

Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1952

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0077|log49

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Ústřední ústav matematický

*

ČASOPIS
PRO PĚSTOVÁNÍ
MATEMATIKY

*

Přírodovědecké
vydavatelství

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

(Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fyziky“)

SVAZEK 77 (1952)

Vydává:

Ústřední ústav matematický

Vedoucí redakce:

FRANTIŠEK VYČICHLO

Redakční sbor:

V. ALDA, FR. BALADA, J. BÍLEK, O. BORŮVKA, B. BYDŽOVSKÝ, E. ČECH,
B. GRUBER, K. HAVLÍČEK, K. HRUŠKA, V. JARNÍK, M. KATĚTOV, VL. KNICHAL,
VL. KOŘÍNEK, M. KÖSSLER, K. KOUTSKÝ, J. MAŘÍK, J. METELKA, L. MIŠÍK,
J. NOVÁK, V. PLESKOT, VL. PTÁK, ŠT. SCHWARZ, A. URBAN, R. ZELINKA,
O. ZICH

Obsah

Články a referáty:

Miroslav Fiedler, Praha: O jistých maticích a rovnici pro parametry singulárních bodů racionální křivky. (Dokončení.)	321
František Nožička, Praha: Skaláry křivosti nadplochy vnořené do euklidovského prostoru a jejich geom. význam	347
Alois Urban, Praha: Beltramiho věta pro parabolické body plochy	373
V. V. Golubjev, N. K. Bari: Životopis N. N. Luzina	383
Diskuse:	
Karel Koutský, Brno: K problému slovních úloh v matematice	399
Recenze článků a knih:	409
Referáty o přednáškách v matematické obci pražské a v Brně	423
Zprávy: Dr Miroslav Valouch zemřel	432

Redakce: Ústřední ústav matematický, Praha IV, Loretánské nám. 3, tel. 67439 a 60975 — Administrace: Přírodovědecké vydavatelství, Praha II, Žitná 25, tel. 293-08. — Vychází čtvrtletně — Roční předplatné Kčs 240,—, cena jednotlivého sešitu Kčs 60,—. Novinové výplatné povoleno Okrskovým pošt. úřadem Praha 022: j. zn. 309-38-Ře-52. — Dohlédací poštovní úřad Praha 022. — Tiskne a expeduje Státní tiskárna n. p., závod 05 (Prometheus), Praha VIII, Tř. Rudé armády 171. — Náklad 1500 výtisků.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Ústřední ústav matematický

SVAZEK 77 • PRAHA, 31. I. 1953 • ČÍSLO 4

REFERÁTY A ČLÁNKY

O JISTÝCH MATICÍCH A ROVNICI PRO PARAMETRY SINGULÁRNÍCH BODŮ RACIONÁLNÍ KŘIVKY

MIROSLAV FIEDLER, Praha.

(Dokončení.)

512.831:513,61

Část III.

V této části se budeme zabývat rovinnými racionálními křivkami (vylučujeme již přímku). Budeme tedy předpokládat, že křivka C je dána vyjádřením (11), totiž

$$x_1 = a_{(n)}(t_1, t_2), \quad x_2 = b_{(n)}(t_1, t_2), \quad x_3 = c_{(n)}(t_1, t_2), \quad (11')$$

kde největší společný dělitel $\langle a_{(n)}(t), b_{(n)}(t), c_{(n)}(t) \rangle = 1$ a kde matice

$$\begin{pmatrix} A_1^{(n)} \\ B_1^{(n)} \\ C_1^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0, a_1, \dots, a_n \\ b_0, b_1, \dots, b_n \\ c_0, c_1, \dots, c_n \end{pmatrix} \quad (20)$$

má hodnotu $h = 3$.

Přitom koeficienty a_i, b_i, c_i jsou opět ze základního tělesa K charakteristiky nula.

Pak matice $M_n(x)$ z věty 5 je čtvercová, soustava nadploch, o níž se mluví v této větě, obsahuje jedinou křivku (dokážeme totiž, že f není identicky nula)

$$f \equiv \begin{vmatrix} A_n^{(n)}, x_1 I_n \\ B_n^{(n)}, x_2 I_n \\ C_n^{(n)}, x_3 I_n \end{vmatrix} = 0. \quad (21)$$

Pro křivku $f = 0$ platí věta:

Věta 10. Každý bod $y \equiv (y_1, y_2, y_3)$ má vzhledem ke křivce (21) touž násobnost*) jako ke křivce (11') v definici z části II. Je-li k Lürothovo číslo

*) V definici obvyklé z algebraické geometrie.

pro křivku (11'), je identicky

$$f(x_1, x_2, x_3) = [g(x_1, x_2, x_3)]^k,$$

kde g je ireducibilní forma. Je tedy křivka (21) k -násobná ireducibilní křivka.

Než tuto větu dokážeme, uvedeme pomocné věty, kterých budeme užívat i později.

Pomocná věta 1. Nechť $p_{(n_1)}, p_{(n_2)}, \dots, p_{(n_s)}$ je s forem, po dvou nesoudělných, pro které je $\sum_{k=1}^s n_k = n > 0$. Jsou-li $P_i^{(n_k)}$ matice příslušné formám $p_{(n_k)}$, je determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & \dots & s \\ [PP \dots P]_{n_1} & & & \\ 1 & 3 & \dots & s \\ [PP \dots P]_{n_2} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & \dots & s-1 \\ [PP \dots P]_{n_s} & & & \end{vmatrix} \neq 0. *$$

Důkaz. Předpokládejme naopak, že za podmínek věty je $\Delta = 0$. Pak existuje, obdobně jako v pomocné větě I. části (str. 245), s forem $r_{(n_1-1)}, r_{(n_2-1)}, \dots, r_{(n_s-1)}$ (pro ta i , pro něž je $n_i = 0$, forma r odpadá v t_1, t_2 tak, že je identicky

$$r p \dots p + p r p \dots p + \dots + p p \dots p r = 0,$$

a přitom alespoň jedna z forem $r, \dots, r$ není nulová (je totiž $n > 0$).

Nechť na př. r není identicky rovna nule (takže $n_1 > 0$). Poněvadž lze psát

$$r p \dots p + p(r p \dots p + \dots + p \dots p r) = 0,$$

dělí forma p součin $r p \dots p$. Vzhledem k nesoudělnosti p, p pro $i \neq j$ dělí tedy forma p stupně n_1 formu r stupně $n_1 - 1$, což není možné, neboť r je nenulová. Tento spor dokazuje pomocnou větu 1.

*) Píšeme na př. $[PP \dots P]_{n_1}$ místo podrobného $P_{n_1}^{(n_1)} P_{n_1+n_2}^{(n_2)} \dots P_{n_1+n_2+\dots+n_s}^{(n_s)}$ výsledná matice má tedy n_1 řádků a $\sum_{k=1}^s n_k = n$ sloupců. Někdy budeme v obdobných

případech vynechávat i hranaté závorky a index n_1 , bude-li zřejmé, kolik řádků matice má. Počet sloupců je pak o součet stupňů forem, jejichž matice se v součinu vyskytují, větší než počet řádků. Pro tyto součiny pak v jistém smyslu platí komutativní zákon, jak plyne z rovnic (3). Toho budeme později často užívat.

Pomocná věta 2. Jsou-li $a_{(n)}, b_{(n)}$ formy stupně n a $c_{(m)}$ nenulová forma stupně m v t_1, t_2 a platí-li $\langle a_{(n)}(t), b_{(n)}(t), c_{(m)}(t) \rangle = 1$, existují v K čísla α, β tak, že

$$\langle \alpha a_{(n)}(t) + \beta b_{(n)}(t), c_{(m)}(t) \rangle = 1. \quad (22)$$

Důkaz. Nechť v některém nadtělese K_1 nad K se $c_{(m)}(t)$ rozpadá v lineární faktory (budeme předpokládat, že $m \geq 1$, protože pro $m = 0$ je případ triviální).

Nechť tedy $(\mu_k, \nu_k), k = 1, 2, \dots, p$, jsou všechny nenulové navzájem lineárně nezávislé dvojice v K_1 takové, že $c_{(m)}(\mu_k, \nu_k) = 0$. Je tedy $p \leq m$. Protože K je nekonečné těleso (je charakteristiky nula), existuje dvojice (α, β) tak, že $(\alpha, \beta) \neq (b_{(n)}(\mu_k, \nu_k), -a_{(n)}(\mu_k, \nu_k))$ pro $k = 1, \dots, p$ (je $(b_{(n)}(\mu_k, \nu_k), -a_{(n)}(\mu_k, \nu_k)) \neq (0, 0)$, neboť $\langle a_{(n)}, b_{(n)}, c_{(m)} \rangle = 1$).

Čísla α, β už mají vlastnost, že platí (22): kdyby totiž nějaká forma kladného stupně $d_{(r)}$ dělila současně $\alpha a_{(n)} + \beta b_{(n)}$ a $c_{(m)}$, platilo by to i pro některou z forem $\nu_k t_1 - \mu_k t_2$, takže by bylo $\alpha a_{(n)}(\mu_k, \nu_k) + \beta b_{(n)}(\mu_k, \nu_k) = 0, (\alpha, \beta) = [b_{(n)}(\mu_k, \nu_k), -a_{(n)}(\mu_k, \nu_k)]$, což je spor.

Pomocná věta 3. Nechť $F(t_1, t_2)$ je nenulová forma $a z = (z_1, z_2, z_3)$ s -násobný bod křivky (11'), $s \geq 0$. Pak existují trojice čísel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ a $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ tak, že

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, z_1, a_{(n)}(t) \\ \alpha_2, z_2, b_{(n)}(t) \\ \alpha_3, z_3, c_{(n)}(t) \end{vmatrix} = u_{(s)}(t) \cdot \alpha_{(n-s)}(t),$$

$$\begin{vmatrix} \beta_1, z_1, a_{(n)}(t) \\ \beta_2, z_2, b_{(n)}(t) \\ \beta_3, z_3, c_{(n)}(t) \end{vmatrix} = u_{(s)}(t) \cdot \beta_{(n-s)}(t),$$

kde formy $\alpha_{(n-s)}, \beta_{(n-s)}$ jsou nesoudělné, žádná z nich nemá vícenásobné faktory a obě jsou také nesoudělné s $F(t_1, t_2)$.

Důkaz. Vyjdeme ze dvou pomocných tvrzení:

Pomocné tvrzení 1. Jsou-li $\alpha_{(m)}, \beta_{(m)}$ nesoudělné formy m -tého stupně v t_1, t_2 , kde $m \geq 1$, pak forma

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial t_1}, \frac{\partial \beta}{\partial t_1} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t_2}, \frac{\partial \beta}{\partial t_2} \end{vmatrix}$$

není identicky rovna nule.

Protože $m \geq 1$, existuje v nějakém nadtělese K_1 nad K nenulová dvojice y_1, y_2 tak, že $\alpha_{(m)}(y_1, y_2) = 0$. Je tedy $\beta_{(m)}(y_1, y_2) \neq 0$, neboť podle předpokladu jsou $\alpha_{(m)}$ a $\beta_{(m)}$ nesoudělné.

Lze psát $\alpha_{(m)}(t_1, t_2) = (t_1 y_2 - t_2 y_1)^k \gamma_{(m-k)}(t_1, t_2)$, kde $k > 0$ a $\gamma_{(m-k)}(y_1, y_2) \neq 0$. Odtud

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial t_1}, \frac{\partial \beta}{\partial t_1} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t_2}, \frac{\partial \beta}{\partial t_2} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} k(t_1 y_2 - t_2 y_1)^{k-1} y_2 \gamma_{(m-k)} + (t_1 y_2 - t_2 y_1)^k \frac{\partial \gamma_{(m-k)}}{\partial t_1}, \frac{\partial \beta}{\partial t_1} \\ -k(t_1 y_2 - t_2 y_1)^{k-1} y_1 \gamma_{(m-k)} + (t_1 y_2 - t_2 y_1)^k \frac{\partial \gamma_{(m-k)}}{\partial t_2}, \frac{\partial \beta}{\partial t_2} \end{vmatrix} = \\ &= (t_1 y_2 - t_2 y_1)^{k-1} \cdot \Delta, \text{ kde } \Delta = \\ &= \begin{vmatrix} k y_2 \gamma_{(m-k)} + (t_1 y_2 - t_2 y_1) \frac{\partial \gamma_{(m-k)}}{\partial t_1}, \frac{\partial \beta}{\partial t_1} \\ -k y_1 \gamma_{(m-k)} + (t_1 y_2 - t_2 y_1) \frac{\partial \gamma_{(m-k)}}{\partial t_2}, \frac{\partial \beta}{\partial t_2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Kdyby byl determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial t_1}, \frac{\partial \beta}{\partial t_1} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t_2}, \frac{\partial \beta}{\partial t_2} \end{vmatrix}$$

identicky roven nule, byl by i determinant $\Delta(t_1, t_2)$ identicky roven nule. Avšak

$$\Delta(y_1, y_2) = k \gamma_{(m-k)}(y_1, y_2) \begin{vmatrix} y_2, \left[\frac{\partial \beta}{\partial t_2} \right]_y \\ -y_1, \left[\frac{\partial \beta}{\partial t_1} \right]_y \end{vmatrix} =$$

$= m k \gamma_{(m-k)}(y_1, y_2) \beta_{(m)}(y_1, y_2) \neq 0$, takže ani první determinant není identicky roven nule.

Pomocné tvrzení 2. Jsou-li $p_{(n)}, q_{(n)}, n > 0$, lineárně nezávislé formy n -tého stupně v t_1, t_2 , pak determinant

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial t_1}, \frac{\partial q}{\partial t_1} \\ \frac{\partial p}{\partial t_2}, \frac{\partial q}{\partial t_2} \end{vmatrix}$$

není identicky roven nule.

Nechť totiž $\langle p_{(n)}, q_{(n)} \rangle = d_{(s)}$, $p_{(n)} = d_{(s)} \cdot \alpha_{(n-s)}$, $q_{(n)} = d_{(s)} \cdot \beta_{(n-s)}$. Je tedy $\langle \alpha_{(n-s)}, \beta_{(n-s)} \rangle = 1$, $n > s$ (jinak by formy $p_{(n)}, q_{(n)}$ byly lineárně závislé). Odtud

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial t_1} & \frac{\partial q}{\partial t_1} \\ \frac{\partial p}{\partial t_2} & \frac{\partial q}{\partial t_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial d}{\partial t_1} \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial t_1} d, & \frac{\partial d}{\partial t_1} \beta + \frac{\partial \beta}{\partial t_1} d, & \frac{\partial d}{\partial t_1} \\ \frac{\partial d}{\partial t_2} \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial t_2} d, & \frac{\partial d}{\partial t_2} \beta + \frac{\partial \beta}{\partial t_2} d, & \frac{\partial d}{\partial t_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= -\frac{d_{(s)}}{n-s} \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial t_1}, & \frac{\partial \beta}{\partial t_1}, & \frac{\partial d}{\partial t_1} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t_2}, & \frac{\partial \beta}{\partial t_2}, & \frac{\partial d}{\partial t_2} \\ (n-s)\alpha_{(n-s)}, & (n-s)\beta_{(n-s)}, & -(n-s)d_{(s)} \end{vmatrix} = \\
 &= -\frac{d_{(s)}}{n-s} \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial t_1}, & \frac{\partial \beta}{\partial t_1}, & \frac{\partial d}{\partial t_1} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t_2}, & \frac{\partial \beta}{\partial t_2}, & \frac{\partial d}{\partial t_2} \\ 0, & 0, & -(n-s)d_{(s)} - t_1 \frac{\partial d}{\partial t_1} - t_2 \frac{\partial d}{\partial t_2} \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{n}{n-s} d_{(s)}^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial t_1}, & \frac{\partial \beta}{\partial t_1} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t_2}, & \frac{\partial \beta}{\partial t_2} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Z pomocného tvrzení 1 pak ihned plyne, že skutečně D není identicky nula.

Nyní již můžeme dokázat pomocnou větu 3. Je alespoň jedno z čísel z_1, z_2, z_3 různé od nuly, nechť $z_3 \neq 0$. Lze psát $p_{(n)} = z_3 a_{(n)} - z_1 c_{(n)} = u_{(s)} \alpha_{(n-s)}$, $q_{(n)} = z_3 b_{(n)} - z_2 c_{(n)} = u_{(s)} \beta_{(n-s)}$, $\langle \alpha_{(n-s)}, \beta_{(n-s)} \rangle = 1$; neboť největší společný dělitel determinantů $p_{(n)}, q_{(n)}, z_1 b_{(n)} - z_2 a_{(n)}$ je roven $\langle p_{(n)}, q_{(n)} \rangle$ (je $z_1 b_{(n)} - z_2 a_{(n)} = \frac{1}{z_3} (z_1 q_{(n)} - z_2 p_{(n)})$) a podle předpokladu s -tého stupně, $\langle p_{(n)}, q_{(n)} \rangle = u_{(s)}$. Formy $p_{(n)}, q_{(n)}$ jsou lineárně nezávislé, neboť jinak by i $a_{(n)}, b_{(n)}, c_{(n)}$ byly lineárně závislé a hodnota matice (20) by nebyla tři. Podle pomocného tvrzení 2 není tedy forma

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_{(n)}}{\partial t_1} & \frac{\partial q_{(n)}}{\partial t_1} \\ \frac{\partial p_{(n)}}{\partial t_2} & \frac{\partial q_{(n)}}{\partial t_2} \end{vmatrix}$$

identicky rovna nule.

Protože $\langle \bar{\alpha}_{(n-s)}, \bar{\beta}_{(n-s)} \rangle = 1$, je i $\langle \bar{\alpha}_{(n-s)}, \bar{\beta}_{(n-s)}, D \cdot F \rangle = 1$. Součin $D \cdot F(t_1, t_2)$ není identicky roven nule, existuje tedy podle pomocné věty 2 dvojice čísel ϱ_1, ϱ_2 tak, že

$$\langle \varrho_1 \bar{\alpha}_{(n-s)} + \varrho_2 \bar{\beta}_{(n-s)}, D \cdot F \rangle = 1. \quad (23)$$

Forma $\varrho_1 \bar{\alpha}_{(n-s)} + \varrho_2 \bar{\beta}_{(n-s)}$ není identicky rovna nule, neboť D má stupeň alespoň dvě (je totiž $n \geq 2$, neboť jinak by matice (20) měla hodnotu menší než tři). Podle pomocné věty 2 existuje opět dvojice čísel σ_1, σ_2 tak, že

$$\langle \sigma_1 \bar{\alpha}_{(n-s)} + \sigma_2 \bar{\beta}_{(n-s)}, (\varrho_1 \bar{\alpha}_{(n-s)} + \varrho_2 \bar{\beta}_{(n-s)}) DF \rangle = 1. \quad (24)$$

Označme $\alpha_{(n-s)} = \varrho_1 \bar{\alpha}_{(n-s)} + \varrho_2 \bar{\beta}_{(n-s)}$, $\beta_{(n-s)} = \sigma_1 \bar{\alpha}_{(n-s)} + \sigma_2 \bar{\beta}_{(n-s)}$. Je tedy pro $\alpha_1 = -\varrho_2$, $\alpha_2 = \varrho_1$, $\alpha_3 = 0$, $\beta_1 = -\sigma_2$, $\beta_2 = \sigma_1$, $\beta_3 = 0$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & z_1 & a_{(n)} \\ \alpha_2 & z_2 & b_{(n)} \\ \alpha_3 & z_3 & c_{(n)} \end{vmatrix} = u_{(s)} \alpha_{(n-s)}, \quad \begin{vmatrix} \beta_1 & z_1 & a_{(n)} \\ \beta_2 & z_2 & b_{(n)} \\ \beta_3 & z_3 & c_{(n)} \end{vmatrix} = u_{(s)} \beta_{(n-s)}.$$

Předně z (24) plyne, že $\langle \beta_{(n-s)}, \alpha_{(n-s)} \rangle = 1$; z (23) a (24), že $\langle \alpha_{(n-s)}, F \rangle = \langle \beta_{(n-s)}, F \rangle = 1$. Zbývá jen dokázat, že $\alpha_{(n-s)}$ ani $\beta_{(n-s)}$ nemají vícenásobné faktory. Kdyby však existoval vícenásobný faktor $\alpha_{(n-s)}$, existovala by v nějakém nadělese K_1 nad K nenulová dvojice y_1, y_2 tak, že

$$\left[\frac{\partial \alpha_{(n-s)}}{\partial t_1} \right]_{\nu} = 0, \quad \left[\frac{\partial \alpha_{(n-s)}}{\partial t_2} \right]_{\nu} = 0,$$

a tedy pro $(\varrho_1, \varrho_2) \neq (0, 0)$ je jednak

$$\begin{aligned} \varrho_1 \left[\frac{\partial \bar{\alpha}_{(n-s)}}{\partial t_1} \right]_{\nu} + \varrho_2 \left[\frac{\partial \bar{\beta}_{(n-s)}}{\partial t_1} \right]_{\nu} &= 0, \\ \varrho_1 \left[\frac{\partial \bar{\alpha}_{(n-s)}}{\partial t_2} \right]_{\nu} + \varrho_2 \left[\frac{\partial \bar{\beta}_{(n-s)}}{\partial t_2} \right]_{\nu} &= 0, \end{aligned}$$

jednak $\alpha_{(n-s)}(y) = 0$.

Odtud plyne, že

$$\begin{vmatrix} \left[\frac{\partial \bar{\alpha}_{(n-s)}}{\partial t_1} \right]_y & \left[\frac{\partial \bar{\beta}_{(n-s)}}{\partial t_1} \right]_y \\ \left[\frac{\partial \bar{\alpha}_{(n-s)}}{\partial t_2} \right]_y & \left[\frac{\partial \bar{\beta}_{(n-s)}}{\partial t_2} \right]_y \end{vmatrix} = 0.$$

Je tedy $D(y) = 0$, jak vyplývá z identity, dokázané v důkazu pomocného tvrzení 2:

$$D = \frac{n}{n-s} u_{(s)}^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t_1} & \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial t_1} \\ \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t_2} & \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial t_2} \end{vmatrix}.$$

To však je spor s (23), že $\langle \alpha_{(n-s)}, DF \rangle = 1$. Obdobně se dokáže, že ani $\beta_{(n-s)}$ nemá vícenásobné faktory.

Nyní již přejdeme k důkazu věty 10. Budiž $y = (y_1, y_2, y_3)$ bod násobnosti s , $s \geq 0$, pro křivku C ve vyjádření (11'), takže největší společný dělitel determinantů druhého stupně matice

$$\begin{pmatrix} y_1, & a_{(n)}(t) \\ y_2, & b_{(n)}(t) \\ y_3, & c_{(n)}(t) \end{pmatrix} \quad (13')$$

je s -tého stupně; budiž to $u_{(s)}(t)$. Forma $u_{(s)}$ není identicky rovna nule, neboť pak by matice (20) měla menší hodnot než tři.

Čísla y_1, y_2, y_3 nejsou současně rovna nule; nechť na př. $y_3 \neq 0$. Označme

$$\begin{aligned} \bar{a}_{(n)}(t) &= y_3 a_{(n)}(t) - y_1 c_{(n)}(t), \\ \bar{b}_{(n)}(t) &= y_3 b_{(n)}(t) - y_2 c_{(n)}(t). \end{aligned}$$

Obdobně jako dříve se zjistí, že

$$\begin{aligned} \bar{a}_{(n)}(t) &= u_{(s)}(t) \cdot \alpha_{(n-s)}(t), \\ \bar{b}_{(n)}(t) &= u_{(s)}(t) \cdot \beta_{(n-s)}(t), \end{aligned}$$

kde

$$\langle \alpha_{(n-s)}, \beta_{(n-s)} \rangle = 1.$$

Je ovšem rovněž $\langle u_{(s)}, c_{(n)} \rangle = 1$, neboť

$$\begin{aligned} 1 &= \langle a_n, b_n, c_n \rangle = \langle \bar{a}_{(n)}, \bar{b}_{(n)}, c_{(n)} \rangle = \\ &= \langle u_{(s)} \alpha_{(n-s)}, u_{(s)} \beta_{(n-s)}, c_{(n)} \rangle. \end{aligned}$$

Abychom dokázali, že násobnost bodu y pro křivku (případně identicky rovnou nule)

$$f \equiv \begin{vmatrix} A_n, & x_1 I_n \\ B_n, & x_2 I_n \\ C_n, & x_3 I_n \end{vmatrix} = 0$$

je rovna s , stačí dokázat, že násobnost souřadnicového bodu $\bar{O}_3$ vzhledem ke křivce (s touž výhradou)

$$\bar{f} \equiv \begin{vmatrix} \bar{A}_n, & \bar{x}_1 I_n \\ \bar{B}_n, & \bar{x}_2 I_n \\ \bar{C}_n, & \bar{x}_3 I_n \end{vmatrix} = 0$$

je rovna s ; přitom $\bar{A}_n$ a $\bar{B}_n$ jsou matice příslušné formám $\bar{a}_{(n)}$ a $\bar{b}_{(n)}$, $\bar{x}_1 = y_3 x_1 - y_1 x_3$, $\bar{x}_2 = y_3 x_2 - y_2 x_3$, $\bar{x}_3 = x_3$. Je totiž

$$y_3^{2n} f \equiv \begin{vmatrix} A_n y_3, & x_1 y_3 I_n \\ B_n y_3, & x_2 y_3 I_n \\ C_n, & x_3 I_n \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} A_n y_3 - C_n y_1, & (y_3 x_1 - y_1 x_3) I_n \\ B_n y_3 - C_n y_2, & (y_3 x_2 - y_2 x_3) I_n \\ C_n, & x_3 I_n \end{vmatrix} \equiv \bar{f}$$

a uvedenou regulární lineární transformací, při níž se násobnost zachovává, přejde bod y v bod $\bar{O}_3$.

Označme $\bar{A}, \bar{B}, U$ matice, příslušné formám $\alpha_{(n-s)}, \beta_{(n-s)}, u_{(s)}$. Je tedy

$$\bar{f} \equiv \begin{vmatrix} \bar{A}U, & \bar{x}_1 I_n \\ \bar{B}U, & \bar{x}_2 I_n \\ C, & \bar{x}_3 I_n \end{vmatrix}$$

Existuje dále forma $l_{(n-s)}(t)$, nesoudělná s $u_{(s)}$:

$$\langle l_{(n-s)}, u_{(s)} \rangle = 1.$$

Označíme-li příslušnou matici L , platí pro matice identicky

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0, & 0, & L_s \\ I_n, & 0, & 0 \\ 0, & I_n, & 0 \\ 0, & 0, & U_{n-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A}U, & \bar{x}_1 I_n \\ \bar{B}U, & \bar{x}_2 I_n \\ C, & \bar{x}_3 I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_s C_n, & \bar{x}_3 L_s \\ \bar{A}_n U_{2n-s}, & \bar{x}_1 I_n \\ \bar{B}_n U_{2n-s}, & \bar{x}_2 I_n \\ U_{n-s} C_n, & \bar{x}_3 U_{n-s} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} L_s C_n, & \bar{x}_3 L_s \\ \bar{A}_n U_{2n-s}, & \bar{x}_1 I_n \\ \bar{B}_n U_{2n-s}, & \bar{x}_2 I_n \\ C_{n-s} U_{2n-s}, & \bar{x}_3 U_{n-s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_s, & 0, & 0 \\ 0, & \bar{A}_n, & \bar{x}_1 I_n \\ 0, & \bar{B}_n, & \bar{x}_2 I_n \\ 0, & C_{n-s}, & \bar{x}_3 U_{n-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_s C_n, & \bar{x}_3 L_s \\ U_{2n-s}, & 0 \\ 0, & I_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Je tedy i pro determinanty

$$\begin{vmatrix} L_s \\ U_{n-s} \end{vmatrix} \cdot \bar{f} \equiv \begin{vmatrix} L_s C_n \\ U_{2n-s} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{A}_n, & \bar{x}_1 I_n \\ \bar{B}_n, & \bar{x}_2 I_n \\ C_{n-s}, & \bar{x}_3 U_{n-s} \end{vmatrix}.$$

Avšak $\langle l_{(n-s)}, u_{(s)} \rangle = 1$, $\langle l_{(n-s)} c_{(n)}, u_{(s)} \rangle = 1$, takže resultanty těchto dvojic jsou různé od nuly (na př. podle pomocné věty 1). Je tedy pro $\kappa \neq 0$

$$\bar{f} \equiv \kappa \begin{vmatrix} \bar{A}_n, & \bar{x}_1 I_n \\ \bar{B}_n, & \bar{x}_2 I_n \\ C_{n-s}, & \bar{x}_3 U_{n-s} \end{vmatrix}. \quad (25)$$

Násobnost bodu $\bar{O}_3$ pro $\bar{f}$ je rovna rozdílu stupně n' formy $\bar{f}$ a čísla r' , pro které je $\bar{x}_3^{r'}$ nejvyšší mocnina $\bar{x}_3$, která se ve formě $\bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ s nenulovým koeficientem vyskytuje. Přitom pro $\bar{f} \equiv 0$ není násobnost bodu $\bar{O}_3$ definována. Z rovnosti (25) plyne, že je-li $\bar{f}$ nenulová forma, je její stupeň $n' = n$ (z rozvoje determinantu Laplaceovou větou podle posledních n sloupců) a $r' \leq n - s$ (z rozvoje Laplaceovou větou podle posledních $n - s$ řádků). Dokážeme, že souhrn $v_{(s)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ členů ve formě $\bar{f}$, u nichž je $\bar{x}_3$ v $(n-s)$ -té mocnině, je nenulová forma, takže bod $\bar{O}_3$ je skutečně právě s -násobný. Z rozvoje determinantu v (25) podle posledních $n - s$ řádků je zřejmé, že forma $v_{(s)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ je rovna

$$\kappa \begin{vmatrix} \bar{A}_n, & \bar{x}_1 I_n \\ \bar{B}_n, & \bar{x}_2 I_n \\ 0, & U_{n-s} \end{vmatrix}.$$

Existuje opět forma $m_{(s)}(t_1, t_2)$, nesoudělná s $\alpha_{(n-s)}$ i $\beta_{(n-s)}$. Označíme-li příslušnou matici M , platí identicky pro matice

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} M_{n-s}, & 0, & 0 \\ \bar{B}_s, & 0, & 0 \\ 0, & M_{n-s}, & 0 \\ -\bar{B}_s, & \bar{A}_s, & 0 \\ 0, & 0, & I_{n-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A}_n, & \bar{x}_1 I_n \\ \bar{B}_n, & \bar{x}_2 I_n \\ 0, & U_{n-s} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} M\bar{A}, & \bar{x}_1 M_{n-s} \\ \bar{B}\bar{A}, & \bar{x}_1 \bar{B}_s \\ M\bar{B}, & \bar{x}_2 M_{n-s} \\ 0, & \bar{x}_2 \bar{A}_s - \bar{x}_1 \bar{B}_s \\ 0, & U_{n-s} \end{pmatrix} = \\ &\equiv \begin{pmatrix} I_{n-s}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & I_s, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & I_{n-s}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \bar{x}_2 \bar{A}_s - \bar{x}_1 \bar{B}_s \\ 0, & 0, & 0, & U_{n-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M\bar{A}, & \bar{x}_1 M_{n-s} \\ \bar{B}\bar{A}, & \bar{x}_1 \bar{B}_s \\ M\bar{B}, & \bar{x}_2 M_{n-s} \\ 0, & I_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Odtud pro determinanty

$$\begin{vmatrix} M_{n-s} \\ \bar{B}_s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_{n-s} \\ \bar{A}_s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{A}_n, & \bar{x}_1 I_n \\ \bar{B}_n, & \bar{x}_2 I_n \\ 0, & U_{n-s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [M\bar{A}]_{n-s} \\ [\bar{B}\bar{A}]_s \\ [M\bar{B}]_{n-s} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{x}_2 \bar{A}_s - \bar{x}_1 \bar{B}_s \\ U_{n-s} \end{vmatrix}.$$

Podle pomocné věty 1 jsou číselné determinanty v této rovnosti různé od nuly, neboť $\langle \alpha_{(n-s)}, m_{(s)} \rangle = \langle \beta_{(n-s)}, m_{(s)} \rangle = \langle \alpha_{(n-s)}, \beta_{(n-s)} \rangle = 1$. Je tedy pro $\mu \neq 0$ identicky

$$v_{(s)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \mu \begin{vmatrix} \bar{x}_2 \bar{A}_s - \bar{x}_1 \bar{B}_s \\ U_{n-s} \end{vmatrix}.$$

Protože $\langle \alpha_{(n-s)}, \beta_{(n-s)}, u_{(s)} \rangle = 1$ a $u_{(s)} \neq 0$, existují podle pomocné věty 2 čísla α', β' , ne obě rovna nule ($\alpha' = \beta' = 0$ může nastat jen pro $s = 0$; pak však i každá nenulová dvojice α, β vyhovuje) tak, že $\langle \alpha' \alpha_{(n-s)} + \beta' \beta_{(n-s)}, u_{(s)} \rangle = 1$. Je tedy

$$v_{(s)}(-\beta', \alpha') = \mu \begin{vmatrix} \alpha' \bar{A}_s + \beta' \bar{B}_s \\ U_{n-s} \end{vmatrix} \neq 0,$$

neboť vpravo je resultant forem $\alpha' \alpha_{(n-s)} + \beta' \beta_{(n-s)}, u_{(s)}$. Tedy $v_{(s)}$ není nulová forma, bod y je právě s -násobným bodem f . Protože každý bod y má nějakou násobnost $\leq n-1$, je tím dokázáno také, že $f(x_1, x_2, x_3)$ není nulová forma.

