3$). Je tedy

$$V_1 = -\,0{,}0^5 9\,615\,183\,, \quad V_1' = -\,2{,}638\,148\,13\,, \quad V_1'' = +\,2{,}083\,8\,, \quad V_1''' = 6\,.$$

Příslušný podíl je

$$|q_1| = \left|\frac{V_1}{V_1'^2}\right| = 0{,}0^5 9\,615\,183 : 2{,}638\,148\,13^2 \doteq 0{,}0^5 1\,382\,. \tag{9}$$

Již při použití prvních tří členů dostaneme

$$|\Delta v| = |\Delta x| \leqq 0{,}0^{16} 35\,.$$

Počítejme proto každý jednotlivý člen na 18 desetinných míst:

$$\begin{array}{lr} x_0 \doteq & 0{,}347\,3 \\ & -0{,}000\,003\,644\,671\,385\,454 \\ \hline & 0{,}347\,296\,355\,328\,614\,546 \\ & +0{,}000\,000\,000\,005\,246\,185 \\ \hline x_0 \doteq & 0{,}347\,296\,355\,333\,860\,731\,, \\ \text{správněji je} \quad x \doteq & 0{,}347\,296\,355\,333\,860\,697\,, \end{array} \tag{10}$$

nepřesnost je tedy $0{,}0^{16}34 < 0{,}0^{16}35$.

Ukažme ještě, jak velikost podílu $|q_1|$ může klamat: Řešme rovnici $x^3 + 280x^2 + 2x - 3 = 0$ a volme za vychozí bod $x_2 = 1$:

$$y_2 = 280\,, \quad y_2' = 565\,, \quad y_2'' = 566\,, \quad y_2''' = 6\,,$$

$$|q_1| = \frac{280}{565^2} = 0{,}0^3 877\,,$$

tedy opět číslo poměrně malé. Ve skutečnosti dostaneme tento rozvoj:

$$\begin{array}{r} x_0 \doteq 1 \\ -0{,}495\,6 \\ -0{,}123\,0 \\ -0{,}060\,9 \\ -0{,}037\,6 \\ \hline 0{,}282\,9\,, \end{array}$$

kdežto správná hodnota je kolem 0,099 98.

B. **Přibližné řešení kvadratické rovnice.** U kvadratické funkce je

$$f^{(2+k)}(x) = 0 \tag{11}$$

pro každé přirozené k a pro všechny hodnoty proměnné x.

Pak je

$$\frac{d^2g}{dy^2} = -\frac{y''}{y'^3}, \quad \frac{d^3g}{dy^3} = +\frac{3\,.\,y''^2}{y'^5}, \quad \frac{d^4g}{dy^4} = -\frac{15y''^3}{y'^7},$$
$$\frac{d^5g}{dy^5} = +\frac{105y''^4}{y'^9}, \quad \frac{d^6g}{dy^6} = -\frac{945y''^5}{y'^{11}}, \ldots \tag{12}$$

Taylorova řada pro výpočet kořene tedy zní

$$x_0 = x_1 - \left(\frac{y_1}{y_1'}\right) - \frac{1}{2}\,.\left(\frac{y_1}{y_1'}\right).\left(\frac{y_1y_1''}{y_1'^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{y_1'}\right)\left(\frac{y_1y_1''}{y_1'^2}\right)^2 -$$
$$-\frac{5}{8}\left(\frac{y_1}{y_1'}\right)\left(\frac{y_1y_1''}{y_1'^2}\right)^3 - \frac{7}{8}\left(\frac{y_1}{y_1'}\right)\left(\frac{y_1y_1''}{y_1'^2}\right)^4 - \frac{21}{16}\,.\left(\frac{y_1}{y_1'}\right)\left(\frac{y_1y_1''}{y_1'^2}\right)^5 - \ldots \tag{13}$$

Tato řada konverguje patrně tím rychleji, čím je menší absolutní hodnota podílu

$$|q_2| = \left|\frac{y_1y_1''}{y_1'^2}\right|; \tag{13a}$$

tento výrok je již aspoň částečně opodstatněn. Koeficienty

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{21}{16}, \ldots$$

jsou čísla, jejichž podíl je shora ohraničen číslem 2, a q_2 je v čitáteli i jmenovateli stejného stupně.

C. **Výjimečné případy.** V některých výjimečných případech, když je na př. kořen blízko některému jednoduchému racionálnímu číslu, můžeme postupovat ještě jinak. Funkci $f(x)$ nahradíme jinou funkcí $u = g(x)$, která nechť má tyto vlastnosti:

1. má týž kořen x_0;

2. má některé vyšší derivace, na př. u_1'', u_1''' (po příp. obě) rovny nule;

3. řada pro výpočet kořene pomocí funkce $g(x)$ konverguje rychleji než pomocí funkce původní.

Druhá a třetí podmínka mají ten význam, že v řadě (6) některé členy vymizí a při rychlejší konvergenci stačí i k přesnějšímu určení hledaného kořene několik málo prvních členů.

První podmínce vyhovuje na př. i funkce

$$w(x) = a\,.\,y\,, \tag{14}$$

kde a je konstanta; přitom podíl

$$|q_1| = \left|\frac{w_1}{w_1'^2}\right|,$$

který udávají autoři „Teorie a prakse numerického počítání" jako charakteristický k určení rychlosti konvergence uvažované řady, by byl při $a > 1$ menší než původní podíl (6a); je totiž

$$w = a \,.\, y \quad \Rightarrow \quad w^{(k)} = a \,.\, y^{(k)} \tag{14a}$$

a odtud

$$\frac{w_1}{w_1'^2} = \frac{1}{a} \,.\, \frac{y_1}{y_1'^2} \,.$$

Bylo by však omylem se domnívat, že nová řada pro funkci w konverguje rychleji než řada původní; podle (14a) se násobí každá derivace funkce y číslem a. Všimněme si přitom, že jednotlivé členy řady (6) mají výrazy v čitateli i jmenovateli homogenní vzhledem k proměnným $y_1, y_1', y_1'' \ldots$, a to v čitateli i jmenovateli vždy stejného stupně. Je proto vhodnější studovat vždy podíl

$$q_2 = \frac{u_1 \,.\, u_1''}{u_1'^2} \,.$$

Vhodnou funkcí, která při vhodném čísle k vyhovuje našim podmínkám, je

$$u = \frac{y}{y + k}\,, \tag{15}$$

pro kterou dostáváme

$$\begin{gathered} u' = k \,.\, \frac{y'}{(y+k)^2}\,, \qquad u'' = k \,.\, \frac{y''(y+k) - 2y'^2}{(y+k)^3}\,, \\ u''' = k \,.\, \frac{y'''(y+k)^2 - 6y''y'(y+k) + 6y'^3}{(y+k)^4} \,. \end{gathered} \tag{15a}$$

Omezíme-li se pro okamžik na případ algebraické rovnice 3. stupně, je $y^{(3+k)} = 0$ pro každé přirozené k a pro všechny hodnoty proměnné x. Pak je

$$u^{\mathrm{IV}} = k \,.\, \frac{-\,8y'''y'(y+k)^2 - 6y''^2(y+k)^2 + 36y''y'^2(y+k) - 24y'^4}{(y+k)^5} \,. \tag{15b}$$

Konstantu k pak určíme tak, aby bylo $u_1'' = 0$; vyšší derivace v řadě (6) se nám tím značně zjednoduší a kromě toho jeden člen řady vymizí. Příslušné k_0 je dáno vztahem

$$y_1 + k_0 = \frac{2y_1'^2}{y_1''} \,. \tag{15c}$$

Při této volbě označme novou funkci

$$U = \frac{y}{y + k_0}\,, \qquad U_1'' = 0 \,. \tag{16}$$

Pro kořen x_0 tak dostáváme rozvoj

$$x_0 = x_1 - \frac{U_1}{U_1'} + \frac{U_1'''U_1^3}{3!\,U_1'^4} - \frac{U_1^{IV}U_1^4}{4!\,U_1'^5} + \dots \tag{16a}$$

Kdybychom mohli zanedbat vliv koeficientů

$$U_1''', U_1^{IV}, \dots, \tag{17}$$

mohli bychom soudit, že řada (16a) — počínaje třetím členem — konverguje patrně tím rychleji, čím je v absolutní hodnotě menší podíl

$$|q_3| = \left|\frac{U_1}{U_1'}\right| .$$

Ale koeficienty (17) činí tento úsudek ilusorním.

Této metody můžeme s úspěchem použít tehdy, když se hledaný kořen nalézá blízko vrcholu, kdy ostatní metody selhávají. Uvažme na př. rovnici $x^3 + 280x^2 + 2x - 3 = 0$, kterou jsme již v první části řešili. Její kladný kořen je blízko nuly a jeden vrchol grafického znázornění levé strany je také blízko nuly, totiž v bodě $-0{,}0037$.

Vypišme nejprve hodnotu levé strany dané rovnice a jejích derivací v bodě $x_1 = 0$: $y_1 = -3$, $y_1' = 2$, $y_1'' = 560$, $y_1''' = 6$; v bodě $x_2 = 1$ je $y_2 = 280$.

Metodou regula falsi bychom dostali pro kořen přibližnou hodnotu $+0{,}0106$, metodou Newtonovou pak hodnotu jistě nesprávnou $+1{,}5$ (protože kořen leží mezi 0 a 1). Také naše řada (6) v tomto případě selhává: $q_1 = -\frac{3}{4}$, ale skutečné první členy řady jsou

$$\tfrac{3}{2} - 9.35 + \tfrac{9}{16}\,.\,235\,197\,\dots .$$

Ani výpočet pomocí bodu $x_2 = 1$ nevede rychle k cíli, jak jsme již dříve ukázali. Pro naši substituční funkci dostaneme nejprve z rovnice (15c)

$$k_0 - 3 = \tfrac{1}{70}\,, \qquad k_0 = \tfrac{211}{70}\,,$$

$$U_1 = -210\,, \qquad U_1' = 140.211$$

a odtud přibližně

$$|q_3| \doteq \tfrac{1}{140}\,,$$

tedy číslo dosti malé. Kromě toho určíme dále:

$$U_1''' = -6.36.199.211.70^2\,, \qquad U_1^{IV} = 8.12.211.211.\,19\,599\,.$$

Pomocí těchto hodnot dostaneme

$$x_0 \doteq 0{,}0071 + 0{,}0901 - 0{,}0070 = 0{,}0902\,,$$

také ještě číslo dost vzdálené správné hodnoty 0,099 98, ale ze všech ostatních výsledků nejbližší.

Uvažme konečně substituční funkci ve tvaru

$$v = y^k\,, \qquad k > 0\,, \tag{18}$$

$$v' = k\,.\,y^{k-1}\,.\,y'\,, \qquad v'' = k(k-1)\,y^{k-2}\,.\,y'^2 + k\,.\,y^{k-1}\,y''\,; \tag{19}$$

odtud podíl

$$q_2 = \frac{vv''}{v'^2} = \frac{ky^{2k-2}[(k-1)y'^2 + yy'']}{k^2y^{2k-2}y'^2} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k} \cdot \frac{yy''}{y'^2} . \tag{20}$$

Odtud vidíme, že se tato funkce sama nehodí k zjednodušení numerického výpočtu. Ostatně je to patrno i z toho, že křivka (18) se při $k > 1$ dotýká v bodě $x = x_0$ osy x, při $k < 1$ pak rovnoběžky s osou y.

Přesto však můžeme uvedené funkce při výpočtu kořene použít. Volme dvě malá k (na př. 2 a 3) a z funkcí

$$y\,, \quad v = y^2\,, \quad w = y^3 \tag{21}$$

sestavme lineární kombinaci

$$V = a \,.\, y + b \,.\, v + c \,.\, w\,. \tag{22}$$

Derivace této funkce budeme počítat jako stejné lineární kombinace

$$V^{(i)} = ay^{(i)} + bv^{(i)} + cw^{(i)}\,. \tag{22a}$$

Konstanty a, b, c pak volme tak, aby dvě derivace funkce V, totiž V'' a V''', byly rovny nule.

Místo řady (5) pak dostaneme řadu

$$x_0 = x_1 - \frac{V_1}{V_1'} - \frac{V_1^{\mathrm{IV}}}{V_1'^5} \cdot \frac{V_1^4}{4!} + \frac{V_1^{\mathrm{V}}}{V_1'^6} \cdot \frac{V_1^5}{5!} - \dots\,. \tag{23}$$

U funkce V však zpravidla čísla V_1^{IV}, V_1^{V} a další derivace v uvažovaném bodě jsou čísla poměrně veliká. Není proto účelné počítat další členy řady (23); v jejím „podílu" vystupuje výraz

$$-\frac{V_1}{V_1'}\,, \tag{24}$$

ale to je vlastně první opravný člen té řady. Její konvergence závisí na tom, jak blízko k hledanému kořenu jsme se již hodnotou x_1 přiblížili.

Vcelku můžeme říci, že výhodou řady (23) je to, že po prvním členu dva členy řady původní vymizí — v tomto případě je tedy určování kořene metodou Newtonovou mnohem přesnější než určování kořene pomocí funkce původní. Nevýhodou je ovšem nutnost sestavit si tabulku derivací jednotlivých funkcí y^2 a y^3 a výsledné lineární kombinace (22).

Sestavme nejprve obecné vzorce pro derivace funkcí y^2 a y^3.

$$\begin{aligned}
v &= y^2\,, \\
v' &= 2yy'\,, \\
v'' &= 2y'^2 + 2yy''\,, \\
v''' &= 6y' \,.\, y'' + 2y \,.\, y'''\,, \\
v^{\mathrm{IV}} &= 6y''^2 + 8y' \,.\, y''' + 2y \,.\, y^{\mathrm{IV}}\,, \\
v^{\mathrm{V}} &= 20y''y''' + 10y' \,.\, y^{\mathrm{IV}} + 2y \,.\, y^{\mathrm{V}}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w &= y^3\,, \\
w' &= 3y^2y'\,, \\
w'' &= 6yy'^2 + 3y^2y''\,, \\
w''' &= 6y'^3 + 18y \,.\, y' \,.\, y'' + 3y^2y'''\,, \\
w^{\mathrm{IV}} &= 36y'^2y + 18yy''^2 + 24yy' \,.\, y''' + 3y^2y^{\mathrm{IV}}\,, \\
w^{\mathrm{V}} &= 90y' \,.\, y''^2 + 60y'^2y''' + 60yy''y''' + \\
&\quad + 30yy' \,.\, y^{\mathrm{IV}} + 3y^2y^{\mathrm{V}}\,.
\end{aligned}$$

Ukažme použití této metody při řešení rovnice

$$x^3 + 2x^2 + 93x - 97 = 0 .$$

Je tedy $y = x^3 + 2x^2 + 93x - 97 , \quad y' = 3x^2 + 4x + 93 ,$

$$y'' = 6x + 4 , \qquad y''' = 6 ;$$

všechny další derivace dané funkce jsou identicky rovny nule.

Jeden kořen této rovnice je blízko číslu 1:

$$x_1 = 1 , \quad y_1 = -1 , \quad y_1' = 100 , \quad y_1'' = 10 , \quad y_1''' = 6 .$$

Podle posledních vzorců si nyní snadno sestavíme tuto tabulku:

$x_1 = 1$	funkce y	funkce y^2	funkce y^3
hodnota funkce	—1	+1	—1
hodnota 1. derivace	+100	—200	+300
hodnota 2. derivace	10	+19 980	—59 970
hodnota 3. derivace	6	5 988	5 982 018
hodnota 4. derivace	0	5 400	3 583 800
hodnota 5. derivace	0	1 200	4 496 400
násobíme	a-krát	b-krát	c-krát

Násobme hodnoty druhých a třetích derivací po řadě čísly a, b, c. Podmínka (22a) pak zní

$$\begin{array}{r} 10a + 19\,980b - 59\,970c = 0/.3 \\ 6a + 5\,988b + 5\,982\,018c = 0/.(-5) \\ \hline 30\,000b - 30\,090\,000c = 0 ; \end{array}$$

jí vyhovují na př. čísla $c = 1$, $b = 1\,003$, a k tomu je z první dané rovnice $a = 1\,997\,997$.

Sestavme si nyní tabulku hodnot funkce a jejích derivací pro tuto lineární kombinaci V_1:

$$V_1 = 1\,998\,999 , \quad V_1' = -199\,999\,000 , \quad V_1'' = V_1''' = 0 ,$$
$$V_1^{IV} = 9\,000\,000 , \quad V_1^{V} = 5\,700\,000 .$$

Odtud již snadno dostaneme pro výpočet kořene tyto členy:

$$\begin{array}{r} x_0 \doteq 1{,}009\,995\,044\,975\,225 \\ +\,0{,}000\,000\,000\,018\,713 \\ +\,0{,}000\,000\,000\,000\,024 \\ \hline x_0 \doteq 1{,}009\,995\,044\,993\,962 . \end{array}$$

D. **O aritmetickém průměru.** Promluvme si nakonec o určování aritmetického průměru. Přitom budeme předpokládat, že se derivace dané funkce v okolí kořene mění poměrně málo. Největším změnám je podrobena funkce sama. Zvolme takové dva body, jejichž funkční hodnoty jsou aspoň přibližně právě opačné, t. j.

$$y_1 + y_2 \doteq 0 .$$

Pak liché členy řady (6), počínaje třetím, t. j. členy

$$-\frac{y_1''}{y_1'^3} \cdot \frac{y_1^2}{2!}, \dots ,$$

jsou přibližně shodné s odpovídajícími členy v obdobném rozvoji pro y_2; naproti tomu sudé členy, t. j. členy

$$-\frac{y_1}{y_1'}, \quad \frac{y_1'''y_1' - 3y_1''^2}{y_1'^5} \cdot \frac{y_1^3}{3!} \dots ,$$

jsou přibližně opačné než členy v druhém rozvoji. Chceme-li určovat přesnější hodnotu kořene pomocí aritmetického průměru, sečteme v obou rozvojích pro x_1 resp. x_2 lichý počet členů — při součtu sudého počtu členů dostaneme buď v obou rozvojích hodnotu menší nebo v obou hodnotu větší. Ale ani pak mnoho nezískáme, protože předpoklad o tom, že se derivace v okolí kořene skoro nemění, není splněn na mnoho desetinných míst. Tak v rovnici

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

vyšlo nám nejprve

$$x_0 \doteq 0{,}35 - 0{,}002\,7 .$$

Volme si proto za základ tyto dvě hodnoty:

$$x_1 = 0{,}35 - 2 \,.\, 0{,}002\,7 = 0{,}344\,6 \,, \quad x_2 = 0{,}35 \,.$$

K nim sestavíme tabulku hodnot funkce a derivací:

x_i	0,344 6	0,35
y_i	0,007 120 960 536	—0,007 125
y_i'	—2,643 752 52	—2,632 5
y_i''	+2,067 6	+2,10
y_i'''	6	6

Odtud pak již známým způsobem určíme

$$x_{11} = 0{,}347\,296\,341\,911 \,, \quad x_{21} = 0{,}347\,296\,369\,116$$

a jejich aritmetický průměr

$$x_0 \doteq 0{,}347\,296\,355\,513 \,.$$

Dostali jsme tak jen o 2 cifry správné více. Přímý výpočet dalšího členu řady dá celkem méně práce než metoda aritmetického průměru.

Poznámka. Zbývá ještě promluvit o tom, jak lze metodu rozvoje kořene spojit s metodou, kterou udal prof. K. PETR pro výpočet kořenů algebraických rovnic. O tom pojednám jindy.

LITERATURA

[1] *Matyáš Lerch:* O novém zobecnění řady Taylorovy a Langrageovy. Rozpr. Čes. ak. v. a um. II, XX, *36*, 7a.

[2] *Matyáš Lerch:* Poznámky o inversi řad a o číselných rovnicích. Časopis pro pěst. mat. a fys., XLVI, 225 a 377.

[3] *Václav Láska - Václav Hruška:* Teorie a prakse numerického počítání, str. 283 a n.

[4] *Karel Petr:* O jedné metodě pro řešení numerických rovnic algebraických, Příloha k Časopisu pro pěst. mat. a fys., XXVII, 49 a n.

[5] *František Brandler:* Příspěvek k numerickému řešení rovnic 3. stupně. Časopis pro pěst. mat. a fys., *74*, D 54 a n.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

JEŠTĚ O KVADRATICKÝCH POLYNOMECH NABÝVAJÍCÍCH MNOHA PRVOČÍSELNÝCH HODNOT

JAN MAŘÍK, Praha a ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava.

(Došlo dne 14. září 1955.) DT : 512.31

V článku je ukázáno, jak autoři přišli na nesprávnost tvrzení, že polynom $x^2 - x + 72491$ nabývá prvočíselných hodnot pro $x = 1, 2, \ldots, 11000$ (viz [3], str. 168).

V článku [6] je citována věta (totiž věta 3 z [5]), podle níž polynom $x^2 - x + p$ nabývá prvočíselných hodnot pro $x = 1, 2, \ldots, p - 1$, jakmile nabývá prvočíselných hodnot pro všechna přirozená x, pro něž je $x^2 - x \leqq \frac{p-1}{3}$. Je-li tento předpoklad splněn, je číslo p ovšem také prvočíslem. Snadno se zjistí, že mezi taková p patří čísla 2, 3, 5, 11, 17, 41. Dále je v [6] uvedeno: „*Lze-li věřit tabulkám, je takovým číslem též* 72491...“ a čtenář je odkázán na práci [3]. Aniž však tabulky kontrolujeme, můžeme zjistit, že zde není cosi v pořádku. Věta 3 v [5] totiž plyne z věty 2 téže práce; věta 2 pak říká toto: *Buď p přirozené číslo; buď C okruh (racionálních) celých čísel. Nechť číslo s vyhovuje rovnici $s^2 - s + p = 0$. Potom v okruhu $C[s]$*[1]) *platí věta o jednoznačném rozkladu v prvočinitele, právě když polynom $x^2 - x + p$ nabývá hodnot rovných jedné nebo nějakému prvočíslu pro všechna přirozená x, splňující vztah $x^2 - x \leqq \frac{p-1}{3}$.*

V takovém případě je tedy kvadratické těleso $R(\sqrt{d})$, kde R je těleso racionálních čísel a kde $d = 1 - 4p$, jednoduché (viz [7], kap. IV a VIII). Čísla 1, 2, 3, 5, 11, 17, 41 vedou ke kvadratickým tělesům $R(\sqrt{d})$, kde $d = -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$; mimo to je známo, že též tělesa $R(\sqrt{-1})$, $R(\sqrt{-2})$ jsou jednoduchá. Kdyby též číslo 72491 mělo uvedenou vlastnost, bylo by také těleso $R(\sqrt{-289963})$ jednoduché. Avšak otázka nalezení všech jednoduchých imaginárních kvadratických těles tvoří starý problém, který je částečně — i když dosud ne úplně — rozřešen. Je totiž známo, že mimo uve-

[1]) $C[s]$ vznikne „okruhovou“ adjunkcí čísla s k okruhu C; $C[s]$ je tedy množina všech $a + bs$, kde $a, b \in C$.

dených 9 těles (pro $d = -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$) může existovat nejvýš jedno takové těleso (viz [7], str. 194). (To zatím ještě nedává spor.) Dále je však dokázáno (viz [2][2])): Existuje-li jednoduché kvadratické těleso $R(\sqrt{d})$, kde $d < -163$,[3]) pak je $d < -15 \cdot 10^5$; to je ovšem spor. (Podle [4] není $R(\sqrt{d})$ jednoduché dokonce pro žádné d, kde $-5 \cdot 10^9 < d < -163$.)

Snadno se zjistí, že chyba je v článku [3]. HUA totiž píše (na str. 168), že polynom $x^2 - x + 72491$ nabývá prvočíselných hodnot pro $x = 0, 1, \ldots,$ 11000, a odvolává se přitom na práci [1]. V této práci je však pouze zjišťováno, kolik prvočísel je mezi čísly $f(0), \ldots, f(r)$, kde $f(x) = x^2 + x + 72491$[4]) a kde r je postupně 1000, 2000, ..., 11000. Na př. podle [1] mezi čísly $f(0), \ldots, f(5000)$ je 2441 prvočísel, mezi čísly $f(0), \ldots, f(11000)$ je 4923 prvočísel. Čísla $f(0), \ldots,$ $f(10999)$ nejsou tedy vesměs prvočísly, jak chybně cituje Hua. Dokonce ani číslo $f(0) = 72491$ samo není prvočíslem; zřejmě je 72491 součinem čísel 71 1021.

Konečně snad stojí za zmínku, že Huovo ne rávné tvrzení je uvedeno též v [8], str. 25, př. II.

LITERATURA

[1] *N. G. W. H. Beeger:* Report on some calculations of prime numbers, Nieuw archief voor wiskunde, XX, *48—50* (1940).

[2] *L. E. Dickson:* On the negative discriminants for which there is a single class of positive primitive binary quadratic forms, Bull. Amer. Math. Soc. (2), *17* (1911), 534—537.

[3] *Хуа-Ло-Кен:* Аддитивная теория простых чисел, Труды математического института имени В. А. Стеклова, XXII, 1947.

[4] *D. H. Lehmer:* On imaginary quadratic fields whose class number is unity, Bull. Amer. Math. Soc. (2), *39* (1933), 360.

[5] *J. Mařík:* Nutrá a postačující podmínka, aby v jistých okruzích celých čísel nereálných kvadratických těles platil jednoznačný rozklad v prvočinitele, Časopis pro pěst. mat. a fys., *74* (1950), seš. 3, str. 164.

[6] *J. Mařík:* O kvadratických polynomech, které nabývají mnoha prvočíselných hodnot, Časopis pro pěst. mat., *78* (1953), str. 57.

[7] *Š. Schwarz:* Algebraické čísla, JČMF, Kruh, sväzok 16, Praha 1950.

[8] Matematika pro III. tř. gymnasií, Státní nakladatelství učebnic, Praha 1951.

---

[2]) V práci [2] je též dokázána věta 2 z článku [5].

[3]) Rozumí se ovšem: d celé bez čtvercových dělitelů.