Nechť nyní k je Lürothovo číslo vyjádření (11') křivky C , takže podle Lürothovy věty*) existují nesoudělné formy $p_{(\bar{n})}(t_1, t_2)$, $q_{(\bar{n})}(t_1, t_2)$ a formy $\bar{a}_{(\bar{n})}(t_1, t_2)$, $\bar{b}_{(\bar{n})}(t_1, t_2)$, $\bar{c}_{(\bar{n})}(t_1, t_2)$ tak, že

$$\begin{aligned} a_{(n)}(t_1, t_2) &= \bar{a}_{(\bar{n})}(p_{(\bar{n})}(t), q_{(\bar{n})}(t)), \\ b_{(n)}(t_1, t_2) &= \bar{b}_{(\bar{n})}(p_{(\bar{n})}(t), q_{(\bar{n})}(t)), \\ c_{(n)}(t_1, t_2) &= \bar{c}_{(\bar{n})}(p_{(\bar{n})}(t), q_{(\bar{n})}(t)). \end{aligned} \quad (26)$$

Přitom je opět $\langle \bar{a}_{(\bar{n})}(t_1, t_2), \bar{b}_{(\bar{n})}(t_1, t_2), \bar{c}_{(\bar{n})}(t_1, t_2) \rangle = 1$, matice

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{B}_1 \\ \bar{C}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{\bar{n}} \\ \bar{b}_0, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{\bar{n}} \\ \bar{c}_0, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{\bar{n}} \end{pmatrix}$$

má opět hodnotu tři a je $n = k\bar{n}$, $\bar{n} > 1$.

Podle věty 9, rovnice (17), platí, že

$$\begin{pmatrix} A_n & x_1 I_n \\ B_n & x_2 I_n \\ C_n & x_3 I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & R_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & R_1^{-1} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \bar{A}_{\bar{n}} & x_1 I_{\bar{n}} \\ \bar{B}_{\bar{n}} & x_2 I_{\bar{n}} \\ \bar{C}_{\bar{n}} & x_3 I_{\bar{n}} \end{pmatrix} \times I_k \right] \cdot \begin{pmatrix} R_2 & 0 \\ 0 & R_1 \end{pmatrix}, \quad (17')$$

kde

$$R_s = \begin{pmatrix} [P^{s\bar{n}-1}]_k \\ [P^{s\bar{n}-2}Q]_k \\ \vdots \\ [Q^{s\bar{n}-1}]_k \end{pmatrix}$$

*) Pro $k = 1$ stačí ovšem položit $p_{(1)} = t_1$, $q_{(1)} = t_2$, $\bar{a}_{(\bar{n})} = a_{(n)}$, $\bar{b}_{(\bar{n})} = b_{(n)}$, $\bar{c}_{(\bar{n})} = c_{(n)}$.

jsou regulární matice a $M \times . I_k$ pro $M = (m_{ij})$ je matice

$$M \times . I_k = \begin{pmatrix} m_{11}I_k, & m_{12}I_k, & \dots, & m_{1s}I_k \\ m_{21}I_k, & m_{22}I_k, & \dots, & m_{2s}I_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{r1}I_k, & m_{r2}I_k, & \dots, & m_{rs}I_k \end{pmatrix}.$$

Poněvadž vhodnou permutací řádků a sloupců přejde matice $M \times . I_k$ v matici

$$\begin{pmatrix} M, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & M, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & M \end{pmatrix},$$

a poněvadž pro čtvercovou matici M jsou obě permutace stejné, dostáváme, že je-li matice M čtvercová, platí pro determinanty $|M \times . I_k| = |M|^k$.

Přejdeme-li tedy v (17') k determinantům, dostáváme, označíme-li

$$\begin{vmatrix} \bar{A}_{\bar{n}}, & x_1 I_{\bar{n}} \\ \bar{B}_{\bar{n}}, & x_2 I_{\bar{n}} \\ \bar{C}_{\bar{n}}, & x_3 I_{\bar{n}} \end{vmatrix} = g_{(\bar{n})}(x_1, x_2, x_3),$$

že pro $\sigma \neq 0$ je identicky

$$f_{(n)}(x_1, x_2, x_3) = \sigma[g_{(\bar{n})}(x_1, x_2, x_3)]^k.$$

Zbývá tedy jen dokázat, že $g_{(\bar{n})}(x_1, x_2, x_3)$ je ireducibilní polynom. Forma $g_{(\bar{n})}$ je pro křivku $\bar{C}$,

$$x_1 = \bar{a}_{(\bar{n})}(t), \quad x_2 = \bar{b}_{(\bar{n})}(t), \quad x_3 = \bar{c}_{(\bar{n})}(t) \quad (11'')$$

tvořena stejně jako $f_{(n)}$ pro C . Lürothovo číslo pro C ve vyjádření (11') je však již rovno jedné.

Stačí tedy dokázat: je-li pro C ve vyjádření (11') Lürothovo číslo $k = 1$, je $f_{(n)}$ ireducibilní.

Je-li však $k = 1$, existuje podle věty 8 nenulová forma $v(t_1, t_2)$, která má tuto vlastnost:

Jsou-li y_1, y_2, z_1, z_2 dvě dvojice čísel z libovolného nadtělesa K_1 nad K a platí-li, že hodnota matice

$$\begin{pmatrix} a_{(n)}(y_1, y_2), & a_{(n)}(z_1, z_2) \\ b_{(n)}(y_1, y_2), & b_{(n)}(z_1, z_2) \\ c_{(n)}(y_1, y_2), & c_{(n)}(z_1, z_2) \end{pmatrix}$$

je menší než dvě a $v(y_1, y_2) \neq 0$, pak

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ z_1, & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Existuje dále bod $y = (y_1, y_2, y_3)$, který má vzhledem k C násobnost nula: podle pomocné věty 2 ($c_{(n)}(t) \not\equiv 0$, $\langle a_{(n)}, b_{(n)}, c_{(n)} \rangle = 1$) existují totiž v K čísla α, β , která nejsou obě rovna nule, tak, že $\langle \alpha a_{(n)} + \beta b_{(n)}, c_{(n)} \rangle = 1$. Bod $(\beta, -\alpha, 0)$ má pak násobnost nula, jak se snadno zjistí. Podle pomocné věty 3 pak existují k tomuto bodu y a k uvedené formě $v(t_1, t_2)$ čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ne vesměs rovná nule, tak, že forma

$$\alpha_{(n)}(t_1, t_2) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & y_1 & a_{(n)}(t) \\ \alpha_2 & y_2 & b_{(n)}(t) \\ \alpha_3 & y_3 & c_{(n)}(t) \end{vmatrix} \quad (27)$$

je nenulová, nemá vícenásobné faktory a je nesoudělná s formou $v(t_1, t_2)$.

Předpokládejme teď, že existuje netriviální rozklad formy $f_{(n)}$:

$$f_{(n)}(x_1, x_2, x_3) \equiv g_{(m)}(x_1, x_2, x_3) h_{(n-m)}(x_1, x_2, x_3), \quad (28)$$

kde

$$0 < m < n.$$

Je $f_{(n)}(a_{(n)}(t), b_{(n)}(t), c_{(n)}(t)) = 0$ identicky. To plyne na př. odtud, že

$$\begin{pmatrix} A_n & a_{(n)}(t) I_n \\ B_n & b_{(n)}(t) I_n \\ C_n & c_{(n)}(t) I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{2n} \\ -T_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

podle (3), kde

$$T_s = \begin{pmatrix} t_1^{s-1} \\ t_1^{s-2} t_2 \\ \vdots \\ t_1^{s-1} \end{pmatrix}$$

pro $s \geq 1$, takže sloupce determinantu

$$\begin{vmatrix} A_n & a_{(n)}(t) I_n \\ B_n & b_{(n)}(t) I_n \\ C_n & c_{(n)}(t) I_n \end{vmatrix}$$

jsou lineárně závislé.

Z (28) tedy plyne, že alespoň jedna z forem v t_1, t_2

$$g_{(m)}(a_{(n)}(t), b_{(n)}(t), c_{(n)}(t)), h_{(n-m)}(a_{(n)}(t), b_{(n)}(t), c_{(n)}(t))$$

je identicky rovna nule. Nechť je to první z těchto forem.

V nějakém nadtělese K_1 nad K existuje rozklad formy $\alpha_{(n)}(t_1, t_2)$ z (27) v lineární faktory $y_i t_1 - y_i t_2$, $i = 1, 2, \dots, n$. Poněvadž $\alpha_{(n)}$ nemá vícenásobné faktory, je pro $i \neq j$

$$\begin{vmatrix} i & i \\ y_1 & y_2 \\ j & j \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \not\equiv 0.$$

Poněvadž $\alpha_{(n)}$ je s $v(t_1, t_2)$ nesoudělná, je $v(y_1, y_2) \neq 0$. Z uvedené vlastnosti formy $v(t_1, t_2)$ pak plyne, že pro $i \neq j$ má matice

$$\begin{bmatrix} a_{(n)}^{(i)}(y_1, y_2), & a_{(n)}^{(j)}(y_1, y_2) \\ b_{(n)}^{(i)}(y_1, y_2), & b_{(n)}^{(j)}(y_1, y_2) \\ c_{(n)}^{(i)}(y_1, y_2), & c_{(n)}^{(j)}(y_1, y_2) \end{bmatrix}$$

hodnost dvě.

Body $p = (a_{(n)}^{(i)}(y), b_{(n)}^{(i)}(y), c_{(n)}^{(i)}(y))$, $i = 1, 2, \dots, n$, jsou tedy navzájem různé, leží na přímce

$$l_{(1)}(x_1, x_2, x_3) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 & y_1 & x_1 \\ \alpha_2 & y_2 & x_2 \\ \alpha_3 & y_3 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

i na křivce $g_{(m)}(x_1, x_2, x_3) = 0$. Protože $m < n$, obsahuje forma $g_{(m)}$ formu $l_{(1)}$ jako faktor:

$$g_{(m)}(x_1, x_2, x_3) = l_{(1)}(x_1, x_2, x_3) \cdot g'_{m-1}(x_1, x_2, x_3). \quad (29)$$

Dokážeme, že je

$$g_{(m)}(x_1, x_2, x_3) = \gamma [l_{(1)}(x_1, x_2, x_3)]^m, \quad (30)$$

což již povede ke sporu.

Pro $m = 1$ platí (30) z (29). Je však $l_{(1)}(a_{(n)}, b_{(n)}, c_{(n)}) = \alpha_{(n)}(t) \neq 0$, takže pro $m > 1$ plyne z (29), že $g'_{m-1}(a_{(n)}, b_{(n)}, c_{(n)}) \equiv 0$. Jako dříve se pak dokáže, že g'_{m-1} obsahuje $l_{(1)}$ jako faktor. Opakováním postupu dospějeme k (30).

Je $\gamma \neq 0$, neboť $f_{(n)}$ není nulová forma. Potom však ani $g_{(m)}(a_{(n)}, b_{(n)}, c_{(n)}) = \gamma [\alpha_{(n)}(t)]^m$ není identicky rovno nule, což je spor s předpokladem. Důkaz věty 10 je tedy úplný.

Z věty 10 vyplývá, že křivku C , danou vyjádřením (11'), a křivku z (21) o rovnici $f_{(n)} = 0$ lze považovat za totožné.

Dalším důsledkem (je to již důsledek Lürothovy věty) je, že se stačí omezit na křivky C , které pro vyjádření (11') mají Lürothovo číslo $k = 1$. To také učiníme, takže v dalším stále předpokládáme, že křivka C má alespoň jeden bod násobnosti jedna.

Po této úmluvě si všimneme podrobněji formy $v(t_1, t_2)$. Matice

$$\mu(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} A_{n-1}, & a_{(n)}(t) I_{n-1} \\ B_{n-1}, & b_{(n)}(t) I_{n-1} \\ C_{n-1}, & c_{(n)}(t) I_{n-1} \\ 0, & \varrho_1^{(n-2)} \end{pmatrix} \quad (16')$$

z věty 8, kde $\varrho_1^{(n-2)} = (\varrho_0, \varrho_1, \dots, \varrho_{n-2})$, je opět čtvercová. Podle věty 8 je tedy forma $v(t_1, t_2)$, která je nenulová, definována identitou

$$v(t_1, t_2) \cdot \varrho_{(n-2)}(t_1, t_2) = |\mu(t_1, t_2)|, \quad (31)$$

kde $\varrho_{(n-2)}(t)$ je forma s maticí $\varrho_1^{(n-2)}$, která je libovolná nenulová.

Násobíme-li v determinantu (31) poslední řádek libovolnou nenulovou formou $w_{(n)}$ a rozvineme-li jej podle posledních $n-1$ sloupců, dostaneme, že stupeň n_1 formy $v(t_1, t_2)$ je

$$n_1 = n(n-1) - (n-2) - n = (n-1)(n-2). \quad (32)$$

Vyšetříme podrobněji než ve větě 8 vztah mezi formou $v_{(n)}(t_1, t_2)$, maticí $\mu(t_1, t_2)$ a parametry v singulárních bodech křivky C . Dokážeme větu:

Věta 11. *Nechť K_1 je těleso nad K , v němž lze $v_{(n)}(t_1, t_2)$ rozložit v lineární faktory. Potom je forma $v_{(n)}(t_1, t_2)$ rovna (až případně na číselný nenulový faktor) součinu forem $u_{(s_i)}^{s_i-1}(t)$, příslušných s_i -násobným bodům y , pro všechny s -násobné body nad K_1 pro $s \geq 2$, at explicitní nebo implicitní.*) Matice $\mu(t_1, t_2)$ má pak stejné invariantní faktory*) jako diagonální matice D , rovná (pro $M = 3n - 2$) součinu matice*

$$\begin{pmatrix} \varrho_{(n-2)}(t), & 0 \\ 0, & I_{M-1} \end{pmatrix}$$

a matic

$$\begin{pmatrix} u_{(s_i)}(t) I_{s_i-1}, & 0 \\ 0, & I_{M-s_i+1} \end{pmatrix}$$

opět pro všechny alespoň dvojnásobné body nad K_1 , jestliže $\varrho_{(n-2)}(t)$ je forma nesoudělná s $v_{(n)}(t)$.

Důkaz. Nejprve budeme definovat formu $u_{(s_i)}$ pro implicitní s_i -násobný bod. Užijeme k tomu rozkladových kvadratických transformací.

Nechť totiž $S = (y_1, y_2, y_3)$ je s -násobný bod křivky C , $s \geq 2$. Zvolme novou soustavu souřadnou takto:

Podle pomocné věty 3 existují pro bod (y_1, y_2, y_3) a formu $v_{(n)}(t_1, t_2)$ čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ tak, že $(u_{(s)})$ je forma příslušná bodu S

*) Formy $u_{(s)}$ byly dosud definovány jen pro explicitní s -násobné body. Pro implicitní body je zavedeme až v důkazu.

*) Invariantní faktory ve smyslu podíly determinantních dělitelů, abychom nemuseli opouštět homogenní zápis t_1, t_2 .

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, y_1, a_{(n)}(t) \\ \alpha_2, y_2, b_{(n)}(t) \\ \alpha_3, y_3, c_{(n)}(t) \end{vmatrix} = u_{(s)}(t) \cdot \alpha_{(n-s)}(t),$$

$$\begin{vmatrix} \beta_1, y_1, a_{(n)}(t) \\ \beta_2, y_2, b_{(n)}(t) \\ \beta_3, y_3, c_{(n)}(t) \end{vmatrix} = u_{(s)}(t) \cdot \beta_{(n-s)}(t),$$

$$\langle \alpha_{(n-s)}, \beta_{(n-s)} \rangle = \langle \alpha_{(n-s)}, v_{(n_1)} \rangle = \langle \beta_{(n-s)}, v_{(n_1)} \rangle = 1,$$

a α i β nemají vícenásobné faktory; dále existují podle téže pomocné věty (jako v důkazu věty 10) čísla $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ tak, že

$$\gamma_1 a_{(n)}(t) + \gamma_2 b_{(n)}(t) + \gamma_3 c_{(n)}(t) = \bar{c}_{(n)}(t)$$

je forma opět bez vícenásobných faktorů a nesoudělná s $u_{(s)}\alpha_{(n-s)}\beta_{(n-s)}v_{(n_1)}$.

Potom lineární transformace

$$\bar{x}_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1, y_1, x_1 \\ \alpha_2, y_2, x_2 \\ \alpha_3, y_3, x_3 \end{vmatrix}, \bar{x}_2 = \begin{vmatrix} \beta_1, y_1, x_1 \\ \beta_2, y_2, x_2 \\ \beta_3, y_3, x_3 \end{vmatrix}, \bar{x}_3 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3$$

je regulární. Odpovídá totiž každému bodu (t_1, t_2) křivky C bod

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= u_{(s)}(t) \alpha_{(n-s)}(t) \\ \bar{x}_2 &= u_{(s)}(t) \beta_{(n-s)}(t) \\ \bar{x}_3 &= c_{(n)} \end{aligned} \quad (33)$$

Z (35) a podmínek nesoudělnosti pak snadno plyne lineární nezávislost $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$, takže (33) je vyjádření křivky C v nové soustavě souřadnic (v dalším opět vynecháváme pruhy).

Nazveme pak rozkladovou transformací bodu S kvadratickou transformací T_s :

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 x_3 \\ x'_2 &= x_3 x_1 \\ x'_3 &= x_1 x_2. \end{aligned}$$

Touto transformací přejde každý bod (t_1, t_2) křivky C pro $u_{(s)}(t) \neq 0$ v bod

$$\begin{aligned} x'_1 &= \beta_{(n-s)}(t) c_{(n)}(t) \\ x'_2 &= \alpha_{(n-s)}(t) c_{(n)}(t) \\ x'_3 &= \alpha_{(n-s)}(t) \beta_{(n-s)}(t) u_{(s)}(t) \end{aligned} \quad (34)$$

Snadno se zjistí, že (34) je vyjádření racionální křivky C' . Transformací T_s odpovídá „okolí“ bodu S „okolí“ přímky $x'_3 = 0$. Definuje se, že bod S má ve svém „okolí prvního řádu“ implicitní s_i -násobné body S_i , $s_i > 0$, jestliže křivka C' má na přímce $x'_3 = 0$ (explicitní) s_i -násobné body S'_i , různé od bodů O'_1, O'_2 . Nechť tedy je $(\varrho_1, \varrho_2, 0)$ bod S'_i . Příslušná forma je pak $u_{(s_i)} = \langle c_{(n)}(\beta_{(n-s)}\varrho_2 - \alpha_{(n-s)}\varrho_1), \alpha_{(n-s)}\beta_{(n-s)}u_{(s)}\varrho_1, \alpha_{(n-s)}$.

$\langle \beta_{(n-s)} u_{(s)} \varrho_2 \rangle = \langle \beta_{(n-s)} \varrho_2 - \alpha_{(n-s)} \varrho_1, u_{(s)} \rangle, s_i > 0$. Tato forma, jak se bez obtíží zjistí, nezávisí na volbě (přípustné) kvadratické transformace T_s .

Platí, což zde nebudeme dokazovat, že každému r -násobnému bodu Q křivky C , $r > 0$, různému od S , ať explicitnímu nebo implicitnímu, odpovídá rovněž r -násobný bod Q' křivky C' s touž formou $t_{(r)}$; to platí i obráceně, s výjimkou bodů na $x_1' x_2' x_3' = 0$.

Je-li dále některý z bodů S_i' opět alespoň dvojnásobný bod křivky C' , zavedeme opět rozkladovou transformaci T_{s_i} ; tím dostaneme opět s_{ij} -násobné body S_{ij}'' s formami ($s_{ij} \geq 1$) $u_{(s_{ij})}$ na křivce $T_{s_i} C' = C''$. Definuje se pak, že v „okolí druhého řádu“ bodu S jsou s_{ij} -násobné implicitní body S_{ij} s formami $u_{(s_{ij})}$ atd.

Platí věta, že každou (nejen racionální) křivku lze konečným počtem rozkladových kvadratických transformací převést v křivku, jejíž všechny singulární body jsou jednoduché, t. j. v jejichž „okolí prvního řádu“ jsou jen jednoduché body, dokonce navzájem různé.

Nazveme-li totiž zdánlivým rodem h křivky C číslo

$$h = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{r_i(r_i-1)}{2},$$

kde se sčítá pro všechny explicitní r_i -násobné body křivky C pro $r_i > 1$, plyne z věty 8, že $h \geq 0$ (formy $u_{(r_i)}^{r_i-1}$ a $u_{(r_j)}^{r_j-1}$ jsou totiž pro explicitní body nesoudělné a dělí $v_{[(n-1)(n-2)]}$). Pro křivku C' z (34) se pak snadno nalezne, že její zdánlivý rod

$$h' = h - \frac{1}{2} \sum s_i(s_i-1),$$

kde se sčítá pro implicitní s_i -násobné body S_i „okolí prvního řádu“ bodu S . Není-li tedy bod S jednoduchým s -násobným bodem, je alespoň jedno $s_i > 1$, takže

$$0 \leq h' < h.$$

Dospějeme tedy nejvýše po h vhodných (t. j. pro něž se zdánlivý rod skutečně snižuje) rozkladových transformací ke křivce C^* , která má jen jednoduché singularity.

K důkazu věty 11 teď stačí užít pomocné věty:

Pomocná věta 4. Nechť $\mu(t_1, t_2)$ s formou $\varrho_{(n-2)}$ a $\mu'(t_1, t_2)$ s formou $\varrho'_{(2n-s-3)}$ jsou matice (16') ke křivkám C resp. C' , a přitom $\varrho_{(n-2)}$ nechť je nesoudělná s $v_{(n)}$, $\varrho'_{(2n-s-3)}$ nesoudělná s $\alpha_{(n-s)} \beta_{(n-s)} c_{(n)} v_{(n)}$. Pak pro normální diagonální tvary*) D resp. D' matic $\mu(t_1, t_2)$, resp. $\mu'(t_1, t_2)$ platí

*) Normální diagonální tvar matice je diagonální matice, která má v hlavní diagonále invariantní faktory dané matice (každý invariantní faktor dělí předchozí).

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \varrho'_{(2n-s-3)} I_1, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{(n-s)} I_{n-s-1}, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{(n-s)} I_{n-s-1}, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \varrho_{(n-2)} I_1, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{(s)} I_{s-1}, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} D' \cdot *) \end{aligned} \quad (35)$$

Je-li dále S jednoduchý s -násobný bod, jsou invariantní faktory matice D' nesoudělné s $u_{(s)}$.

Odtud totiž plyne věta 11 indukci přes zdánlivý rod takto:

Je-li $h = 0$, t. j. jsou-li všechny singulární body jednoduché, je podle této pomocné věty

$$\begin{pmatrix} \varrho'_{(m-s-3)} I_1, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho_{(n-2)} I_1, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{(s)} I_{s-1}, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} \bar{D},$$

kde $\bar{D}$ je diagonální matice, jejíž invariantní faktory jsou s $u_{(s)}$ nesoudělné. To však platí pro všechny singulární body, takže celkem (s užitím věty 8; zjistí se totiž snadno že zbylý faktor v D je již konstantní matice) je

$$D = \begin{pmatrix} \varrho_{(n-2)} I_1, & 0 \\ 0, & I_{M-1} \end{pmatrix} \cdot \prod_{s_i \geq 2} \begin{pmatrix} u_{(s_i)} I_{s_i-1}, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix}.$$

Budiž teď $h > 0$ a předpokládejme, že věta platí pro všechna vyjádření (11') všech křivek o zdánlivém rodu $\leq h-1$. Pak existuje (kdyby všechny singulární body byly jednoduché, pak by vzhledem k větě 8 $\prod u_{(s)}^{s-1} = v_{[(n-1)(n-2)]}$, kde součin je vzat přes všechny explicitní s -násobné body, $s \geq 2$, takže by $h = 0$) alespoň jeden nikoli jednoduchý s -násobný bod S , $s \geq 2$. Můžeme předpokládat, že souřadná soustava je zvolena tak, že C má tvar (33). Transformace T_s převede C v C' o zdánlivém rodu $\leq h-1$. Jsou-li D resp. D' normální diagonální tvary matic $\mu(t_1, t_2)$ resp. $\mu'(t_1, t_2)$ s formami $\varrho_{(n-2)}$ resp. $\varrho'_{(2n-s-3)}$, nesoudělnými s $v_{(n_1)}$ resp. $\alpha_{(n-s)} \beta_{(n-s)} c_{(n)} v_{(n_1)}$, pak platí jednak podle indukčního předpokladu, že

$$D' = \begin{pmatrix} \varrho'_{(2n-s-3)} I_1, & 0 \\ 0, & I_{M'-1} \end{pmatrix} \cdot \prod_{s_i \geq 2} \begin{pmatrix} u_{(s_i)} I_{s_i-1}, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix}, \quad (36)$$

kde součin je přes všechny, explicitní či implicitní, s_i -násobné body C' , $s_i \geq 2$, jednak (35). Poněvadž součin v (36) lze psát jako

$$\begin{pmatrix} \alpha_{(n-s)} I_{n-s-1}, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{(n-s)} I_{n-s-1}, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} \prod',$$

kde prvé tři matice odpovídají jednoduchým singulárním bodům O'_2 , O'_1 a O'_3 , $\prod'$ pak ovšem ostatním singulárním bodům, různým od O'_1 , O'_2 ,

*) V každé matici je I jednotková matice takového řádu, aby matice měla řád $3(2n-s-1)-2$.

O'_3 . Z (35) a (36) dostáváme však ihned, vynecháme-li ve všech maticích jednotkovou matici $I_{\mathbf{M}'-\mathbf{M}}$, že

$$D = \begin{pmatrix} \varrho_{(n-2)} I_1, & 0 \\ 0, & I_{\mathbf{M}-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{(s)} I_{s-1}, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} \cdot \prod_i \begin{pmatrix} u_{(s_i)} I_{s_i-1}, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Součin je pak skutečně vzat přes všechny, explicitní či implicitní, alespoň dvojnásobné body C . Bod $O_3 = S$ je totiž zahrnut explicitním i implicitními (v II') body, O_1 a O_2 neleží na křivce a ostatní singulární body odpovídají podle toho, co bylo řečeno, jednoznačně při týchž formách $u_{(s_i)}$ singulárním bodům C' a vyskytují se tedy v II' .

Zbývá tedy dokázat jen pomocnou větu 4. To učiníme v několika krocích.

Pomocné tvrzení 1. Je-li $\varrho_{(n-2)}$ nesoudělná forma s $v_{(n)}$, pak pro normální diagonální tvar D matice (16') platí

$$D = \begin{pmatrix} \varrho_{(n-2)}(t), & 0 \\ 0, & I_{3n-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{D}, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice

$$\mu_0 = \begin{pmatrix} A_{n-1}, & a_{(n)}(t) I_{n-1} \\ B_{n-1}, & b_{(n)}(t) I_{n-1} \\ C_{n-1}, & c_{(n)}(t) I_{n-1} \end{pmatrix} \quad (38)$$

má pak stejné invariantní faktory a stejný typ jako matice $(\bar{D}, 0)$, kde 0 je jeden nulový sloupec.

Důkaz. Pro stručnost budeme symbolem $A \sim B$ značit, že matice (nad t_1, t_2) mají též typ a invariantní faktory. Platí

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} A_{n-1}, & a_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ B_{n-1}, & b_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ C_{n-1}, & c_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ 0, & \varrho_1^{(n-2)}, & \varrho_{(n-2)}(t) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_{n-1}, & a_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ B_{n-1}, & b_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ C_{n-1}, & c_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ 0, & \varrho_1^{(n-2)}, & 0 \end{pmatrix} \sim (D, 0),$$

jak plyne, násobíme-li v první matici i -tý sloupec $t_1^{2n-i-1} \cdot t_2^{i-1}$ pro $i = 1, 2, \dots, 2n-1$, dále $-t_1^{2n-i-2} \cdot t_2^{i-2n}$ pro $i = 2n, \dots, 3n-2$ a vždy přičteme k poslednímu sloupci. Dále

$$\mu_2 = \begin{pmatrix} A_{n-1}, & a_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ B_{n-1}, & b_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ C_{n-1}, & c_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ 0, & \varrho_1^{(n-2)}, & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_{n-1}, & a_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ B_{n-1}, & b_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ C_{n-1}, & c_{(n)} I_{n-1}, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} = (\mu_0, 0).$$

Z transformační rovnice (19) plyne, že parametry t_1, t_2 lze volit tak, aby $\varrho_{(n-2)}$ a t_2 byly nesoudělné.

Potom se jako v důkazu věty 8 snadno zjistí, že matice $\mu(t_1, 1)$ je ekvivalentní matici, která má v posledním sloupci jediný nenulový prvek $\varrho_{(n-2)}(t_1, 1)$. Podle věty 5 dělí (potom opět zhomogenisovaná) forma $\varrho_{(n-2)}(t_1, t_2)$ první invariantní faktor matice $\mu(t_1, t_2)$. Protože součin všech invariantních faktorů matice $\mu(t_1, t_2)$ je $\varrho_{(n-2)} \cdot v_{(n)}$, kde $\langle \varrho_{(n-2)}, v_{(n)} \rangle = 1$, plyne odtud, že $\varrho_{(n-2)}$ je nesoudělná forma jak s ostatními invariantními faktory z $\mu(t_1, t_2)$, tak i s podílem prvního invariantního faktoru a $\varrho_{(n-2)}$. Ze srovnání matic μ_1, μ_2 je pak zřejmé, že invariantní faktory obou těchto matic jsou stejné až případně na faktory, soudělné s $\varrho_{(n-2)}$.

Je tedy celkem

$$D = \begin{pmatrix} \varrho_{(n-2)}, & 0 \\ 0, & I_{3n-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{D}, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

(neboť alespoň jeden invariantní faktor v D je skutečně 1),

$$\begin{pmatrix} \varrho_{(n-2)}, & 0 \\ 0, & I_{3n-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \sim (D, 0) = \begin{pmatrix} \varrho_{(n-2)}, & 0 \\ 0, & I_{3n-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{D}, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \end{pmatrix},$$

kde $(D_0, 0) \sim \mu_0$, takže vskutku je

$$\bar{D} = D_0.$$

Pomocné tvrzení 2. Jsou-li μ_0 resp. μ'_0 matice (38) pro křivku C resp. C' (ve vyjádřeních (33) resp. (34)), dále $U, \bar{A}$ a $\bar{B}$ matice, příslušné formám $u_{(s)}, \alpha_{(n-s)}$ a $\beta_{(n-s)}$, pak platí

$$\mu_0 \sim \begin{bmatrix} I_s, & 0, & 0 \\ 0, & \bar{A}_{n-1}, & \alpha_{(n-s)}u_{(s)}I_{n-1} \\ 0, & \bar{B}_{n-1}, & \beta_{(n-s)}u_{(s)}I_{n-1} \\ 0, & C_{n-s-1}, & c_{(n)}U_{n-s-1} \end{bmatrix} \quad (39)$$

a

$$\mu'_0 \sim \begin{bmatrix} I_{3(n-1)-2s}, & 0, & 0 \\ 0, & \beta_{(n-s)}c_{(n)}\bar{A}_{n-1}, & I_{n-1} \\ 0, & \alpha_{(n-s)}c_{(n)}\bar{B}_{n-1}, & I_{n-1} \\ 0, & \alpha_{(n-s)}\beta_{(n-s)}u_{(s)}C_{n-s-1}, & U_{n-s-1} \end{bmatrix} \quad (40)$$

Důkaz. Existuje forma $l_{(n-s-1)}(t)$, nesoudělná s $\alpha_{(n-s)}\beta_{(n-s)}c_{(n)}u_{(s)}$. Označme příslušnou matici L . Platí pak

$$\begin{bmatrix} 0, & 0, & L_s \\ I_{n-1}, & 0, & 0 \\ 0, & I_{n-1}, & 0 \\ 0, & 0, & U_{n-s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}U, & \alpha u I_{n-1} \\ \bar{B}U, & \beta u I_{n-1} \\ C, & c I_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_s, & 0, & 0 \\ 0, & \bar{A}, & \alpha u I_{n-1} \\ 0, & \bar{B}, & \beta u I_{n-1} \\ 0, & C, & c U_{n-s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} LC, & c L_s \\ U_{2n-s-1}, & 0 \\ 0, & I_{n-1} \end{bmatrix} .*)$$

Podle pomocné věty 1 jsou obě čtvercové matice regulární, protože $\langle l_{(n-s-1)}, u_{(s)} \rangle = 1$, $\langle l_{(n-s-1)} c_{(n)}, u_{(s)} \rangle = 1$. Odtud a z věty 5 plyne (39).