[4]) Je ovšem jedno, vyšetřujeme-li polynom $f(x)$ nebo polynom $x^2 - x + 72491$, protože $f(x - 1) = x^2 - x + 72491$.

Резюме

ЕЩЕ О КВАДРАТНЫХ МНОГОЧЛЕНАХ, ПРИНИМАЮЩИХ МНОГО ЗНАЧЕНИЙ В ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага, и ШТЕФАН ШВАРЦ (Štefan Schwarz), Братислава.

(Поступило в редакцию 14. IX. 1955 г.)

В статье показано, как авторы раскрыли ошибочность утверждения, что значениями многочлена $x^2 - x + 72491$ для $x = 1, 2, \ldots, 11000$ являются простые числа (см. [3], стр. 168).

Zusammenfassung

NOCH EINMAL ÜBER QUADRATISCHE POLYNOME, DIE VIELE PRIMZAHLWERTE ANNEHMEN

JAN MAŘÍK, Praha u. ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava.
(Eingelangt 14. IX. 1955.)

In [3], Seite 168, wird behauptet, dass sämtliche Zahlen $x^2 - x + 72491$, wo $x = 1, 2, \ldots, 11000$, Primzahlen sind. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass aus einigen bekannten zahlentheoretischen Sätzen die Unrichtigkeit dieser Behauptung folgt.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 81 (1956)

NĚKTERÉ VĚTY Z THEORIE PARABOLICKÝCH PŘÍMKOVÝCH KONGRUENCÍ

LADISLAV KOUBEK, Praha.

(Došlo dne 20. října 1955.)

DT : 513.716

Na popud akademika E. Čecha jsem studoval některé typy parabolických přímkových kongruencí v n-rozměrném projektivním prostoru. Jde o kongruence tvořené tečnami asymptotických křivek (fokální) plochy. Vezmeme-li tyto asymptotiky za u-křivky, je parabolická kongruence definována parciální rovnicí

$$x_{uu} = a(u, v)\, x_u + b(u, v)\, x_v + c(u, v)\,, \quad b \neq 0\,,$$

kde pro jednoduchost lze předpokládat analytické koeficienty.

V práci *Proektivnaja differencialnaja geometrija sootvetstvij meždu dvumja prostranstvami* VI. (Čechosl. mat. journ. 1952, str. 297) definoval ak. E. Čech k dané parabolické kongruenci konjugovanou síť a naopak. K této definici jsem připojil definici harmonické sítě:

Je-li každá přímka parabolické kongruence (xx_u) *v tečné rovině plochy* (y) *a jsou-li u-křivky na ploše* (y) *asymptotické* (parametrická síť na ploše (y) volena tak, aby si odpovídala přímka kongruence a bod plochy, jehož tečná rovina je s ní incidentní), *řekneme, že kongruence* (xx_u) *je harmonická se sítí* (y) *a naopak.*

O vztahu harmonických a konjugovaných sítí resp. kongruencí jsem dokázal věty:

1. *Nutná a postačující podmínka, aby kongruence* (yy_u) *byla harmonická se sítí* (x) *je, aby fokální síť* (y) *byla konjugována s kongruencí* (xx_u).

2. *Dvě sítě* (y) *a* (z) *konjugované s jednou kongruencí* (xx_u) *jsou harmonické s druhou kongruencí* (ss_u).

3. *Dvě kongruence harmonické s jednou sítí jsou konjugovány s druhou sítí.*

4. *Dvě sítě harmonické s jednou kongruencí jsou konjugovány s druhou kongruencí.*

5. *Jsou-li kongruence* (yy_u) *a* (zz_u) *konjugovány s jednou sítí, jsou harmonické s druhou sítí.*

6. *Existuje-li kongruence* (yy_u) *harmonická se sítí* (x) *a konjugovaná se sítí* (s), *existuje jednoparametrická soustava kongruencí harmonických s* (x) *a konjugovaných s* (s).

Všechny tyto věty jsou limitním případem známých vět hyperbolického případu, ale lze je dokázat přímo, bez limitního přechodu.

(Podrobné zpracování thematu bylo rozmnoženo a lze si je vyžádat v matematické komisi ČSAV.)

RŮZNÉ

ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC POTENČNÍMI ŘADAMI

Pan dr OTAKAR KODL, Valašské Meziříčí, upozorňuje redakci na tuto methodu řešení algebraické rovnice $f(x) = 0$:

Buď $f = f_1 + f_2$, kde f_1, f_2 jsou opět polynomy; buď c_0 takové číslo, že $f_1(c_0) = 0$, $f_1'(c_0) \neq 0$. (Tomu lze v netriviálních případech vyhovět na př. takto: Je-li $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, určíme takové dva různé indexy i, j, aby bylo $a_i a_j \neq 0$, položíme $f_1(x) = a_i x^i + a_j x^j$ a za c_0 zvolíme nějaký nenulový kořen rovnice $f_1(x) = 0$.) Utvořme nyní funkci $g(x, u) = f_1(x) + u\, f_2(x)$. Protože $g(c_0, 0) = f_1(c_0) = 0$, $\frac{\partial g}{\partial x}(c_0, 0) = f_1'(c_0) \neq 0$, můžeme pokládat x za funkci proměnné u, definovanou v jistém okolí bodu $u = 0$ vztahem $g(x, u) = 0$, a psát $x = x(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \dots$ Koeficienty c_i pro $i > 0$ lze počítat rekurentně (vždy pomocí lineární rovnice) ze vztahu $g(x, u) = 0$. Jestliže potom řada $\sum_{i=0}^{\infty} c_i u^i$ má poloměr konvergence větší než 1, platí $g(x(u), u) = 0$ též pro $u = 1$, takže číslo $x = x(1) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i$ vyhovuje vztahu $f(x) = f_1(x) + 1 \,.\, f_2(x) = g(x, 1) = 0$. Dostáváme tak kořen rovnice $f(x) = 0$.

ÚLOHY A PROBLÉMY

Navazujeme na hlídku úloh a problémů, započatou v Časopise pro pěstování matematiky v roč. 79 (1954). Prosíme čtenáře, aby řešení úloh a problémů jakož i dotazy na literaturu, která se k jednotlivým problémům vztahuje, zasílali opět redakci, nebo aby navázali styk přímo s autory uveřejněných úloh.

Dále žádáme naše čtenáře, aby nám hojně zasílali úlohy a problémy vhodné pro tuto hlídku.

Redakce.

1. Dokažte bez použití theorie Lebesgueova integrálu tuto větu:

Buďte f, g konečné funkce v intervalu $(0, 1)$; funkce g nechť je spojitá, funkce f nechť má primitivní funkci a nechť je nezáporná. Potom funkce $f \,.\, g$ má primitivní funkci.

Poznámka. Z vět o Lebesgueově integrálu plyne naše tvrzení ihned takto: Pro každé $x \in (0, 1)$ existuje Lebesgueův integrál $\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = H(x)$ a platí (jak se snadno zjistí) $H'(x) = f(x)\, g(x)$.

Jan Mařík, Praha.

2. Dokažte elementárními prostředky, že platí tato věta:

Nechť funkce f má (vlastní) Riemannův integrál v intervalu $\langle c, d\rangle$. Nechť funkce φ má spojitou derivaci v intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $c \leqq \varphi(t) \leqq d$ pro každé $t \in \langle a, b\rangle$. Potom existuje Riemannův integrál $\int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t$ a rovná se $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, \mathrm{d}x$.

Poznámka. Důkaz lze provést dosti jednoduše pomocí některých ne zcela triviálních vět z theorie reálných funkcí.

Jan Mařík, Praha.

3. Rozhodněte, zda platí tato věta:

Buďte G, H otevřené konvexní množiny v obyčejném trojrozměrném (event. n-rozměrném) prostoru. Množina H buď omezená a nechť $\overline{H} \subset G$. Nechť funkce f má omezené spojité (resp. omezené) derivace prvního řádu na množině $G - \overline{H}$. Potom je funkce f stejnoměrně spojitá (na $G - \overline{H}$).

Poznámka. Z názoru se zdá být jasné, že funkci f lze spojitě rozšířit na hranici množiny H; odtud by stejnoměrná spojitost snadno vyplynula.

Jan Mařík, Praha.

4. Nechť F je distribuční funkce (t. j. neklesající zprava spojitá funkce na $(-\infty, +\infty)$, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$), nechť

$$\int x \,\mathrm{d}F(x) = 0\,, \quad \int x^2 \,\mathrm{d}F(x) = 1\,.$$

Definujme posloupnost distribučních funkcí $F_1, F_2, \ldots$ takto:

$$F_1 = F \quad \text{a} \quad F_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \int F_{n-1}(x - z)\,\mathrm{d}F_{n-1}(z)\,.$$

Položme

$$\varepsilon_n = \sup_{x \in (-\infty, +\infty)} |F_n(x) - \Phi(x)|\,,$$

kde

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Je známo z počtu pravděpodobnosti, že $\varepsilon_n \to 0$ a pro některá speciální F jsou známy i bližší odhady čísel ε_n (viz Feller: On the Normal Approximations to the Binomial Distribution, Annals of Mathematical Statistics, vol. *16* (1945), pp. 319—329). Protože pro mnohé důležité funkce F jsou tabelovány funkce F_n (a je tedy možné určit ε_n) pro některá n, bylo by zajímavé blíže studovat povahu konvergence ε_n k nule; zejména ukázat, za jakých předpokladů $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3 \geq \ldots$

Poznámka. Analytickou formulaci lze nahradit pravděpodobnostní formulací takto. Budiž $\xi_1, \xi_2, \ldots$ posloupnost nezávislých náhodných proměnných se stejnou distribucí danou distribuční funkcí F. Nechť

$$\eta_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i\,.$$

nechť G_n je distribuční funkce náhodné proměnné η_n, nechť

$$\delta_n = \sup_{x \in (-\infty, +\infty)} |G_n(x) - \Phi(x)|\,,$$

Opět $\delta_n \to 0$ a je užitečné blíže zkoumat povahu této konvergence a zejména zjistit předpoklady, za nichž $\delta_n \searrow 0$. Poznamenejme, že obě formulace nejsou ekvivalentní a že druhá verse je zobecněním první. ε_n je totiž vybraná posloupnost z δ_n, $\varepsilon_1 = \delta_1$, $\varepsilon_2 = \delta_2$, $\varepsilon_3 = \delta_4$, $\varepsilon_4 = \delta_8, \ldots$; zdá se, že z počátku by bylo lehčí studovat pouze posloupnost ε_n.

Nejsou mi známy žádné podmínky pro monotonii posloupnosti ε_n, resp. δ_n, a dokonce mi nejsou známy ani příklady na splnění resp. nesplnění požadavku monotonie.

Václav Fabian, Praha.

REFERÁTY

Referát o přednáškách prof. WLADYSLAWA ORLICZE, konaných v matematické obci pražské dne 10. 10. 1955 a dne 17. 10. 1955.

Přednášející podal přehled o dosavadních výsledcích o Saksových prostorech (viz W. ORLICZ, Linear Operations in Saks' spaces I, Studia Mathematica *11* (1950), část II, Studia Math. *15* (1955)). Zabýval se problémem struktury Saksových prostorů, vyjádřením lineárních funkcionálů (J. MUSELIAK-W. ORLICZ, Linear functionals on the space of functions continuous in an open interval, Studia Math, *16*), otázkami spojitosti lineárních operací a posloupnostmi lineárních operací. Konečně uvedl aplikace této theorie m. j. na theorii sčitatelnosti (kromě výše uvedených prací viz též A. ALEXIEWICZ-W. ORLICZ, On summability of double sequences, Annales Polonici Math. *2* (1955) a na theorii orthogonálních řad (W. ORLICZ, On the convergence of functionals..., Studia Math. *13* (1953), W. ORLICZ, Sur la Convergence uniforme des developpements orthogonaux, Colloquium Mathematicum *1* (1948)).

Wladyslaw Orlicz, Poznań.

O ENDOMORFISMECH ABELOVÝCH GRUP

(Referát o přednášce VLASTIMILA DLABA, přednesené v matematické obci pražské dne 14. listopadu 1955.)

Obsahem přednášky bylo studium struktury okruhu endomorfismů libovolné Abelovy grupy G pomocí struktury okruhu endomorfismů úplných grup a aplikace získaných výsledků na theorii obecných okruhů.

Přednášející v úvodu připomněl některé definice z theorie grup:*)

Grupu, jejíž každý prvek má nekonečný (resp. konečný) řád, nazveme *aperiodickou* (resp. *periodickou*); je-li řád každého prvku mocninou téhož prvočísla p, mluvíme o *p-primární* grupě. Řekneme, že grupa G^* je *úplná*, jestliže rovnice $n \,.\, x = g$, n přirozené číslo, $g \in G^*$, má vždy v G^* řešení. Ke každé grupě G existuje úplná grupa G^*, jež obsahuje G; při tom mezi všemi takovými úplnými grupami existuje minimální úplná grupa $\bar{G}$ až na isomorfismus, který je rozšířením identického automorfismu grupy G, jednoznačně určená; nazveme ji *úplným uzávěrem* grupy G.