Zdlouhavější je důkaz pro (40): je opět pro vesměs regulární čtvercové matice

$$\begin{bmatrix} I_{3n-s}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & I_{n-s-1}, & 0, & 0, & 0 \\ -\bar{BC}, & 0, & L_n, & 0, & 0 \\ -\bar{AC}, & 0, & 0, & L_n, & 0 \\ -\bar{ABU}, & 0, & 0, & 0, & L_n \\ 0, & -I_{n-s-1}, & \bar{AU}, & 0, & 0 \\ 0, & -I_{n-s-1}, & 0, & \bar{BU}, & 0 \\ 0, & -I_{n-s-1}, & 0, & 0, & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{3n-s}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & I_{n-s-1}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \bar{BC}, & \beta c I_{2n-s-1} \\ 0, & 0, & \bar{AC}, & \alpha c I_{2n-s-1} \\ 0, & 0, & \bar{ABU}, & \alpha \beta u I_{2n-s-1} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} L, & -I_{3n-s}, & 0, & 0 \\ \bar{ABCU}, & 0, & 0, & -I_{n-s-1} \\ I_{4n-2s-1}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & I_{2n-s-1}, & 0 \end{bmatrix} = \\ = M_1 \cdot \begin{bmatrix} L, & -I_{3n-s}, & 0, & 0 \\ \bar{ABCU}, & 0, & 0, & -I_{n-s-1} \\ 0, & I_{3n-s}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & I_{2n-s-1}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & I_{n-s-1} \end{bmatrix},$$

kde

$$M_1 = \begin{bmatrix} I_{4n-2s-1}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \bar{BC}, & \beta c L_n, & 0 \\ 0, & \bar{AC}, & \alpha c L_n, & 0 \\ 0, & \bar{ABU}, & \alpha \beta u L_n, & 0 \\ 0, & 0, & \beta c \bar{AU}, & I_{n-s-1} \\ 0, & 0, & \alpha c \bar{BU}, & I_{n-s-1} \\ 0, & 0, & \alpha \beta u C, & I_{n-s-1} \end{bmatrix}$$

*) Je-li v matici v některém řádku označeno, kolik řádků příslušné pole má, pak obvykle u ostatních polí index vynecháváme. Viz ostatně poznámku na str. 322.

pro

$$I_{4n-2s-1} = \begin{pmatrix} I_{3n-s}, & 0 \\ 0, & I_{n-s-1} \end{pmatrix}.$$

Pro rozklad

$$I_{4n-2s-1} = \begin{pmatrix} I_{2n-s}, & 0 \\ 0, & I_{2n-s-1} \end{pmatrix}$$

je pak

$$\begin{bmatrix} I_{2n-s}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & I_n, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & I_{2n-s-1}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ -\bar{B}, & 0, & I_n, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ -\bar{A}, & 0, & 0, & I_n, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & I_{n-s-1}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & I_{n-s-1}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & I_{n-s-1} \end{bmatrix}.$$

$$\cdot M_1 \cdot \begin{bmatrix} C, & I_{2n-s}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & I_{2n-s-1}, & 0, & 0 \\ I_{3n-s}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & I_{2n-s-1}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & I_{n-s-1} \end{bmatrix} =$$

$$= M_2 \cdot \begin{bmatrix} C, & I_{2n-s}, & 0, & 0, & 0 \\ \bar{A}\bar{B}U, & 0, & 0, & \alpha\beta uL_n, & 0 \\ 0, & 0, & I_{2n-s-1}, & 0, & 0 \\ 0, & -I_{2n-s}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & I_{2n-s-1}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & I_{n-s-1} \end{bmatrix},$$

kde

$$M_2 = \begin{bmatrix} I_{5n-2n-1}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \bar{B}, & \beta cL_n, & 0 \\ 0, & \bar{A}, & \alpha cL_n, & 0 \\ 0, & 0, & \beta c\bar{A}U, & I_{n-s-1} \\ 0, & 0, & \alpha c\bar{B}U, & I_{n-s-1} \\ 0, & 0, & \alpha\beta uC, & I_{n-s-1} \end{bmatrix}$$

pro rozklad

$$I_{5n-2s-1} = \begin{bmatrix} I_{2n-s}, & 0, & 0 \\ 0, & I_{2n-s-1}, & 0 \\ 0, & 0, & I_n \end{bmatrix}.$$

Dále je pro rozklad

$$I_{5n-2s-1} = \begin{pmatrix} I_{5n-3s-1} & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix} \vee M_2$$

$$\begin{bmatrix} I_{5n-3s-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_{n-s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_{n-s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & \bar{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-s-1} & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 & \bar{B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-s-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-s-1} \end{bmatrix}$$

$$\cdot M_2 \cdot \begin{bmatrix} I_{5n-3s-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}\bar{B} & 0 & -I_s & 0 \\ 0 & I_{2n-s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{2n-s-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-s-1} \end{bmatrix} =$$

$$= M_3 \cdot \begin{bmatrix} I_{5n-3s-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}\bar{B} & 0 & -I_s & 0 \\ 0 & \bar{B}U & \beta cLU & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}U & \alpha cLU & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{2n-s-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-s-1} \end{bmatrix},$$

kde

$$M_3 = \begin{bmatrix} I_{7n-4s-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta c\bar{A}\bar{L} & I_s & 0 \\ 0 & \beta c\bar{A}U & 0 & I_{n-s-1} \\ 0 & \alpha c\bar{B}\bar{L} & I_s & 0 \\ 0 & \alpha c\bar{B}U & 0 & I_{n-s-1} \\ 0 & \alpha \beta uC & 0 & I_{n-s-1} \end{bmatrix}$$

pro

$$I_{7n-4s-1} = \begin{bmatrix} I_{5n-3s-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-s} \end{bmatrix}.$$

Konečně

$$M_3 \begin{bmatrix} I_{7n-4s-1}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & I_{2n-s-1}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & L_s, & 0 \\ 0, & 0, & U_{n-s-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_{7n-4s-1}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & L_s, & 0, & 0 \\ 0, & U_{n-s-1}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & L_s, & 0 \\ 0, & 0, & U_{n-s-1}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & I_{n-s-1} \end{bmatrix} M_4,$$

kde

$$M_4 = \begin{bmatrix} I_{7n-4s-1}, & 0, & 0 \\ 0, & \beta \bar{c} \bar{A}, & I_{n-1} \\ 0, & \alpha \bar{c} \bar{B}, & I_{n-1} \\ 0, & \alpha \beta u \bar{C}, & U_{n-s-1} \end{bmatrix}.$$

Odtud snadno plyne (40).

Pomocné tvrzení 3. Je-li δ resp. $\bar{\delta}$ největší společný dělitel determinantů nejvyššího stupně matice

$$M = \begin{bmatrix} \bar{A}, & \alpha u I_{n-1} \\ \bar{B}, & \beta u I_{n-1} \\ C, & c U_{n-s-1} \end{bmatrix} \text{ resp. } \bar{M} = \begin{bmatrix} \beta c \bar{A}, & I_{n-1} \\ \alpha c \bar{B}, & I_{n-1} \\ \alpha \beta u C, & U_{n-s-1} \end{bmatrix},$$

platí, že

$$u_{(s)}^{s-1} \bar{\delta} = \alpha_{(n-s)}^{n-s-1} \beta_{(n-s)}^{n-s-1} c_{(n)}^{n-1} \delta. \quad (41)$$

Důkaz. δ je největší společný dělitel všech determinantů, pokud jsou formami (t. j. buď pro $g_1^{(2n-s-2)} = 0$ nebo pro $h_1^{(n-2)} = 0$), tvaru

$$\begin{array}{l|l} \bar{A}, & \alpha u I_{n-1} \\ \bar{B}, & \beta u I_{n-1} \\ C, & c U_{n-s-1} \\ g_1^{(2n-s-2)}, & h^{(n-2)} \end{array} \quad (42)$$

Násobíme-li determinant (jako matici) zprava determinantem

[illegible]

dostaneme determinant, který má v posledním sloupci jen nejvýše poslední prvek nenulový, rovný $h_{(n-2)} - u_{(s)}g_{(2n-s-2)}$.*) Rozvedeme-li jej podle posledního sloupce, dostaneme, označíme-li Δ subdeterminant, že celkem

$$t_2^{n-2} \cdot \delta = \Delta, \quad (44)$$

neboť pro $g \equiv 0$ je největší společný dělitel forem $h_{(n-2)}$ pro různé formy $h_{(n-2)}$ zřejmě 1.

Jestliže analogicky postupujeme pro druhou matici (místo (43) užijeme determinantu, jehož poslední sloupec má prvky $-t_1^{2n-s-2}, \dots, -t_2^{2n-s-2}, \alpha\beta c t_1^{n-2}, \alpha\beta c t_1^{n-2}t_2, \dots, \alpha\beta c t_2^{n-2}$, místo $h_{(n-2)} - u_{(s)}g_{(2n-s-2)}$ pak dostaneme $\alpha\beta c h_{(n-2)} - g_{(2n-s-2)}$, takže pro $h \equiv 0$ je největší společný dělitel opět 1), dojdeme k rovnici

$$\alpha\beta c \cdot t_2^{n-2} \cdot \bar{\delta} = \bar{\Delta}. \quad (45)$$

Násobíme-li v Δ prvních $n-1$ řádků βc , dalších $n-1$ řádků αc a posledních $n-s-1$ řádků $\alpha\beta u$, dostaneme právě též determinant jako při násobení posledních $n-2$ sloupců $\bar{\Delta}$ formou $\alpha\beta c u$. Je tedy

$$\Delta(\alpha\beta c u)^{n-2} = \bar{\Delta}(\alpha c)^{n-1}(\beta c)^{n-1}(\alpha\beta u)^{n-s-1},$$

takže z (44) a (45) dostáváme (41).

Teď již bez obtíží dokážeme pomocnou větu 4: Necht φ_i resp. ψ_i jsou invariantní faktory matice M resp. $\bar{M}$, $\varphi_{i+1} \mid \varphi_i$, $\psi_{i+1} \mid \psi_i$. Předně platí, že pro ω_1, ω_2 z nějakého nadtělesa K_1 nad K , pro které je $\alpha_{(n-s)}(\omega_1, \omega_2) = 0$, je defekt

$$\text{def } \bar{M}(\omega_1, \omega_2) = \text{def } \bar{A} = n - s; \quad (46_1)$$

je-li obdobně $\beta_{(n-s)}(\omega'_1, \omega'_2) = 0$, je

$$\text{def } \bar{M}(\omega'_1, \omega'_2) = n - s. \quad (46_2)$$

Pro ω''_1, ω''_2 , $c_{(n)}(\omega''_1, \omega''_2) = 0$, je dále

$$\text{def } \bar{M}(\omega''_1, \omega''_2) = n, \quad (46_3)$$

a konečně pro $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$, $u_{(s)}(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = 0$, je

$$\text{def } \bar{M}(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = \text{def } U_{n-s-1} = s. \quad (46_4)$$

Protože $\alpha_{(n-s)}$ má jen jednoduché faktory a je nesoudělná s $v_{(n)}$, a obdobně pro $\beta_{(n-s)}$ a $c_{(n)}$, platí, označíme-li $[\varphi_i]$ diagonální matici s diagonálními prvky φ_i a pod., že (matice M i $\bar{M}$ mají o jeden sloupec více než řádků)

$$[\psi_i] = \begin{pmatrix} \alpha I_{n-s-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta I_{n-s-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c I_{n-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} [\bar{\psi}_i], \quad (47)$$

*) $h_{(n-2)}$ resp. $g_{(2n-s-2)}$ jsou formy příslušné maticím $h_1^{(n-2)}$ resp. $g_1^{(2n-s-2)}$

kde $\langle \bar{\psi}_i, \alpha\beta c \rangle = 1$. Je totiž

$$\bar{\delta} = \Pi\psi_i = \alpha^{n-s-1}\beta^{n-s-1}c^{n-1}\Pi\bar{\psi}_i, \quad (48)$$

takže podle (41) je

$$u_{(s)}^{s-1}\Pi\bar{\psi}_i = \delta = \Pi\varphi_i. \quad (50)$$

Avšak podle (39) a pomocného tvrzení 1 je $\delta = |\bar{D}| = v_{(n)}$, a tedy

$$\langle \Pi\bar{\psi}_i, \alpha\beta c \rangle = 1.$$

Dále platí

$$\begin{bmatrix} \beta c I_{n-1}, & 0, & 0 \\ 0, & \alpha c I_{n-1}, & 0 \\ 0, & 0, & \alpha \beta u I_{n-s-1} \end{bmatrix} M \begin{pmatrix} \alpha \beta c u I_{2n-s-1}, & 0 \\ 0, & I_{n-1} \end{pmatrix} = \alpha \beta c u \bar{M}.$$

Invariantní faktory matice $\alpha \beta c u \bar{M}$ jsou $\alpha \beta c u \psi_i$; podle věty 5 proto platí $\varphi_i | \alpha \beta c u \psi_i$. Vzhledem k tomu, že $\langle \varphi_i, \alpha \beta c \rangle = 1$ a vzhledem k (47) $\varphi_i | u \bar{\psi}_i$. Ze (46₄) dále plyne, že $\langle \varphi_i, u \rangle = 1$ pro $i > s-1$, takže platí: existují formy λ_i tak, že $\varphi_i \lambda_i = u \bar{\psi}_i$ pro $i = 1, \dots, s-1$, $\varphi_i \lambda_i = \bar{\psi}_i$ pro $i \geq s$. Znásobením těchto vztahů dostaneme $\Pi \varphi_i \cdot \Pi \lambda_i = u^{s-1} \Pi \bar{\psi}_i$. Podle (50) je potom však $\Pi \lambda_i = 1$. Tedy (vše ve smyslu dělitelnosti) $\lambda_i = 1$. Odtud,

$$[\varphi_i] = \begin{pmatrix} u I_{s-1}, & 0 \\ 0, & I \end{pmatrix} [\bar{\psi}_i], \quad (51)$$

takže celkem z (51), (47) a pomocného tvrzení 1 dostáváme (35).

Zbytek tvrzení pomocné věty 4 plyne odtud, že pro jednoduchý s -násobný bod S je $\langle v'_{(n')}, u_{(s)} \rangle = 1$, kde $v'_{(n')} = |D'|$ je forma pro C' , analogická k $v_{(n)}$.

Uvedeme teď bez důkazu větu:

Věta 12. *Nechť C je křivka ve tvaru (11'). Nutná a postačující podmínka, aby křivka $g_{(m)}(x_1, x_2, x_3) = 0$ byla adjungovanou křivkou k C , je, aby forma $g_{(m)}(a_{(n)}(t), b_{(n)}(t), c_{(n)}(t))$ byla dělitelna formou $v_{(n)}(t)$.*

Z této věty vyvodíme důsledek:

Věta 13. *Adjungované křivky k C ($n-2$)-ho stupně tvoří lineární ($n-2$)-rozměrnou soustavu. Rovnice této soustavy je*

$$\begin{vmatrix} A_{n-1}, & x_1 I_{n-1} \\ B_{n-1}, & x_2 I_{n-1} \\ C_{n-1}, & x_3 I_{n-1} \\ 0, & \varrho_1^{(n-2)} \end{vmatrix} = 0, \quad (52)$$

kde $\varrho_1^{(n-2)} = (\varrho_0, \varrho_1, \dots, \varrho_{n-2})$ jsou parametry soustavy.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že každá křivka (52) je adjungovaná. To však plyne odtud, že podle (31) je

$$\begin{vmatrix} A_{n-1}, & a_{(n)}(t) I_{n-1} \\ B_{n-1}, & b_{(n)}(t) I_{n-1} \\ C_{n-1}, & c_{(n)}(t) I_{n-1} \\ 0, & \varrho_1^{(n-2)} \end{vmatrix} = v_{(n)}(t) \cdot \varrho_{(n-2)}. \quad (31')$$

Nechť naopak křivka $g_{(n-2)}(x_1, x_2, x_3) = 0$ je adjungovaná. To znamená, že $g_{(n-2)}(a_{(n)}, b_{(n)}, c_{(n)}) = v_{(n)}(t) \cdot \sigma_{(n-2)}(t)$, kde σ je nějaká forma $(n-2)$ -ho stupně (je totiž $n_1 = (n-1)(n-2)$ a stupeň formy vlevo je $n(n-2)$). Je-li $\sigma_1^{(n-2)}$ matice příslušná k formě $\sigma_{(n-2)}$, pak forma

$$h_{(n-2)}(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} A_{n-1}, & x_1 I_{n-1} \\ B_{n-1}, & x_2 I_{n-1} \\ C_{n-1}, & x_3 I_{n-1} \\ 0, & \sigma_1^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

má vlastnost, že $h_{(n-2)}(a_{(n)}, b_{(n)}, c_{(n)}) = v_{(n)}(t) \cdot \sigma_{(n-2)}(t)$. Pro formu $w_{(n-2)}(x_1, x_2, x_3) = g_{(n-2)}(x_1, x_2, x_3) - h_{(n-2)}(x_1, x_2, x_3)$ tedy platí $w_{(n-2)}(a_{(n)}(t), b_{(n)}(t), c_{(n)}(t)) \equiv 0$. Jako na konci důkazu věty 10 odtud plyne, že je identicky $w_{(n-2)} \equiv 0$, $g_{(n-2)} \equiv h_{(n-2)}$, takže $g_{(n-2)}$ má vskutku tvar (52). Že soustava (52) má dimenzi $n-2$, plyne z (31').

SKALÁRY KŘIVOSTI NADPLOCHY VNOŘENÉ DO EUKLIDOVSKÉHO PROSTORU A JEJICH GEOMETRICKÝ VÝZNAM

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha.

(Došlo dne 4. března 1952.)

513.736.3

Je dobře znám význam tak zvané střední křivosti H a Gaussovy křivosti K pro plochu v trojrozměrném prostoru euklidovském. Účelem předložené práce je definovat vhodným způsobem skaláry křivosti pro nadplochu ve vícerozměrném prostoru euklidovském tak, aby případ plochy V_3 a E_3 byl speciálním případem této teorie a dále najít pokud možno jednoduchý geometrický význam těchto skalárů. Studium definovaných skalárů a nadplochy samé, jakož i podané geometrické interpretace jsou provedeny užitím sférického zobrazení nadplochy, t. j. zobrazením nadplochy na nadplochu kulovou.

1. Úvodní poznámky.

V euklidovském prostoru E_{n+1} o $n+1$ dimensích s kartézskými pravoúhlými souřadnicemi x^A , $A = 1, 2, \dots, n+1$, je dána nadplocha V_n o n dimensích parametrickými rovnicemi

$$x^A = x^A(\xi^\alpha), \quad A = 1, 2, \dots, n+1; \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (1,1)$$

V dalším budeme předpokládat, že funkce $x^A = x^A(\xi^\alpha)$ mají spojitě parciální derivace aspoň druhého řádu podle parametrů ξ^α a dále, že hodnost matice

$$(B_\alpha^1, B_\alpha^2, \dots, B_\alpha^{n+1}), \quad B_\alpha^A \equiv \frac{\partial x^A}{\partial \xi^\alpha} \quad (1,2)$$

je v každém bodě uvažovaného oboru rovna n .

Označíme-li g_{AB} metrický tensor prostoru E_{n+1} ,¹⁾ potom indukovaný metrický tensor nadplochy V_n je takto definován

$$a_{\lambda\mu} = g_{AB} B_\lambda^A B_\mu^B. \quad (1,3)$$

Poněvadž předpokládáme, že $x^A = x^A(\xi^\alpha)$ jsou reálné funkce reálných

¹⁾ Tedy podle předpokladu $g_{AB} = 0$ pro $A \neq B$, $g_{AB} = 1$ pro $A = B$; $A, B = 1, 2, \dots, n+1$.

parametrů ξ^α , plyne z (1,3) a předchozích předpokladů, že tensor $a_{\lambda\mu}$ je pozitivně definitní.

Jednotkovým tečným vektorem variety V_n nazýváme vektor T_A , který je řešením rovnice

$$B_\lambda^A T_A = 0, \quad g^{AB} T_A T_B = 1, \quad (1,4)$$

kde g^{AB} je kontragradientní tensor k tensoru g_{AB} . Snadno nahlédneme že za našich předpokladů je rovnicemi (1,4) vektor T_A až na znamení určen jednoznačně.

Vektor N^A takto definovaný

$$N^A = g^{AB} T_B \quad (1,5)$$

nazýváme normálou variety V_n . Ježto vektor T_A je rovnicemi (1,4) definován až na znamení, je vektor N^A definován rovněž až na znamení. K vůli jednoznačnosti vektoru N^A (a tedy též T_A) volme vždy takové znamení u řešení rovnice (1,4), aby determinant ze složek B_α^A a vektoru N^A byl vždy kladný, t. j.

$$\begin{vmatrix} B_1^1 & B_1^2 & \dots & B_1^{n+1} \\ B_2^1 & B_2^2 & \dots & B_2^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_n^1 & B_n^2 & \dots & B_n^{n+1} \\ N^1 & N^2 & \dots & N^{n+1} \end{vmatrix} > 0. \quad (1,6)$$

Druhým metrickým tensorem variety V_n nazýváme tensor $h_{\alpha\beta}$ takto definovaný

$$h_{\alpha\beta} = B_\alpha^A \partial_\beta T_A \left(\partial_\beta \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \right). \quad (1,7)$$

Označíme-li $\{\overset{\alpha}{\beta}\gamma\}$ koeficienty indukované konexe ve V_n , kde

$$\{\overset{\alpha}{\beta}\gamma\} = \frac{1}{2} a^{\alpha\delta} (\partial_\beta a_{\gamma\delta} + \partial_\gamma a_{\beta\delta} - \partial_\delta a_{\beta\gamma}), \quad (1,8)$$

potom tensor

$$K_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} \equiv 2(\partial_\alpha \{\overset{\delta}{\beta}\gamma\} + \{\overset{\delta}{\alpha}\mu\} \{\overset{\mu}{\beta}\gamma\}) \quad (1,8)$$

jest tensorem křivosti prostoru V_n .

V dalším budeme se též odvolávat na dva známé vztahy a to *Gaussovy* rovnice

$$K_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = 2h_{\delta\lambda} h_{\beta\lambda} (K_{\alpha\beta\gamma}^{\lambda} = K_{\alpha\beta\gamma}^{\rho} a_{\rho\delta}), \quad (1,9)$$

a formulí *Weingartenových*

$$\partial_\alpha N^A = h_{\alpha\beta} a^{\beta\delta} B_\delta^A. \quad (1,10)$$

²⁾ Z předpokladů plyne, snadno, že determinant (1,6) nemůže být v uvažovaném oboru variety V_n roven nule.

³⁾ $a^{\alpha\delta}$ je kontragradientní tensor k tensoru $a_{\alpha\delta}$ ve V_n .

Ke konci této úvodní statě připojme ještě tyto poznámky:
 buďtež v^A, w^A dva libovolné vektory v E_{n+1} ,
 potom modulem vektoru v^A (modulem vektoru w^A) nazýváme skalár

$$g_{AB}v^Av^B, (g_{AB}w^Aw^B). \quad (1,11)$$

a mírou vektoru $v^A, (w^A)$ skalár

$$+ \sqrt{g_{AB}v^Av^B}, (+ \sqrt{g_{AB}w^Aw^B}) \quad (1,12)$$

Úhel ϑ vektorů v^A, w^B je definován vztahem

$$\cos \vartheta = \frac{g_{AB}v^Aw^B}{+ \sqrt{(g_{AB}v^Av^B) \cdot (g_{CD}w^Cw^D)}}, \quad (1,13)$$

při čemž učiníme úmluvu, že úhly v E_{n+1} budeme měřit od nuly do π (předpokládáme samozřejmě, že v^A, w^B nejsou nulové vektory).

Budtež nyní $v^A, v^A, \dots, v^A$ ($1 < p \leq n+1$) p vektorů v nějakém bodě P prostoru E_{n+1} . Tyto vektory definují v tomto bodě P p -vektor $v^{A_1}v^{A_2} \dots v^{A_p}$ se složkami nevesměs rovnými nule, jestliže vektory $v^A, \dots, v^A$ jsou v P lineárně nezávislé. Modulem p -vektoru $v^{A_1}v^{A_2} \dots v^{A_p}$ nazýváme pak skalár⁴⁾

$$m = g_{A_1A_1}g_{A_2A_2} \dots g_{A_pA_p}v^{A_1}v^{A_2} \dots v^{A_p}v^{B_1}v^{B_2} \dots v^{B_p}. \quad (1,14a)$$

Ježto nám jde stále o reálné veličiny, snadno nahlédneme, že $m \geq 0$, přičemž znamení rovnosti platí tehdy a jen tehdy, je-li $[v^{A_1}, v^{A_2}, \dots, v^{A_p}] \equiv 0$, t. j. jsou-li vektory $v^A, v^A, \dots, v^A$ ($1 < p \leq n+1$) lineárně závislé. To plyne z toho, že tensor g_{AB} je pozitivně definitní.

Modul m můžeme též psát v libovolném z těchto tvarů:

$$m = g_{|A_1|B_1}|g_{A_2|B_2}| \dots |g_{A_p|B_p}|v^{A_1}v^{A_2} \dots v^{A_p}v^{B_1}v^{B_2} \dots v^{B_p}, \quad (1,14b)$$

$$m = v_{B_1}v_{B_2} \dots v_{B_p}v^{B_1}v^{B_2} \dots v^{B_p}, \quad v_B = g_{AB}v^A. \quad (1,14c)$$

Jako míru p -vektoru $v^{A_1}v^{A_2} \dots v^{A_p}$ definujeme pak skalár

$$+ \sqrt{m}. \quad (1,15)$$

Budtež nyní $v^A, v^A, \dots, v^A$ ($1 < p \leq n+1$) lineárně nezávislé vektory v bodě P prostoru E_{n+1} a $w^A, w^A, \dots, w^A$ lineárně nezávislé vektory

⁴⁾ Viz na př. *E. Cartan: Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann*, Paris, 1928, str. 15.

v bodě Q prostoru E_{n+1} (bod Q může být též totožný s bodem P). Jako úhel p -vektorů $v^{A_1}v^{A_2} \dots v^{A_p}, w^{A_1}w^{A_2} \dots w^{A_p}$ pak definujeme úhel ϑ v intervalu $0 \leq \vartheta \leq \pi$ tak, že

$$\cos \vartheta = \frac{g_{[A_1]B_1} g_{[A_2]B_2} \dots g_{[A_p]B_p} v^{A_1} v^{A_2} \dots v^{A_p} w^{B_1} w^{B_2} \dots w^{B_p}}{\sqrt{m(v) \cdot m(w)}} \quad (1,16)$$

2. Hlavní křivosti a skaláry K variety V_n vnořené v E_{n+1}

Budiž $a_{\lambda\mu}$ první metrický tensor a $h_{\lambda\mu}$ druhý metrický tensor variety V_n vnořené v E_{n+1} (viz (1,3), (1,7)). Hlavním směrem v bodě variety V_n nazýváme směr každého nenulového vektoru u^ν ve V_n , vyhovujícího rovnicím

$$h_{\lambda\nu} u^\nu = s a_{\lambda\nu} u^\nu, \quad (2,1)$$

kde $s = s(\xi^\alpha)$ je skalár ve V_n . Relace (2,1) můžeme též psát ve tvaru

$$(h_\nu^\alpha - s \delta_\nu^\alpha) u^\nu = 0, \quad \delta_\nu^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha \neq \nu \\ 1 & \text{pro } \alpha = \nu, \end{cases} \quad (2,2a)$$

kde

$$h_\nu^\alpha = h_{\nu\mu} a^{\mu\alpha}. \quad (2,2b)$$

Z elementární algebry plyne: nutná a postačující podmínka pro to, aby existovalo nenulové řešení u^ν rovnic (2,2a) je

$$\text{Det}[h_\nu^\alpha - s \delta_\nu^\alpha] = 0 \quad (\alpha, \nu = 1, 2, \dots, n), \quad (2,3a)$$

což jest (v uvažovaném bodě variety V_n) algebraická rovnice v s stupně n -tého příslušná systému rovnic (2,2a), tak zvaná charakteristická rovnice systému (2,2a). Rovnici (2,3) můžeme psát stručně ve tvaru

$$\sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} K s^{n-r} = 0, \quad (2,3)$$

kde jsme položili pro stručnost

$$\begin{aligned} K &= 1 \\ K &= h_{\lambda_1}^{\lambda_1} \\ K &= h_{[\lambda_1}^{\lambda_1} h_{\lambda_2}^{\lambda_2} \dots h_{\lambda_r}^{\lambda_r}] \quad \text{pro } 2 \leq r \leq n. \end{aligned} \quad (2,4)$$

⁵⁾ Pomocí vět elementární algebry snadno nahlédneme, že výraz na pravé straně v (1,16) je v absolutní hodnotě vždy menší, nebo roven 1 při $m(v) \neq 0$, $m(w) \neq 0$. Viz rovněž poznámku ⁴⁾.
(p)

Definice 1. Skalár K ($1 \leq r \leq n$) z rovnic definičních (2,4) budeme nazývat r -tou křivostí nadplochy V_n vnořené v E_{n+1} .

Je nyní známo,⁷⁾ že rovnice (2,3), za vpředu uvedených předpokladů, má n reálných kořenů $s_1, s_2, \dots, s_n$. Veličiny s_i ($i = 1, 2, \dots, n$) jsou vnitřními veličinami (skaláry) nadplochy V_n a jsou v každém bodě variety V_n (kde platí naše předpoklady z § 1) jednoznačně určeny. Skaláry s_i ($i = 1, 2, \dots, n$) nazýváme hlavními křivostmi variety V_n . Z diferenciální geometrie metrické je nyní dále známo⁸⁾, že v případě, kdy $s_i, i = 1, 2, \dots, n$ jsou vzájemně různé v bodě nadplochy, jsou rovnicemi (2,1) v uvažovaném bodě jednoznačně určeny směry $u^i, i = 1, 2, \dots, n$, definující v onom bodě směry hlavní a dále, že tyto vektory jsou vzájemně kolmé, t. j. — za předpokladu, že u^i jsou jednotkové vektory — platí

$$a_{\lambda\mu} u^{\lambda}_i u^{\mu}_j = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ 1 & \text{pro } i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2,5)$$

Avšak i v případě, že rovnice (2,3) má vícenásobné kořeny s_i , je možno vždy najít n jednotkových vektorů $u^i, i = 1, 2, \dots, n$, vyhovujících podmínkám (2,3), (2,5). Tyto vektory definují opět v uvažovaném bodě nadplochy hlavní směry, i když v tomto případě nejednoznačně.

Věta (1,2). Skaláry $K, 1 \leq r \leq n$ jsou elementárními symetrickými funkcemi hlavních křivostí s_i ($i = 1, 2, \dots, n$), t. j.

$$\begin{aligned} K &= s_1 + s_2 + \dots + s_n, \\ (1) \quad K &= s_1 s_2 + s_1 s_3 + \dots + s_1 s_n + s_2 s_3 + \dots + s_2 s_n + s_3 s_4 + \dots + s_3 s_n + \dots + s_{n-1} s_n, \\ (2) \quad K &= s_1 s_2 \dots s_n, \\ (n) \end{aligned}$$

tedy stručně

$$K_{(r)} = \frac{1}{r!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_r} \quad (1 \leq r \leq n), \quad (2,6)$$

⁶⁾ Viz J. A. Schouten-D. J. Strnik: Einführung... I, str. 39, úloha 3.5.

⁷⁾ J. A. Schouten-D. J. Strnik: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie II, str. 70.

⁸⁾ Viz ⁷⁾.

kde sčítáme přes všechny indexy $i_1, i_2, \dots, i_r = 1, 2, \dots, n$ navzájem různé.

Tato věta plyne ihned z (2,3b) na základě známých vlastností kořenů algebraické rovnice n -tého stupně.

3. Jiný tvar skalárů $K_{(r)}$

Nyní budeme uvažovat přirozené r takové, že $2 \leq r \leq n$.

Věta (1,3).

Jest

$$K_{(2)} = \frac{1}{2} K_{\alpha\beta\gamma\delta} a^{\alpha\delta} a^{\beta\gamma}. \quad (3,1)$$

Důkaz: Z Gaussovy rovnice (1,9) dostaneme ihned vztah (3,1).

Poznámka: Pro $n = 2$ je skalár $K_{(2)}$ identický s Gaussovou křivostí pro plochu v prostoru E_3 .

Věta (3,2). Pro $2m \leq n$ ($m > 1$ přirozené číslo) je

$$K_{(2m)} = \frac{1}{2^m} K_{[\alpha_1\alpha_2|\beta_2\beta_1]} K_{\alpha_3\alpha_4|\beta_4\beta_3} \dots K_{\alpha_{2m-1}\alpha_{2m}|\beta_{2m}\beta_{2m-1}} a^{\alpha_1\beta_1} \dots a^{\alpha_{2m}\beta_{2m}}.$$

Důkaz: z Gaussovy rovnice (1,9) plyne

$$\begin{aligned} & K_{[\alpha_1\alpha_2|\beta_2\beta_1]} K_{\alpha_3\alpha_4|\beta_4\beta_3} \dots K_{\alpha_{2m-1}\alpha_{2m}|\beta_{2m}\beta_{2m-1}} = \\ & = 2h_{\beta_1[\alpha_1 h_{\alpha_2}]\beta_2] K_{\alpha_3\alpha_4|\beta_4\beta_3} \dots K_{\alpha_{2m-1}\alpha_{2m}|\beta_{2m}\beta_{2m-1}} = \\ & = 2h_{\beta_1[\alpha_1 h_{\alpha_2}]\beta_2] K_{\alpha_3\alpha_4|\beta_4\beta_3} \dots K_{\alpha_{2m-1}\alpha_{2m}|\beta_{2m}\beta_{2m-1}} = \\ & 2^2 h_{\beta_1[\alpha_1 h_{\alpha_2}]\beta_2] h_{[\beta_3|\alpha_3 h_{\alpha_4}]\beta_4} K_{\alpha_5\alpha_6|\beta_6\beta_5} \dots K_{\alpha_{2m-1}\alpha_{2m}|\beta_{2m}\beta_{2m-1}} = \text{atd.;} \end{aligned}$$

po m krocích dostaneme zřejmě

$$\begin{aligned} & K_{[\alpha_1\alpha_2|\beta_2\beta_1]} K_{\alpha_3\alpha_4|\beta_4\beta_3} \dots K_{\alpha_{2m-1}\alpha_{2m}|\beta_{2m}\beta_{2m-1}} = \\ & = 2^m h_{[\alpha_1|\beta_1] h_{\alpha_2|\beta_2} \dots h_{\alpha_{2m}|\beta_{2m}}}. \end{aligned}$$

Jest však vzhledem k (2,4)

$$\begin{aligned} & h_{[\alpha_1|\beta_1] h_{\alpha_2|\beta_2} \dots h_{\alpha_{2m}|\beta_{2m}} a^{\alpha_1\beta_1} a^{\alpha_2\beta_2} \dots a^{\alpha_{2m}\beta_{2m}} = \\ & = h_{[\alpha_1}^{\alpha_1} h_{\alpha_1}^{\alpha_1} h_{\alpha_3}^{\alpha_3} \dots h_{\alpha_{2m}}^{\alpha_{2m}}] = K_{(2m)}. \end{aligned}$$

Odtud a z předchozího plyne ihned vztah (3,2).