Vedle pojmu obyčejné lineární závislosti a pomocí něho odvozeného pojmu hodnosti grupy G (označeno symbolem hod (G)) zavedl přednášející pojem zobecněné hodnosti grupy G (označeno Z-hod (G)) a ukázal přednosti této definice:

Množinu nenulových prvků $\mathfrak{G} = (g_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$, $g_\alpha \in G$, nazveme lineárně Z-nezávislou, jestliže z každé relace

$$k_1 g_{\alpha_1} + k_2 g_{\alpha_2} + \ldots + k_n g_{\alpha_n} = 0, \quad k_i \text{ celá čísla}, \ g_\alpha \in \mathfrak{G},$$

plyne $k_i g_{\alpha_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

*) Grupou rozumí se vždy aditivně psaná Abelova grupa.

Je-li $G_{(p)}$ nenulová p-primární grupa, potom mohutnost maximálního lineárně Z-nezávislého systému v $G_{(p)}$ (která je v tomto případě invariantem grupy) nazveme zobecněnou hodností p-primární grupy $G_{(p)}$; je-li $G_{(p)} = 0$, definujme Z-hod $(G_{(p)}) = 0$. Označíme-li P periodickou část libovolné grupy G a je-li $P = \sum_p P_{(p)}$ její direktní rozklad na p-primární komponenty, nazveme zobecněnou hodností grupy G součet

$$Z\text{-hod } (G) = \text{hod } (G) + \sum_p Z\text{-hod } (P_{(p)}).$$

Zobrazení $\varkappa$ grupy G do grupy H, jež zachovává operaci, nazýváme homomorfismem grupy G do H. Všechny homomorfismy grupy G do H tvoří při známé definici sčítání Abelovu grupu $\mathfrak{K}(G, H)$. Je-li ϱ homomorfismus grupy H do F, můžeme ve známém smyslu mluvit o součinu homomorfismů $\varkappa\varrho$. Je-li $G = H = F$, mluvíme o endomorfismu grupy G; máme tedy definováno sčítání a násobení endomorfismů a při takto definovaných operacích tvoří všechny endomorfismy grupy G okruh $\mathfrak{R}(G)$ s jednotkou.

K tomu, aby přednášející popsal vztah mezi okruhem endomorfismů grupy G a okruhy endomorfismů úplných grup, zavedl ještě definici *přímo* (resp. *homomorfně*) *indukovaného endomorfismu* a *přímého* (resp. *homomorfního*) *rozšíření endomorfismu*:

Je-li H podgrupou G a ε endomorfismem grupy G, řekneme, že ε indukuje přímo (resp. homomorfně) endomorfismus ε' grupy H (resp. ε^* grupy G/H), jestliže parciální zobrazení grupy H určené zobrazením ε (resp. zobrazení tříd grupy G mod *H určené zobrazením ε) je endomorfismem ε' v H (resp. ε^* v G/H).*

V obdobném smyslu definujeme přímé (resp. homomorfní) rozšíření endomorfismu ε' podgrupy $H \subset G$ (resp. ε^* grupy G/H) na grupu G.

V okruhu endomorfismů $\mathfrak{R}(G)$ nejprve přednášející upozornil na tři množiny endomorfismů, určených grupou G a nějakou její podgrupou $H \subset G$:

(I) na podokruh $\mathfrak{R}(G; H) \subset \mathfrak{R}(G)$ těch endomorfismů ε, pro něž je $H\varepsilon \subset H$,

(II) na oboustranný ideál $\mathfrak{M}(G, H) \subset \mathfrak{R}(G; H)$ těch endomorfismů ε, pro něž platí $H\varepsilon = 0$ a

(III) na oboustranný ideál $\mathfrak{N}(G, H) \subset \mathfrak{R}(G; H)$ všech endomorfismů ε, pro které je $G\varepsilon \subset H$.

Pomocí nich určil základní vztahy mezi okruhem endomorfismů grupy G, okruhem endomorfismů její podgrupy $H \subset G$ a faktorové grupy G/H. Jelikož každá grupa G je isomorfní faktorové grupě nějaké volné grupy U, $G \cong U/N$, obdržíme snadno výsledek

$$\mathfrak{R}(G) \cong \mathfrak{R}(U; N)/\mathfrak{N}(U, N) .$$

Konstrukcí úplné grupy G^0, $G^0 \supset \bar{G} \supset G$, potom získáme obdobný vztah mezi okruhy endomorfismů grup G a G^0

$$\mathfrak{R}(G) \cong \mathfrak{R}(G^0, G)/\mathfrak{M}(G^0, G) .$$

Přednášející naznačil ještě důkaz některých vlastností úplného uzávěru $\bar{G}$ grupy G, potřebných k dalším úvahám:

(I) je-li $\bar{g} \neq 0$, $\bar{g} \in \bar{G}$, potom existuje přirozené číslo n, že $n\bar{g} \neq 0$, $n\bar{g} \in G$;

(II) je-li G aperiodická (resp. periodická), je $\bar{G}$ aperiodická (resp. periodická);

(III) hod (G) = hod $(\bar{G})$;

(IV) Z-hod (G) = Z-hod $(\bar{G})$;

(V) je-li $G = \sum_{\alpha \in \Delta} G_\alpha$, je $\bar{G} = \sum_{\alpha \in \Delta} \bar{G}_\alpha$.

Pomocí těchto vlastností odvodil větu a ukázal na příkladech nemožnost jejího zostření:

Věta. *Okruh endomorfismů $\mathfrak{R}(G)$ grupy G je isomorfní faktorovému okruhu podokruhu* *všech endomorfismů ε^* úplného obalu $\overline{G}$, pro něž je $G\bar{\varepsilon} \subset G$, podle ideálu těch endomorfismů $\bar{\varepsilon}^*$, pro které platí $G\varepsilon^* = 0$:*

$$\Re(G) \cong \Re(\overline{G}; G)/\mathfrak{M}(\overline{G}, G) .$$

Je-li speciálně G aperiodická, potom $\mathfrak{M}(\overline{G}, G) = (0)$.

Tím se objevila souvislost okruhu $\Re(G)$ s okruhy endomorfismů úplných grup a nutnost studia těchto okruhů. Jelikož každá úplná grupa A je direktním součtem aditivních grup racionálních čísel R a Prüferových grup $G(p^\infty)$ typu p^∞ vzhledem k různým prvočíslům p, je obecný tvar grupy A

$$A = \sum_{0 \leq \alpha_{(0)} < \tau_{(0)}} R_{\alpha_{(0)}} + \sum_{0 \leq \alpha_{(1)} < \tau_{(1)}} G_{\alpha_{(1)}}(p_1^\infty) + \ldots + \sum_{0 \leq \alpha_{(n)} < \tau_{(n)}} G_{\alpha_{(n)}}(p_n^\infty) + \ldots , \tag{1}$$

$p_1 < p_2 < \ldots$ všechna prvočísla.

Je tedy účelné nejprve obecně studovat okruh endomorfismů direktního součtu grup

$$G = \sum_{0 \leq \alpha < \tau} G_\alpha .$$

Popis okruhu endomorfismů tohoto direktního součtu podal přednášející větou, která je zobecněním věty Kiškiny. Zatím co KIŠKINA se omezovala při studiu okruhu endomorfismů direktního součtu grup na konečný direktní součet, zobecnil přednášející její výsledek zavedením nového pojmu zobecněného průniku na nekonečný direktní součet.

Zobecněným průnikem systému $(K_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ podgrup $K_\alpha \subset G$ v grupě G

$$\overline{\bigcap_{\alpha \in \Delta}} K_\alpha = D$$

nazveme podgrupu $D \subset G$, která se skládá z těch prvků, které až na konečný počet indexů α leží ve všech podgrupách K_α. Zmíněná věta potom zní:

Věta. *Budiž $G = \sum_{0 \leq \alpha < \tau} G_\alpha$. Označme $\overline{\mathfrak{D}}_\tau$ množinu všech čtvercových matic $(\varkappa_{\alpha\beta})$ typu τ, kde $\varkappa_{\alpha\beta}$ je homomorfismus grupy G_α do grupy G_β (pro $\alpha = \beta$ se zřejmě jedná o endomorfismus grupy G_α), při čemž pro pevné α $(0 \leqq \alpha < \tau)$ splňují jádra $K_{\alpha\beta} \subset G_\alpha$ homomorfismů $\varkappa_{\alpha\beta}$ vztah*

$$\overline{\bigcap_{0 \leq \beta < \tau}} K_{\alpha\beta} = G_\alpha . \tag{2}$$

Potom tato množina s maticovým sčítáním a násobením tvoří okruh a je

$$\Re(G) \cong \overline{\mathfrak{D}}_\tau .$$

V dalším vyšetřil přednášející ještě grupy homomorfismů grupy R do R, $G(p^\infty)$ do $G(q^\infty)$ $(p = q, p \neq q)$ a R do $G(p^\infty)$ a uvedl isomorfní representaci těchto grup pomocí grup racionálních a p-adických čísel. Při tom odvodil pro tato čísla podmínky, plynoucí ze vztahu (2); výsledek možno pak formulovat větou:

Věta. *Budiž A úplná grupa tvaru* (1). *Potom její okruh endomorfismů $\Re(A)$ je isomorfní okruhu $\mathfrak{D}_\nu$ čtvercových matic $A = (a_{\alpha\beta})$ typu $\nu = \tau_{(0)} + \tau_{(1)} + \ldots + \tau_{(n)} + \ldots$,* kde

pro $0 \leqq \alpha < \tau_{(0)}$, $0 \leqq \beta < \tau_{(0)}$ je $a_{\alpha\beta}$ racionální číslo,

pro $0 \leqq \alpha < \tau_{(0)}$, $\tau_{(i-1)} < \beta < \tau_{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ je $a_{\alpha\beta}$ p_i-adické číslo,

pro $\tau_{(i-1)} < \alpha < \tau_{(i)}$, $\tau_{(i-1)} < \beta < \tau_{(i)}$, $(i = 1, 2, \ldots)$ je $a_{\alpha\beta}$ celé p_i-adické číslo a ostatní $a_{\alpha\beta} = 0$, s obyčejným maticovým sčítáním a násobením.

Při tom pro pevné α, $0 \leqq \alpha < \tau_{(0)}$ je mezi $a_{\alpha\beta}$ pouze konečný počet nenulových racionálních čísel, konečný počet necelých p_i-adických čísel $(i = 1, 2, \ldots)$ a pro $\tau_{(i-1)} < \beta < \tau_{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots$ pevné) jakož i pro pevné $\alpha > \tau_{(0)}$ mají všechna p_i-adická čísla až na konečný počet ve známé representaci pomocí nekonečných posloupností pro libovolné přirozené číslo m_0 prvních m_0 složek nulových.

Odtud ovšem snadno vyplývá tvar matic okruhu $\mathfrak{D}_\nu$, je-li specielně grupa A aperiodická (resp. periodická).

V závěru přednášející ukázal užití popsaných výsledků v theorii obecných okruhů. Využil známého Dorrohova vnoření okruhu $\mathfrak{R}$ bez jednotky do okruhu $\mathfrak{R}^*$ s jednotkou, při čemž ukázal, že mezi hodností $\mathfrak{n}$ aditivní grupy okruhu $\mathfrak{R}$ a hodností $\mathfrak{n}^*$ aditivní grupy okruhu $\mathfrak{R}^*$ platí v případě, že hodnost $\mathfrak{n}$ je nekonečná, rovnost $\mathfrak{n}^* = \mathfrak{n}$, v případě, že je konečná, vztah $\mathfrak{n}^* = \mathfrak{n} + 1$. Uvědomíme-li si ještě, že každý okruh s jednotkou je isomorfní podokruhu okruhu endomorfismů nějaké grupy, na př. své aditivní grupy, dostáváme řadu výsledků; uveďme aspoň nejdůležitější:

Věta. *Okruh endomorfismů $\mathfrak{R}(G)$ grupy G je isomorfní faktorovému okruhu vhodného podokruhu okruhu matic $\mathfrak{D}_\nu$, popsaného předchozí větou. Je-li G aperiodická, pak je $\mathfrak{R}(G)$ (ve smyslu isomorfismu) podokruhem $\mathfrak{D}_\nu$:*

$$\mathfrak{R}(G) \subset \mathfrak{D}_\nu .$$

Každý okruh endomorfismů může být tedy získán tvořením podokruhů a faktorových okruhů ze známých okruhů matic $\mathfrak{D}_\nu$. Do jaké míry lze toto tvrzení obrátit — t. j. otázka, které jsou to podokruhy či faktorové okruhy, jež jsou okruhy endomorfismů — je zatím otevřeným problémem.