Poznámka. Z (3,2) plyne, že je možno všechny skaláry K se sudým indexem r vyjádřit pomocí metrického tensoru nadplochy a jeho parciálních derivací prvního a druhého řádu. Tento výsledek je zobecněním Gaussova výsledku pro plochu v trojrozměrném prostoru euklidovském (tento speciální případ plyne z předchozího pro $n = 2$).

Věta (3,3). Pro $3 \leq 2m + 1 \leq n$ ($m \dots$ přirozené číslo) je

$$K_{(2m+1)} = \frac{1}{2^m} K_{[\alpha_1 \alpha_2 | \beta_2 \beta_1]} K_{\alpha_3 \alpha_4 | \beta_4 \beta_3} \dots \\ \dots K_{\alpha_{2m-1} \alpha_{2m} | \beta_{2m} \beta_{2m-1}} h_{\alpha_{2m+1} \beta_{2m+1}} a^{\alpha_1 \beta_1} a^{\alpha_2 \beta_2} \dots a^{\alpha_{2m-1} \beta_{2m-1}}$$

Důkaz se provede analogicky jako ve větě (3,2).

4. Geometrický význam skalárů K .

(r)

n -rozměrnou nadkouli v prostoru E_{n+1} o poloměru $R > 0$ a o středu $O(x^A)$, $A = 1, 2, \dots, n+1$, nazýváme množinu všech bodů $X(x^A)$, pro něž platí

$$\sum_{A=1}^{n+1} (x^A - x^A_0)^2 = R^2, \quad (4,1)$$

při čemž x^A_0 jsou pravouhlé kartézské souřadnice bodů v E_{n+1} . Sestrojíme v každém bodě variety V_n , dané rovnicemi (1,1) normálu N^A [viz (1,4), (1,5), (1,6)]. Definujeme nyní v E_{n+1} funkce $s x^A(\xi^\alpha)$ takto:

$$s x^A_0 = x^A_0 + N^A(\xi^\alpha), \quad A = 1, 2, \dots, n+1, \\ \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (4,2)$$

Tím jsme přiřadili každému bodu variety V_n jednoznačně bod o souřadnicích $s x^A$ v E_{n+1} . Ježto $N^A(\xi^\alpha)$ jest jednotkovým vektorem v E_{n+1} , je zřejmé

$$\sum_{A=1}^{n+1} (s x^A - x^A_0)^2 = g_{AB} (s x^A - x^A_0) (s x^B - x^B_0) = g_{AB} N^A N^B = 1.$$

Odtud plyne ihned, že body o souřadnicích $s x^A$ ($A = 1, 2, \dots, n+1$) leží na jednotkové nadkouli v E_{n+1} .

Množinu bodů o souřadnicích $s x^A$ [definovaných v (4,2)] nazýváme sférickým obrazem uvažovaného oboru nadplochy V_n (viz předpoklady v § 1).

Uložme si nyní úkol najít nutné a postačující podmínky pro to, aby rovnicemi (4,2) byla definována p -rozměrná varieta ve V_n , $0 \leq p \leq n$ (lokálně).

Věta (4,1). *Nutná a postačující podmínka pro to, aby sférickým obrazem variety V_n byla varieta p -rozměrná ($0 \leq p \leq n$) jest: hodnost matice*

$$(\partial_\alpha N^1, \partial_\alpha N^2, \dots, \partial_\alpha N^{n+1}) \quad (4,3)$$

jest p .⁹⁾

Důkaz: Věta (4,1) je speciálním případem věty: Nutná a postačující podmínka pro to, aby parametrickými rovnicemi

$$Y^A = Y^A(y^\alpha), \quad A = 1, 2, \dots, n+1; \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

byla (lokálně) definována varieta p -rozměrná v E_{n+1} ($0 \leq p \leq n$), jest: hodnost matice

$$\left(\frac{\partial Y^1}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial Y^2}{\partial y^\alpha}, \dots, \frac{\partial Y^{n+1}}{\partial y^\alpha} \right)$$

jest p (tedy v žádném bodě uvažovaného oboru není hodnost větší než p a aspoň v jednom bodě je rovna p).⁹⁾ Nutnost podmínky této věty plyne z lokální definice p -rozměrné variety, postačitelnost věty pak z teorie závislosti funkcí. V našem případě je

$$\frac{\partial Y^A}{\partial y^\alpha} \equiv \frac{\partial N^A}{\partial \xi^\alpha}.$$

Věta (4,2). *Hodnost matice (4,3) a matice*

$$(\partial_\alpha T_1, \partial_\alpha T_2, \dots, \partial_\alpha T_{n+1}) \quad (4,4)$$

jsou v každém bodě variety V_n (za platnosti předpokladů v § 1 vymezených) stejné.

Důkaz: Podle (1,5) je totiž $N^A = g^{AB} T_B$, kde

$$g_{AB} = \begin{cases} 1 & \text{pro } A = B \\ 0 & \text{pro } A \neq B \end{cases}$$

a tedy

$$\partial_\alpha N^A = g^{AB} \partial_\alpha T_B = g^{AA} \partial_\alpha T_A = \partial_\alpha T_A$$

v uvažovaném bodě variety V_n . Věta plyne zřejmě též z toho, že v E_{n+1} při kartézských pravoúhlých souřadnicích jsou kovariantní a kontravariantní složky vektorů stejné co do hodnoty.

Věta (4,3). *Nechť hodnost druhého metrického tensoru $h_{\alpha\beta}$ jest v nějakém bodě variety V_n rovna p ($0 \leq p \leq n$). Potom matice $(\partial_\alpha T_1, \partial_\alpha T_2, \dots, \partial_\alpha T_{n+1})$ má v totéž bodě variety V_n tutéž hodnost.*

Důkaz: Nechť za prvé jest

a) $h_{\alpha\beta} = 0$ (t. j. $p = 0$). Potom podle (1,7) $B_\alpha^A \partial_\beta T_A = 0$. Avšak T_A

⁹⁾ Stačí zřejmě předpokládat, že aspoň v jednom bodě variety V_n je hodnost matice rovna právě p . Ze spojitosti plyne pak ihned, že existuje celé okolí onoho bodu, kde hodnost uvažované matice je rovněž p .

je řešením rovnic $B_{\alpha}^A T_A = 0$ (viz (1,4)). Nejobecnějším řešením rovnic předchozích jest $*T_A = kT_A$, kde $k = k(\xi^x)$ je skalár ve V_n . Odtud a z rovnic $B_{\alpha}^A \partial_{\beta} T_A = 0$ plyne existence vektoru k_{β} tak, že

$$\partial_{\beta} T_A = k_{\beta} T_A. \quad (4,5)$$

Poněvadž však (viz 1,4) $g^{AB} T_A T_B = 1$ a tedy

$$\partial_{\alpha} (g^{AB} T_A T_B) = 2g^{AB} T_A \partial_{\alpha} T_B = 0,$$

plyne odtud a z (4,5)

$$g^{AB} T_A \eta_{\alpha} T_B = k_{\beta} g^{AB} T_A T_B = k_{\beta} = 0,$$

z čehož vyplývá podle (4,5)

$$\partial_{\beta} T_A = 0.$$

Tedy: $h_{\alpha\beta} \equiv 0 \Rightarrow \partial_{\alpha} T_A \equiv 0$. Tím je případ $p = 0$ ověřen.

b) Necht hodnost tensoru $h_{\alpha\beta}$ je v nějakém bodě variety V_n rovna 1 (t. j. $p = 1$). Pak aspoň jedna složka $h_{\alpha_1\beta_1}$ tensoru $h_{\alpha\beta}$ je různá od nuly. Podle (1,7) je však

$$h_{\alpha_1\beta_1} = B_{\alpha_1}^A \partial_{\beta_1} T_A \neq 0,$$

odkud plyne ihned, že $\partial_{\beta_1} T_A$ není pro každé A rovno nule. Je tedy hodnost matice (4,4) nejméně rovna 1 v uvažovaném bodě.

Podle Weingartenovy formule je (viz (1,10))

$$\partial_{\alpha} N^A = h_{\alpha\beta} a^{\beta\delta} B_{\delta}^A$$

a tedy

$$\partial_{[\alpha_1} N^{A_1} \partial_{\alpha_2]} N^{A_2} = h_{[\alpha_1|\beta_1]} h_{\alpha_2|\beta_2]} a^{\beta_1\delta_1} a^{\beta_2\delta_2} B_{\delta_1}^{A_1} B_{\delta_2}^{A_2} = 0,$$

neboť hodnost tensoru $h_{\alpha\beta}$ je podle předpokladu rovna 1. Má tedy matice (4,3) a podle věty (4,2) též matice (4,4) hodnost nejvýše 1. Je tedy hodnost matice (4,4) v uvažovaném bodě variety rovna právě jedné. Tím je případ $p = 1$ vyřízen.

c) Necht tensor $h_{\alpha\beta}$ má v bodě variety V_n hodnost p ($2 \leq p \leq n$). Potom existuje aspoň jeden subdeterminant řádu p .

$$h_{[\alpha_1|\beta_1]} h_{\alpha_2|\beta_2]} \dots h_{\alpha_p|\beta_p]} \neq 0 \quad (4,6)$$

v uvažovaném bodě variety V_n . Pak jest podle (1,7)

$$0 \neq h_{[\alpha_1|\beta_1]} h_{\alpha_2|\beta_2]} \dots h_{\alpha_p|\beta_p]} = B_{\beta_1}^{A_1} B_{\beta_2}^{A_2} \dots B_{\beta_p}^{A_p} \partial_{[\alpha_1} T_{|A_1]} \partial_{\alpha_2} T_{|A_2]} \dots \partial_{\alpha_p} T_{|A_p]}.$$

Odtud plyne ihned, že hodnost matice (4,4) je nejméně rovna p v uvažovaném bodě.

Z Weingartenovy formule (1,10) plyne pak

$$\begin{aligned} & \partial_{[\alpha_1} N^{A_1} \partial_{\alpha_2} N^{A_2} \dots \partial_{\alpha_p} N^{A_p} \partial_{\alpha_{p+1}} N^{A_{p+1}} = \\ & = h_{[\alpha_1|\beta_1]} h_{\alpha_2|\beta_2]} \dots h_{\alpha_p|\beta_p]} h_{\alpha_{p+1}|\beta_{p+1}} a^{\beta_1\delta_1} a^{\beta_2\delta_2} \dots \\ & \dots a^{\beta_{p+1}\delta_{p+1}} B_{\delta_1}^{A_1} B_{\delta_2}^{A_2} \dots B_{\delta_{p+1}}^{A_{p+1}} = 0, \end{aligned}$$

neboť podle předpokladu je hodnost tensoru $h_{\alpha\beta}$ rovna p .¹⁰⁾ Z předchozího plyne však ihned, že hodnost matice (4,3) a tedy podle věty (4,2), též hodnost matice (4,4) je nejvýše rovna p v uvažovaném bodě.

Je tedy hodnost matice (4,4) rovna právě p . Tím je věta dokázána.

Věta (4,4). *Nutná a postačující podmínka pro to, aby sférickým obrazem variety V_n byla varieta p -rozměrná V_p ($0 \leq p \leq n$) jest: hodnost druhého metrického tensoru $h_{\alpha\beta}$ variety V_n jest rovna p aspoň v jednom bodě variety V_n ¹¹⁾ a v žádném bodě této variety není větší než p .*

Tato věta je bezprostředním důsledkem vět (4,1), (4,2), (4,3). Je-li totiž hodnost tensoru $h_{\alpha\beta}$ rovna p (aspoň v jednom bodě, v žádném bodě však není větší než p), potom podle věty (4,3) má matice $(\partial_\alpha T_1, \partial_\alpha T_2, \dots, \partial_\alpha T_{n+1})$ a tedy podle věty (4,2) matice $(\partial_\alpha N^1, \partial_\alpha N^2, \dots, \partial_\alpha N^{n+1})$ tutéž hodnost.

Podle věty (4,1) je pak sférický obraz variety V_n varieta p -rozměrná. Nechť je, za druhé, sférickým obrazem variety V_n varieta p -rozměrná V_p . Potom podle věty (4,1) má matice (4,3) a podle věty (4,2) též matice (4,4) hodnost p . Podle věty (4,3) pak tensor $h_{\alpha\beta}$ má rovněž hodnost p .

Věta (4,5). *Nutná a postačující podmínka pro to, aby sférickým obrazem variety V_n byla varieta p -rozměrná V_p ($0 \leq p \leq n$), jest:*

$$K \equiv K \equiv \dots \equiv K \equiv 0 \quad (4,7a)$$

$(p+1) \quad (p+2) \quad (n)$

(t. j. ve všech bodech uvažovaného oboru variety V_n) a aspoň v jednom bodě variety V_n je

$$K \neq 0. \quad (4,7b)$$

(p)

Důkaz: Dokážeme nejdříve nutnost podmínky věty. Nechť tedy sférickým obrazem variety V_n je p -rozměrná varieta V_p ($0 \leq p \leq n$). Potom, podle věty (4,4) je hodnost tensoru $h_{\alpha\beta}$ nejvýše rovna p v bodech variety V_n . Z definičních rovnic (2,2b), (2,4) pak plyne ihned $K \equiv \dots \equiv K \equiv 0$ ve všech bodech variety V_n . Uvažujme nyní tři případy:¹²⁾

a) $p = 0$, t. j. $h_{\alpha\beta} \equiv 0$ ve všech bodech variety V_n . Potom podle definičních rovnic je $K = 1$ a tedy (4,7a), (4,7b) v tomto případě jsou správné.

¹⁰⁾ Je-li $p = n$, potom je zřejmé $h_{[\alpha_1|\beta_1], \dots, h_{[\alpha_{n+1}]\beta_{n+1}}} \equiv 0$, neboť provádíme alternaci přes více než n indexů.

¹¹⁾ Zde platí analogická poznámka poznámce 9).

¹²⁾ Ze spojitosti funkce K plyne ihned, že existuje celá oblast, kde $K \neq 0$.

¹³⁾ Pro důkaz nutnosti podmínky (4,7b).

b) $p = 1$; potom aspoň v jednom bode variety V_n je hodnota tensoru $h_{\alpha\beta}$ rovná jedné¹²). Nechť bod $x^A = x^A(\xi_0^A)$ [viz (1,1)] je bodem variety V_n takovým, že pro něj hodnota tensoru $h_{\alpha\beta}$ je rovná jedné. Potom v tomto bode aspoň jedna složka tohoto tensoru je různá od nuly, t. j.

$$(h_{\alpha\beta})_{\xi_0^A} \neq 0 \quad (4,8)$$

aspoň pro jednu dvojici indexů α, β .

Pro stručnost nechť symbol $(\)_0$ značí hodnotu veličiny v závorce v uvažovaném bode $x^A = x^A(\xi_0^A)$. Nechť $(n^\alpha)_0$ jsou jednotkové vzájemně kolmé vektory v hlavních směrech v uvažovaném bode.¹⁴) Vztáhneme nadplochu V_n k novým parametrům η^α takto zavedeným (což je lokálně možné)

$$\xi^\alpha = \xi_0^\alpha + (n^\alpha)_0 \eta^\alpha, \quad \alpha, \rho = 1, 2, \dots, n. \quad (4,9)$$

Zřejmě vyjadřují rovnice (4,9) v okolí bodu uvažovaného, ten v to počítaje, transformaci parametrů. Označme po levé straně hvězdičkou veličiny v parametrech η^α . Pak je v uvažovaném bode

$$(*a_{\alpha\beta})_0 = \left(\frac{\partial \xi^\nu}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \eta^\beta} a_{\alpha\beta}(\xi) \right)_0 = (a_{\nu\mu})_0 (n^\nu)_\alpha (n^\mu)_\beta, \quad (4,10a)$$

$$(*h_{\alpha\beta})_0 = \left(\frac{\partial \xi^\nu}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial \eta^\beta} h_{\alpha\beta}(\xi) \right)_0 = (h_{\nu\mu})_0 (n^\nu)_\alpha (n^\mu)_\beta. \quad (4,10b)$$

Odtud plyne ihned podle (2,5)

$$(*a_{\alpha\beta})_0 = 0 \text{ pro } \alpha \neq \beta, \quad (4,11a)$$

z (4,10b, a) a (2,1) pak

$$(*h_{\alpha\beta})_0 = (h_{\nu\mu})_0 (n^\nu)_\alpha (n^\mu)_\beta = (s)_0 (a_{\nu\mu})_0 (n^\nu)_\alpha (n^\mu)_\beta = (s^* a_{\alpha\beta})_0$$

a odtud

$$(*h_{\alpha\beta})_0 = 0 \text{ pro } \alpha \neq \beta. \quad (4,11b)$$

Ježto podle předpokladu je hodnota tensoru $h_{\alpha\beta}$ rovná jedné v uvažovaném bode, existuje v uvažovaném bode právě jediná složka

$$(*h_{ii})_0 \neq 0; \quad (*h_{\alpha\alpha})_0 = 0 \text{ pro } \alpha \neq i \quad (4,12a)$$

pro nějaký pevný index i ($i = 1, 2, \dots, n$). Ježto hodnota tensoru $a_{\alpha\beta}$ je pro body variety V_n rovná n a tedy též hodnota $(*a_{\alpha\beta})_0$ je rovná n , plyne z (4,11a)

$$(*a_{\alpha\alpha})_0 \neq 0 \text{ pro } \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

¹⁴) Takové vektory je možno vždy určit (viz začátek § 2).

Je tedy podle definičních rovnic (2,4), (2,2b)

$$(K)_{(1)} = (*K)_0 = (*h_{\lambda_1}^{\lambda_1})_0 = (*h_{\lambda_1 \alpha} a^{\alpha \lambda_1})_0;$$

odtud a z (4,12a), (4,12b) plyne (nesčítáno přes i)

$$(K)_{(1)} = (*h_{ii} a^{ii})_0 \neq 0.$$

Tím je nutnost podmínky (4,7b) pro případ $p = 1$ dokázána.

c) $2 \leq p \leq n$. Potom, podle věty (4,4), aspoň v jednom bodě $x^A = x^A(\xi_0^\nu)$ hodnost tensoru $h_{\alpha\beta}$ rovna p . Transformujeme opět parametry v okolí uvažovaného bodu podle (4,9). Potom platí jednak vztahy (4,11a, b), (4,12b) a dále je právě p složek $*h_{i_1 i_1}, *h_{i_2 i_2}, \dots, *h_{i_p i_p}$ v uvažovaném bodě různé od nuly, tedy ne méně ani více. Pak je však podle definičních rovnic (2,2b), (2,4)

$$\begin{aligned} (K)_{(p)} &= (*K)_{(p)} = (*h_{\lambda_1}^{\lambda_1} *h_{\lambda_2}^{\lambda_2} \dots *h_{\lambda_p}^{\lambda_p})_0 = \\ &= (*h_{[\lambda_1] \alpha_1} *h_{\lambda_2 \alpha_2} \dots *h_{\lambda_p \alpha_p} a^{\alpha_1 \lambda_1} a^{\alpha_2 \lambda_2} \dots a^{\alpha_p \lambda_p})_0 = \\ &= (*h_{i_1 i_1} *h_{i_2 i_2} \dots *h_{i_p i_p} a^{i_1 i_1} a^{i_2 i_2} \dots a^{i_p i_p})_0 \neq 0, \end{aligned} \quad (4,13)$$

při čemž nesčítáme přes indexy i_k ($k = 1, 2, \dots, p$). Tím je však nutnost podmínky (4,7b) pro případ $2 \leq p \leq n$ dokázána. Uvážíme-li ještě počátek důkazu (před případem a)), máme tak nutnost podmínky věty dokázanu.

Pro důkaz postačitelnosti podmínky věty předpokládejme, že pro varietu V_n platí podmínky (4,7a), (4,7b), t. j., že pro varietu V_n je $K \equiv K \equiv \dots \equiv K \equiv 0$ (ve všech jejích bodech) a že existuje aspoň jeden bod — označme jeho souřadnice ve V_n ξ_0^α — tak, že $(K)_{(p)} \neq 0$.¹²⁾

Podle definičních rovnic (2,2b), (2,4) je tedy

$$0 \neq (K)_{(p)} = \begin{cases} 1 & \text{pro } p = 0 \\ (h_{\alpha\beta} a^{\alpha\beta})_0 & \text{pro } p = 1 \\ (h_{[\alpha_1] \beta_1} h_{\alpha_2 \beta_2} \dots h_{\alpha_p \beta_p} a^{\alpha_1 \beta_1} a^{\alpha_2 \beta_2} \dots a^{\alpha_p \beta_p})_0 & \text{pro } 1 < p \leq n. \end{cases}$$

Odtud plyne ihned, že v uvažovaném bodě (o souřadnicích ξ_0^α) je hodnost tensoru $h_{\alpha\beta}$ nejméně rovna p . Je tedy, jak plyne ze spojitosti, hodnost tensoru $h_{\alpha\beta}$ větší nebo rovna p v určitém dostatečně malém okolí uvažovaného bodu. Dokážeme nyní dále, že je-li $K \equiv K \equiv \dots \equiv K \equiv 0$ (ve všech bodech variety), pak ani v jednom bodě variety V_n nemůže být hodnost tensoru $h_{\alpha\beta}$ větší než p ($0 \leq p \leq n$). Důkaz provedeme nepřímou, t. j. budeme předpokládat, že za platnosti (4,7a) existuje aspoň jeden bod

o souřadnicích ξ_1^α ve V_n tak, že v něm hodnost tensoru $h_{\alpha\beta}$ je rovna s , při čemž $p < s$. V úvahu tedy připadá $0 < s \leq n$ při $p = 0$, $1 < s \leq n$ pro $p = 1$, atd. ($s = n$ pro $p = n - 1$).

Vztáhneme varietu V_n (v okolí bodu ξ_1^α) k parametrům η^α transformačním vztahem

$$\xi^\alpha = \xi_1^\alpha + (n^\alpha)_1 \eta^\rho, \quad \alpha, \rho = 1, 2, \dots, n. \quad (4,15)$$

Potom v bodě o souřadnicích ξ_1^α by platilo (což je analogická úvaha již jsme dříve dospěli ke vztahům (4,10a, b), (4,11a, b) — označíme-li vlevo nahore hvězdičkou veličiny v tomto bodě

$$\begin{aligned} (*a_{\alpha\beta})_1 &= \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{pro } \alpha \neq \beta, \end{cases} \\ (*h_{\alpha\beta})_1 &= \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha \neq \beta, \\ (s)_1 & \text{pro } \alpha = \beta. \end{cases} \end{aligned} \quad (4,15)$$

Ježto předpokládáme, že hodnost tensoru $h_{\alpha\beta}$ v bodě o souřadnicích ξ_1^α je právě s , kde $p < s \leq n$, má matice z tensoru $*h_{\alpha\beta}$ v uvažovaném bodě, tedy podle (4,16) matice

$$\begin{vmatrix} (s)_1, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & (s)_1, & 0, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & (s)_1 \end{vmatrix}$$

hodnost právě s . To však znamená, že v uvažovaném bodě je právě s čísel $(s)_1, (s)_1, \dots, (s)_1$ z čísel $(s)_1, (s)_1, \dots, (s)_1$ od nuly různých. Není na újmu obecnosti předpokládat $(s)_1 \neq 0$ pro $i = 1, \dots, s$, $(s)_1 = 0$ pro $j = s + 1, \dots, n$. Podle (2,6) by však potom bylo v uvažovaném bodě

$$(K)_1 = (s \ s \ \dots \ s)_1 \neq 0,$$

což je ve sporu s předpokladem, že $(K)_1 = 0$ pro $p < s \leq n$.

Tím je dokázáno, že za předpokladu (4,7a) nemůže být v žádném bodě variety hodnost tensoru $h_{\alpha\beta}$ větší než p ($0 \leq p \leq n$). Ježto existují body, v nichž je tato hodnost rovna p (jak jsme na začátku důkazu postačitelnosti podmínky věty ukázali, plyne odtud podle (4,4), že sférickým obrazem variety V_n za platnosti (4,7a), (4,7b) je varieta p -rozměrná, jak jsme chtěli dokázat.

¹⁵⁾ Podobného obratu jsme použili při důkazu nutnosti podmínky věty.

Ke konci tohoto paragrafu připojme ještě tuto větu:

Věta (4,6). *Nutná a postačující podmínka pro to, aby varieta V_n v E_{n+1} byla n -rozměrnou nadrovinou v E_{n+1} jest*

$$K \equiv 0 \text{ pro } r = 1, 2, \dots, n. \quad (4,17)$$

(r)

Důkaz: Nadrovinou euklidovského prostoru E_{n+1} (s kartézskými pravouhlými souřadnicemi) nazýváme varietu n -rozměrnou V_n , pro jejíž body platí vztah

$$x^A C_A = C_0, \quad A = 1, 2, \dots, n+1, \quad (4,18)$$

kde C_A jsou konstanty z nichž aspoň jedna je od nuly různá, C_0 rovněž konstanta.

Předpokládejme nejdříve, že varieta V_n v E_{n+1} je nadrovinou, t. j. že mezi souřadnicemi bodů této variety platí vztah (4,18). Není na újmu obecnosti předpokládáme-li $C_{n+1} \neq 0$. Potom můžeme (4,18) přepsat na tvar:

$$x^{n+1} = c_0 - \sum_{k=1}^n c_k x^k, \quad \text{kde } c_k = \frac{C_k}{C_{n+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Položíme-li

$$x^1 = \xi^1, \quad x^2 = \xi^2, \dots, x^n = \xi^n, \quad (4,19a)$$

potom jest podle (4,18)

$$x^{n+1} = c_0 - \sum_{k=1}^n c_k \xi^k.$$

Rovnice (4,19a, b) představují parametrické vyjádření nadroviny (4,18). Pro nadrovinu (4,19a, b) jest

$$B_\alpha^A = \begin{cases} 0 & \text{pro } A \neq \alpha, \quad A = 1, 2, \dots, n; \quad \alpha = 1, 2, \dots, n; \\ 1 & A = \alpha, \quad A = 1, 2, \dots, n; \\ -c_\alpha & \text{pro } A = n+1, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (4,20)$$

tedy v každém případě je B_α^A konstantní. Podle definičních rovnic (1,4), (1,7) je pak

$$h_{\alpha\beta} = B_\alpha^A \partial_\beta T_A = -T_A \partial_\beta B_\alpha^A \equiv 0.$$

Z definičních rovnic (2,2b), (2,4) plyne pak ihned

$$K \equiv 0 \text{ pro } r = 1, 2, \dots, n. \quad (r)$$

Tím je nutnost podmínky věty dokázána.

Předpokládejme za druhé, pro důkaz postačitelnosti podmínky věty, že pro varietu V_n platí (4,17) v každém jejím bodě. Potom sférickým

obrazem této variety je varieta 0-rozměrná, t. j. bod (podle věty (4,5)). Podle věty (4,4) je pak pro tuto varietu

$$h_{\alpha\beta} \equiv 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n \quad (4,21)$$

ve všech jejích bodech.¹⁶⁾

Podle definičních rovnic (1,7) můžeme podmínku (4,21) přepsat na tvar

$$B_{\alpha}^A \partial_{\beta} T_A \equiv 0. \quad (4,22)$$

Poněvadž v naší definici variety V_n předpokládáme, že hodnost matice $(B_{\alpha}^1, B_{\alpha}^2, \dots, B_{\alpha}^{n+1})$ jest n v každém jejím bodě, je rovnicemi (4,22) určeno řešení $\partial_{\beta} T_A$ až na multiplikativní faktor. Avšak podle (1,4) je rovněž T_A řešením rovnic (4,22). Odtud plyne ihned existence elementu v_s tak, že

$$\partial_{\beta} T_A = v_{\beta} \cdot T_A. \quad (4,23)$$

Podle poslední z rovnic (1,4) je $g^{AB} T_A T_B = 1$. Odtud a z (4,23) plyne pak ihned

$$v_{\beta} = g^{AB} T_B \partial_{\beta} T_A = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^{\beta}} (g^{AB} T_A T_B) = 0,$$

t. j. $\partial_{\beta} T_A = 0 \Rightarrow T_A$ je konstantní. Avšak T_A vyhovuje (podle (1,4)) rovnicím

$$B_{\alpha}^A T_A = \frac{\partial x^A}{\partial \xi^{\alpha}} T_A = \frac{\partial}{\partial \xi^{\alpha}} (x^A T_A) = 0.$$

Odtud plyne

$$x^A T_A \equiv \text{konst.}$$

což je rovnice nadroviny v E_{n+1} .¹⁷⁾

Věta (4,7). *Je-li pro varietu V_n v E_{n+1} $K \equiv K \equiv 0$, potom je $K \equiv 0$ pro $r = 1, 2, \dots, n$.* (1) (2) (r)

Důkaz: Především víme z věty (4,6), že existují variety V_n v E_{n+1} pro něž $K \equiv 0$, $K \equiv 0$. Mějme tedy varietu V_n v E_{n+1} , pro niž (1) (2)

$$K \equiv K \equiv 0. \quad (4,24a)$$

Potom podle (2,6)

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n \equiv 0,$$

$$s_1 s_2 + s_1 s_3 + \dots + s_1 s_n + s_2 s_3 + \dots + s_2 s_n + s_3 s_4 + \dots + s_{n-1} s_n \equiv 0 \quad (4,24b)$$

¹⁶⁾ Jde o varietu ve smyslu zavedeném v § 1, t. j. uvažujeme platnost (aspoň lokální) předpokladů uvedených v § 1.

¹⁷⁾ Ježto $g^{AB} T_A T_B = 1$, není T_A identicky rovno nule.

ve všech bodech variety. Pak je

$$\begin{aligned} K^2 - 2K &= \underset{(1)}{(s + s + \dots + s)^2} - 2(\underset{(2)}{s s} + \underset{1\ 2}{s s} + \dots + \underset{n-1\ n}{s s}) = \\ &= \sum_{i,k=1}^n s_i s_k - \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n s_i s_k = \sum_{i=1}^n s_i^2. \end{aligned}$$

Odtud a z (4,24a) plyne pak ihned $\sum_{i=1}^n s_i^2 = 0$, což implikuje $s_i = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n$ a tedy, podle (2,6), $K \equiv 0$ pro $r = 1, 2, \dots, n$.

Příklad. Systém rovnic

$$\begin{aligned} x^1 &= R \sin \xi^1 \sin \xi^2 \sin \xi^3 \dots \sin \xi^p \\ x^A &= R \cos \xi^{A-1} \sin \xi^A \dots \sin \xi^p \text{ pro } A = 2, 3, \dots, p \\ x^{p+1} &= R \cos \xi^p \\ x^A &= \xi^{A-1} \text{ pro } A = p+2, p+3, \dots, n+1,^{18)} \end{aligned} \quad (A)$$

kde $R > 0$ je konstanta, $1 \leq p \leq n$, definuje (jsou-li x^A pravoúhlé kartézské souřadnice v E_{n+1}) n -rozměrnou varietu V_n v E_{n+1} .

Omezíme-li se na $\xi^\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ pro $\alpha = 1, 2, \dots, p$, ξ^α libovolné pro $\alpha = p+1, p+2, \dots, n+1$, potom máme pro elementy $B_\alpha^A \equiv \frac{\partial x^A}{\partial \xi^\alpha}$:

$$\begin{aligned} B_\alpha^1 &= \begin{cases} 0 & \text{pro } p < \alpha \leq n \\ x^1 \cotg \xi^\alpha & \text{pro } 1 \leq \alpha \leq p \end{cases} \\ B_\alpha^A &= \begin{cases} 0 & \text{pro } 1 \leq \alpha < A-1, p < \alpha \leq n \\ -x^A \tg \xi^{A-1} & \text{pro } \alpha = A-1 \\ x^A \cotg \xi^\alpha & \text{pro } A \leq \alpha \leq p \end{cases} \Bigg\} \begin{matrix} \text{a pro} \\ A = 2, 3, \dots, p. \end{matrix} \quad (B) \\ B_\alpha^{p+1} &= \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha \neq p, \\ -x^{p+1} \tg \xi^p & \text{pro } \alpha = p. \end{cases} \\ B_\alpha^A &= \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha \neq A-1 \\ 1 & \text{pro } \alpha = A-1 \end{cases} \Bigg\} \text{a pro } A = p+2, p+3, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Sestavíme-li elementy B_α^A , popsané v (B) v matici $(B_\alpha^1, B_\alpha^2, \dots, B_\alpha^{n+1})^{19)}$ a vezmeme-li n -řadový determinant této matice tak, že vynecháme první sloupec a označíme-li jeho hodnotu D_1 , potom se výpočtem ze vztahů (A), (B) snadno přesvědčíme, že

$$D_1 = (-1)^p R^p \sin \xi^1 \sin^2 \xi^2 \sin^3 \xi^3 \dots \sin^p \xi^p,$$

¹⁸⁾ Pro $p = n$ odpadá čtvrtá z definičních rovnic (A).