Důležitost popsaného okruhu $\mathfrak{D}_\nu$ je ještě patrnější z následující věty:

Věta. *Budiž $\mathfrak{R}$ libovolný okruh. Potom ve smyslu isomorfismu platí: Buď je $\mathfrak{R}$ podokruhem $\mathfrak{D}_\nu$, nebo existuje podokruh $\mathfrak{D}'_\nu \subset \mathfrak{D}_\nu$ a oboustranný ideál $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{D}'_\nu$, že je*

$$\mathfrak{R} \subset \mathfrak{D}'_\nu/\mathfrak{M} .$$

Je-li aditivní grupa daného okruhu $\mathfrak{R}$ aperiodická hodnosti $\mathfrak{n}$, potom ve smyslu isomorfismu platí

$$\mathfrak{R} \subset \mathfrak{D}_{\tau^*} ,$$

kde $\mathfrak{D}_{\tau^*}$ je okruh matic $(a_{\alpha\beta})$ typu τ^*, jejichž prvky jsou racionální čísla, při čemž pro pevné α je jen konečný počet $a_{\alpha\beta} \neq 0$ a mohutnost ordinálního čísla τ je rovna $\mathfrak{n}$ (resp. $\mathfrak{n} + 1$), je-li $\mathfrak{n}$ nekonečné (resp. konečné). Má-li tedy okruh $\mathfrak{R}$ aperiodickou aditivní grupu konečné hodnosti n, je ve smyslu isomorfismu podokruhem okruhu čtvercových $(n + 1)$-řadých matic, a je-li při tom $\mathfrak{R}$ okruhem s jednotkou, dokonce podokruhem okruhu n-řadých matic nad tělesem racionálních čísel.

Vlastimil Dlab, Praha.

O ASYMPTOTICKÝCH VLASTNOSTECH INTEGRÁLŮ OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

(Referát o přednášce prof. K. V. Atkinsona přednesené v matematické obci pražské dne 12. prosince 1955.)

Asymptotická theorie diferenciálních rovnic stojí mezi kvalitativní theorií diferenciálních rovnic a mezi integračními metodami, které hledají přesné řešení. Mějme rovnici

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) , \quad y = (y_1, \ldots, y_n) , \quad f = (f_1, \ldots, f_n) . \tag{1}$$

V asymptotické theorii diferenciálních rovnic dokazujeme vztahy typu

$$y(t) = z(t) + o(1) ,$$

nebo

$$y(t) = z(t) + o(\|z(t)\|) ,$$

kde $y(t)$ je libovolné (resp. dané) řešení rovnice (1) a funkce $z(t)$ zpravidla vyhovuje jiné rovnici

$$\frac{dz}{dt} = g(z, t) , \tag{2}$$

a tak v asymptotické theorii porovnáváme vlastnosti integrálů rovnic (1) a (2).

Nejjednodušší je „theorie poruch" pro rovnici

$$\dot{y} = 0 . \tag{3}$$

Rovnici (3) srovnáváme s rovnicí

$$\dot{y} = Ay , \quad A = \{a_{i,k}(t)\} \tag{4}$$

a klademe otázku: *Jaké podmínky musí splňovat matice A, aby každý integrál $y(t) \neq 0$ rovnice (4) měl konečnou limitu $y(\infty) \neq 0$ pro $t \to \infty$?*

Snadno lze dokázat, že postačující podmínka je $\int^{\infty} \|A\| \, dt < \infty$, kde $\|A\| = \sum_{i,k} |a_{i,k}(t)|$.

Jinou cestu k odpovědi na položenou otázku nabízí tato úvaha: Platí-li $A(t_1) A(t_2) = A(t_2) A(t_1)$ pro libovolná čísla t_1, t_2, potom rovnice (4) má integrál

$$y(t) = y(0) . \exp \{\int_0^t A(u) \, du\} .^{1})$$

Existuje-li nevlastní integrál $\int_t^{\infty} A(u) \, du = B(t)$ a platí-li $A(t) \, B(t) = B(t) \, A(t)$, potom rovnice (4) má obecný integrál

$$y(t) = \exp \{B(t)\} . c ,$$

kde vektor c je integrační konstanta; zřejmě pak existuje $y(\infty) = c$. Limita $y(\infty)$ existuje také tehdy, nahradíme-li předpoklad, že matice $A(t)$ a $B(t)$ jsou komutativní, předpokladem, že matice $A(t)$ a $B(t)$ jsou asymptoticky komutativní, t. j., že platí

$$\int^{\infty} \|A(t) \, B(t) - B(t) \, A(t)\| \, dt < \infty .$$

Odtud snadno přejdeme k jinému případu: Nechť konstantní matice A_0 má pouze imaginární charakteristická čísla, navzájem různá. Porovnávejme rovnice

$$\dot{y} = A_0 y , \tag{5}$$

$$\dot{y} = (A_0 + A) \, y , \quad A = A(t) . \tag{6}$$

Substitucí $z = \exp \{- A_0 t\} . y$ rovnice (5) a (6) přejdou v rovnice

$$\dot{z} = 0 , \tag{7}$$

$$\dot{z} = \exp \{- A_0 t\} . A . \exp \{A_0 t\} . z . \tag{8}$$

Dospíváme k výsledku: *Integrály rovnice (5) a (6) jsou si asymptoticky rovny, je-li splněna jedna ze tří podmínek*

1. $\int^{\infty} \|A\| \, dt < \infty$, (9)

---

[1]) $\exp\{C\}$ znamená matici $I + \frac{1}{1!} C + \frac{1}{2!} C^2 + \ldots$

2. $\int\limits^{\infty} \|\exp\{-A_0 t\}\, A(t) \exp\{A_0 t\}\|\, dt < \infty\,,$ (10)

3. *integrál* $\int\limits_t^{\infty} \exp\{-A_0 u\}\, A(u) \exp\{A_0 u\}\, du = D(t)$ (11)

konverguje a matice $\exp\{-A_0 t\}\, A(t) \exp\{A_0 t\}$ *a* $D(t)$ *jsou asymptoticky komutativní.*

Obraťme se k **oscilatorickým rovnicím 2. řádu.** Pro integrály rovnice

$$\ddot{y} + (1 + g(t))\, y = 0\,, \quad \lim_{t \to \infty} g(t) = 0\,, \tag{12}$$

(zde $n = 1$, y je reálné číslo), platí asymptotický vzorec

$$y = A \cos\left(\int_0^t \sqrt{1 + g(u)}\, du + B\right) + o(1)\,, \tag{13}$$

je-li splněna jedna z těchto tří podmínek:

1. $\int\limits^{\infty} |g(t)|\, dt < \infty\,,$ (14)

2. konvergují integrály

$$\int^{\infty} g(t)\, dt\,, \quad I_1(t) = \int_t^{\infty} g(u) \cos 2u\, du\,, \quad I_2(t) = \int_t^{\infty} g(u) \sin 2u\, du\,, \tag{15}$$

$$\int^{\infty} |g(t)|\, |I_1(t)|\, dt\,, \quad \int^{\infty} |g(t)|\, |I_2(t)|\, dt\,,$$

3. funkce $g(t)$ má derivaci $\dot{g}(t)$, $\int\limits^{\infty} |\dot{g}(t)|\, dt < \infty$. (16)

Dosah podmínky (15) si ujasníme, položíme-li

$$g(t) = \frac{\cos kt}{t^{\alpha}}\,, \quad \alpha > \frac{1}{2}\,, \quad k \neq 0,\ \pm 2\,.$$

Podmínka (15) je splněna a pro integrály dif. rovnice

$$\ddot{y} = \left(1 + \frac{\cos kt}{t^{\alpha}}\right) y = 0$$

dostáváme asymptotický vzorec

$$y = A \cos(t + C) + o(1)\,.$$

Je-li však $\alpha = \frac{1}{2}$, podmínka (15) splněna není a pro integrály diferenciální rovnice

$$\ddot{y} + \left(1 + \frac{\cos kt}{t^{\frac{1}{2}}}\right) y = 0\,, \quad k \neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2 \tag{17}$$

platí asymptotický vzorec

$$y = A \cos\left(t + \tfrac{1}{2}(k^2 - 4)^{-1} \log t + B\right) + o(1)\,. \tag{18}$$

Při odvození formule (18) lze použít Floquetovy theorie pro lineární rovnice s periodickými koeficienty. Jestliže v rovnici (17) necháme „zamrznout" faktor, který se pomalu mění, dostaneme rovnici

$$\ddot{y} + \left(1 + \frac{\cos kt}{\sqrt{T}}\right) y = 0\,. \tag{19}$$

Integrály rovnice (19) mají „průměrnou frekvenci". Nechť $N(x, T)$ je počet nulových bodů (libovolně zvoleného) integrálu rovnice (19) na intervalu $0 \leqq t \leqq x$. Limita

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi\, N(x, T)}{x} = \omega(T)$$

existuje a asymptotické frekvence $\omega(T)$ pro rovnici (19) užijeme jako okamžité frekvence pro rovnici (17). Odvodíme formuli

$$y(t) = A \cos \left(\int_0^t \omega(T)\, \mathrm{d}T + B\right) + o(1)$$

a tak dospějeme ke vzorci (18).

Výsledky platné pro lineární rovnice mají analogie pro quasilineární rovnice. Všimněme si rovnice

$$\ddot{y} + y\left(1 + \frac{y^2}{t^\alpha}\right) = 0\,. \tag{20}$$

Je-li $\alpha > 0$, integrály rovnice (20) jsou omezené (pro $t \to \infty$). Je-li dokonce $\alpha > 1$, potom pro integrály rovnice (20) platí asymptotický vzorec

$$y = A \cos (t + B) + o(1)$$

(což plyne snadno z toho, že $\int_1^\infty \frac{|y^3(t)|}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t < \infty$ pro každý integrál). Je-li však $0 < \alpha \leqq 1$, potom nelineární člen má podstatný vliv. Obdobně jako v případě rovnice (17) rovnici (20) porovnáme s rovnicí

$$\ddot{y} + y\left(1 + \frac{y^2}{(T)^\alpha}\right) = 0\,. \tag{21}$$

Rovnice (21) má vesměs periodická řešení, periody těchto řešení však závisí na amplitudě.[2]) Také pro rovnici (20) lze dokázat formuli

$$y = A \cos \left(\int^t \omega(T)\, \mathrm{d}T + B\right) + o(1)\,,$$

kde $\omega(T)$ je frekvence integrálu rovnice (21); je však třeba určit závislost frekvence na amplitudě. Téže methody lze užít ke studiu značně širší třídy rovnic.

Závěrem se prof. Atkinson zmínil o dosud neřešené otázce, která spočívá ve studiu souvislosti integrálů „podstatně" nelineárních rovnic, na př. rovnic

$$\ddot{y} + y^3 = 0\,,$$

$$\ddot{y} + y^3 + \frac{y^5}{t} = 0\,.$$

Výsledky, které přednesl, dávají nové a významné poznatky o asymptotickém chování integrálů diferenciálních rovnic a mají zvláštní cenu v tom, že zavádějí názorné fysikální pojmy jako frekvence, amplituda, akce, kinetická a potenciální energie a ukazují užitečnost těchto pojmů pro širokou třídu rovnic.

Jaroslav Kurzweil, Praha.

---

[2]) Pro každý integrál rovnice (21) platí $(\dot{y})^2 + y^2 + \frac{y^4}{2(T)^\alpha} = C^2$. Kladnou konstantu C nazýváme amplitudou příslušného integrálu.

KONGRUENCE W

(Referát o přednášce akademika EDUARDA ČECHA konané dne 9. ledna 1956 v matematické obci pražské.)

Pojem kongruencí W vznikl při studiu t. zv. Weingartenových ploch, pro něž Gaussova resp. střední křivost je vázána relací $\psi(K, H) = 0$; tyto plochy jsou charakterisovány tím, že (obecně) jejich normály jsou tečnami dvou ploch a korespondence mezi těmito plochami je asymptotická. Kongruencí přímek L budeme nyní rozuměti libovolný dvouparametrový systém přímek; omezíme se při tom na ty kongruence, jež jsou vytvořeny společnými tečnami dvou (t. zv. fokálních) ploch. Kongruencí L je určena jistá korespondence mezi fokálními plochami; odpovídají-li si v ní asymptotické křivky obou ploch, mluvíme o kongruenci W.

Akad. E. ČECH vybudoval rozsáhlou theorii korespondencí mezi kongruencemi přímek v projektivním trojdimensionálním prostoru; viz práce *Transformation développables des congruences des droites*, *Déformation projective des congruences W* a další, jež všechny budou uveřejněny v mezinárodním časopise.

Důležitou partií theorie kongruencí přímek je studium korespondencí mezi dvěma kongruencemi přímek a zvláště projektivní deformace druhého řádu, již je možno rozložiti na řadu jednodušších korespondencí. Pomocí těchto úvah byla zobecněna Cartanova existenční věta o kongruencích R, což jsou kongruence (nutně W), jejichž fokální plochy připouštějí netriviální projektivní deformace druhého řádu:

Buďte dány dvě diferenciální rovnice $\left(\frac{du_1}{du_2}\right)^2 = f_i(u, v)$, $i = 1, 2$; pak existují (a závisí na šesti funkcích jedné proměnné) kongruence přímek, pro něž u_i = const jsou rozvinutelné plochy a na i-té fokální ploše jsou asymptotiky určeny uvedenou i-tou rovnicí. Pro kongruence R je totiž možno voliti $f_i(u, v) = (-1)^i$.

Zajímavá je otázka po „počtu" kongruencí, jež jsou v projektivní deformaci s danou kongruencí. Ke každé kongruenci přímek L v S_3 existuje v S_3^*, duálním k S_3, kongruence $\bar{L}$ vytvořená svazky rovin s osami v přímkách kongruence L; je to t. zv. dualisace kongruence L. Dualisace je projektivní deformací právě tehdy, je-li L kongruencí W. Je možno zavésti třídu kongruencí W s t. zv. asymptotickou dualisací, jež nebudu geometricky popisovati; nyní se ukáže: každá kongruence W připouští maximálně ∞^6 projektivních deformací, jež nejsou v lineárním komplexu a nemají asymptotickou dualisaci, každá kongruence s asymptotickou dualisací připouští projektivní deformace (opět s asymptotickou dualisací) závislé na jedné funkci jedné proměnné; jedna z těchto projektivních deformací leží v lineárním komplexu.

Další práce budou obsahovati prohloubení dosažených výsledků a theorii kongruencí W, připouštějících grupy projektivních deformací v sebe.

Alois Švec, Praha.

RECENSE

J. L. Doob: **Stochastic processes.** John Wiley & Sons, New York 1953, stran 654.

Doobova kniha „Stochastic processes" je nejobsáhlejší z dosud napsaných knih o stochastických procesech. Starší knihy o stochastických procesech se zabývaly vždy jen specielními procesy, převážně Markovovými, a i novější knihy mají užší výběr. Aby bylo možno popsat celkové zaměření knihy, bude nejlépe promluvit stručně o pojmu stochastického procesu.

Existují v podstatě dvě *definice stochastického procesu*. První z nich, připisovaná zpravidla SLUTZKÉMU, definuje stochastický proces jako systém distribučních funkcí splňujících jisté známé podmínky. Specielně na př. u Markovových procesů je takový systém definován pravděpodobnostmi přechodu a počátečním rozložením. Podle druhé definice, pocházející v podstatě od KOLMOGOROVA, je stochastický proces definován jako pravděpodobnostní pole se systémem náhodných proměnných. Obě definice jsou ovšem ekvivalentní v tom smyslu, že systém náhodných proměnných definuje systém distribučních funkcí, které splňují zmíněné podmínky a naopak ke každému systému distribučních funkcí splňujících tyto podmínky lze podle známé Kolmogorovovy věty sestrojit alespoň jedno pravděpodobnostní pole s náhodnými proměnnými, které mají předepsaná rozložení. Podstatné je ovšem to, že každá z obou definic vyvolává zpravidla jinou thematiku. Tak první definice vede k tomu, že se pracuje pouze s danými distribučními funkcemi a výhradně analytickými prostředky se vyšetřují metody výpočtu pravděpodobností různých jevů, jejich asymptotické vlastnosti a pod. Naproti tomu druhá definice, i když právě uvedené problémy nijak nevylučuje, zahrnuje již v sobě mnoho dalších problémů, týkajících se struktury pravděpodobnostního pole a náhodných proměnných, měřitelnosti některých důležitých jevů, konvergence a spojitosti výběrových funkcí (definice výběrové funkce je uvedena dále) a pod. Problémům tohoto druhu nelze ovšem upřít jejich důležitost. Je jistě vhodné znát, zda na př. určitému jevu, jehož pravděpodobnost nás zajímá, odpovídá alespoň při některé konkretní representaci stochastického procesu měřitelná množina, t. j. zda pravděpodobnost jevu lze vůbec nějakým rozumným způsobem definovat. Avšak čtenář, kterého zajímají především aplikace stochastických procesů, tedy hlavně jejich analytický aparát, bude Doobovou knihou asi poněkud zklamán. Autor užívá totiž důsledně druhé definice a v souhlase s tím jsou v knize problémy, týkající se struktury pravděpodobnostního pole vyšetřovány velmi důkladně, zpravidla do větší hloubky a obecněji než v dosavadní časopisecké literatuře, zatím co z analytických problémů jsou uvedeny jen nejdůležitější. Celý charakter knihy vynikne snad nejlépe z následujícího stručného *obsahu*.

K a p i t o l a I obsahuje kromě základních pojmů teorie pravděpodobnosti, jako pravděpodobnostní pole, náhodná proměnná, distribuční funkce a různé druhy konvergence, také pojednání o podmíněných pravděpodobnostech a charakteristických funkcích. Odstavec o podmíněných středních hodnotách a pravděpodobnostech je dosud nejúplnějším pojednáním o této části teorie pravděpodobnosti. Podmíněná střední hodnota se definuje vzhledem k některému σ-tělesu $\mathfrak{F}$ obsaženému v základním σ-tělese pravděpodobnostního pole. Přesněji řečeno, jestliže y je náhodná proměnná s konečnou střední hodnotou, pak podmíněná střední hodnota náhodné proměnné y vzhledem k σ-tělesu $\mathfrak{F}$, značená symbolem $E(y \mid \mathfrak{F})$, je $\mathfrak{F}$-měřitelná funkce, vyhovující pro všechna $\Lambda \in \mathfrak{F}$ vztahu $\int_\Lambda E(y \mid \mathfrak{F}) \, \mathrm{d}P = \int_\Lambda y \, \mathrm{d}P$. Tato definice je ekvivalentní, jak lze snadno zjistit, s původní definicí Kolmogorovou, t. j. definicí podmíněné střední hodnoty vzhledem k měřitelné transformaci. Podmíněná střední hodnota vzhledem k systému náhodných proměnných je pak definována jako podmíněná střední hodnota vzhledem k minimálnímu σ-tělesu, podle něhož jsou všechny náhodné proměnné daného systému měřitelné. Kromě známých vět, obsažených již v Kolmogorovově knize „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung“, jsou zde dokázány dvě věty o t. zv. podmíněných pravděpodobnostních rozloženích, t. j. o podmíněných pravděpodobnostech, které jsou skoro jistě pravděpodobnostními mírami. První z nich zhruba říká, že na borelovských množinách n-rozměrného Euklidova prostoru vždy existuje ke každému podmiňujícímu σ-tělesu podmíněné pravděpodobnostní rozložení. Druhou z těchto vět jest možno považovat za správnou versi jedné (nesprávné) věty, uveřejněné autorem v TAMS 44 (1938). Je snad vhodné upozornit zde na to, že pojem podmíněného pravděpodobnostního rozložení v širším smyslu, definovaného rovněž v tomto odstavci, nijak nesouvisí s pojmem podmíněné střední hodnoty v širším smyslu, který je definován v kap. II, § 3. Odstavec o charakteristických funkcích obsahuje kromě známé věty o inversi také několik nových nerovností.

V kapitole II je především definován pojem stochastického procesu. Stochastický proces je definován jako základní prostor Ω (jehož body jsou dále značeny ω) se σ-tělesem $\mathfrak{F}$ (takovým, že $\Omega \in \mathfrak{F}$) a pravděpodobnostní mírou P na $\mathfrak{F}$ a se systémem náhodných proměnných x_t, kde parametr t probíhá některou podmnožinu reálných čísel T. Náhodné proměnné x_t definují jedinou funkci dvou proměnných $x(t, \omega)$. Pro každé pevné ω je $x(t, \omega)$ pouze funkcí proměnné t a každou takovou funkci nazývá autor výběrovou funkcí, analogicky k terminologii matematické statistiky. Při běžné representaci stochastického procesu v prostoru všech reálných funkcí na T jest ovšem systém všech výběrových funkcí totožný se základním prostorem. Spojitosti těchto výběrových funkcí, po př. charakteru nespojitosti a limitním vlastnostem, je v knize věnována velká pozornost.

Další odstavec je věnován definici separabilního a měřitelného stochastického procesu. Stochastický proces nazývá autor separabilním, jestliže existuje posloupnost parametrů $t_j \in T$ a nulová množina Λ tak, že pro každou uzavřenou lineární množinu A a každý otevřený interval I se množiny $\{x_t(\omega) \in A, t \in IT\}$ a $\{x_{t_j}(\omega) \in A, t_j \in IT\}$ liší pouze o podmnožinu množiny Λ. Protože bez újmy obecnosti lze předpokládat, že podmnožiny nulových množin jsou měřitelné, jsou v separabilním procesu množiny tvaru $\{x_t(\omega) \in A, t \in IT\}$ měřitelné. Jak známo, běžná representace stochastického procesu v prostoru reálných funkcí v případě nespočetného T tuto vlastnost nemá. Separabilní procesy mají ještě další důležité vlastnosti, jako je měřitelnost suprema a infima měřitelných funkcí a pod. Nejdůležitější pak je věta 2.4, která říká, že každý stochastický proces lze vhodnou změnou náhodných proměnných x_t učinit separabilním se zachováním všech konečněrozměrných rozložení. Stochastický proces nazývá autor měřitelným, jestliže funkce $x(t, \omega)$ je jako funkce dvou proměnných měřitelná. Měřitelnost podle t se bere vzhledem k lebesgueovským množinám. Význam měřitelnosti je v tom, že pro měřitelný stochastický proces je možno definovat integrál výběrové funkce. Opět platí věta, že každý stochastický proces, jehož výběrové funkce jsou pro skoro všechna t spojité podle pravděpodobnosti, lze učinit měřitelným a separabilním se zachováním všech konečněrozměrných rozložení. Je známo, že v souvislosti s vyšetřováním spojitosti a měřitelnosti výběrových funkcí, se někteří autoři a především autor recensované knihy snažili obejít tyto problémy representací stochastického procesu v prostoru všech spojitých, po př. měřitelných funkcí. V recensované knize autor od těchto metod upouští a používá výhradně zmíněných dvou vět.

Nyní promluvíme o jednotlivých typech stochastických procesů, které jsou v knize probírány.

Gaussův proces (Kap. II, § 3). Stochastický proces se nazývá Gaussův, jestliže všechna příslušná konečněrozměrná rozložení jsou normální (Gaussova). Tomuto procesu není věnována zvláštní kapitola a jsou zde pouze dokázány věty, týkající se toho, že ke každému stochastickému procesu s konečnými variancemi a kovariancemi existuje Gaussův proces se stejnými druhými momenty.

Pomocí Gaussových procesů je zde definován pojem „vlastnosti v širším smyslu", kterého se dále velmi často používá, a proto se o něm též zmíníme. Předpokládejme, že nějaký stochastický proces má vlastnost V, kterou lze vyjádřit pomocí variancí a kovariancí. Tuto vlastnost lze pak pro příslušný Gaussův proces vyjádřit zpravidla způsobem, který přenesen na původní proces vyslovuje nějakou přísnější podmínku V'. Pak vlastnost V je vlastnost v širším smyslu příslušná k vlastnosti V'. Na příklad orthogonalita je nezávislost v širším smyslu.

Procesy s nezávislými náhodnými proměnnými (Kap. II, § 4 a Kap. III). Časový parametr t probíhá zde pouze přirozená čísla, takže se jedná o posloupnosti nezávislých náhodných proměnných. V § 1 je dokázán nula-jednotkový zákon a Borel-Cantelliho lemma. Další odstavec obsahuje věty o konvergenci řad nezávislých náhodných proměnných. Kromě obvykle vyšetřovaných vztahů mezi konvergencí těchto řad a konvergencí příslušných řad průměrů a variancí je vyšetřován také vztah ke konvergenci součinů charakteristických funkcí. Další odstavec obsahuje různé druhy zákona velkých čísel, a to pro všechny tři možnosti, t. j. slabý, podle středu a silný. § 4 obsahuje centrální limitní věty. Tento paragraf pojednává sice o neomezeně dělitelných rozloženích (jsou dokonce definována obecněji a je dokázáno, že tato zdánlivě obecnější definice je ekvivalentní s obvyklou), centrální limitní věty zde uvedené se však zabývají jen případem, že limitní rozložení je normální.

Procesy s nekorelovanými náhodnými proměnnými (Kap. II, § 5, Kap. IV). I zde se pracuje pouze s posloupnostmi náhodných proměnných. Jedná se v podstatě o teorii orthogonálních funkcí v L_2 prostorech, je však zajímavé si uvědomit, jaký mají jednotlivé pojmy této teorie pravděpodobnostní význam. Tak na př. nejlepší aproximace dané náhodné proměnné (podle středu) vzhledem k danému orthogonálnímu systému náhodných proměnných, t. j. součet podle středu příslušné Fourrierovy řady, lze pokládat za podmíněnou střední hodnotu v širším smyslu této náhodné proměnné vzhledem k danému systému orthogonálních náhodných proměnných.

Další dva odstavce obsahují analogie některých vět z kap. III; příslušná tvrzení se pak týkají buď pouze konvergence podle středu nebo jsou předpoklady vět přísnější. V posledním odstavci je pojednáno o martingalových procesech v širším smyslu. Tento proces je zařazen do kap. IV proto, že jej lze také charakterisovat jako stochastický proces, v němž pro každou posloupnost $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1}$ jest náhodná proměnná $x_{t_{n+1}} - x_{t_n}$ orthogonální k x_{t_j} pro $j \leq n$. Jsou opět odvozeny analogie některých vět kap. VII, vesměs však s konvergencí podle středu.