¹⁹⁾ Viz (1,2).

tedy za našich předpokladů (t. j. $\xi^\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ pro $\alpha \equiv 1, \dots, p$, $R > 0$) je $D_1 \neq 0$; hodnost matice $(B_\alpha^1, B_\alpha^2, \dots, B_\alpha^{n+1})$ v uvažované oblasti je rovna n a tedy v této oblasti definují rovnice (A) varietu n rozměrnou.²⁰⁾ Pro první metrický tensor $a_{\lambda\mu}$ naší variety dostaneme ze vztahů (1,3), (B)

$$\begin{aligned} a_{\alpha\alpha} &= R^2 \sin^2 \xi^{\alpha+1} \sin^2 \xi^{\alpha+2} \dots \sin^2 \xi^p \text{ pro } \alpha = 1, \dots, p-1 \\ a_{pp} &= R^2 \\ a_{\alpha\alpha} &= 1 \text{ pro } \alpha = p+1, \dots, n+1 \\ a_{\alpha\beta} &= 0 \text{ pro } \alpha \neq \beta, \alpha, \beta = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (C)$$

Po delším výpočtu dostaneme pro druhý metrický tensor $h_{\alpha\beta}$ [z definičních rovnic (1,7) a ze vztahů (1,4), (1,6), (B)]

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} &= 0, \text{ je-li aspoň jeden index větší než } p. \\ h_{\alpha\beta} &= (-1)^{n-p} R^{-1} a_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (D)$$

[Tedy zřejmě $h_{\alpha\beta} = 0$ pro $\alpha \neq \beta$ podle (C)].

Ze vztahů (C), (D) a definičních rovnic (2,2b) plyne pak snadno

$$h_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \beta > p, \alpha \text{ libovolné} \\ 0 & \text{pro každé } \alpha \neq \beta \\ (-1)^{n-p} R^{-1} & \text{pro } \alpha = \beta, 1 \leq \beta \leq p. \end{cases} \quad (E)$$

Z (E) a z definičních rovnic (2,4) dostaneme

$$\begin{aligned} K_{(r)} &= (-1)^{(n-p)r} R^{-r} \binom{p}{r} \text{ pro } r = 1, 2, \dots, p \\ K_{(r)} &= 0 \text{ pro } r = p+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (F)$$

Z rovnic (F) plyne, že varieta V_n , definovaná rovnicemi (A) (s uvažovaným definičním oborem), má sférický obraz p -rozměrný. Snadnými limitními přechody a vhodnou transformací souřadnic se dá tento výsledek zobecnit na celý existenční obor funkcí x^A definovaných v (A).

Z předchozího příkladu plynou ihned dva speciální případy:

a) pro $p = n$ dostaneme z rovnic (F)

$$K_{(r)} = \binom{n}{r} R^{-r} \text{ pro } r = 1, \dots, n.$$

n -tý skalár křivosti této variety je $K_{(n)} = R^{-n}$. Varieta je nadkoulí ve E_{n+1} .

²⁰⁾ Viz počátek důkazu věty (4,1).

b) Pro $n = 2, p = 1$ redukuje se rovnice (A) na tvar

$$x^1 = R \sin \xi^1, \quad x^2 = R \cos \xi^1, \quad x^3 = \xi^2,$$

což jsou rovnice pro rotační válec v E_3 . Zde je $K = 0$, $K = -R^{-1}$.²¹⁾
(2) (1)

5. Sférické skreslení hlavních vektorů a p - vektorů.

Další význam skalárů K .

(r)

Budiž dáno n funkcí proměnné t

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(t), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (5,1)$$

a nechť tyto funkce mají tyto vlastnosti

1. pro $t = t_0$ leží bod o souřadnicích $\xi_0^\alpha = \xi^\alpha(t_0)$ na varietě V_n , definované v (1,1);²²⁾
2. existuje otevřený interval (t_1, t_2) obsahující uvnitř bod t_0 , takže pro $t \in (t_1, t_2)$ existují spojitě derivace

$$v^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{dt}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n; \quad (5,2)$$

3. v bodě ξ_0^α je hodnota matice $(v^1, v^2, \dots, v^n)$ rovna jedné.

Za těchto předpokladů představují rovnice (5,1), v dostatečně malém okolí bodu ξ_0^α křivku na nadploše V_n v E_{n+1} [V_n je definována rovnicemi (1,1)]. Tato křivka prochází bodem ξ_0^α a má v tomto bodě zcela určitou tečnu. Ze spojitosti funkcí v^α plyne existence tečny křivky ve všech jejích bodech v dostatečně malém okolí bodu ξ_0^α .

V dalším se omezíme na takové okolí bodu ξ_0^α ve V_n , aby tam platily jednak předpoklady z § 1, jednak hoření tři předpoklady 1, 2, 3.

V kartézských pravoúhlých souřadnicích v E_{n+1} je tedy rovnice křivky (1,1)

$$x^A = x^A[\xi^\alpha(t)], \quad A = 1, \dots, n+1; \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (5,3)$$

Sférický obraz křivky (5,3) je potom, podle (4,2),

$${}^s x^A = x^A + N^A[\xi^\alpha(t)]. \quad (5,4)$$

Každému bodu křivky (5,3) (v uvažovaném oboru) je tak jednoznačně přiřazen bod ${}^s x^A$ sférického obrazu křivky. Označíme-li v^A tečný vektor křivky (5,3) v E_{n+1} , ${}^s v^A$ tečný vektor jejího sférického obrazu (5,4) v E_{n+1} , pak je podle (5,3), (5,2), (1,2), (5,4), (1,10), (2,2b)

²¹⁾ Poslední vztah zdánlivě nesouhlasí (znamení!) se vztahem pro střední křivost. Příčina je v tom, že u mnohých autorů je na pravé straně v definiční rovnici (1,7) pro druhý metrický tensor variety znamení — (minus).

²²⁾ Máme na mysli neustále ten obor, kde platí předpoklady uvedené v § 1.

$$v^A = B_\alpha^A v^\alpha, \quad (5,5)$$

$${}^s v^A = (\partial_\alpha N^A) v^\alpha = B_\beta^A h_\alpha^\beta v^\alpha. \quad (5,6)$$

Pro míry vektorů v^A , ${}^s v^A$ dostaneme podle (1,12), (1,3), (5,5)

$$\begin{aligned} + \sqrt{m(v^A)} &= + \sqrt{g_{AB} v^A v^B} = + \sqrt{a_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta}, \\ + \sqrt{m({}^s v^A)} &= + \sqrt{g_{AB} {}^s v^A {}^s v^B} = + \sqrt{a_{\gamma\delta} h_\alpha^\gamma h_\beta^\delta v^\alpha v^\beta} = \\ &= + \sqrt{h_{\delta\alpha} a^{\delta\epsilon} h_{\epsilon\beta} v^\alpha v^\beta}. \end{aligned} \quad (5,5a)$$

Zavedeme-li ještě označení

$${}^s a_{\alpha\beta} = h_{\alpha\gamma} a^{\gamma\delta} h_{\delta\beta} = h_\alpha^\delta h_{\delta\beta} {}^{23}) \quad (5,7)$$

potom

$$+ \sqrt{m({}^s v^A)} = + \sqrt{{}^s a_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta}. \quad (5,5b)$$

Pro úhel vektorů ${}^4 v$, ${}^s v^A$ (${}^s v^A$ není v uvažovaném bodě vektor nula) dostaneme z (1,13), (5,5), (1,3), (5,5a), (5,5b), (2,2b)

$$\cos\vartheta = \frac{g_{AB} B_\alpha^A v^\alpha B_\gamma^B h_\beta^\gamma v^\beta}{+ \sqrt{m(v^A)} \cdot m({}^s v^A)} = \frac{a_{\alpha\gamma} h_\beta^\gamma v^\alpha v^\beta}{+ \sqrt{m(v^A)} m({}^s v^A)},$$

tedy

$$\cos\vartheta = \frac{h_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta}{+ \sqrt{m(v^A)} m({}^s v^A)}. \quad (5,8)$$

(${}^s v^A$ je nenulový vektor).

Definice 2. *Sférickým skreslením tečného vektoru křivky (5,3) na ploše V_n v E_{n+1} (v bodě křivky) nazýváme skalár:*

$$\kappa = \varepsilon \sqrt{\frac{m({}^s v^A)}{m(v^A)}} \quad (5,9)$$

kde $\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{je-li } \cos\vartheta \geq 0 \text{ nebo není-li } \cos\vartheta \text{ definováno} \\ -1, & \text{je-li } \cos\vartheta < 0. \end{cases}$

Poznámka: Je-li $\xi_0^\alpha = \xi^\alpha(t_0)$ bodem křivky (5,3), potom oblouk křivky od bodu $\xi_0^\alpha = \xi^\alpha(t_0)$ do bodu $\xi^\alpha = \xi^\alpha(t)$ jest

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{m(v^A)} dt.$$

Sférickým obrazem tohoto oblouku je pak oblouk křivky (5,4) v těchž mezích, t. j.

$${}^s s = \int_{t_0}^t \sqrt{m({}^s v^A)} dt.$$

²³⁾ Je tedy ${}^s a_{\alpha\beta}$ metrickým tensorem sférického zobrazení.

Odtud plyne ihned

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s_s}{s} = \lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{\frac{m(s v^A)}{m(v^A)}} = |\kappa|_0.$$

Budiž nyní n^a , $a = 1, 2, \dots, n$, n jednotkových vzájemně kolmých vektorů v hlavních směrech v bodech variety V_n v E_{n+1} .²⁴⁾ Potom systémem obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{d\xi^a}{d\sigma} = n^a(\xi^v), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad a \in 1, 2, \dots, n \quad (5,10a)$$

(podle existenčního teorému Cauchyova) je při daném bodě ξ_0^a a hlavním směru v něm $(n^a)_0$ jednoznačně (v dostatečně malém okolí bodu ξ_0^a) určena křivka H ve V_n $*\xi^a = \xi^a(\sigma)$, která má vlastnosti 1, 2, 3 uvedené na počátku tohoto paragrafu a jejíž body mají v E_{n+1} kartézské pravoúhlé souřadnice

$$x^A = x^A[\xi^a(\sigma)], \quad A = 1, 2, \dots, n+1.$$

Snadno se přesvědčíme z (5,10a), že parametr σ křivky (5,10b) je jejím metrickým obloukem. Tečný vektor této křivky leží (v každém bodě existenčního oboru) ve směru hlavním. Křivka (5,10b) se nazývá *křivkou hlavní*. Tímto způsobem můžeme dojít k n hlavním křivkám H , $a = 1, 2, \dots, n$, jdoucích bodem ξ_0^a variety V_n , definovaných v určitém okolí bodu ξ_0^a .

Věta (5,1). *Sférické zkreslení křivky hlavní (5,10b)²⁵⁾ je rovno příslušné hlavní křivosti s .*

Důkaz: Pro míru $m(n^a)$ plyne ihned podle (1,11) $m(n^a) = 1$; pro míru tečného vektoru $s n^a$ sférického obrazu hlavní křivky H dostaneme podle (5,5b), (5,7), (2,1)

$$+ \sqrt{m(s n^a)} = + \sqrt{h_{\alpha\gamma} a^\gamma h_{\delta\beta} n^\alpha n^\beta} = + \sqrt{s n^\delta h_{\delta\beta} n^\beta} = \sqrt{(s)^2} = |s|.$$

Pro úhel ϑ vektorů n^a a $s n^a$ v odpovídajících si bodech máme podle (5,8), (2,1)

²⁴⁾ Viz počátek § 2.

²⁵⁾ Místo „sférického zkreslení tečného vektoru“ uijeme stručnějšího označení „sférické zkreslení křivky v bodě“.

$$\cos \vartheta = \frac{h_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta}{\left| \frac{a}{a} \right|} = \frac{s}{\left| \frac{s}{a} \right|} = s \frac{a}{a}; \quad (s \neq 0);$$

tedy pro sférické zkreslení κ křivky hlavní H [podle předchozího a podle (5,9)].

$$\kappa = s. \quad (5,11)$$

Věta (5,2). *Hodnota skaláru K , definovaného v (2,4), v bodě nadplochy V_n je rovna součtu sférických zkreslení n orthogonálních hlavních čar v tomto bodě.*

Důkaz plyne ihned z věty (5,1) a vztahu (2,6).

Uvažujme nyní p hlavních čar $H, H, \dots, H$ ($2 \leq p \leq n$) jdoucích bodem variety V_n s tečnými jednotkovými vektory $n^\alpha, i = 1, 2, \dots, p$, vzájemně kolmými. Složky těchto vektorů v E_{n+1} jsou podle (5,5)

$$n_{(i)}^A = B_{\alpha(i)}^A n^\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (5,12)$$

Vektory $n_{(i)}^A$ ($i = 1, 2, \dots, p$) tvoří v E_{n+1} p -vektor o složkách

$$\begin{bmatrix} n^{A_1} n^{A_2} \dots n^{A_p} \\ 1 \quad 2 \quad \dots \quad p \end{bmatrix}. \quad (5,13)$$

Pro modul tohoto p -vektoru dostaneme podle (1,14a) resp. (1,14b) resp. (1,14b)

$$\begin{aligned} m(p) &= g_{[A_1|B_1]} g_{[A_2|B_2]} \dots g_{[A_p|B_p]} n_{1 \quad 1}^{A_1} n_{2 \quad 2}^{A_2} \dots n_{p \quad 1}^{A_p} n_{1 \quad 2}^{B_1} n_{2 \quad 2}^{B_2} \dots n_{p \quad p}^{B_p} = \\ &= g_{[A_1|A_1]} g_{[A_2|A_2]} \dots g_{[A_p|A_p]} (n_{1 \quad 1}^{A_1} n_{2 \quad 2}^{A_2} \dots n_{p \quad p}^{A_p})^2 = 1. \end{aligned}$$

Každému vektoru $n_{(i)}^A$ ($i = 1, 2, \dots, p$) je jednoznačně přiřazen vektor ${}^s n_{(i)}^A$, tečný jednotkový vektor sférického obrazu křivky H v odpovídajícím bodě. Při sférickém zobrazení je pak p -vektoru (5,13) jednoznačně přiřazen p -vektor

$$\begin{bmatrix} {}^s n^{A_1} {}^s n^{A_2} \dots {}^s n^{A_p} \\ 1 \quad 2 \quad \dots \quad p \end{bmatrix}, \quad (5,15)$$

kde pro ${}^s n_{(i)}^A$ platí podle (5,6)

$${}^s n_{(i)}^A = B_{\beta(i)}^A h_{\alpha(i)}^\beta n^\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (5,16)$$

Pro modul p -vektoru (5,15), označíme-li tento p -vektor symbolem ${}^s p$, dostaneme podle (1,14b), (1,3), (5,16), (5,7), (2,1)

$$\begin{aligned}
m^{(sp)} &= g_{[A_1|B_1]} g_{A_2|B_2]} \dots g_{A_p]B_p} s n_{12}^{A_1} s n_{12}^{A_2} \dots s n_{12}^{A_p} s n_{12}^{B_1} s n_{12}^{B_2} \dots s n_{12}^{B_p} = \\
&= g_{[A_1|B_1]} g_{A_2|B_2]} \dots g_{A_p]B_p} B_{\beta_1}^{A_1} B_{\beta_2}^{A_2} \dots B_{\beta_p}^{A_p} B_{\gamma_1}^{B_1} B_{\gamma_2}^{B_2} \dots B_{\gamma_p}^{B_p} n_{12}^{\alpha_1} n_{12}^{\alpha_2} \dots n_{12}^{\alpha_p} n_{12}^{\delta_1} n_{12}^{\delta_2} \dots n_{12}^{\delta_p} \cdot \\
&\quad \cdot h_{\alpha_1}^{\beta_1} h_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots h_{\alpha_p}^{\beta_p} h_{\delta_1}^{\gamma_1} h_{\delta_2}^{\gamma_2} \dots h_{\delta_p}^{\gamma_p} = a_{[\beta_1|\gamma_1]} a_{\beta_2|\gamma_2]} \dots a_{\beta_p|\gamma_p} h_{\alpha_1}^{\beta_1} h_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots h_{\alpha_p}^{\beta_p} \cdot \\
&\quad \cdot h_{\delta_1}^{\gamma_1} h_{\delta_2}^{\gamma_2} \dots h_{\delta_p}^{\gamma_p} n_{12}^{\alpha_1} n_{12}^{\alpha_2} \dots n_{12}^{\alpha_p} n_{12}^{\delta_1} n_{12}^{\delta_2} \dots n_{12}^{\delta_p} = \\
&= h_{[\beta_1|\delta_1]} h_{\beta_2|\delta_2]} \dots h_{\beta_p|\delta_p} h_{\alpha_1}^{\beta_1} h_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots h_{\alpha_p}^{\beta_p} n_{12}^{\alpha_1} n_{12}^{\alpha_2} \dots n_{12}^{\alpha_p} n_{12}^{\delta_1} n_{12}^{\delta_2} \dots n_{12}^{\delta_p} = \\
&= h_{[\beta_1|\delta_1]} h_{\beta_2|\delta_2]} \dots h_{\beta_p|\delta_p} s s \dots s n_{12}^{\beta_1} n_{12}^{\beta_2} \dots n_{12}^{\beta_p} n_{12}^{\delta_1} n_{12}^{\delta_2} \dots n_{12}^{\delta_p}.
\end{aligned}$$

Odtud plyne pak snadno

$$m^{(sp)} = \frac{(s s \dots s)^2}{12 \quad p} \quad (5,17)$$

Pro míry p -vektorů (5,13), (5,15) plyne pak z (1,15), (5,14),

$$+ \sqrt{m(p)} = 1, \quad + \sqrt{m^{(sp)}} = \frac{|s s \dots s|}{12 \quad p}. \quad (5,18)$$

Pro úhel ϑ p -vektorů (5,13), (5,15) plyne z (1,16), (5,17), (5,18)

$$\begin{aligned}
\cos \vartheta &= \frac{g_{[A_1|B_1]} g_{A_2|B_2]} \dots g_{A_p]B_p} n_{12}^{A_1} n_{12}^{A_2} \dots n_{12}^{A_p} s n_{12}^{A_1} s n_{12}^{A_2} \dots s n_{12}^{A_p}}{|s s \dots s|}, \quad (5,19a) \\
&\quad \frac{s s \dots s}{12 \quad p} \neq 0.
\end{aligned}$$

Pro čitatele na pravé straně v (5,19a) dostaneme podle (5,16), (1,3), (2,1), (5,12)

$$\begin{aligned}
&g_{[A_1|B_1]} g_{A_2|B_2]} \dots g_{A_p]B_p} n_{12}^{A_1} n_{12}^{A_2} \dots n_{12}^{A_p} s n_{12}^{A_1} s n_{12}^{A_2} \dots s n_{12}^{A_p} = \\
&= g_{[A_1|B_1]} g_{A_2|B_2]} \dots g_{A_p]B_p} B_{\alpha_1}^{A_1} B_{\alpha_2}^{A_2} \dots B_{\alpha_p}^{A_p} B_{\gamma_1}^{B_1} B_{\gamma_2}^{B_2} \dots B_{\gamma_p}^{B_p} h_{\beta_1}^{\gamma_1} h_{\beta_2}^{\gamma_2} \dots h_{\beta_p}^{\gamma_p} \cdot \\
&\quad \cdot n_{12}^{\alpha_1} n_{12}^{\alpha_2} \dots n_{12}^{\alpha_p} n_{12}^{\beta_1} n_{12}^{\beta_2} \dots n_{12}^{\beta_p} = a_{[\alpha_1|\gamma_1]} a_{\alpha_2|\gamma_2]} \dots a_{\alpha_p|\gamma_p} h_{\beta_1}^{\gamma_1} h_{\beta_2}^{\gamma_2} \dots h_{\beta_p}^{\gamma_p} \cdot \\
&\quad \cdot n_{12}^{\alpha_1} n_{12}^{\alpha_2} \dots n_{12}^{\alpha_p} n_{12}^{\beta_1} n_{12}^{\beta_2} \dots n_{12}^{\beta_p} = h_{[\alpha_1|\beta_1]} h_{\alpha_2|\beta_2]} \dots h_{\alpha_p|\beta_p} \cdot \\
&\quad \cdot n_{12}^{\alpha_1} n_{12}^{\alpha_2} \dots n_{12}^{\alpha_p} n_{12}^{\beta_1} n_{12}^{\beta_2} \dots n_{12}^{\beta_p} = s s \dots s;
\end{aligned}$$

tedy podle předchozího a (5,19a)

$$\cos \vartheta = \frac{\frac{s s \dots s}{12 \quad p}}{|s s \dots s|} = \text{sg}(s s \dots s) \text{ při } \frac{s s \dots s}{12 \quad p} \neq 0. \quad (5,19b)$$

Definice 3. Buďtež $v_1^A, v_2^A, \dots, v_p^A, 2 \leq p \leq n$ lineárně nezávislé vektory definované v bodě variety V_n v E_{n+1} . Potom sférickým zkreslením p -vektoru o složkách $v_1^A v_2^A \dots v_p^A$ nazýváme skalár

$$\kappa(p) = \frac{\varepsilon \sqrt{m(p)}}{+ \sqrt{m(s p)}}, \quad (5,20a)$$

kde $+ \sqrt{m(p)}$ je mírou p -vektoru $v_1^A v_2^A \dots v_p^A$, $+ \sqrt{m(s p)}$ je mírou p -vektoru $s v_1^A s v_2^A \dots s v_p^A$ přiřazeného původnímu p -vektoru při sférickém zobrazení v příslušném bodě²⁶⁾ a dále

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{je-li cosinus úhlu obou } p\text{-vektorů větší nebo roven nule,} \\ & \text{nebo není-li definován,} \\ -1 & \text{je-li cosinus úhlu obou } p\text{-vektorů menší než nula.} \end{cases} \quad (5,20b)$$

Věta (5,3). Buďtež $H_{(1)}, H_{(2)}, \dots, H_{(p)} (2 \leq p \leq n)$ hlavní křivky (orthogonální) jdoucí bodem variety $V_n, n^{\alpha}, i = 1, 2, \dots, p$ jejich jednotkové tečné vektory v tomto bodě. Tyto tečné vektory definují v tomto bodě hlavní p -vektor ve složkách $n^{\alpha_1} n^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_p}$. Sférické zkreslení tohoto hlavního p -vektoru jest

$$\kappa(p) = s_1 s_2 \dots s_p. \quad (5,21)$$

Důkaz: Z definice 3 a vztahů (5,18), (5,19b) plyne ihned (5,21).

Věta (5,4). Hodnota skaláru $K_{(p)} (1 \leq p \leq n)$, definovaného v (2,4) v bodě nadplochy V_n v E_{n+1} je rovna součtu sférických zkreslení všech hlavních p -vektorů v tomto bodě utvořených z tečných vektorů n -hlavních čar (orthogonálních) jdoucích tímto bodem.

Důkaz plyne pro $p = 1$ z věty (5,2); pro $2 \leq p \leq n$ pak bezprostředně z věty (5,3) a vztahů (2,6).

6. Geometrický význam skaláru $K_{(n)}$

Mějme n lineárně nezávislých vektorů

$$v_1^{\alpha}, v_2^{\alpha}, \dots, v_n^{\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (6,1)$$

²⁶⁾ viz (5, 6,)

definovaných v bodě variety V_n (vnořené v E_{n+1}). V E_{n+1} jsou pak složky těchto vektorů

$$v^A = B_{\alpha}^A v^{\alpha}, \text{ kde } A = 1, 2, \dots, n+1, \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (6,2)$$

Vektory v^A definují v uvažovaném bodě variety V_n n -vektor o složkách

$$\begin{matrix} v^{A_1} v^{A_2} \dots v^{A_n}, \\ [1 \quad 2 \quad \dots \quad n] \end{matrix} \quad (6,3)$$

kde A_i probíhá přirozená čísla od 1 do $n+1$.

Pro modul $m(n)$ n -vektoru (6,3) máme podle (6,2), (1,3), (1,14b)

$$\begin{aligned} m(n) &= g_{[A_1|B_1|} g_{A_2|B_2]} \dots g_{A_n|B_n]} v^{A_1}_{1} v^{A_2}_{2} \dots v^{A_n}_{n} v^{B_1}_{1} v^{B_2}_{2} \dots v^{B_n}_{n} = \\ &= a_{[\alpha_1|\beta_1|} a_{\alpha_2|\beta_2]} \dots a_{\alpha_n|\beta_n]} v^{\alpha_1}_{1} v^{\alpha_2}_{2} \dots v^{\alpha_n}_{n} v^{\beta_1}_{1} v^{\beta_2}_{2} \dots v^{\beta_n}_{n}. \end{aligned} \quad (6,4a)$$

Označíme-li

$$\left. \begin{aligned} [a_{\alpha\beta}] &= \text{determinant } n\text{-tého stupně ze složek prvního metric-} \\ &\text{kého tensoru variety } V_n, \\ [v] &= \text{determinant } [v^{\alpha}_1 v^{\alpha}_2 \dots v^{\alpha}_n], \end{aligned} \right\} \quad (6,5)$$

pak z (6,4a) a z věty o násobení determinantů plyne snadno

$$m(n) = [a_{\alpha\beta}] \cdot ([v])^2. \quad (6,4b)$$

V uvažovaném bodě variety V_n jsou sférickým zobrazením vektorům v^A (viz (6,2)), $i = 1, 2, \dots, n$ přiřazeny vektory ${}^s v^A$ podle vztahů (5,6); tedy n -vektoru (6,3) je přiřazen n -vektor o složkách

$$\begin{matrix} {}^s v^{A_1} {}^s v^{A_2} \dots {}^s v^{A_n}, \\ [1 \quad 2 \quad \dots \quad n] \end{matrix} \quad (6,6)$$

pro jehož modul $m({}^s n)$ dostaneme z (1,14b), (5,6), (5,7)

$$\begin{aligned} m({}^s n) &= g_{[A_1|B_1|} g_{A_2|B_2]} \dots g_{A_n|B_n]} {}^s v^{A_1}_{1} {}^s v^{A_2}_{2} \dots {}^s v^{A_n}_{n} {}^s v^{B_1}_{1} {}^s v^{B_2}_{2} \dots {}^s v^{B_n}_{n} = \\ &= a_{[\alpha_1|\gamma_1|} a_{\alpha_2|\gamma_2]} \dots a_{\alpha_n|\gamma_n]} h^{\gamma_1}_{\beta_1} h^{\gamma_2}_{\beta_2} \dots h^{\gamma_n}_{\beta_n} h^{\alpha_1}_{\delta_1} h^{\alpha_2}_{\delta_2} \dots h^{\alpha_n}_{\delta_n} v^{\beta_1}_{1} v^{\beta_2}_{2} \dots v^{\beta_n}_{n} v^{\delta_1}_{1} v^{\delta_2}_{2} \dots v^{\delta_n}_{n} = \\ &= {}^s a_{[\delta_1|\beta_1|} {}^s a_{\delta_2|\beta_2]} \dots {}^s a_{\delta_n|\beta_n]} v^{\delta_1}_{1} v^{\delta_2}_{2} \dots v^{\delta_n}_{n} v^{\beta_1}_{1} v^{\beta_2}_{2} \dots v^{\beta_n}_{n}. \end{aligned} \quad (6,7a)$$

Označíme-li

$[{}^s a_{\alpha\beta}]$ = determinant n -tého stupně z metrického (6,8) tensoru sférického zobrazení, potom můžeme s použitím věty o násobení determinantů a vzhledem k (6,5) psát

$$m({}^s n) = [{}^s a_{\alpha\beta}] \cdot ([v])^2. \quad (6,7b)$$

Dosadíme-li do (6,7b) za $([v])^2$ z (6,4b), dostaneme po úpravě

$$\frac{m^{(s)n}}{m(n)} = \frac{[{}^s a_{\alpha\beta}]}{[a_{\alpha\beta}]} \quad (6,9a)$$

Ježto $a_{\alpha\beta} a^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$, plyne odtud ihned $\|a^{\alpha\beta}\| = (\|a_{\alpha\beta}\|)^{-1}$, takže můžeme (6,9a) psát též ve tvaru

$$\frac{m^{(s)n}}{m(n)} = [{}^s a_{\alpha\beta}] \cdot [a^{\alpha\beta}]. \quad (6,9b)$$

Podle (5,7) a z věty o násobení determinantů dostaneme snadno

$$[{}^s a_{\alpha\beta}] \cdot [a^{\alpha\beta}] = [h_{\alpha\gamma}] \cdot [h_\beta^\gamma] \cdot [a^{\alpha\beta}] = ([h_\beta^\gamma])^2. {}^{27)}$$

Ježto determinant $\|h_\beta^\gamma\|$ můžeme psát též v jiném označení $h_{[\lambda_1}^{\lambda_1} h_{\lambda_2}^{\lambda_2} \dots h_{\lambda_n}^{\lambda_n]}$, plyne z předchozího a ze vztahů (2,4), (6,9b)

$$\frac{m^{(s)n}}{m(n)} = \frac{(K)^2}{(n)}.$$

Odtud a z definice 3 plyne ihned tato věta:

Věta (6,1). *Sférické skreslení libovolného nenulového n -vektoru v bodě variety V_n vnořené v E_{m+1} je v absolutní hodnotě rovno hodnotě $|K|$ v tomto bodě.*

Speciální případ věty (6,1) nás vede k názorné geometrické interpretaci skaláru K , jež je zobecněním známého případu $n = 2$ (t. j. pro plochu v E_3).

Nechť nadplocha V_n vnořená v E_{n+1} je definována parametrickými rovnicemi (1,1). V libovolném bodě variety V_n uvažujme n -vektor, vytvořený elementárními tečnými vektory $\delta_{(i)}^{\xi^\alpha}$, $i = 1, 2, \dots, n$ parametrických křivek v tomto bodě. Elementární tečný vektor $\delta_{(i)}^{\xi^\alpha}$ i -té parametrické křivky má tedy složky ve V_n

$$\delta_{(i)}^{\xi^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha \neq i, \\ d\xi^i & \text{pro } \alpha = i. \end{cases} \quad (6,10)$$

Pro uvažovaný n -vektor dostaneme z (6,10), (6,4b), (6,7b), (6,5)

$$\begin{aligned} \text{a) } m(n) &= [a_{\alpha\beta}] (d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^n)^2, \\ \text{b) } m^{(s)n} &= [{}^s a_{\alpha\beta}] (d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^n)^2. \end{aligned} \quad (6,11)$$

²⁷⁾ Zde nesčítáme nikde přes vyznačené indexy. Jde o součin determinantů, kde indexy označují jen tensor, z jehož složek je determinant vytvořen.

V uvažovaném případě nazýváme

+ $\sqrt{m(n)}$ elementem nadplochy V_n ,

+ $\sqrt{m(s_n)}$ elementem sférického obrazu nadplochy a značíme v tomto

pořadí dP , $^s(dP)$; tedy

$$\begin{aligned} \text{a) } dP &= + \sqrt{[a_{\alpha\beta}]} \cdot |d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^n|, \\ \text{b) } ^s(dP) &= + \sqrt{[s a_{\alpha\beta}]} \cdot |d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^n|. \end{aligned} \quad (6,12)$$

Z (6,11), (6,12), definice 3 a věty (6,1) plyne pak ihned

$$\frac{^s(dP)}{dP} = \frac{|K|}{(n)}.$$

Výsledek (6,13) můžeme vysloviti takto:

Věta (6,2). *Element nadplochy a element jejího sférického obrazu jsou vázány vztahem*

$$^s(dP) = \vartheta \frac{K}{(n)} dP, \quad \vartheta = \text{sg} \frac{K}{(n)}.$$

BELTRAMIHO VĚTA PRO PARABOLICKÉ BODY PLOCHY

ALOIS URBAN, Praha.

(Došlo 18. září 1952.)

513.735.4

V článku odvozuje autor vztahy mezi geodetickou křivostí asymptotiky a první a druhou křivostí resp. geodetickou křivostí křivky, jež se dotýká asymptotiky v parabolickém bodě určitého druhu. — Z této obdoby Bonnetova vzorce odvozuje pro parabolické body plochy vzorec Beltramiho.

1. Známa Beltramiho věta¹⁾, jež se týká geodetické křivosti asymptotické křivky plochy a křivosti rovinného řezu plochy její tečnou rovinou, formuluje se jen pro hyperbolické body plochy.²⁾ Je však možno vyslovit větu obdobnou Beltramiho větě i pro některé parabolické body plochy, jak na to upozornil FR. VYČICHLO.³⁾

V úzké souvislosti s Beltramiho větou je Bonnetův vzorec⁴⁾, který udává vztah mezi geodetickou křivostí asymptotiky a první a druhou křivostí křivky, jež se v uvažovaném hyperbolickém bodě dotýká asymptotiky a jejíž oskulační rovina v tomto bodě splývá s tečnou rovinou plochy. Beltramiho věta je jen jeho speciálním případem pro rovinnou křivku plochy.

V dalším jsou uvedeny věty, které jsou obdobou Bonnetova vzorce a Beltramiho věty a platí v jistých parabolických bodech plochy.