Markovovy procesy (Kap. II, § 6, Kap. V, Kap. VI). V kap. II, § 6 je Markovův proces definován jako stochastický proces takový, že pro každou posloupnost $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ z T a každé reálné λ platí $P\{x_{t_n}(\omega) < \lambda \mid x_{t_1}, \ldots, x_{t_{n-1}}\} = P\{x_{t_n}(\omega) < \lambda \mid x_{t_{n-1}}\}$ s pravděpodobností 1. Podmíněné pravděpodobnosti jsou míněny obecně, ne nutně jako podmíněná pravděpodobnostní rozložení. Z předešlého vztahu plynoucí rovnice Chapman-Kolmogorovova má pak tvar $P(x_t(\omega) \in A \mid x_s) = E\{P\{(x_t(\omega) \in A \mid x_\tau\} \mid x_s\}$ s pravděpodobností 1.

V kap. V, § 5 je však definován homogenní Markovův proces s diskretním časem (t. j. T je množina všech přirozených čísel) pro libovolnou abstraktní množinu stavů, a to jako míra na obvyklém minimálním σ-tělese v kartézském součinu prostorů X pomocí pravděpodobnostních přechodů $p(\xi, A)$. Možnost konstrukce takové pravděpodobnostní míry plyne z věty, kterou dokázal C. T. Ionescu Tulcea (Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (*8*) *7* (1949)) a která je také uvedena v recensované knize v dodatku na str. 613—615. Takto definovaný Markovův proces odpovídá t. zv. definitnímu procesu ve známém Kolmogorovově článku „Über die analytischen Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung" (Math. Ann. *104* (1931)), kde se však možnost konstrukce pravděpodobnostní míry nevyšetřuje. Upozorňujeme, že pro bezprostřední aplikaci zmíněné věty je předpoklad diskretního parametru t podstatný. V obecném případě není jasné, zda lze bez dalších předpokladů o množině stavů pravděpodobnostní míru konstruovat.

Markovův proces s diskretním časem a konečně mnoha stavy je probrán v kap. V, § 4. Je uvedena obvyklá klasifikace stavů a jsou dokázány ergodické věty. Maticové metody není použito. V § 5 jsou pak tyto výsledky přeneseny na obecný homogenní Markovův proces s diskretním časem, ovšem za jistých dodatečných předpokladů. Jedná se vesměs o zobecnění Doeblinových výsledků. V dalších dvou odstavcích je pak pojednáno o zákonu velkých čísel a o centrální limitní větě pro posledně uvedený typ Markovova procesu. Poslední paragraf pojednává o Markovových procesech v širším smyslu. Jsou definovány obdobně, v definici je obyčejná podmíněná střední hodnota nahrazena podmíněnou střední hodnotou v širším smyslu.

Markovovým procesům (téměř výhradně homogenním) se spojitým časem, t. j. pro $T = \langle 0, \infty)$, jest věnována kap. VI. V § 1 je probrán případ konečného počtu stavů. Autor předpokládá pouze spojitost pravděpodobností přechodu, derivovatelnost již dokazuje. Kromě ergodické věty, která je zde jednodušší, neboť neexistují cyklické skupiny, je tento odstavec věnován charakteru nespojitosti výběrových funkcí. Obdobné problémy jsou studovány v § 2 pro případ spojitého systému stavů. Autor se zde omezuje na representaci stochastického procesu v prostoru všech reálných funkcí, takže bez újmy obecnosti může předpokládat, že podmíněné pravděpodobnosti jsou podmíněná pravděpodobnostní rozložení. Poslední odstavec je věnován difusnímu procesu.

Martingalové procesy (Kap. II, § 7, Kap. VII). Stochastický proces se nazývá martingalovým procesem, jestliže má všechny střední hodnoty konečné a jestliže pro libovolnou posloupnost $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1}$ $x_{t_n} = E\{x_{t_{n+1}} \mid x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}\}$ s pravděpodobností 1. Jestliže v předešlém vztahu platí místo rovnosti pouze nerovnost $\leq$, nazývá se proces semi-martingalovým. Neexistuje žádný český termín pro tyto procesy a název užitý v této recensi není asi nejvhodnější. Semi-martingalový proces je v knize definován po prvé a platí pro něj všechna hlavní tvrzení jako pro procesy martingalové. Procesy martingalové byly již studovány dříve různými autory. Jedním z důvodů, proč byla těmto procesům věnována pozornost, je to, že jsou modelem náhodné hry, která je v jistém smyslu „spravedlivá". Mají však důležitější aplikace jak v teorii stochastických procesů, tak i v teorii míry a integrálu i jinde. Hlavním výsledkem jsou věty o konvergenci výběrových funkcí, které platí jak pro diskretní případ tak i pro spojitý; zde ovšem za předpokladu separability stochastického procesu. Pro diskretní parametr jsou v knize uvedeny aplikace této věty na konvergenci řady nezávislých náhodných proměnných, zákon velkých čísel, důkaz Jessenovy věty o konvergenci posloupnosti integrálů v nekonečném kartézském součinu, o konvergenci podílu dvou měr k Radon-Nikodymově derivaci a dále aplikace na některé problémy matematické statistiky.

Procesy s nezávislými přírůstky (Kap. II, § 9, Kap. VIII). Tyto procesy jsou charakterisovány tím, že pro každou posloupnost $t_1 < \ldots < t_n$ jsou náhodné proměnné $x_{t_2} - x_{t_1}$

..., $x_{t_n} - x_{t_{n-1}}$ nezávislé. Autor se dále zabývá jen spojitým případem, neboť diskretní proces tohoto typu představují součty nezávislých proměnných, které jsou důkladně probrány v kap. III. Autor studuje nejdříve Wienerův proces (nazývá jej procesem Brownova pohybu) a dokazuje, že skoro všechny výběrové funkce tohoto procesu jsou spojité. V § 7 je naopak dokázáno, že Wienerův proces je touto vlastností mezi procesy s nezávislými přírůstky v podstatě charakterisován. V dalších odstavcích je studován Poissonův proces a dále obecný proces s nezávislými přírůstky, a to opět spojitost výběrových funkcí. Důležitou úlohu při tom má t. zv. centrování procesu, t. j. odečtení vhodné funkce $f(t)$ od náhodných proměnných x. Poslední část kapitoly je věnována vlastnostem charakteristických funkcí těchto procesů, které musí zřejmě splňovat známou podmínku pro nekonečně dělitelná rozložení.

Procesy s nekorelovanými nebo orthogonálními přírůstky (Kap. II, § 10, Kap. IX). Tyto procesy jsou podle autorovy terminologie procesy s nezávislými přírůstky v širším smyslu. Převážná část této kapitoly je věnována pojmu stochastického integrálu. V § 2 je definován stochastický integrál $\int \Phi(t)\, dy(t)$, kde $y(t)$ jsou náhodné proměnné, tvořící stochastický proces s orthogonálními přírůstky. Takový integrál je opět náhodnou proměnnou. V § 5 je definice zobecněna na případ, že Φ jest také funkcí ω, za dodatečného předpokladu, že $y(t)$ tvoří také martingalový proces. Náhodné proměnné $x(t) = \int_a^t \Phi(s, \omega)\, dy(s)$ pak tvoří také martingalový proces a je dokázáno, že za jistých předpokladů lze naopak martingalový proces representovat stochastickým integrálem, a to tak, že $y(t)$ tvoří Wienerův proces.

Stacionární stochastické procesy. (Kap. II, § 8, Kap. X, Kap. XI). Striktně stacionární stochastický proces je definován jako proces, jehož všechny konečněrozměrné distribuční funkce jsou invariantní vůči časovému posunutí. Stochastický proces s konečnými druhými momenty, jehož kovarianční funkce mezi x_s a x_{s+t} je nezávislá na s, nazývá autor stacionárním v širším smyslu. Kapitola X je věnována diskretním stacionárním procesům. U striktně stacionárního procesu se studuje vztah k bodovým a množinovým transformacím, zachovávajícím míru. Striktně stacionární proces lze totiž definovat pomocí jedné náhodné proměnné a cyklické grupy vytvořené transformací σ-tělesa náhodných jevů na sebe, při čemž tato transformace je v podstatě isomorfismem vzhledem ke komplementům a spočetným sjednocením a zachovává míru. Stacionarita v širším smyslu je pak definována také jako obvykle metodou Hilbertových prostorů. Tato kapitola obsahuje řadu důležitých výsledků. Jako nejdůležitější je možno jmenovat zobecnění Birkhoff-Chinčinovy věty o konvergenci skoro jistě aritmetických průměrů ke střední hodnotě podmíněné σ-tělesem invariantních podmnožin, jejímž přímým důsledkem je za předpokladu metrické transitivity obvyklá Birkhoff-Chinčinova věta, dále zákon velkých čísel pro stacionární stochastické procesy v širším smyslu, dále věty o vlastnostech korelačních funkcí a spektrálních funkcí s důkazem Bochner-Chinčinovy věty, statistické odhady jednotlivých bodů korelačních a spektrálních funkcí s použitím příslušných zákonů velkých čísel a věty o spektrálním rozkladu. Obsahem kap. XI je zhruba totéž pro případ spojitého parametru. I celkové uspořádání je stejné až na některé podrobnosti týkající se integrace výběrových funkcí.

V poslední kapitole XII pojednává autor o predikci ve stochastických procesech stacionárních v širším smyslu. Jak je obvyklé, omezuje se na lineární predikci, která minimalisuje střední kvadratickou chybu. Zásadně se rozlišují případy diskretního a spojitého parametru. Na konci kapitoly je pak stručná zmínka o mnohonásobné predikci v konečněrozměrných stochastických procesech stacionárních v širším smyslu.

Na konci knihy jsou připojeny dva dodatky. První z nich — Supplement — obsahuje některé věty z teorie míry a integrálu, kterých se v knize používá. Četba tohoto dodatku před studiem knihy je velmi vhodná k pochopení autorovy symboliky. Druhý dodatek —

Appendix — obsahuje poznámky k jednotlivým kapitolám, většinou odkazy na původní literaturu.

Kniha je psána srozumitelněji než většina autorových prací, hlavně pokud se týká formulace definic a vět. Přesto však studium knihy není lehké. Není to způsobeno tím, že by kniha vyžadovala velkých předběžných znalostí — čtenář vystačí se znalostí základů teorie míry a integrálu v abstraktních prostorech — nýbrž tím, že důkazy jsou místy velmi zhuštěny a ověřování jednotlivých kroků je velmi pracné. To ovšem nemůže nijak snížit význam této knihy, která je vlastně první monografií o matematické teorii stochastických procesů, založené důsledně na Kolmogorovově definici. Její vliv se již ostatně v literatuře projevuje.

Miloslav Jiřina a *Antonín Špaček*, Praha.

N. I. Achijezer: **Teorie aproximací.** Z ruštiny přeložil Dr *Otto Vejvoda*. Vyšlo v Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1955, 344 stran, 10 obrázků, cena brož. Kčs 21,— (místo původních Kčs 70,—).

Překladem Achijezerovy knihy o theorii aproximace je v naší literatuře poprvé zastoupena tato důležitá větev matematické analysy, zajímavá a bohatá vnitřní krásou i užitečná pro aplikace. Tato theorie je od svého vzniku spjata se jmény ruských a sovětských učenců, jejichž přínos je nejvýznamnější co do počtu i hodnoty výsledků. Monografií a učebnic o theorii aproximace není dosud ve světové literatuře mnoho a výsledky z této oblasti matematiky jsou uloženy hlavně v časopiseckých pojednáních.

Achijezerova kniha je zaměřena k obecným otázkám theorie aproximace v reálném oboru. Rozsáhlý materiál je rozdělen do šesti kapitol a závěrečné části knihy, obsahující doplňky a úlohy.

První kapitola, pojednávající o problémech aproximace v lineárním normovaném prostoru, tvoří obecný podklad theorie. Formuluje se v ní základní úloha theorie aproximace, zavádí se pojem metrického prostoru a lineárního normovaného prostoru, jsou tu uvedeny příklady a blíže vyšetřen Hilbertův prostor (orthonormované soustavy, proces orthogonalisace), prostor všech spojitých funkcí na daném intervalu a prostory L^p. Dokazuje se věta o aproximaci prvku lineárního normovaného prostoru pomocí lineárních kombinací daných lineárně nezávislých prvků tohoto prostoru a uvedena postačující podmínka pro jednoznačnost (ostře normované prostory), dále věta o aproximaci prvku Hilbertova prostoru pomocí prvků jeho podprostoru, Weierstrassovy věty a jejich zobecnění na L^p, Müntzova věta a Rieszova věta o lineárním funkcionálu v úplném Hilbertově prostoru.

Ve druhé kapitole jsou vyloženy klasické Čebyševovy výsledky z theorie aproximace a jejich zobecnění; v souvislosti s tím jsou vyšetřeny některé další problémy a zejména je uvedena Haarova a Markovova věta.

Třetí kapitola obsahuje stručný výklad theorie Fourierových řad, nástin Plancherelovy theorie, důkaz věty Watsonovy, Fejérovy a Young-Hardyovy; dále se studuje pojem Fourierovy transformace a konvoluce dvou funkcí, definuje se Stěklovova funkce a stanoví se její vyjádření trigonometrickým integrálem, dokazuje se věta o několikanásobně monotonních funkcích a věta o sdružených funkcích.

Čtvrtá kapitola je věnována studiu některých extrémních vlastností celistvých transcendentních funkcí exponenciálního typu. Dokazuje se Wiener-Paleyova věta a zobecnění Bernštejnovy nerovnosti. Dále jsou uvedeny některé vlastnosti t. zv. Levitanových polynomů, důkaz Fejér-Rieszovy věty a kriterium vyjádřitelnosti spojité funkce ve tvaru Fourier-Stieltjesova integrálu; tyto odstavce jsou většinou zpracovány podle M. G. Krejna.

Jádrem páté kapitoly jsou důkazy známých Jacksonových vět o harmonické aproximaci diferencovatelných funkcí a k nim obrácených Bernštejnových vět spolu s důkazem Bernštejnovy věty o harmonické aproximaci analytických funkcí. Jacksonovy věty jsou vhodně zasazeny do rámce obecnějších úvah a doplněny Fejérovou methodou konstrukce aproximujících funkcí; obrácené věty jsou zobecněny na prostor L^p.

V šesté kapitole je dokázána Wienerova věta o aproximaci a jsou uvedeny některé její aplikace.

V poslední části knihy je shrnuto 35 příkladů, rozdělených do pěti odstavců, tvořících myšlenkové celky. Jde zpravidla o řešení konkretních problémů, které doplňují předcházející obecné úvahy.

Závěrečné poznámky obsahují hlavně literární údaje. Kniha je opatřena přehledem zkratek a označení a rejstříkem.

Výklad je jasný a ucelený, avšak velmi stručný. Věty jsou uváděny v co nejobecnější formulaci a s důkazy co možná nejjednoduššími a nejkratšími; přípravné poznatky jsou vyloženy jen v rozsahu nezbytném pro další použití. Autor systematicky činí literární odkazy a upozorňuje na zobecnění a novější výsledky, z nichž mnohé jsou zde knižně zpracovány poprvé. Ke studiu knihy stačí solidní vědomosti ze základů analysy. Kniha však není úvodem do theorie aproximace a sotva by bylo možno ji doporučit úplnému začátečníkovi. Její velké přednosti ocení čtenář, který již zná základy této theorie, na příklad z velmi přístupné a zdařilé Natansonovy učebnice konstruktivní theorie funkcí, a může si z Achijezerovy knihy své vědomosti znamenitě prohloubit a rozšířit.

Český překlad je pečlivý; to dokazuje i skutečnost, že v něm byly odstraněny některé drobné nedostatky originálu. Překladatel byl často postaven před problémy rázu terminologického a jazykového, s nimiž se odpovědně vyrovnal. Je třeba při této příležitosti ukázat na nejednotnost a četné jazykové kazy naší matematické mluvy. Bylo by záslužné, kdyby matematikové věnovali pozornost těmto otázkám a ve spolupráci s jazykovými odborníky přikročili k jejich řešení. — Tiskových chyb je v knize málo a čtenář si je snadno sám opraví.

O kvalitách Achijezerovy knihy svědčí mimo jiné i to, že byla nedávno přeložena do němčiny. Její český překlad znamená obohacení naší matematické literatury.

Ladislav Kosmák, Praha.

I. P. Natanson: **Sčítání nekonečně malých veličin.** Z ruského originálu přeložil ing. *Milan Ullrich*. Vydalo SNTL, Praha, 1955, 72 stran, 26 obrázků, cena Kčs 3,16.

Ve sbírce Populární přednášky o matematice, o níž jsme referovali v loňském ročníku Časopisu, *80* (1955), str. 246, vyšel jako jedenáctý svazek překlad knížky „Суммирование безконечно малых величин" z pera leningradského matematika I. P. NATANSONA, známého u nás hlavně svými učebnicemi theorie funkcí reálné proměnné a konstruktivní theorie funkcí. Úkolem knížky je seznámit čtenáře s pojmem limity součtu mnoha malých sčítanců a přiblížit mu tak základní myšlenku integrálního počtu. V šesti kapitolkách podává autor řešení vhodných geometrických a fysikálních úloh (výpočet tlaku kapaliny na svislou stěnu, práce potřebné k vyčerpání kapaliny z nádob, určení objemu těles, kvadratura paraboly, elipsy a sinusoidy, výpočet efektivního proudu); v první kapitole dokazuje pro pozdější účely potřebné vzorce pro $\sum_{k=1}^{n} k^m$ při $m = 1, 2, 3$ a zavádí sumační znak. Na konci knížky je uvedeno 16 úloh jako cvičení.

Výklad je přístupný a zajímavý (knížka vznikla z autorových přednášek pro žáky devátých a desátých tříd); jeho snad jediným kazem je, že autor nerozlišuje v označení přibližné součty od jejich limity. I když tato skutečnost nemusí vést k omylu, neboť čtenář ze souvislosti pochopí, oč jde, je to zbytečná nedůslednost.

K českému překladu napsal akademik E. Čech předmluvu, v níž knížku výstižně zhodnotil.

Ladislav Kosmák, Praha.

A. I. Markuševič: **Komplexní čísla a konformní zobrazení.** Z ruštiny přeložil ing. *Milan Ullrich.* Vydalo SNTL, Praha, 1955, 76 stran, 45 obrázků, cena Kčs 2,75. Předmluvu k českému vydání napsal doc. *Jan Vyšín.*

Podkladem pro tuto knížku, která vychází jako 12. svazek Populárních přednášek o matematice, byla autorova přednáška pro žáky devátých a desátých tříd středních škol. Knížka obsahuje geometrický výklad aritmetiky komplexních čísel a vlastností některých jednoduchých funkcí komplexní proměnné jako transformací v rovině; poučí však čtenáře také o některých aplikacích theorie funkcí komplexní proměnné, zejména v kartografii a při konstrukci křídla letadla. V odstavcích, v nichž se pojednává o konformním zobrazení, bylo ovšem nutno se zříci přesných důkazů a spokojit se jejich názorným náznakem.

Knížka může být velmi užitečná především pro žáky středních škol. Přirozeně a srozumitelně je seznámí s komplexními čísly (o nichž mají ve většině případů asi značně neurčitou a formální představu) a přesvědčí je o praktickém významu theorie funkcí komplexní proměnné; není však pochyby o tom, že i jejich učitelé se z ní dovědí leccos nového.

Ladislav Kosmák, Praha.

I. R. Šafarevič: **O řešení rovnic vyšších stupňů (Sturmova metoda).** Z ruského originálu přeložil ing. *Milan Ullrich*, předmluvu k českému vydání napsal doc. dr *Karel Hruša.* Vydalo SNTL jako 13. svazek Populárních přednášek o matematice, Praha, 1955, 36 stran, 10 obrázků, cena Kčs 1,20.

Známá Sturmova věta o počtu kořenů algebraické rovnice (s reálnými koeficienty) v daném intervalu je nejen zajímavá, ale i prakticky důležitá, neboť zároveň umožňuje přibližný výpočet kořenů. Šafarevičova knížečka je věnována důkazu této věty. Ze čtyř kapitolek, na něž je rozdělena, mají první tři přípravný charakter: V první se stanoví meze kořenů algebraické rovnice, druhá pojednává o společných kořenech mnohočlenů a vícenásobných kořenech, ve třetí se studuje pojem charakteristiky dvojice mnohočlenů. Čtvrtá část obsahuje vlastní důkaz Sturmovy věty a příklady na její použití.

Knížka je vcelku napsána velmi svěže a srozumitelně, najdeme v ní však několik nedopatření. Nejzávažnějším z nich je mezera v důkazu Sturmovy věty, způsobená zamlčením předpokladu, že krajní body intervalu, v němž vyšetřujeme daný polynom, nejsou kořeny mnohočlenů tvořících Sturmův řetězec tohoto polynomu. Kromě toho najdeme v knížce několik míst formulovaných s hlediska začátečníka poněkud nejasně.

U čtenáře se předpokládají jen nejzákladnější matematické vědomosti. Plný užitek přinese knížka žákům, kteří ji budou číst pod vedením zkušeného učitele.

Ladislav Kosmák, Praha.

ZPRÁVY

NÁVŠTĚVY HOSTŮ Z CIZINY

V listopadu a v prosinci minulého roku dlel v Praze prof. K. V. ATKINSON z Nigerie, který je znám svými pracemi v theorii ζ-funkcí, ve funkcionální analyse a v theorii obyčejných diferenciálních rovnic. Za svého pobytu v Praze prof. Atkinson se setkal s mnoha československými matematiky, několikrát navštívil Matematický ústav ČSAV a přednášel v matematické obci pražské o asymptotických vlastnostech integrálů dif. rovnic. (Viz referát na str. 252.)

J. Kurzweil, Praha.

ZPRÁVA O POBYTU DR VLASTIMILA PTÁKA V POLSKU

Ve dnech 29. října až 12. prosince 1955 navštívil Polsko dr. VLASTIMIL PTÁK, vědecký pracovník Matematického ústavu Československé akademie věd. Byl vyslán Československou akademií věd, aby se seznámil s prací polské školy funkcionální analysy i s otázkami aplikací moderních matematických metod v důležitých problémech klasické analysy i přibližných metod.

Dr Vlastimil Pták přednesl ve Varšavě, Vroclavi, Poznani a Toruni celkem pět přednášek z teorie topologických lineárních prostorů, zejména z těch oborů, které souvisí s problematikou v Polsku studovanou. Na schůzkách s předními vědeckými pracovníky získal velmi cenné poznatky. Na těchto schůzkách byla diskutována problematika z obecné analysy a navázána spolupráce. Získané výsledky budou publikovány.

Vlastimil Pták, Praha.

PŘEDNÁŠKY A DISKUSE V MATEMATICKÉ OBCI PRAŽSKÉ

9. 1. 1956: *Eduard Čech*, Kongruence W (viz referát na str. 256).
16. 1. 1956: *Antonín Špaček*, Znáhodněná analysa.
25. 1. 1956: *Josef Machek*, O hrubých chybách pozorování.
13. 2. 1956: *Otto Vejvoda*, O stabilitě integrálů diferenciálních rovnic v komplexním oboru.

Redakce.

ČINNOST BRNĚNSKÉHO ODBORU JČMF

Brněnský odbor JČMF pokračoval ve st. roce 1955/56 ve své činnosti přednáškami a diskusemi.

Konaly se tyto přednášky:

20. 10. 1955: *W. Orlicz*, O některých aplikacích Saksových prostorů.

24. 11. 1955: *R. Piska*, K stému výročí narození profesora Miloslava Pelíška.

V rámci „Diskusí o nových pracích brněnských matematiků" byly předneseny tyto referáty:

7. 10. 1955: *M. Zlámal*, O diferenciální rovnici $y' + y = (y'')^2$.

21. 10. 1955: *S. Šantavá*, Některé aplikace theorie dispersí na systém dvou diferenciálních lineárních rovnic prvého řádu;
M. Sekanina, O jednom zeslabení Cauchyho konvergenčního kriteria.

4. 11. 1955: *J. Kopřiva*, O jednom problému z theorie čísel.

11. 11. 1955: *M. Ráb*, Vlastnosti integrálů lineárních diferenciálních rovnic 3. řádu.

18. 11. 1955: *K. Čulík*: O celočíselných a nezáporných řešeních rovnice $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$.

25. 11. 1955: *M. Novotný*, O aditivně ireducibilních prvcích a aditivních basích ve svazu.

2. 12. 1955: *J. Čermák*, Přechod diferenčních rovnic v diferenciální.

9. 12. 1955: *F. Šik*, Součty jednoduše uspořádaných grup.

16. 12. 1955: *J. Škrášek*, Použití Floquetovy methody na zobecněnou Eulerovu diferenciální rovnici.

K. Svoboda, Brno.

OBHAJOBY DISERTAČNÍCH PRACÍ KANDIDÁTŮ MATEMATICKÝCH VĚD

Při Matematickém ústavu ČSAV obhajovali dne 26. dubna 1956 disertační práce tito kandidáti matematických věd:

Dr *Václav Vilhelm* práci „Křivky v prostorech Minkovského",

ing. *František Svoboda* práci „Užití neurčité dvouhodnotové funkce na synthesu jednotaktních hradlových obvodů",

Alois Švec práci „Některé problémy projektivní deformace kongruencí přímek a jejich fokálních ploch".

Redakce.

UPOZORNĚNÍ ČTENÁŘŮM

V časopise *Vysoká škola, III*, 1955, seš. 12, str. 345—352 uveřejnil s. akademik Štefan Schwarz článek „O katedrách matematiky na vysokých školách v SSSR", v němž zevrubně seznamuje čtenáře se zkušenostmi organisační, pedagogické a vědecké práce matematických kateder na různých typech vysokých škol v Sovětském svazu. Tyto zkušenosti jsou výsledkem dvouměsíčního pobytu akademika Schwarze (v listopadu a prosinci 1954) v SSSR u příležitosti zájezdu našich vysokoškolských učitelů do Sovětského svazu. Mezi účastníky byli tři českoslovenští matematici: rektor Karlovy university s. M. Katětov, doc. dr. A. Kotzig a autor článku.

V článku informuje autor naši matematickou obec především o matematických katedrách na universitách, na vysokých školách technického směru a na pedagogických institutech v Moskvě a Leningradě.

Pro závažnost informací obsažených ve zmíněném článku otiskujeme toto upozornění čtenářům, aby jim článek ve Vysoké škole neunikl.

Redakce.