2. Pro reálnou křivku plochy procházející obyčejným bodem plochy uvažované jednak v (obyčejném) prostoru R_3 (při čemž označíme jednotkové vektory tečny, hlavní normály a binormály postupně $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, první křivost k_1 a druhou křivost k_2), jednak na ploše (pro jednotkový tečný vektor píšme nyní $\mathbf{i} = \mathbf{t}$, jednotkový normální vektor označme $\mathbf{j}^5$) a geodetickou křivost k) platí rovnice⁶⁾

$$k_1 \mathbf{n} = k \mathbf{j} + b_{\lambda\mu} i^{\lambda} i^{\mu} \mathbf{N}, \quad (2.1)$$

při čemž $b_{\lambda\mu}$ ⁷⁾ je druhý základní tensor plochy a $\mathbf{N}$ její normála.

¹⁾ [1], str. 258 (číslice v lomených závorkách týkají se seznamu literatury uvedeného na konci práce).

²⁾ Viz na př. [3], str. 325—326, [5], II, str. 51, [7], str. 407—409.

³⁾ [6], str. 8—9.

⁴⁾ [2], str. 267.

⁵⁾ $\mathbf{j}$ normujeme na př. tak, aby úhel vektorů $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ v tomto pořádku byl $+\frac{1}{2}\pi$.

⁶⁾ Viz na př. [3], str. 283—284.

⁷⁾ $\lambda, \mu, \nu, \omega = \text{I, II}$.

Derivujeme-li dvakrát (2.1) podle oblouku s uvažované křivky a užijeme-li Frenetových vzorců pro křivku v R_3 a pro křivku na ploše, dostaneme postupně

$$-k_1^2 \mathbf{i} + \frac{dk_1}{ds} \mathbf{n} + k_1 k_2 \mathbf{b} = \left(-k^2 - (ii)^2 \right) \mathbf{i} + \left(\frac{dk}{ds} - (ii)(ij) \right) \mathbf{j} + \left(3k(ij) + (iii) \right) \mathbf{n}, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \left(-3k_1 \frac{dk_1}{ds} + 3k \frac{dk}{ds} + 6k(ii)(ij) + 3(ii)(iii) \right) \mathbf{i} + \\ & + \left(-k_1^3 - k_1 k_2^2 + \frac{d^2 k_1}{ds^2} \right) \mathbf{n} + \left(2 \frac{dk_1}{ds} k_2 + k_1 \frac{dk_2}{ds} \right) \mathbf{b} = \\ & = \left(-k^3 + \frac{d^2 k}{ds^2} - k(ii)(jj) - 5k(ij)^2 - 2(ij)(iii) - (ii)(iij) \right) \mathbf{j} + \\ & + \left(-4k^2(ii) + 4 \frac{dk}{ds} (ij) + 3k^2(jj) - (ii)^3 - (ii)(ij)^2 + \right. \\ & \left. + 6k(iij) + (iii) \right) \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde jsme pro stručnost položili

$$\begin{aligned} (ii) &= b_{\lambda\mu} i^{\lambda} i^{\mu}, \quad (ij) = b_{\lambda\mu} i^{\lambda} j^{\mu}, \quad (jj) = b_{\lambda\mu} j^{\lambda} j^{\mu}, \\ (iii) &= b_{\lambda\mu\nu} i^{\lambda} i^{\mu} i^{\nu}, \quad (iii) = (D_{\omega} b_{\lambda\mu\nu}) i^{\lambda} i^{\mu} i^{\nu}; \end{aligned} \quad (2.4)$$

přitom $b_{\omega\lambda\mu}$ je Codazziho tensor plochy⁸⁾ definovaný vztahem

$$b_{\omega\lambda\mu} = D_{\omega} b_{\lambda\mu}, \quad (2.5)$$

kde D_{ω} je symbol kovariantní derivace příslušné konexi určené Christoffelovými symboly plochy.

Dosadíme-li

$$\mathbf{n} = \mathbf{j} \cos \varphi + \varepsilon \mathbf{n} \sin \varphi, \quad \mathbf{b} = \varepsilon^* \varepsilon^{**} (-\mathbf{j} \varepsilon \sin \varphi + \mathbf{n} \cos \varphi), \quad (2.6)$$

kde $\varepsilon = \pm 1$ a kde $\varepsilon^* = \pm 1$, $\varepsilon^{**} = \pm 1$ jsou určeny relacemi

$$\varepsilon^* = [\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{n}], \quad \varepsilon^{**} = [\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}], \quad (2.7)$$

do rovnic (2.1)–(2.3) a užijeme-li toho, že vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{n}$ jsou lineárně nezávislé, nalezneme

$$\begin{aligned} (a) \quad & k_1 \cos \varphi = k, \\ (b) \quad & \varepsilon k_1 \sin \varphi = (ii), \end{aligned}$$

⁸⁾ [5], II, str. 13.

⁹⁾ $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ je symbol pro determinant ze souřadnic vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

$$\begin{aligned}
(c) \quad & \varepsilon \varepsilon^* \varepsilon^{**} k_1 k_2 \sin \varphi - \frac{dk_1}{ds} \cos \varphi + \frac{dk}{ds} = (ii)(ij), \\
(d) \quad & \varepsilon^* \varepsilon^{**} k_1 k_2 \cos \varphi + \varepsilon \frac{dk_1}{ds} \sin \varphi = 3k(ij) + (iii), \\
(e) \quad & -k_1 \frac{dk_1}{ds} + k \frac{dk}{ds} = -2k(ii)(ij) - (ii)(iii), \quad (2.8) \\
(f) \quad & \left(-k_1^3 - k_1 k_2^2 + \frac{d^2 k_1}{ds^2} \right) \cos \varphi - \varepsilon \varepsilon^* \varepsilon^{**} \left(2 \frac{dk_1}{ds} k_2 + k_1 \frac{dk_2}{ds} \right) \sin \varphi + \\
& + k^3 - \frac{d^2 k}{ds^2} = k(ii)(jj) + 5k(ij)^2 + 2(ij)(iii) + (ii)(ij), \\
(g) \quad & \varepsilon \left(-k_1^3 - k_1 k_2^2 + \frac{d^2 k_1}{ds^2} \right) \sin \varphi + \varepsilon^* \varepsilon^{**} \left(2 \frac{dk_1}{ds} k_2 + k_1 \frac{dk_2}{ds} \right) \cos \varphi = \\
& = -4k^2(ii) + 4 \frac{dk}{ds} (ij) + 3k^2(jj) - (ii)^3 - (ii)(ij)^2 + 6k(ij) + (iii).^{10)}
\end{aligned}$$

3. Předpokládejme nyní, že daný bod plochy je obyčejným parabolickým bodem plochy¹¹⁾, t. j. že v tomto bodě je normální křivost v jednom z hlavních směrů nulová, ve druhém nenulová. Jsou-li i^λ, i^λ jednotkové vektory hlavních směrů, pak označení jejich volme tak, aby v uvažovaném bodě bylo

$$a) \frac{1}{R_1} = b_{\lambda\mu} i^\lambda i^\mu \neq 0, \quad b) \frac{1}{R_2} = b_{\lambda\mu} i^\lambda i^\mu = 0; \quad (3.1)$$

je tedy v tomto bodě i^λ současně asymptotickým směrem.

Nechť i^λ je tečný jednotkový vektor křivky, jež se v daném obyčejném parabolickém bodě dotýká asymptotické křivky, t. j. nechť v daném bodě je

$$i^\lambda = i^\lambda; \quad (3.2)$$

pak pro tento bod zřejmě platí

$$b_{\lambda\mu} i^\lambda i^\mu = b_{\lambda\mu} i^\lambda i^\mu = 0 \quad (3.3)$$

a dále — vzhledem k tomu, že v uvažovaném bodě je $j^\lambda = \varepsilon' i^\lambda$ ($\varepsilon' = \pm 1$) —

$$b_{\lambda\mu} i^\lambda j^\mu = \varepsilon' b_{\lambda\mu} i^\lambda i^\mu = 0, \quad b_{\lambda\mu} j^\lambda j^\mu = b_{\lambda\mu} i^\lambda i^\mu = \frac{1}{R_1}; \quad (3.4)$$

¹⁰⁾ Rovnice $k_1^2 - k^2 = (ii)^2$ byla vypuštěna, neboť je přímým algebraickým důsledkem rovnice (2.8a, b).

¹¹⁾ Rozumíme jím bod, pro který tensor $b_{\lambda\mu}$ má hodnotu právě 1; body, v nichž $b_{\lambda\mu}$ má hodnotu 0, nazývají se rovinné body (viz [5], I, str. 201).

konečně

$$b_{\omega\lambda\mu} i^{\omega} i^{\lambda} i^{\mu} = 0, \quad (3.5)$$

jak najdeme derivováním (podle oblouku asymptotiky) rovnice

$$b_{\lambda\mu} i^{\lambda} i^{\mu} = 0, \quad (3.6)$$

již vyhovují asymptotické směry, a dosazením vztahů $i^{\lambda} = i^{\lambda}_2$, $j^{\lambda} = \varepsilon' i^{\lambda}_1$, které platí v daném bodě.

Nyní již snadno dokážeme

Lemma I. *První a druhá křivost a geodetická křivost křivky, která se v obyčejném parabolickém bodě plochy dotýká asymptotických křivek a má s nimi společnou oskulační rovinu, jsou v tomto bodě vázány rovnicemi*

$$\begin{aligned} & \text{a) } k_1 = k, \text{ b) } k_1 k_2 = 0, \text{ c) } \frac{dk_1}{ds} = \frac{dk}{ds}, \text{ d) } \frac{d^2 k_1}{ds^2} = \frac{d^2 k}{ds^2}, \\ & \text{e) } \varepsilon^* \varepsilon^{**} \left(2 \frac{dk}{ds} k_2 + k \frac{dk_2}{ds} \right) = \frac{3}{R_1} k^2 + 6k b_{\omega\lambda\mu} i^{\omega} i^{\lambda} i^{\mu} + (D_{\omega} b_{\lambda\mu\nu}) i^{\omega} i^{\lambda} i^{\mu} i^{\nu}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Důkaz. Jelikož oskulační rovina asymptotiky je tečnou rovinou plochy, předpokládáme vlastně $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$; dosazením těchto hodnot a vztahů (3.1)–(3.5) do (2.8) dostáváme (3.7).

Jako důsledek plyne okamžitě:

Pro křivku plochy, jež se v obyčejném parabolickém bodě plochy, který pro ni není stacionární, dotýká asymptotických křivek a má s nimi společnou oskulační rovinu, jest v tomto bodě

$$\begin{aligned} & \text{a) } k_1 = k, \text{ b) } k_2 = 0, \text{ c) } \frac{dk_1}{ds} = \frac{dk}{ds}, \text{ d) } \frac{d^2 k_1}{ds^2} = \frac{d^2 k}{ds^2}, \\ & \text{e) } \frac{3}{R_1} k^2 + k \left(6b_{\omega\lambda\mu} i^{\omega} i^{\lambda} i^{\mu} - \varepsilon^* \varepsilon^{**} \frac{dk_2}{ds} \right) + (D_{\omega} b_{\lambda\mu\nu}) i^{\omega} i^{\lambda} i^{\mu} i^{\nu} = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Poznámka 1. Rovnice (3.8b) je vlastně speciálním případem Bonnetova vzorce (pro obyčejné parabolické body).

Poznámka 2. Z předpokladu, že daný obyčejný parabolický bod není pro uvažované křivky stacionární, plyne ihned ze (3.8e), že v tomto bodě je nutně $(D_{\omega} b_{\lambda\mu\nu}) i^{\omega} i^{\lambda} i^{\mu} i^{\nu} \neq 0$.

4. Abychom mohli odvodit další důsledky z lemma I, všimneme si ještě asymptotických křivek procházejících uvažovaným obyčejným parabolickým bodem. Geodetickou křivost asymptotiky označme k . Platí:

Lemma II. *V obyčejném parabolickém bodě jsou geodetické křivosti asymptotik vázány kvadratickou rovnicí*

$$2k^2 \frac{1}{a R_1} + 5kb_{\omega\lambda\mu} i^{\omega} i^{\lambda} j^{\mu} + (D_{\omega} b_{\lambda\mu\nu}) i^{\omega} i^{\lambda} i^{\mu} i^{\nu} = 0,^{12)} \quad (4.1)$$

Důkaz. Derivujeme-li rovnici (3.6) asymptotik dvakrát podle oblouku asymptotiky, najdeme rovnici

$$(D_{\omega} b_{\lambda\mu\nu}) i^{\omega} i^{\lambda} i^{\mu} i^{\nu} + 5kb_{\omega\lambda\mu} i^{\omega} i^{\lambda} j^{\mu} + 2k^2 b_{\lambda\mu} j^{\lambda} j^{\mu} - 2k^2 b_{\lambda\mu} i^{\lambda} i^{\lambda} + \\ + 2 \frac{dk}{ds} b_{\lambda\mu} i^{\lambda} j^{\mu} = 0, \quad (4.2)$$

která se pro daný bod vzhledem k (3.2)÷(3.4) redukuje právě na (4.1).

Z lemma I. a II. plyne bezprostředně:

Necht na ploše existuje křivka, která v obyčejném parabolickém bodě nemá stacionární bod a má v tomto bodě s asymptotikami společnou tečnu a oskulační rovinu. Pak uvažovaný bod není stacionární ani pro asymptotické křivky.

V dalším budeme předpokládat, že v uvažovaném obyčejném parabolickém bodě nemají asymptotické křivky stacionární bod, t. j. předpokládáme, že v tomto bodě je

$$(D_{\omega} b_{\lambda\mu\nu}) i^{\omega} i^{\lambda} i^{\mu} i^{\nu} \neq 0. \quad (4.3)$$

Nalezené rovnice (3.8e) a (4.1) můžeme ještě upravit tím, že najdeme jiné vyjádření pro $b_{\omega\mu\lambda} i^{\omega} i^{\mu} j^{\lambda}$ a $(D_{\omega} b_{\lambda\mu\nu}) i^{\omega} i^{\lambda} i^{\mu} i^{\nu}$ (kde i^{λ}, j^{λ} jsou jednotkové tečné a normální vektory asymptotické křivky) pro daný obyčejný parabolický bod.

Derivujeme-li totiž rovnici $b_{\lambda\mu} i^{\lambda} i^{\mu} = 0$ (platící pro hlavní směry) jedenkrát podle oblouku s druhé hlavní křivky a vztah $b_{\lambda\mu} i^{\lambda} i^{\mu} = \frac{1}{R_2}$

dvakrát podle téhož oblouku a užijeme-li relací (3.2)÷(3.4), jež platí pro hlavní směry a asymptotický směr v uvažovaném obyčejném parabolickém bodě, najdeme

$$\begin{aligned} \text{a) } b_{\omega\lambda\mu} i^{\omega} i^{\lambda} j^{\mu} &= -k \frac{1}{R_1}, \\ \text{b) } (D_{\omega} b_{\lambda\mu\nu}) i^{\omega} i^{\lambda} i^{\mu} i^{\nu} &= 3k^2 \frac{1}{R_1} + \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{R_2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

¹²⁾ [6], str. 8.

Po dosazení (4.4) do (3.8e) a (4.1) dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{3k^2}{2} - \frac{6kk}{2} + \frac{3k^2}{2} - \varepsilon^* \varepsilon^{**} R_1 k \frac{dk_2}{ds} + R_1 \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{R_2} &= 0, \\ \text{b) } \frac{3k^2}{2} - \frac{5kk}{2a} + \frac{2k^2}{a} + R_1 \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{R_2} &= 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

kterých v dalším budeme užívat.

5. Nejprve doplníme Bonnetův vzorec (3.8b); platí totiž:

Nechť obyčejný parabolický bod plochy není stacionární pro asymptotické křivky ani pro křivku K , jež má s asymptotikami v tomto bodě společnou tečnu a oskulační rovinu. Pak geodetické křivosti asymptotických křivek, geodetická a druhá křivost křivky K jsou v tomto bodě vázány rovnicí

$$3(k - \frac{k^2}{a})^2 (3k - \frac{2k^2}{a})^2 = R_1 \left(\varepsilon^* \varepsilon^{**} k \frac{dk_2}{ds} - \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{R_2} \right) (6k - \frac{5k^2}{a}). \quad (5.1)$$

Důkaz. Rovnici (5.1) dostaneme vyloučením k z (4.5).

Poznámka. Pro K v tomto bodě platí ovšem také

$$\text{a) } k_1 = k, \text{ b) } \frac{dk_1}{ds} = \frac{dk}{ds}, \text{ c) } \frac{d^2 k_1}{ds^2} = \frac{d^2 k}{ds^2}, \text{ d) } k_2 = 0. \quad (5.2)$$

V dalším budeme uvažovat průsečnou křivku plochy s tečnou rovinou v jejím obyčejném parabolickém bodě. Geodetické křivosti větví průsečné křivky označme $k^{(1)}, k^{(2)}$, geodetické křivosti asymptotik označme $k_a^{(1)}, k_a^{(2)}$. Dokážeme, že platí:

Věta I. *Nechť obyčejný parabolický bod plochy není stacionární pro asymptotické křivky; pak*

1. *není stacionární pro průsečnou křivku K plochy tečnou rovinou v tomto bodě,*

2. *pro geodetické křivosti obou větví rovinného řezu K a geodetické křivosti obou asymptotik platí*

$$\text{a) } k_a^{(1)} k_a^{(2)} = \frac{3}{2} k^{(1)} k^{(2)}, \text{ b) } k_a^{(1)} + k_a^{(2)} = \frac{5}{4} (k^{(1)} + k^{(2)}). \quad (5.3)$$

Důkaz. Obě větve průsečné křivky plochy s tečnou rovinou v obyčejném parabolickém bodě plochy mají v tomto bodě společnou tečnu a tedy pro průsečnou křivku platí lemma I. Tvrzení 1 plyne z (3.7e), neboť jednak podle předpokladu o asymptotikách je $(D_w b_{\lambda\mu\nu})_{222} i^{\omega} i^{\lambda} i^{\mu} i^{\nu} \neq$

$\neq 0$, jednak pro průsečnou křivku je $k_2 = 0$. Tvzení 2 plyne z rovnic (4.5), kam je třeba ještě položit $\frac{dk_2}{ds} = 0$, t. j. z rovnic

$$\begin{aligned} \text{a) } 3k^2 - 6kk_2 + 3k_2^2 + R_1 \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{R_2} &= 0, \\ \text{b) } 2k^2 - 5kk_2 + 3k_2^2 + R_1 \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{R_2} &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Věta II. *Nutná a dostačující podmínka pro to, aby v obyčejném parabolickém bodě plochy, který není stacionární pro asymptotické křivky, platila pro jednu větev průsečné křivky tečné roviny s plochou a jednu asymptotiku Beltramiho podmínka*

$$k = \frac{3}{2}k_2, \quad (5.5)$$

jest: obě větve průsečné křivky v tomto bodě mají touž geodetickou křivost.

Důkaz. Podle (5.3a) je zřejmé, že nutná a dostačující podmínka pro to, aby pro jednu větev průsečné křivky a jednu asymptotiku v obyčejném parabolickém bodě plochy platila podmínka (5.5), jest, aby pro druhou větev průsečné křivky a druhou asymptotiku platila podmínka

$$k = k_2. \quad (5.6)$$

K tomu je však nutné a stačí — jak plyne z rovnic (5.4) — aby

$$\left(3k^2 + R_1 \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{R_2} \right) R_1 \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{R_2} = 0, \quad (5.7)$$

což vzhledem k nerovnostem (3.1a) a (4.3) dává nutnou a dostačující podmínku ve tvaru

$$\frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{R_2} = 0. \quad (5.8)$$

To znamená, že nutná a dostačující podmínka, aby platila Beltramiho podmínka, je, aby rovnice (5.4) se redukovaly na

$$\begin{aligned} \text{a) } k^2 - 2kk_2 + k_2^2 &= 0, \\ \text{b) } 2k^2 - 5kk_2 + 3k_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Odtud již bezprostředně plyne dokazované tvrzení.

Poznámka. Uvedme, že lze snadno zkonstruovat plochy s takovými obyčejnými parabolickými body, že v nich jsou splněny předpoklady věty II, a) a) neplatí, b) platí Beltramiho podmínka.

Tak pro plochu $z = \frac{1}{2}(x+y)^2 + (x+y)(2x^2+y^2) + 4x^2y^2$ je bod $(0; 0; 0)$ obyčejným parabolickým bodem, ve kterém jsou splněny předpoklady věty II, ale neplatí Beltramiho podmínka; pro tento bod najdeme $\frac{1}{R_1} = 2, \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{R_2} = -3, k = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ a tedy $k^{(1)} = \sqrt{2}, k^{(2)} = 2\sqrt{2}$, t. j. $k^{(1)} \neq k^{(2)}$.

Pro plochu $z = \frac{1}{2}(x+y)^2 - (x+y)(x^2+y^2) + 2x^2y^2$ je rovněž bod $(0; 0; 0)$ obyčejným parabolickým bodem, v němž jsou splněny předpoklady věty II; tentokrát však je splněna Beltramiho podmínka; v tomto bodě je totiž $\frac{1}{R_1} = 2, \frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{R_2} = 0, k = \sqrt{2}$ a tedy $k^{(1)} = k^{(2)} = \frac{k^{(1)}}{a} = \frac{k}{2}$, $k^{(2)} = \frac{3}{2}k^{(2)}$.

^a Jako snadný důsledek předchozích úvah ještě dokážeme:

Nechť na (nerozvinutelné) ploše existuje křivka obyčejných parabolických bodů, jež je současně asymptotickou křivkou. Pak v každém jejím bodě, jenž není stacionární, platí pro geodetickou křivost jedné z asymptotik a geodetickou křivost větve řezu plochy její tečnou rovinou Beltramiho podmínka (5.5).

Důkaz. Předpokládejme, že na dané nerozvinutelné ploše existuje křivka K obyčejných parabolických bodů o jednotkovém tečném vektoru i^λ . Nechť K je současně asymptotickou křivkou. Označíme-li i^λ jednotkový tečný vektor hlavní křivky, jež prochází bodem křivky K a jež se jí v tomto bodě dotýká, pak podél křivky K je stále $i^\lambda = i^\lambda$ a tedy $\frac{1}{R_2} = 0$. Odtud plyne $\frac{d^2}{ds^2} \frac{1}{R_2} = 0$ podél K (kde s je oblouk křivky K). Jestliže se nyní omezíme na body, jež nejsou pro K stacionární, pak pro k a k dostáváme rovnice (5.8), z nichž již plyne (5.5).

Poznámka. Existuje-li na ploše rovinná křivka K , jež je dotykovou křivkou tečné roviny plochy, pak je K křivkou parabolických bodů plochy a současně její asymptotickou křivkou.¹³⁾

¹³⁾ Normály $\mathbf{N}$ plochy $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi^\lambda)$ podél rovinné křivky K o rovnicích $\xi^\lambda =$
(Pokračování pozn. na protější straně)

Na př. na anuloidu existují dvě kružnice parabolických bodů uvedené vlastnosti; v každém z těchto bodů platí tedy Beltramiho podmínka, protože každý z nich je obyčejný parabolický (a ovšem není na uvedené kružnici stacionární). Je-li $a > 0$ poloměr těchto kružnic, pak pro křivost asymptotiky (různé od zmíněné kružnice) jest $k = \frac{3}{2a}$.¹⁴⁾

LITERATURA.

- [1] *Beltrami E.*: Sur la courbure de quelques lignes tracées sur une surface. Nouv. Annal. (2), 4, 1865.
- [2] *Bonnet O.*: Note sur l'article précédant. Nouv. Annal. (2), 4, 1865.
- [3] *Hlavatý V.*: Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet, Praha 1937.
- [4] *Julia G.*: Exercices d'Analyse, I, Paris, 1928.
- [5] *Kagan V. F.*: Osnovy teorii poverchnostej v tenzornom izloženíi; Moskva, Leningrad, I, 1947, II, 1948.
- [6] *Vyčichlo Fr.*: Příspěvek k zobecněné větě Beltramiho, Rozpravy II. tř. České akademie, L, 2.
- [7] *Vygodskij M. J.*: Differencial'naja geometrija. Moskva, Leningrad, 1949.

$= \xi^\lambda(s)$, kde s je její oblouk, jež je dotykovou křivkou tečné roviny plochy, jsou rovnoběžné, t. j.

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \mathbf{N}_\lambda i^\lambda = 0 \quad (*)$$

$\left(i^\lambda = \frac{d\xi^\lambda}{ds}, \mathbf{N}_\lambda = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi^\lambda} \right)$ a tedy vzhledem k tomu, že $b_{\lambda\mu} d\xi^\lambda d\xi^\mu = -\mathbf{r}_\lambda \mathbf{N}_\mu d\xi^\lambda d\xi^\mu$ $\left(\mathbf{r}_\lambda = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^\lambda} \right)$, je směr i^λ asymptotický. Dále je $\text{Det. } |b_{\lambda\mu}| = \text{Det. } |-\mathbf{r}_\lambda \mathbf{N}_\mu| = [\mathbf{r}_I, \mathbf{r}_{II}] \cdot [\mathbf{N}_I, \mathbf{N}_{II}]$ (kde $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ značí vnější součin vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$); protože podél K je $[\mathbf{N}_I, \mathbf{N}_{II}] = 0$ — jak plyne z $(*)$ —, jsou body křivky K parabolické.

¹⁴⁾ Viz na př. [4], str. 278; ostatně pro případ anuloidu $x = (a + r \cos u) \cos v$, $y = (a + r \cos u) \sin v$, $z = r \sin u$ ($a > 0$, $r > 0$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$) snadno přímo najdeme: $R_1 = r$; orientujeme-li $\mathbf{j}$ tak, aby podél kružnice $u = \frac{1}{2}\pi$ resp. $u = \frac{3}{2}\pi$ svíraly $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$ v tomto pořádku úhel $-\frac{1}{2}\pi$ resp. $-\frac{3}{2}\pi$, pak vzhledem k volbě

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{N}] = \varepsilon^* \text{ dostáváme pro tyto kružnice } k = \frac{1}{a} \text{ a dále } b_{\omega\lambda\mu} i^\omega i^\lambda i^\mu = -\frac{1}{ar},$$

$$(D_\omega b_{\lambda\mu\nu}) i^\omega i^\lambda i^\mu i^\nu = \frac{3}{a^2 r}, \text{ tedy } k^{(1)} = k^{(2)} = k^{(1)} = k = \frac{1}{a}, k^{(2)} = \frac{3}{2} k^{(1)} = \frac{3}{2a}.$$

ŽIVOTOPIS N. N. LUZINA¹⁾

V. V. GOLUBĚV a N. K. BARI.

Tento článek je překladem úvodní práce z knihy „Интеграл и тригонометрический ряд“ a podává vedle životopisu N. N. Luzina obraz vzniku vynikající sovětské školy teorie funkcí.

Nikolaj Nikolajevič Luzin se narodil 9. prosince (27. listopadu) 1883 na Sibiři ve městě Tomsku. Děd Nikolaje Nikolajeviče z otcovy strany byl nevolníkem hraběte Strogonova, otec, Nikolaj Mitrofanovič Luzin, rodem z vesnice Sepyč v tomské gubernii, byl obchodním zaměstnancem i matka, Olga Nikolajevna Luzinová, byla původem zabajkalská Burjatka. Olga Nikolajevna byla žena neduživá, což se projevilo i na zdraví syna.

„Základní vzdělání N. N. Luzin nabyl v soukromé škole města Tomsku, po jejímž dokončení byl přijat do tomského gubernského gymnasia ještě před stanoveným věkem: sotva mu minulo 8 let. Střední vzdělání nabyl v gymnasiích města Irkutsku, kam otec N. N. Luzina odejel na rok ze služebních důvodů, a potom opět v tomském gymnasiu.“ „Oblíbenou četbou N. N. Luzina v těchto letech byli naturalisté a z romanopisců Julius Verne, jehož vliv na zájmy svého rozumu považoval N. N. Luzin za značný. Ve vyšších třídách gymnasia N. N. Luzin četl velmi mnoho a to v nejrůznějších směrech; knihy z čisté filosofie, dávající fantasmii hojnou potravu, jej okouzlovaly. Avšak matematiku si až do nejposlednějších let gymnasia N. N. Luzin nezamíloval a bál se jí, neboť tehdy všude panující systém vyučování matematice byl spíše založen na mechanické paměti: bylo nutno se naučit bezvadně nazpaměť znění vět a přesně z paměti provádět důkazy, podle možnosti bez odchylování od textu knihy (*Davidovovy „Geometrie“, Kiselevovy „Algebry“*). Pro N. N. Luzina to bylo těžko snesitelným utrpením, protože mechanickou pamět absolutně neměl; z téhož důvodu byl pro něho uzavřen dějepis, zeměpis a jazyky, vyžadující zapamatování času, místa a tvaru. Jeho prospěch z matematiky byl na gymnasiu horší a horší, takže ztratil

¹⁾ Při sestavování tohoto životopisu bylo užito autobiografie N. N. Luzina, která zahrnuje období jeho života až do roku 1930. (Tato autobiografie je nyní uchována v *Matematickém ústavu V. A. Steklova AN SSSR.*) Úryvky, z ní přejaté, jsme v následujícím textu vložili do úvozovek.

pověst dobrého žáka a otec byl nucen vzít mu „repetitora“. Na štěstí to byl velmi nadaný studující techniky, právě tehdy v Tomsku otevřený; udělal na N. N. Luzina mohutný dojem tím, že mu ukázal matematiku nikoli jako soustavu vyučování založeného na mechanické paměti, nýbrž jako soustavu úsudků, usměrněnou živou představivostí. Od těch dob do jisté míry ztratil nepřátelství vůči matematice, rozřešil samostatně všechny úlohy tehdy existujících sbírek z elementární matematiky a dostal se, přirozeně, v tomto směru na gymnasiu na první místo.

Na mnohé učitele tomského gymnasia vzpomíná N. N. Luzin s láskou; zvláště na profesora ruského jazyka P. M. Vjatkina, „řeka“ K. A. Laletina a matematika V. K. Bobova, kteří měli srdečný poměr k mládeži. Mezi spolužáky na gymnasiu měl Nikolaj Nikolajevič přítele S. A. Vozněsenského a G. A. Buchvostova, kteří se také zabývali přírodními vědami, zvláště chemií, astronomií a fyzikou, bývalou milovanou vědou N. N. Luzina.

N. N. Luzin měl velmi chatrné zdraví, a proto téměř celou dobu postupoval ze třídy do třídy na základě dobrých známek bez zkoušky. Podle osobního přiznání Nikolaje Nikolajeviče mělo to pro něho v dalším životě nejhorší důsledky, jelikož pouze při přípravě k přísné zkoušce lze se naučit jak se má pracovat, rozvinout plnou způsobilost k práci, kterou mu střední škola, šetříc jeho zdraví, nedovedla dát.

Gymnasium dokončil N. N. Luzin roku 1901 a v témže roce vstoupil na matematické oddělení fyzikálně-matematické fakulty Moskevské university. Tato volba vznikla z přání Nikolaje Nikolajeviče stát se později inženýrem; chtěl si proto nejprve vybudovat solidní matematický fundament, neboť se „bál matematiky“.

Moskevská universita prožívala v těch letech období přelomu. Jestliže v osmdesátých a devadesátých letech dokonce i tak pokrokoví profesori, jako znamenitý ruský fyzik A. G. Stoletov, se domnívali, že ideálem universitního vyučování je solidní a důkladné osvojení schválených programů, jestliže mladý a nadaný S. A. Čaplygin odešel v polovině devadesátých let z university proto, že tam nebylo co přednášet, jelikož všechny povinné kursy byly rozebrány, pak právě na začátku 20. století se začala čím dále tím více objevovat zcela jiná tendence: ideálem universitního vyučování se stalo přitážení studentů k výzkumné vědecké práci. Právě v těchto letech byla vytvořena znamenitá laboratoř P. N. Lebeděva, která se v deseti letech stala uznávaným všeruským střediskem fyzikální vědy, a Lebeděvova škola vychovala desítky prvotřídních fyziků.

Tytéž tendence, zatím ještě v nesmělé formě, se objevily i u matematiků. Právě v prvních letech tohoto století začal skvělý přednášeč, živý a výmluvný B. K. Mlodzejevskij, přednášet nepovinný kurs theorie funkcí reálné proměnné podle známého Diniho pojednání.

Na Moskevské universitě po prvé v přednáškách Mlodzejevského se objevily takové pojmy, jako „množina“, „mohutnost“, „spočetné“ množiny, atd. O rok později, r. 1902, kdy se stal soukromým docentem I. I. Žegalkin, o všech těchto věcech spolu s „Dedekindovými řezy“ uslyšeli již nejen specialisté matematici, nýbrž všichni posluchači prvního roku matematického oddělení.

Na Moskevské universitě se N. N. Luzin okamžitě dostal do vlivu vynikající plejady profesorů, z nichž především nutno uvést geometry B. K. Mlodzejevského a K. A. Andrejeva, analytika N. V. Bugajeva a fysika N. A. Umova.

N. N. Luzin nejdříve učinil pokus stát se fysikem, avšak ve fysikální laboratoři N. A. Umova nebylo tehdy dost míst. V té době počaly působit na N. N. Luzina okouzujícími dojmy vynikající přednášky z čisté matematiky a matematika již v prvních semestrech se mu pohněhlav objevila se zcela jiné stránky, už nikoliv jako soustava nazpaměť naučených hotových pravd a řešení nesčetných úloh s dávno již známými odpověďmi, nýbrž jako nesmírné pole živého tvoření. Nikolaj Nikolajevič vždy srovnával postavení vědce, vedoucího tvůrčí život, se situací Kolumba, vypravivšího se hledat nové kraje a schopného v každém okamžiku učinit velký objev. Matematika se před ním objevila nikoliv jako zakončená věda, nýbrž jako věda tvůrčí, s dálkami, plnými lákavého tajemství.

Na Moskevské universitě N. N. Luzin jako talentovaný student na sebe okamžitě upozornil profesory. Už jako posluchač nižších ročníků byl zvolen sekretářem studentského Matematického kroužku, jehož předsedou byl znamenitý mechanik N. E. Žukovskij. V tomto kroužku byly zpracovávány otázky, mající v tu dobu zvláštní vědeckou aktuálnost. N. N. Luzin a jeho soudruh z university S. S. Bjušgens byli aktivními účastníky tohoto kroužku; v referátech u nich převládaly otázky základů matematiky, otázky theorie množin, otázky aritmetisace matematiky, jež tehdy upoutávaly pozornost matematiků, a otázky axiomatiky, jež teprve počínaly budit zájem. Na zasedání kroužku často přicházeli profesori B. K. Mlodzejevskij, D. F. Jegorova I. I. Žegalkin, který se právě stal soukromým docentem.

B. K. Mlodzejevskij byl rozladěn tím, že studenti v kroužku, místo aby studovali problémy theorie parciálních diferenciálních rovnic, diferenciální geometrie atd., se zastavují u nejzákladnějších pojmů analyzy a nejdou dále.

Theorie funkcí tehdy sotva počala pronikat na Moskevskou universitu ve formě jednotlivých referátů soukromých docentů, vyvolávajíc u jedněch hluboký podiv novotou myšlenek (theorie o aktuálním nekonečnu), u jiných pocit odporu k zdánlivým výstřednostem myšlení.

V jarním semestru r. 1905, v souvislosti s růstem revolučního hnutí,

universita stávkovala; vyučování přestalo. Revoluční vystoupení dělníků a rolníků, povstání v armádě a loďstvu, skandální vojenské porážky carské vlády čím dále tím více rozpalovaly veřejnou atmosféru. Ani dost málo ji neuklidnily polovičaté vládní reformy jako bulyginská дума z podzimu 1905. Na universitě to hučelo jako v úle; přednášky na podzim roku 1905 tu začínaly, tu končily. Posluchárny se změnilly v místo schůzí a masové agitace.

V prvních letech universitního studia N. N. Luzin si najal pokoj v hostinci „Kokorevskoje podvorje“ (Kokorevský zájezdni hostinec), kde žili také jeho rodiče. Nyní však, stržený bouřlivým proudem obecného nadšení, pokoušel se také zúčastnit nějak revolučního hnutí. Za takových podmínek bylo zřejmě nevhodné žít všem na očích ve velkém hostinci a na doporučení kteréhosi ze soudruhů si N. N. Luzin najal pokoj na Arbatě, v rodině vdovy po lékaři Malyginovi. Rodina se skládala ze stařenky vdovy Malyginové a její dcery Naděždy Michajlovny. Dům byl tichý, pozornost policie neupoutával a v bouřlivých dnech října 1905 před vydáním Vitteova manifestu „17. října“ v pokoji N. N. Luzina nejen nocovaly ilegální osoby, nýbrž pod jeho postelí byl dokonce jeden čas sklad bomb ...

Jak je známo, manifest „17. října“ nejen že neuklidnil situaci, nýbrž zesílil obecnou nespokojenost a revoluční napětí. Universita, zahájivší práce na podzim roku 1905, opět úplně stávkovala. V zemi se konaly přípravy k ozbrojenému povstání; bylo úplně jasno, že nelze v nejbližších měsících očekávat obnovení přednášek na universitě.

Celou tu dobu N. N. Luzin nepřerušoval práci pod vedením profesora D. F. Jegorova, projevujícího velkou pozornost jeho vědecké práci. V nastalé situaci D. F. Jegorov poradil N. N. Luzinovi, aby po čas přerušení prací odejel studovat na některou ze zahraničních universit; D. F. Jegorovovi se podařilo najít jiného studenta, který býval v cizině a ovládal trochu hovorovou francouzštinu a němčinu (byl to V. V. Goluběv), a v prvních říjnových dnech N. N. Luzin a jeho spolucestující odejeli do Paříže.

V Paříži N. N. Luzin setrval do konce letního semestru r. 1906 a všechny tyto semestry pobytu v zahraničí minuly v úporné a systematické práci. Přednášek mnoho nenavštěvoval. Na Sorboně poslouchal Borela, který přednášel teorii celistvých funkcí a přednášky slavného Poincarého o rozvoji perturbančních funkcí nebeské mechaniky. Podle slov N. N. Luzina přednášky Poincarého na něho učinily úžasný dojem v důsledku živého tvoření po dobu samého procesu přednášek. Kromě toho, v Collège de France N. N. Luzin poslouchal Hadamarda, který přednášel teorii šíření vln. Někdy chodil na Darbouxovy přednášky o teorii ploch. Avšak nejúporněji studoval matematickou literaturu v knihovně Sorbonny, v Národní knihovně a v knihovně sv. Jenovefy. Studiu vědeckých otázek věnoval doslovně všechen čas. V přemýšlení

o vědeckých problémech N. N. Luzin proseděl celé noci; pozdě vycházející zimní slunce jej často zastihlo ještě u práce.

Je nepochybné, že v tuto dobu v N. N. Luzinovi zrály ty idee, které mnohem později nabyly konečného tvaru v jeho pozoruhodné disertaci. Otázky theorie množin, theorie funkcí reálné proměnné zaujímaly v celé této práci základní místo.

Žil v této době velmi skromně. Obědval v ruské studentské jídelně na rue St. Jacques a na oběd bylo určeno 40 centimů.

Do divadla nechodil — neměl na to prostředků. Jedinou jeho zápravou bylo, že o svátcích navštěvoval pozoruhodná pařížská musea, obrazárny Louvru a musea současného malířství a sochařství Francie v Lucemburském paláci. Jen zřídka si dovolil ve svátek jít na taneční zábavu a za dvacet centimů se pohledem potěšit, jak tancují a veselí se francouzští a jiní obyvatelé Latinské čtvrti.

N. N. Luzin se vrátil do Ruska v létě roku 1906. Na konci téhož roku složil státní zkoušku a byl D. F. Jegorovem ponechán při universitě „k přípravě na profesorskou hodnost“.

V roce 1907 se N. N. Luzin oženil s Naděždou Michajlovnou Malyginovou.

V době studia na universitě N. N. Luzin pročetl a prostudoval mnoho velmi obtížných a hlubokých prací z nejrůznějších oblastí matematiky, takže byl dobře připraven k magisterským zkouškám ještě ve studentské lavici. „Ale dobu svého pobytu na universitě užil k návštěvě přednášek na lékařské fakultě, kam zamýšlel se dát zapsat, aby později šel mezi lid, byl však později donucen opustit tento plán, protože se ukázalo, že na práci v pitevně nemá dosti sil. Tehdy přešel k návštěvě přednášek na filosofickém oddělení historicko-filologické fakulty, čehož po roce zanechal, protože přednášky z filosofie nedávaly možnost vědecké práce.“

Potom se N. N. Luzin vrátil k matematice. V roce 1909 složil tak zvané magisterské zkoušky a nabyl tehdy existujícího titulu „magistranta“ s právem učit na vysoké škole po přednesení dvou přednášek na zkoušku, jedné podle vlastního výběru, druhé podle určení fakulty. N. N. Luzin přednesl zkušební přednášky a hotovil se od podzimu roku 1910 přednášet na universitě kurs theorie funkcí reálné proměnné, avšak ukázalo se, že takový kurs byl už ohlášen S. S. Bjušgensem, který složil zkoušky současně s N. N. Luzinem; potom na radu B. K. Mlodzejevského N. N. Luzin ohlásil přednášky z theorie integrálních rovnic. Ke konání přednášek nedošlo, protože v té době byl fakultou vyslán do ciziny do Göttingen a do Paříže, aby se zdokonalil v matematických vědách.

Na podzim 1910 odejel N. N. Luzin do Göttingen. V Göttingách Nikolaj Nikolajevič pracoval, „oddávaje se převážně samostatnému bádání v theorii trigonometrických řad; k tomu jej přitahovala mnohá záhadná fakta této theorie a ty nejbohatší prostředky göttingenské

knihovny, jež mu dávaly nevyčerpatelnou možnost lehce prostudovat nejrůznější otázky“. Na přednášky profesorů chodil málo, protože při jeho krajně samostatném myšlení mu ničeho nemohly dát. Naproti tomu osobní styk s vědci mu dával velmi mnoho, protože se při tom odhaloval vztah toho nebo onoho vědce k různým matematickým problémům a ukazovala se jeho vědecká cesta. Tyto styky Nikolaj Nikolajevič cenil neobyčejně vysoko. „V Göttingách N. N. Luzin napsal a na naléhání profesora Landaua uveřejnil svou první práci (v r. 1911, t. j. v 28 letech). Do té doby nebyl přesvědčen o svých silách, stříhl se publikovat a odmítl z téhož důvodu napsat spisek na určené thema v soutěži o medaili v Moskvě. V roce 1912 odcestoval N. N. Luzin do Paříže“. Zde systematicky pracoval v Hadamardově semináři a seznámil se osobně s největšími matematiky (Picard, Hadamard, Borel, Lebesgue, Denjoy a řada jiných).

Jasnou představu o vědeckých zájmech N. N. Luzina v tato léta dává následující úryvek ze zprávy, jím podané Ministerstvu národní osvěty.

„Byv v zahraničí na vědeckých studiích dva roky a obdržev prodloužení tohoto pobytu na třetí rok, a to od 1. I. 1913 do 1. I. 1914, odcestoval jsem v březnu 1913 do Paříže na zahájení letního semestru, abych pokračoval ve vědeckém studiu.

Z přednášek mnou navštěvovaných v tomto semestru, nejvíce zajímaly mne osobně přednášky Picardovy, který přednášel vybrané kapitoly z teorie funkcí komplexní proměnné. V nich přednášející, mimo jiné, vyložil konformní zobrazení mnohonásobně souvislých oblastí, při čemž uvedl výsledek H. Poincarého a ukázal na pozdější výsledky v této otázce.

Následující zimní semestr r. 1913 a letní semestr 1914 jsem taktéž strávil v Paříži, navštěvoval přednášky profesora Bôchera, který byl pozván na Sorbonu z Ameriky a přednášel o nových výsledcích teorie obyčejných lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu, přednášky E. Picarda, který pokračoval ve výkladu vybraných kapitol teorie funkcí komplexní proměnné a podal některé zajímavé věty o analytických funkcích dvou komplexních nezávisle proměnných, a přednášky Borelovy o zobecnění pojmu analytické funkce. Mne osobně nejvíce zajímaly přednášky Borelovy, v nichž přednášející podal novou, zobecněnou definici analytické funkce a v jasných a zřetelných črtách narysoval nedostatky Weierstrassovy klasické definice analytické funkce, ukazav na její jistou formálnost. Kromě toho jsem se zúčastnil semináře vedeného Hadamardem na Collège de France a dvou kongresů: matematicko-pedagogického a matematicko-filosofického, jež se konaly na jaře v Paříži.

Současně s tím jsem pokračoval ve své osobní práci v oblasti teorie funkcí reálné proměnné.“

Další informace, které podal N. N. Luzin o vlastních vědeckých výsledcích došly nejvyššího ocenění v následujícím prohlášení profesora D. F. Jegorova:

„Předkládaje při tom zprávu o zahraniční cestě soukromého docenta I. M. U. N. N. Luzina, mám tu čest sdělit fakultě, že podle mého mínění svědčí tato zpráva o faktu, který je znám i z jiných pramenů, totiž, že v osobě N. N. Luzina máme již vyvinutého nadaného vědeckého pracovníka, který má mnoho důležitých a zajímavých výsledků z teorie integrálu, teorie trigonometrických řad, teorie funkcí reálné proměnné...

Ze zprávy je patrné, že N. N. Luzin má v podstatě úplně hotový materiál i pro práce, které by mohly sloužit jako podklad k dosažení hodnosti magistra a doktora a pouze upoutání novými a novými výsledky mu dosud zabránilo napsat v definitivním tvaru disertaci, kterou, jak se lze nadít, podá v nejbližší době.

Mezi výsledky uvedenými autorem ve zprávě, mě nejvíce zaujal poslední (poznámka v *Comptes Rendus* „*Sur un problème du M. Baire*“). Zdá se mi, že v tomto směru přinese N. N. Luzin něco nového a zajímavého k fundamentálnímu problému o mohutnosti kontinua.

Domníval bych se, že zpráva a práce N. N. Luzina zasluhují nejvyššího uznání.

26. II. 1914

Ř. prof. D. F. Jegorov.“

Práce uveřejněné již v tuto prvou periodu jeho vědeckého tvoření jasně svědčí o výjimečné samostatnosti jeho vědeckého tvoření a o velkém vypjetí v jeho práci. Zde se bezpochyby opakovala a to ještě v jasnější formě ta neobyčejná inspirace, která se zmocňovala N. N. Luzina v období produktivní tvůrčí práce. V takovém období jej práce uchvacovala úplně; v práci nerozlišoval ani dne, ani noci, přicházel na něho jakýsi nápor tvůrčí „posedlosti“, který jej nutil zapomenout na vše, co se vymykalo z okruhu jej ovládajících vědeckých ideí.

Za tato léta byla N. N. Luzinem vykonána ohromná práce a speciálně, bylo opublikováno deset vědeckých prací v nejlepších ruských a zahraničních vědeckých časopisech.

Usilovná práce při studiu matematické literatury mu dala široké vědecké vědomosti, nejpodrobnější znalost vědecké literatury; vytrvalé přemýšlení o nejobtížnějších otázkách teorie funkcí mu dalo materiál k jeho pozoruhodné disertaci.

Na podzim 1914 se vrátil N. N. Luzin do Moskvy a počal přednášet na universitě jako soukromý docent.

Desetiletí od 1914 do 1924 bylo obdobím skvělého rozkvětu vědecké a pedagogické činnosti N. N. Luzina. Fakultou mu bylo nařízeno přednášení obecného kursu analytické geometrie a potom vyšší algebry. Avšak v tom nebylo těžiště jeho práce. Rok co rok pravidelně přednášel nepovinný kurs teorie funkcí reálné proměnné a vedl speciální

badatelský seminář. Zvláště tento speciální kurs, rok co rok přednášený, a jej doprovázející seminář byly centrem, z něhož vyrostla moskevská škola teorie funkcí — skvělá památka slavné vědecké činnosti N. N. Luzina.

Z profesorů Moskevské university lze sotva uvést některého, jehož přednášky by dosáhly tak mimořádného úspěchu jako přednášky N. N. Luzina. A byli přece mezi profesory tak vynikající přednášející jako B. K. Mlodzejevskij, chemik A. N. Reformatskij, astronom V. K. Cerasskij a řada jiných. Vzniká přirozeně otázka, čím lze vysvětlit tento naprosto výjimečný úspěch.

Ustálil se zvyk předpokládat, že úkolem přednášek je systematický výklad jistého komplexu poznatků. Čím je tento komplex větší, tím jsou přednášky obsažnější; čím je ve vědeckém smyslu výklad přesnější, tím je vyšší úroveň přednášek. Podle tohoto názoru je úkol knihy nebo tištěného kursu a přednášek jeden a týž. Jedinou aktivně vystupující osobou je přednášející; posluchárna pouze pasivně přijímá výklad.

Proti tomuto názoru lze uvést, že vědecká pravda sice oslňuje svou úplností, avšak také odpuzuje svou neživotnou suchostí. Vždyť tyto, v dané etapě rozvoje uzavřené formy vědecké pravdy byly historicky vytvořeny nesčíslnými bádáními, omyly, v důsledku sporů, konfliktů názorů; věda žila a žije dále plným a intenzivním životem neustálé práce nesčíslných tvůrců a budovatelů budovy vědy.

A jestliže je tomu tak, není správnější uvést studenty do samotné laboratoře vědeckých bádání, ukázat jim všechny vznikající potíže, nechat posluchárnu prožít všechnu hořkost omylů a zklamání a poznat všechnu radost hledání vědecké pravdy? Ve svých výkladech se N. N. Luzin pokusil dosíci toho, aby vykládanou látku nepodával v zakončeném zkonšervovaném tvaru, nýbrž v toku jejího tvoření, jak se říká, *in statu nascendi*. Při takovém přistupování k věci je hlavní, jednající osobou na přednáškách a v semináři celá posluchárna: ona prožívá muka vědeckého tvoření, ona pocituje radost vítězství. Přednášející, to je zkušený kormidelník, který mistrně ovládá posluchárnu.

N. N. Luzin nepodával své přednášky vůbec didakticky, přednášel co nejméně v hotovém tvaru tu nebo onu partii vědy, snažil se však neustále otevírat před posluchárnou stále nové a nové horizonty, stále podněcoval mysl posluchačů, stále utužoval posluchárnu v překonávání potíží, na něž je tak bohaté vědecké bádání. N. N. Luzin nebyl osamocen ve svých methodických ideách, stejnou cestou v poněkud jiné oblasti laboratorní experimentální práce šel i P. N. Lebeděv, touž cestou vychovával své žáky ve svých laboratořích i N. E. Žukovskij. Novým a úplně originálním u N. N. Luzina bylo to, že této metody užíval nejen na svých seminářích, což bylo poměrně pochopitelné a lehké, nýbrž i na svých přednáškách, což bylo nesrovnatelně těžší.

Lze lehce pochopit, jaký úspěch mohlo mít takové přednášení, a zvláště, když přednášejícím byl vědec, který sám byl v rozkvětu svého

vědeckého tvoření. A právě v tomto období vědecké tvoření N. N. Luzina dosáhlo svého plného rozvíjení.

Po návratu z ciziny N. N. Luzin dovršuje, doplňuje a usoustavňuje ohromný vědecký materiál, který pak tvoří obsah jeho hlavní práce „*Integrál a trigonometrická řada*“. Tato pozoruhodná práce, dokončená r. 1915 byla podána jako disertační práce k získání akademické hodnosti magistra čisté matematiky. Její obhajoba na Vědecké radě fyzikálně-matematické fakulty 27. dubna 1916 se proměnila ve skvělý vědecký triumf N. N. Luzina. V posudcích oficiálních oponentů, profesorů D. F. Jegorova a L. K. Lachšina a v řadě dalších diskusních příspěvků bylo upozorněno na naprosto mimořádnou hodnotu práce. Rada se jednomyslně usnesla udělit N. N. Luzinovi hodnost doktora čisté matematiky, přeskočíc obvyklou hodnost magistra — případ to mimořádně řídký v praxi ruských universit.¹⁾

Nemenším vypětím vědeckých tvůrčích sil N. N. Luzina jsou poznamenána i následující léta, při čemž současně s velkým počtem prací samotného Nikolaje Nikolajeviče se začínají stále častěji objevovat i práce jeho žáků.

N. N. Luzin měl mimořádný talent k přitahování svých žáků k vědecké práci. Jak jsme viděli, sama forma vyučování měla u něho takový charakter, že se v podstatě vůbec ztrácela hranice mezi učením a vědeckým bádáním. Mimo to však uměl s mimořádným úspěchem svým osobním vlivem u žáků vzbudit dojem, že každý z nich nejen může, nýbrž i musí vědecky tvořit.

Pro samotného Nikolaje Nikolajeviče byla věda hlavním obsahem života a téměř vztahu k vědě, jako tomu hlavnímu, čemu musí být věnovány všechny síly, učil i své žáky. Neustále jim vštěpoval, že vědecká práce je obtížná a těžká, vyžadující ohromné námahy, velké vytrvalosti.

Luzin nemohl pracovat „podle hodin“; vědecká myšlenka jej úplně ovládala a tato „posedlost“ se mimořádně jasně jevila ve všem jeho konání. I svým žákům systematicky vštěpoval názor, že vědecká práce se může úspěšně dařit jen tehdy, když se mysl nepřetržitě a houževnatě

¹⁾ V archivu Moskevské university je uložena následující zpráva o této obhajobě:

„13 května 1916 v Radě university

Byla vyslechnuta zpráva fys. - mat. fakulty z 13. května: 27. dubna na zasedání fakulty byla N. N. Luzinem veřejně obhajována disertace na hodnost magistra čisté matematiky s názvem „*Integrál a trigonometrická řada*“.

Obhajoba byla uznána za uspokojivou a N. N. Luzin hodným hodnosti doktora čisté matematiky.

Fakulta žádá schválení hodnosti doktora čisté matematiky pro N. N. Luzina.

Bylo rozhodnuto na základě odst. 30, § 1, str. 3. Statutu university potvrdit magistranta N. N. Luzina v hodnosti doktora čisté matematiky vzhledem k tomu, že jím podaná disertace vyniká mimořádnou vědeckou hodnotou a vydat příslušný diplom.“

zabývá vědeckou otázkou, že žádnou vědeckou práci nelze dělat „podle hodin“, zanechávat ji tak, jak se svlékne pracovní plášť, když se jde z práce. Přednášky Nikolaje Nikolajeviče nekončily podle zvonku; vědecká beseda pokračovala i v přestávce mezi přednáškami na chodbě, velmi často jej posluchači doprovázeli v hloučku po skončení přednášek do bytu, pokračující v bedlivém uvažování o vědeckých otázkách nadhozených na přednášce. Studenti, kteří pracovali v semináři N. N. Luzina, i jeho žáci se často scházeli u něho v bytě, aby posoudili vědecké referáty ze seminářů a besedovali o prostudované vědecké literatuře; vytvořila se přátelská skupina mládeže, ovládaná vřelým zájmem o zpracování vědeckých otázek. Tato svorná společnost začínajících vědeckých pracovníků, vytvořivší se okolo Nikolaje Nikolajeviče, dostala mezi studenty žertovný název „Luzitanie“.

Ze žáků N. N. Luzina, pracujících pod jeho vedením v prvních letech jeho pedagogické činnosti na Moskevské universitě, se mnozí stali později vynikajícími vědci; mezi nimi je nutno především uvést M. Ja. Šuslina, D. E. Meňšova, A. Ja. Chinčina, P. S. Aleksandrova, P. S. Urysona, V. N. Veniaminova, V. S. Fedorova

Současné s N. N. Luzinem, avšak pod jeho bezprostředním vlivem pracovali také jeho mladší soudruzi: V. V. Stěpanov, I. I. Privalov, zpracovávající stále nové a nové otázky theorie funkcí komplexní a reálné proměnné.

Léta 1914–1918 byla lety rozkvětu tohoto pozoruhodného kolektivu, rychle rostoucího pod talentovaným vedením N. N. Luzina. Rozvrat vyvolaný imperialistickou válkou, se přirozeně odrazil i na práci N. N. Luzina, jakož na celém životě Moskevské university. Zásobovací potíže a nedostatek topiva, ostře se projevil v roce 1918, vedly k tomu, že práce na universitě se omezovala, studenti se rozjížděli domů, kde hospodářské podmínky byly lepší než v Moskvě. Za takových podmínek značná část profesorů hledala uplatnění svých sil v jiných městech, kde po Velké říjnové socialistické revoluci díky opatřením sovětské vlády rychle rostla síť vysokých škol. V nejtěžších letech rozvratu, vyvolaného důsledky války a intervence, N. N. Luzin s řadou jiných profesorů Moskevské university působil jako profesor v Ivanově, velkém textilním středisku, kde byla v r. 1918 otevřena technika. Spolu s Nikolajem Nikolajevičem tam pracovali také někteří z jeho žáků.

Při práci v Ivanově nepřerušil N. N. Luzin ani práci na universitě v Moskvě, kam dojížděl na kratší či delší dobu.

Zpráva o Luzinově příjezdu do Moskvy se vždy rozšířila s neobyčejnou rychlostí mezi jeho moskevskými žáky a jako dříve klokotal život v „Luzitanii“, konal se seminář; div že ne každý večer v přijímacím pokoji Luzinova bytu se scházela moskevská matematická mládež, byly živě posuzovány matematické otázky, kypěly tvůrčí vědecké myšlenky.

Do této periody patří první práce N. N. Luzina z aplikované mate-

matiky. S. A. Čaplygin jej získal pro práci ve Vědecko-experimentálním ústavu dopravních spojů.

Období od 1916 do 1920 bylo obdobím prvních triumfů školy N. N. Luzina. Byly získány pozoruhodné výsledky D. E. Meňšovem, M. Ja. Suslinem, P. S. Aleksandrovem, A. Ja. Chinčinem. Moskva se stává obecně uznávaným centrem bádání v oblasti theorie funkcí. V disertaci I. I. Privalova jsou aplikovány metody theorie funkcí reálné proměnné na klasické otázky funkcí komplexní proměnné. Myšlenky N. N. Luzina pronikají i do Petrohradu, kde na sebe obracejí pozornost N. M. Gjuntera a G. M. Fichtengolce. V téže době utrpěla moskevská matematická škola první těžkou ztrátu: na tyf umřel M. Ja. Suslin, který spolu s N. N. Luzinem a P. S. Aleksandrovem byl jedním ze zakladatelů celého směru deskriptivní theorie množin.

Myšlenky N. N. Luzina se šířily i v cizině, zvláště v Polsku. Tomu napomáhal V. K. Sierpiński, který ztrávil prvé čtyři roky světové války v Moskvě a pracoval pod bezprostředním a silným vlivem Luzinovým. V dalších letech se staly ideje Luzinovy školy vedoucími v polské matematice a jejich vliv je dosud silně patrný.

V červnu 1921 uplynulo sto let od narození jednoho z největších ruských matematiků P. L. Čebyševa. Akademie věd a Petrohradská universita uspořádaly na počest tohoto data vědeckou konferenci, na níž měl N. N. Luzin jeden z hlavních referátů. Na tuto konferenci, jež trvala od 9. do 15. června, spolu s Nikolajem Nikolajevičem se odebrali i jeho, tehdy již četní, žáci; tak začalo bližší seznámení petrohradských matematiků s moskevskou matematickou školou, vytvořenou N. N. Luzinem.

Po vítězství na frontách občanské války a po vyhnání interventů byl rychle obnoven normální život v Moskvě a normální práce na Moskevské universitě; v roce 1922 N. N. Luzin zanechal práce na Ivanovské technice a vrátil se do Moskvy.

S návratem N. N. Luzina do Moskvy se vrátil obvyklý školní život i vědecký život jím vytvořené školy do svého normálního proudu; jako dříve systematicky pracoval jeho pozoruhodný seminář z theorie funkcí, usilovně pokračoval tvůrčí vědecký život, rostla nadaná mládež.

Počátek dvacátých let byl periodou nového rozkvětu Luzinovy školy. Jeho žáky se stali: L. A. Ljusternik, N. K. Bari, M. A. Lavrentjev, L. G. Šnirel'man, P. S. Novikov, L. V. Keldyš, A. N. Kolmogorov, V. I. Gněděnko a jiní. Mezi nimi byli lidé s velkým vědeckým nadáním a jasně patrnou vědeckou individualitou.

Mladší soudruzi a první ze žáků N. N. Luzina: I. I. Privalov, V. V. Stěpanov, P. S. Aleksandrov, P. S. Uryson, A. Ja. Chinčin, D. E. Meňšov, se stávají v tuto dobu sami vynikajícími vědci a vůdci mládeže. Objevují se jejich vlastní žáci — „vědečtí vnuci“ Nikolaje Nikolajeviče. Objevují se nové školy. Za počátek jedné školy je třeba považovat topologický

kroužek, vedený P. S. Aleksandrovem a P. S. Urysonem, v němž pracovali jak přímí žáci Nikolaje Nikolajeviče, tak i jeho „vědečtí vnuci“ (A. N. Tichonov, V. V. Němyckij, N. B. Vedenisov, L. A. Tumarkin a jiní).

A. Ja Chinčin, počínaje lety 1922—23, počal aplikovat theoreticko-funkcionální metody na teorii čísel a získal řadu základních výsledků v oblasti tak zvané metrické teorie čísel. Jeho první práce z teorie pravděpodobnosti mají také theoreticko-množinový charakter. Později (v r. 1929) L. G. Šnirel'man přenesl metrické pojmy na aritmetické posloupnosti a získal řadu hlubokých výsledků v teorii čísel. I. I. Privalov jak ve společné práci s N. N. Luzinem, tak i nezávisle na něm, vykonal řadu důležitých bádání o hraničních vlastnostech analytických funkcí. O něco později začal systematicky pracovat v teorii analytických funkcí žák N. N. Luzina M. A. Lavrenťjev, kolem něhož se později utvořil velký kolektiv mladých matematiků.

D. E. Meňšov získal řadu fundamentálních výsledků jak v oblasti reálné proměnné, hlavně v teorii ortogonálních soustav, tak i v oblasti komplexní proměnné. V. V. Stěpanov přenesl theoreticko-funkcionální metody na teorii skoro periodických funkcí.

V dvacátých letech se také objevily práce L. A. Ljusternika a potom I. G. Petrovského o *Dirichletově problému*, jimiž se začala práce moskevské matematické školy na krajových úlohách z teorie parciálních diferenciálních rovnic.

Zájem samotného N. N. Luzina na počátku dvacátých let je hlavně upoután na deskriptivní teorii funkcí. Zde je zakladatelem v podstatě nové matematické disciplíny. Nalezl v této oblasti nejen fundamentální výsledky, nýbrž jim provedená vyšetřování se dotkla i základů teorie množin. Po první vyslovil ideje o hranicích theoreticko-množinového myšlení. Jím za základ položené principy a hlediska jsou programem, sloužícím k další plodné práci v oblasti současné teorie. Tento program ještě zdaleka není vyčerpán, avšak získané výsledky plně potvrzují hluboká předvídání N. N. Luzina.

V polovině dvacátých let N. N. Luzin napsal celou řadu prací z deskriptivní teorie množin a speciálně v r. 1926 velkou práci o analytických a projektivních množinách.

Na jaře 1927 se v Moskvě konal *Všeruský sjezd matematiků*. Na tomto sjezdu byla v jistém smyslu provedena bilance ohromné práce N. N. Luzina na vytvoření moskevské matematické školy. Mnozí ze žáků N. N. Luzina zde vystoupili jako vynikající vědečtí pracovníci, vedoucí důležité směry vědecké práce v sovětské matematice. Sám Nikolaj Nikolajevič měl na tomto sjezdu jeden ze základních referátů: „*O současných problémech teorie funkcí reálné proměnné*.“ V říjnu 1927 se zúčastnil sjezdu polských matematiků ve Lvově.

V srpnu 1928 na *Mezinárodním matematickém sjezdu v Bologni*

N. N. Luzin referoval na thema „*O cestách theorie množin*“, a potom až do léta 1930 žil v Paříži, kde pracoval na své knize „*Leçons sur les ensembles analytiques*“. V této knize, vyšedší ve sbírce monografií z theorie funkcí, obsahující práce největších vědců, shrnul výsledky své a svých žáků (M. Ja. Suslina, P. S. Aleksandrova, P. S. Novikova, L. V. Keldyše, E. A. Selivanovského) z theorie analytických a projektivních množin, která je jedním z největších úspěchů moskevské matematické školy.

V těchto letech dosáhly největší vědecké zásluhy N. N. Luzina a jím vedené školy světového uznání. N. N. Luzinovi byl udělen čestný titul řádného člena Krakovské akademie věd, titul čestného člena Matematické společnosti v Kalkutě, titul čestného člena Belgické matematické společnosti v Bruselu. Na konferenci polských matematiků ve Lvově hraje vedoucí úlohu, na mezinárodním sjezdu matematiků v Bologni v r. 1928 byl zvolen místopředsedou. V r. 1927 byl zvolen dopisujícím členem a v r. 1929 řádným členem Akademie věd SSSR, z počátku na katedře filosofie a potom na katedře matematiky.

V r. 1930 bylo N. N. Luzinovi svěřeno vedení sekce theorie funkcí fyzikálně-matematického ústavu V. A. Stěklova Akademie věd SSSR; v souvislosti s touto funkcí jezdil velmi často do Leningradu. Spojení s ústavem se upevnilo v r. 1934, kdy Akademie věd a její matematický ústav byly přemístěny do Moskvy. N. N. Luzin pokračoval ve vedení sekce theorie funkcí až do konce života; všichni spolupracovníci této sekce jsou jeho žáky.

V třicátých letech hluboké matematické myšlenky, které byly s takovým úspěchem zpracovány v nejbližším okolí Nikolaje Nikolajeviče, dosáhly v pracích jeho žáků pozoruhodných výsledků v nejrůznějších oborech matematiky, — v širokých vědeckých směrech v oblasti kvalitativních method, v oblasti theorie pravděpodobnosti a jejích nejrůznějších aplikací, v problémech hydrodynamiky a jejích technických aplikací. A. Ja. Chinčín a A. N. Kolmogorov vytvořili moskevskou školu theorie pravděpodobnosti, zaujímající nyní ve světové vědě jedno z prvních míst. M. A. Lavrentjev a M. V. Keldyš aplikovali svá hluboká bádání v oblasti theorie analytických funkcí na hydrodynamiku a aerodynamiku. V. V. Stěpanov strhl skupinu vědců k práci v kvalitativní theorii diferenciálních rovnic. Vznikají vynikající práce I. G. Petrovského z theorie soustav parciálních diferenciálních rovnic. Ve všech těchto bádáních jsou užívány a prohlubovány metody N. N. Luzina.

Pokračující práce v oblasti metrické theorie funkcí přivedla k vytvoření velké školy funkcionální analýsy.

Sám N. N. Luzin měl v této době různé vědecké zájmy. Na jedné straně pokračuje v těchto letech, jako vůbec až do konce života, v přemýšlení o hlubokých a obtížných problémech deskriptivní theorie množin a základů matematiky. V tuto dobu se s ním zvláště sblížil užší

kroužek matematiků (P. S. Novikov, L. V. Keldyš, A. A. Ljapunov, E. A. Selivanovskij) pracujících v problematice, těsně svázané se zájmy N. N. Luzina v oblasti deskriptivní teorie funkcí. Na druhé straně, N. N. Luzin, ovládající tvůrčím způsobem i metody klasické analýsy, začal jich užívat na různé problémy aplikované matematiky. Tak se zabýval odhadem konvergence při metodě přibližného řešení diferenciálních rovnic, navržené S. A. Čaplyginem; na návrh Seismologického ústavu provedl kritické zhodnocení method předpovídání počasí na základě meteorologických pozorování za velké časové období.¹⁾

V roce 1938 začal N. N. Luzin pracovat v oblasti diferenciální geometrie a speciálně se obíral problémem deformace kongruencí na hlavní základně. V této klasické oblasti, které bylo od šedesátých let minulého století věnováno mnoho prací ruských i zahraničních matematiků, získal rozhodující výsledky.

V třicátých a čtyřicátých letech, pracoval N. N. Luzin v Ústavu V. A. Stěškova, a kromě toho v dalších ústavech Akademie věd: v Seismologickém ústavu a v Ústavu automatiky a telemekhaniky. V těchto posledních aplikoval teorii diferenciálních rovnic na problémy užité matematiky.

V těchto letech práce v ústavech Akademie věd již nebyl N. N. Luzin spojen s universitou systematicky. Avšak občas tam obnovoval práci, a to zase ovlivnilo mladé matematiky, kteří při svých bádáních zůstávali stranou od jeho přednášek a seminářů. Na příklad poslední přednáška N. N. Luzina „*Vybrané kapitoly z teorie komplexní proměnné*“, jím konaná v r. 1945, vyvolala mezi studenty zájem o teorii funkcí dvou reálných proměnných, a od té doby na Moskevské universitě celá skupina mladých matematiků, mezi nimiž je nutno uvést v první řadě A. S. Kronroda, zpracovává tuto novou a poutavou oblast.

Ačkoliv počínaje rokem 1930 už N. N. Luzin sám málo přednášel, vždy se zajímal o otázky vyučování a mnoho času věnoval psaní učebnic. Spočátku redigoval překlad učebnice diferenciálního a integrálního počtu amerického matematika Granvilla. Tato učebnice, díky přepracováním, kterým ji podrobil N. N. Luzin, dosáhla sedmnácti vydání a byla hojně užívána na technikách. V posledních vydáních se už stala naprosto původním dílem. Tato kniha, jako všechno, co bylo Luzinem napsáno, vyniká neobyčejnou životností, jasností výkladu a krásou jazyka; autor nejen dokazuje, nýbrž i živou obraznou formou objasňuje obsah učebnice.

N. N. Luzin jevil také živý zájem o dějiny matematiky. Z jeho pera vyšly krásné články o Newtonovi, Eulerovi, velmi zajímavý článek týkající se rozvoje pojmu funkce a článek o diferenciálním počtu.

¹⁾ Tato Luzinova práce, obsahující cenné matematické výsledky o vyjádření empirických křivek pomocí trigonometrických polynomů, nebyla bohužel publikována.

Píšíce biografii N. N. Luzina, nemůžeme o něm mluvit pouze jako o matematiku. Četl a přemýšlel o nejrůznějších otázkách fyziky, přírodních věd a dějin. Měl rád a dobře znal ruskou literaturu, živě se zajímal o architekturu a malířství, neustále navštěvoval musea a výstavy, za pobytu v zahraničí dokonce objel řadu malých italských měst, studuje umělecká díla. Nikolaj Nikolajevič měl své hluboké a originální názory na literaturu a umění. Byl to člověk mimořádného duševního bohatství.

V posledních letech života bránila ve vědecké práci N. N. Luzinovi jeho choroba: trpěl srdečními záchvaty. Pokračoval však v houževnaté práci a zvláště se vrátil k vyšetřování v diferenciální geometrii. Smrt mu zabránila dokončit tuto práci. Mezi papíry, které zůstaly po jeho smrti, existuje ještě neprozkoumaný rukopis týkající se těchto otázek. Jeho poslední stránky byly psány doslova v posledních dnech života Nikolaje Nikolajeviče.

28. února 1950 N. N. Luzin neočekávaně skonal po těžkém srdečním záchvatu.

Obraz tohoto skvělého vědce, učitele celého pokolení matematiků, hlubokého myslitele, zanechává nevyhladitelnou stopu v sovětské matematické literatuře.

Z ruského originálu otištěného v knize Н. Н. Лузин „Интеграл и тригонометрический ряд“ přeložil *Otto Vejvoda*, Praha.

DISKUSE

K PROBLÉMU SLOVNÍCH ÚLOH V MATEMATICE

KAREL KOUTSKÝ, Brno.

(Došlo 8. dubna 1952.)

V časopise „Komenský“, roč. 76 (1951), str. 148 až 152, uveřejnil s. JOSEF TRAJER článek „Funkce slovních úloh v počtech“, v němž navazuje na usnesení předsednictva ÚV KSČ o učebnicích pro národní a střední školy ze dne 28. května 1951. Nelze popřít, že některé myšlenky s. Trajera jsou v zásadě správné a zasluhovaly by mnohem podrobnějšího rozvinutí, než jak to autor učinil, avšak na druhé straně se v článku vyskytly vážné nedostatky, chyby a omyly, s nimiž nelze souhlasit.

Proto začátkem prosince 1952 byl redakci „Komenského“ zaslán prof. dr. Frant. Vyčichlem z Ústředního ústavu matematického v Praze příspěv, nazvaný „Poznámky k článku J. Trajera: Funkce slovních úloh“ a podepsaný řadou našich předních matematiků, kteří jednomyslně se sjednotili na tom, že by bylo správné podrobit názory, vyslovené v zmíněném článku, podrobnému rozboru. Předběžně se ale omezili jen na některé zcela zřejmé chyby, jichž se s. Trajer dopustil.

Ačkoliv šlo o důležitou a aktuální věc, přece tento významný podnět k diskusi byl redakcí „Komenského“ odsunut až do 7. čísla (str. 410), které vyšlo koncem února 1952. Zároveň však byly připojeny další poznámky s. Trajera, nazvané „Odpověď na dopis prof. dr. Fr. Vyčichla a j.“ (str. 411), v nichž se s. Trajer pokouší obratně vyklíčovat a ulomit hroty oprávněným výtkám, jež mu byly učiněny.

Zdá se, jakoby si redakce časopisu „Komenský“ vzala přesný příklad z nezdravého zjevu, který tak ostře odsoudil s. J. ŽDANOV ve své stati „O kritice a sebekritice ve vědecké práci“ (viz Vysoká škola, roč. II, str. 76, Praha, leden 1952) těmito slovy: „V poslední době, kdy je stále obtížnější překážet rozvoji bolševické kritiky ve vědě, používají zbylí arakčejevci metody „neutralisace“ kritiky. Přijde-li do redakcí některých časopisů kritická stat, posílají ji k recenzi... kritizovanému. Potom, když jsou ostré hroty uhlazeny a formulace změkčena — to vše kvůli „uhlazenosti“ — vychází článek v časopise, jenže s doprovodnou odpovědí kritizovaného... Je nepochybné, že se to dělá proto, aby byl ihned neutralisován účinek kritiky.“

Takováto forma „sebekritiky“ ale nepřispěje k vyřešení žádného problému, tedy ani problému slovních úloh v matematice. Vytáčení a výmluvy zde nepomohou, zde je třeba jasné bolševické řeči. Praví-li s. Trajer ve své „Odpovědi“, že jeho chybou ovšem je, že se snažil tak rozsáhlý problém řešit v krátkém článku, nutno s ním souhlasit. Avšak naprosto nelze přijmout jeho lichou výmluvu, že „pak nutně došlo k některým formulacím, které musely být vykládány jinak, než zamýšlel“. Žádný čtenář neví, co autor „chtěl“ nebo „nechtěl“ říci. Čtenář vidí především tištěné slovo a z něho vyvozuje další úsudky. Čtenář je a musí být přesvědčen, že to, co autor *napsal*, skutečně také říci *chtěl*. Slovo autorovo musí být jasné a srozumitelné a naprosto nesmí být nějakým mlhavým pythickým orakulem, z něhož člověk může vyvozovat vše, co se mu právě hodí do krámu. Tím hůř je tomu, když autor sám je matematikem. V matematice víc než kdekoli jinde záleží na jasnosti, přesnosti a jednoznačnosti vyjadřování, a jestliže tedy s. Trajer nedovede své myšlenky vyjádřit srozumitelným, jednoznačným a přesným způsobem, neměl by vůbec o matematice psát. Uspořil by tím našim učitelům mnoho zbytečných pochybností a rozpaků a nezaváděl by je do okruhu bludných představ.

Jádro věci je však jinde. S. Trajer — když chce — dovede své myšlenky dobře formulovat, jak dokázal v některých částech svého článku. Vymlouvá-li se nyní, že právě v tomto článku došlo k některým formulacím, které *musely* být vykládány jinak než zamýšlel, pak to znamená, že si dostatečně nepřomyslel celou problematiku slovních úloh v matematice a jen zcela povrchně se dotkl některých jejích stránek. Ale znamená to též, že povýšenecky a tvrdošíjně hájí své nesprávné názory a odmítá každou jejich kritiku. Dále však nechť mluví fakty.

Ve svém článku s. Trajer praví: „... Tedy ani my nesmíme přeceňovat význam počtů (matematiky) pro poznání světa. Teprve v harmonickém spojení s ostatními předměty a při vhodném využití materiálu zejména z přírodovědy, zeměpisu, dějepisu, občanské nauky dosáhneme určeného cíle.“ A dále praví: „Nelze se domnívat, že logické matematické myšlení je výchozí základnou pro myšlení“. Obojí jest zcela správné. Avšak to, že s. Trajer uvádí tuto pravdu v nejužší souvislosti s nevhodně použitými citáty z článku sovětských autorů V. P. TUGARINOVA a L. E. MAJSTROVA: „Proti idealismu v matematické logice“, uveřejněném v českém překladu v Sovětské vědě 1951, oddíl matematika-fyzika, str. 274 až 283, ba dokonce, že ji těmito citáty odůvodňuje, naprosto jednoznačně svědčí o tom, že s. Trajer dokonale popletl dvě různé věci, totiž logické myšlení v matematice a t. zv. matematickou logiku, která je sice důležitým, ale přece jen speciálním odvětvím matematiky.

Přípis ÚÚM právem tedy vytýká s. Trajerovi, že jeho interpretace citovaných pasáží je zcela falešná, neboť autor v ní zcela neoprávněně klade rovnítko mezi matematickou logikou a logickým myšlením v matematice. S. Trajer odpovídá, že toto rovnítko nekladl, nýbrž že využil těs-

ného vztahu mezi oběma zmíněnými věcmi. Není pochyby, že tento těsný vztah mezi matematickou logikou a logickým myšlením v matematice skutečně existuje. Avšak týž těsný vztah existuje mezi *kterýmkoli* jiným odvětvím matematiky a logickým myšlením v matematice. Logické myšlení je bezprostředně a velmi těsně spjata nejen s matematickou logikou, ale se *všemi* odvětvími matematiky, algebrou, geometrií, diferenciálním a integrálním počtem, teorií množin atd. To, že s. Trajer vyzdvihuje právě matematickou logiku před všemi ostatními matematickými disciplinami i ve své odpovědi, velmi jasně ukazuje, že ještě ani teď nedospěl k pochopení zásadního rozdílu mezi matematickou logikou a logickým myšlením v matematice. Toto nepochopení pak zastírá prázdnotu argumentací, že tvrzení připisuje ÚÚM, týkající se matematické logiky, je nepřesvědčivé. Ve skutečnosti je však nepřesvědčivá právě argumentace s. Trajera.

Zmatek, který takto vznikl, dovršuje s. Trajer dalším citátem, že „snaha po nadvládě matematické logiky ve vědě se projevila taktéž v neodůvodněné snaze o rozšíření matematické logiky jako základny pro libovolnou vědu, speciálně pro logiku“. Myslíci čtenář pak ovšem nemůže dojít k jinému závěru, nežli že s. Trajer vyšel z obratně zamaskovaného předpokladu, že význam matematiky v průběhu vyučovacího a výchovného procesu jest *někým přeceňován* a že počty (matematika) si činí v soustavě učebních předmětů přednostní nárok na poznávání vnějšího světa.

Avšak matematika ani ve svém vědeckém vývoji, ani v procesu vyučování a výchovy žactva není a nemůže být nějakou universální vědou, která *jediná* by dovedla vysvětlit všechnu mnohotvárnost, složitost a podmíněnost jevů skutečného světa, a také žádný matematik-marxista jí tuto vlastnost nepřipisuje. To ovšem neznamena, že by matematické metody, které spočívají v logickém odvozování matematických poznatků z daných předpokladů, nebyly jednou z velmi důležitých a účinných method poznávání a přetváření vyvíjejících se faktů vnějšího světa. Tyto vyvíjející se fakty zkoumá matematika výlučně s hlediska kvantitativních vztahů a prostorových forem, odloučených od hmoty a studovaných v ryzím abstraktním tvaru. Právě tato stránka matematiky tvoří podstatu slavné, výstižné a *všeobecně známé Engelsovy* definice matematiky (viz Anti-Dühring, Praha 1947, str. 36 až 37). Je proto velmi podivné, že s. Trajer přisuzuje tuto engelsovskou definici matematiky sovětskému pedagogu I. A. Kairovovi, v jehož „Pedagogice“ (Praha 1950, str. 93) je uvedena pouze v kusé zkratce.

S. Trajer ve své „Odpovědi“ říká, že tím, že citoval vymezení matematiky z Kairovovy „Pedagogiky“, nepřipisoval Kairovovi Engelsovo vymezení, jak je uvádí ve svém spisu Anti-Dühring. Podívejme se však, *jak* s. Trajer toto vymezení citoval! Přesně tak že řekl: „...neboť matematika, jak *praví**) I. A. Kairov ve své Pedagogice (Praha 1950, str. 93)

*) Podtrženo mnou. K. K.

je věda o prostorových formách a vztazích skutečného světa“. A o Engelsevi ani slůvko. Každý člověk, který odjinud neví, že tato definice matematiky pochází od Engelse, bude tedy a musí být přesvědčen, že jejím původcem je I. A. Kairov. Přípis ÚÚM se tedy plným právem pozastavuje nad tím, že s. Trajer přisuzuje tuto slavnou definici I. A. Kairovovi a na tomto faktu nemůže nic změnit ani sebeobratnější výmluva s. Trajera.

Omyl s. Trajera je jistě závažný. A je závažný tím více, že s. Trajer odmítá poctivě přiznat, že se dopustil chyby a uchyluje se k nepřesvědčivé výmluvě. Požadujeme-li dnes na všech našich učitelích, aby se hluboce seznámili s díly klasiků marxismu-leninismu a aby získaných vědomostí používali v každodenní své práci, tím více to musíme požadovat od všech našich pedagogů a představitelů našich předních pedagogických institucí, zvláště vystupujících-li se svými tvrzeními na veřejnost. Vedoucí činitelé — a s. Trajer je jedním z nich — musí být vzorem našemu učitelstvu, musí mu předcházet dobrým příkladem. Jinak se náš boj a naše práce mine svého cíle: budou-li učitelé na školách vidět, že naši pedagogové nemají ani ty základní znalosti, které požadujeme na prostých učitelích, a že se všelijak vykrucují a vymlouvají, jsou-li jejich nevědomosti a omyly odhaleny, mohli by se snadno — a celkem oprávněně — domnívat, že ani oni se nemusí o své marxistické vzdělání nějak hlouběji starat.

Avšak s. Trajer se dopouští dalšího těžkého omylu. Své názory o matematice opírá mimo jiné též o tvrzení, jako by J. V. STALIN ve svých slavných statích o jazykovědě z roku 1951 zdůraznil přední místo mateřského jazyka ve vyučování. Není ovšem pochyby, že vyučování mateřského jazyka na školách je jednou z nejdůležitějších složek a přirozenou osou vyučovacího a výchovného procesu, a rovněž není pochyby, že Stalinyovy statí mají nesmírný význam i pro školní vyučování a že škola z nich musí vyvodit určité důsledky pro svou práci, jak správně připomíná s. Trajer ve své „Odpovědi“, avšak tyto okolnosti nijak nemohou zastítní fakt, že J. V. Stalin *nikde* ve svých statích o jazykovědě nemluví o školním vyučování, tedy ani nezdůrazňuje, že mateřský jazyk má v soustavě školních předmětů přední místo pro výchovu správného myšlení. Jestliže tedy s. Trajer ve svém článku praví, že „správné myšlení“ vychováváme v procesu vyučování všech předmětů, z nichž přední místo, jak zdůrazňoval již velký ruský pedagog Ušinskij, *J. V. Stalin ve svých statích o marxismu v jazykovědě**) a jak konečně zdůrazňuje i usnesení strany, má jazyk mateřský“, pak hrubě překrucuje skutečnost a autoritou Stalinyovou neoprávněně podpírá svůj osobní názor o matematice.

S. Trajer totiž praví, že matematické myšlení je myšlení speciální, které využívající čísla a míry přispívá k poznání objektivního světa, zejména jeho kvantitativních a prostorových forem a jevů. Leč to je pravda jenom z polovice. Matematické myšlení není myšlením speciál-

*) Podtrženo mnou. K. K.

ním, nýbrž myšlením *obecným*, které je právě tak úzce spjato s poznáváním reality objektivního světa jako jazyk. Samozřejmě, že se tato realita nedá popsat pouze matematickým způsobem, takže matematické poznání má do jisté míry omezený charakter. Sféra působnosti matematiky je nutně užší nežli sféra působnosti jazyka, ale to ještě neznamena, že by jazyk sám byl schopen popsat všechny bohaté jevy přírodní, fyzikální, chemické a jiné. K poznání těchto jevů je velmi často nezbytná i matematika, bez níž na př. mnohé pojmy fyziky atomových jader by se vůbec nedaly vytvořit. V této oblasti, kde k vytvoření pojmů nestačí běžná řeč se svou mnohoznačností slov, zastává matematika funkci odborného jazyka, který lépe než jakýkoliv jiný jazyk je schopen podat popis i vysvětlení jistých fyzikálních jevů. Má-li tedy mateřský jazyk velmi důležité postavení v soustavě školních předmětů — a to nikdo nepopírá, že má — má je matematika rovněž a naprosto není nějakým druhořadým učebním předmětem, jak by se mohlo vyvozovat ze slov s. Trajera.

Obrovskou důležitost matematiky a její významné postavení v soustavě učebních předmětů zdůraznil též M. J. KALININ ve svém projevu ze dne 17. dubna 1941 k žákům středních školeninského obvodu města Moskvy (viz Matematika a fyzika ve škole, roč. II, 1949—1950, str. 81 až 91). Jak známo, řekl v tomto projevu, že pro počátek, pro položení základů k tomu, aby se sovětská studující mládež stala tvůrcem velkého života, stačí, aby ovládala především tyto tři předměty svých učebních osnov: ruský (mateřský) jazyk, matematiku a tělesnou výchovu. O mateřském jazyku praví, že jeho znalost je to nejzákladnější, co potřebuje žák k další své práci, avšak současně vyzdvihuje matematiku jako druhý nezbytný školní předmět, neboť „matematika ukázněuje rozum, učí logickému myšlení“. Avšak z toho, že Kalinin pokládá matematiku za druhý nezbytný školní předmět, vůbec ještě neplyne, že by snad matematika zaujímal až *druhořadé* místo v soustavě školních předmětů. Kalinin se totiž dále táže: „Proč jsem postavil tělesnou výchovu do jedné řady s ruským jazykem a matematikou?“ Tedy Kalinin staví matematiku do téže řady s mateřským jazykem, považuje ji za stejně důležitou **jako** mateřský jazyk, t. j. zařazuje ji na *rovnocenné* místo s mateřským jazykem (a také s tělesnou výchovou) v soustavě školních předmětů. **Jestliže** se tedy ze slov s. Trajera může vyvozovat, že matematika je *nějakým* druhořadým učebním předmětem, pak je zřejmo, že s. Trajer říká *něco*, co říci neměl, co je v rozporu se skutečností a co zavádí naše učitele na bludnou cestu vulgárně-materialistického chápání matematiky **nejm** jako vědy, ale i jako vyučovacího předmětu.

Tím ale nepopíráme žádný z úkolů slovních úloh, které s. Trajer shrnuje na konci svého článku. To, co s. Trajer tam říká, je pravda, **tě** baže jeho vývody bylo by možno doplnit v různých směrech. Tak na **př** slovní úlohy mají též napomáhat k rozvíjení prostorové představivosti žáků, která je nesmírně důležitá v praktickém životě a v budování so-

cialismu, dále mají přispívat k řešení nesnadného problému polytechnické výchovy v matematice a konečně mají žactvu vštěpovat a v něm ustavičně upevňovat dialekticko-materialistické chápání podstaty úkolu a cíle matematiky.

Omyly s. Trajera — pokud se týká slovních úloh — jsou však jinde. S. Trajer říká, že slovních úloh využijeme při vyvozování nového učiva, kdy z vhodných slovních úloh vycházíme, ale i při aplikaci učiva, o níž běží nejčastěji. To je zcela správné. Avšak s. Trajer říká dále, že kdyby běželo pouze o aplikaci nového učiva, že bychom měli řešit celkem jednoduchý problém. To ovšem již správné není. Problém slovních úloh při aplikaci *každého* matematického učiva naprosto není jednoduchý, nýbrž naopak velmi složitý a mnohotvárný. Důkaz této složitosti a mnohotvárnosti podal ostatně s. Trajer sám, neboť na konci svého článku vytýčil *sedm* úkolů, které mají plnit slovní úlohy v naší jednotné škole (a my jsme k nim připojili ještě další tři úkoly).

Velmi přesvědčivým důkazem složitosti a mnohotvárnosti problému slovních úloh ve vyučování jsou však jiná slova s. Trajera, která pronesl hned na začátku svého článku. Zde řekl: „...často bude třeba, aby učitel nahrazoval nevhodné úlohy úlohami novými. Při tom nelze zastaralé úlohy zaměňovat novými jen tak nahodile. Je třeba mít na mysli, zda na př. typ nové úlohy je právě ten, který žáci ještě neumějí řešit anebo který řeší pouze s pomocí učitelovou. Bude třeba, aby učitel vhodně střídal úlohy podle jejich obsahu a struktury tak, aby co nejlépe plnil úkol vyučování počtům a měřivům“.

Avšak výběr slovních úloh, učitelovo rozhodování, která úloha je vhodná a která nikoliv, kterou by bylo třeba doplnit, po př. nahradit úlohou jinou, jak úlohy vhodně střídát podle jejich obsahu a struktury atd., zcela jistě není jednoduchý úkol, který by se dal snadno řešit. Zde nejen začátečník, ale i mnohý zkušený učitel, prošlý ohněm dlouholeté pedagogické praxe, bude v těžkých rozpacích. A vpravdě ani nelze žádat, aby učitel řešil problém slovních úloh sám bez veškeré pomoci. Naopak je nutné, aby učitelům pomohly všechny vedoucí složky našeho pedagogického a matematického života, ať je to již Výzkumný ústav pedagogický, Ústřední ústav matematický, pedagogické a přírodovědecké fakulty, školní úřady, pedagogické a matematické časopisy nebo jakákoliv jiná školská, pedagogická či matematická instituce.

Je sice pravda, že se s. Trajer pokusil dát učitelům jakýsi návod, jak postupovat při výběru a sestavování slovních úloh, avšak tento návod je neúplný, jednostranný a schematický. Nacházíme tu pouze řadu konkrétních příkladů, jak má učitel sestavovat slovní úlohy, aby významně přispěly k výchově uvědomělých socialistických pracovníků v duchu socialistického vlastenectví a proletářského internacionalismu, aby umožňovaly žákům poznat převahu socialismu nad kapitalismem, aby ukazovaly význam dělníkovy práce a probouzely o ni zájem, aby seznamovaly

žáky s velikou prací sovětského lidu a ukazovaly na význam bratrského přátelství a spojení se Sovětským svazem a se zeměmi lidových demokracií a aby v duchu usnesení byra Světové rady míru přispívaly k boji za mír. Naproti tomu není tu podána *ani jediná ukázka* toho, jak využít slovních úloh k tomu, aby přispěly k rozvoji žákova abstraktního matematického myšlení a k rozvoji jeho logického chápání věcí a jevů a aby umožnily žákům spojovat získané nové matematické vědomosti s vědomostmi známými (dříve získanými) a jednoduššími tak, aby žáci mohli pak těchto matematických vědomostí ve spojení s vhodnými dovednostmi a návyky použít k poznávání skutečného světa a k poznávání možností jeho přetváření. To je ovšem podstatný nedostatek návodu s. Trajera.

Při tom ale s. Trajer je si velmi dobře vědom toho, že tato stránka funkce slovních úloh v matematice je nesmírně důležitá a že kolem ní musí být soustředěna většina slovních úloh. To je především patrné z toho, že s. Trajer právě tuto stránku funkce slovních úloh zařadil na konci svého článku do *prvních tří úkolů*, které mají plnit slovní úlohy v naší jednotné škole. V souvislosti s tím se s. Trajer též odvolává na poznámky k sovětským osnovám počátečních škol na rok 1950, kde čteme: „Při řešení úloh se rozvíjí *matematické myšlení**) žáků a jejich důvtip. Řešení úloh má žákům pomoci, aby přesně pochopili konkrétní smysl početních výkonů, ujasnili si různé případy jejich použití a nabyli elementárních návyků nejjednodušší formy analýsy. Řešení úloh má být použito k tomu, aby si žáci ujasnili vztahy mezi různými veličinami, s kterými se setkávají v denním životě a jejichž vzájemná souvislost je co nejjednodušší.“ A konečně se s. Trajer odvolává na znamenitou knížku sovětského autora N. N. NIKITINA (Řešení aritmetických úloh, Praha 1951), kde na str. 13 čteme: „Úlohy jsou v počáteční škole jednak prostředkem k vyjasnění a osvojení základních matematických pojmů, jednak jsou prostředkem k rozvíjení *matematického myšlení****) žáků, k dovednosti usuzovat, logicky odůvodňovat svoje úsudky a používat počtářských návyků k řešení praktických otázek. Řešení slovních úloh musí prostupovat celým vyučováním matematiky, při čemž je nutno tuto práci postavit tak, aby na žácích vyžadovala přemýšlení a důvtip“.

Oba citáty představují oficiální sovětský názor na slovní úlohy v matematice. S. Trajer ovšem nemohl tento názor mlčky přejít a proto oba citáty ve svém článku skutečně uvedl. Mínil však, že „jistě je nemůžeme rozvádět“. My ale naopak soudíme, že je bezpodmínečně třeba, aby tyto citáty byly rozvedeny do šíře i do hloubky a aby aspoň na několika konkrétních příkladech bylo ukázáno, jak si má učitel počínat při rozvíjení matematického myšlení žákova a rozvíjení jeho schopnosti logicky usuzovat. Jestliže to s. Trajer neudělal, pak to znamená, že tento, nad

*) Podtrženo mnou. K. K.

**) Podtrženo mnou. K. K.

jiné důležitý úkol slovních úloh naprosto *podceňuje* a slovním úlohám při-
kládá daleko menší význam ve vyučování, než jaký skutečně mají. A tak
s. Trajer, vycházejí — ať již vědomě či nevědomky — ze skrytého před-
pokladu, že význam matematiky v průběhu vyučovacího a výchovného
procesu je někým přeceňován a že si počty (matematika) činí v soustavě
učebních předmětů přednostní nárok na poznávání vnějšího světa, končí
posléze jejím podceňováním.

S. Trajer ovšem ve své „Odpovědi“ praví, že „nic neříkal o přeceňo-
vání matematiky, nýbrž o skutečnosti, že nelze přeceňovat význam mate-
matiky pro poznání světa“. A říká dále, že „tím nikterak nezamýšlel
podceňovat význam matematiky, který je veliký jak pro výchovu vše-
stranně rozvitého člověka, tak i pro praktický život“. Důkazy, jež jsme
podali, však svědčí proti němu. Ale svědčí velmi výmluvně též o tom, že
s. Trajer se snažil svou „Odpovědi“ nejen ulomit hroty oprávněným vý-
tkám připisuje ÚÚM, ale obratně předejít i výtkám dalším. To znamená, že
se snažil *neutralisovat* kritiku svého článku přesně v tom smyslu, jak o tom
mluví s. J. ŽDANOV.

Leč to není vše. Nesprávná domněnka s. Trajera, že při aplikaci no-
vého učiva běží o řešení „celkem jednoduchého“ problému pokud se týká
slovních rovnic, svádí ho k ničím nepodložené výtce autorům nynějších
učebnic matematiky, že si prý tento problém mnohdy zjednodušovali zá-
libou v přílišném množství úloh typu: „Buď dáno...“ nebo „Mějmež...“
a pod. Aniž bychom chtěli nějak obhajovat autory učebnic, přece nechá-
peme, *proč* si chtěli zjednodušovat a hlavně *jak* si zjednodušovali problém,
který podle s. Trajera již sám sebou je „celkem jednoduchý“. Zdá se nám,
že lze zjednodušovat pouze něco složitějšího. Ale o to neběží, zde jde o zcela
jinou věc. S. Trajer totiž praví, že „přemíra úloh typu „Buď dáno...“
nebo „Mějmež...“ a pod. je nebezpečná, neboť vede přímo k myšlení
idealistickému“.

K tomuto závěru je však možno dojít jen z posice vulgárního mate-
rialismu, na níž se s. Trajer hned od počátku postavil, avšak s hlediska
materialismu *dialektického* je tomu jinak. Víme dobře, že největší učite-
lovou starostí při řešení slovní úlohy je, aby si žák z textu úlohy přede-
vším uvědomil, co je známé, t. j. které fakty jsou dány, a za druhé to, co
je neznámé, co nutno hledat, co se má počítat nebo sestavit. To je ovšem
jedna z věcí, kterým se žák musí učit a to učit soustavně. Každé učení ale
musí postupovat od jednoduchého k složitějšímu, od snadného k nesnad-
nému, od známého k neznámému. A právě tyto obecně uznané pedago-
gické a methodické zásady donutily autory učebnic, aby tento úkol hle-
děli aspoň někdy usnadnit žákům (nikoliv ale sobě) tak, aby žák přímo
z textu úlohy poznal co je známé, t. j. o jaké předpoklady se může opírat.

K dosažení tohoto cíle se v matematice obvykle používá rčení „Buď
dáno...“, „Mějmež...“ a pod. To však je pouhý slovní obrat, část mate-
matické symboliky a terminologie, která se ukázala tak významnou a

užitečnou ve vývojovém procesu matematické vědy i ve vývojovém procesu tvoření abstraktního myšlení žákov. A až dosud žádného člověka na světě — vyjímaje s. Trajera — nenapadlo, že by rčení „Buď dáno...“ a pod. bylo téhož typu jako biblické: „A řekl Bůh: Budiž světlo a stalo se!“ A vskutku, jedině z takovéto záměny mohlo by se vyvozovat, že ryze odborné rčení „Buď dáno...“ a pod. vede přímo k myšlení idealistickému.

Ukážeme na příkladě, jak hluboce se s. Trajer mýlí. Na př. z textu úlohy: „Sestrojte trojúhelník, je-li dána jeho strana a dva přilehlé úhly“ naprosto nelze vyvozovat, že by ta strana nebo oba ony úhly byly apriorně dány od věčnosti, nýbrž z tohoto textu plyne, že ta strana a oba ony úhly mají určitou velikost a že známe-li tuto jejich velikost, máme v tomto konkrétním případě hledaný trojúhelník sestrojit. A tak je třeba vykládat podobná odborná rčení i v jiných slovních úlohách. Jedině takovýto výklad je přirozený a správný, neboť se opírá o vědecké zásady dialektického materialismu.

Naproti tomu výklad s. Trajera je umělý, nesprávný a jednostranný. S. Trajer přehání, zvětšuje, nafukuje a nabubřuje jednu stránku objektivní skutečnosti na úkor stránek druhých, odtrhuje slovní výraz od skutečného jeho obsahu a od myšlení. To však podle Lenina (Empirio-kriticismus) je s hlediska dialektického materialismu charakteristickým rysem idealismu. S. Trajer vidí idealismus i tam, kde vpravdě žádný není, a tím sám do něho zapadá. Vycházejí z vulgárně materialistického chápání matematiky, ocitá se posléze uprostřed nejčistšího idealismu, a to idealismu velmi nebezpečného, jenž se skrývá pod zdánlivě materialistickou rouškou.

Tento idealismus velmi úzce souvisí s reakčními směry v americké pedagogice, které svého času za předmnichovské československé republiky se snažila i část našich pedagogů propagovat u nás. Vítězství lidu v roce 1948 učinilo ovšem definitivní konec všem podobným pokusům. Přes to však v myslích našich pedagogů zůstalo ještě mnoho zbytků buržoazního myšlení. Dnes, kdy pokrokový proletariát celého světa bojuje proti imperialistickým podpalovačům nové války, je třeba, abychom se všichni co nejrychleji zbavili všech buržoazních přežitků, které v nás dosud zůstaly a jež pomáhají reakčním silám k uskutečňování jejich temných cílů. Proto i naši pedagogové musí odvrhnout všechny buržoazní balast, jímž byla naše pedagogika do nedávné doby zamořena a musí se opřít o čisté a vítězné učení marxismu-leninismu. Nezdravé buržoazní názory musíme ustavičně a nemilosrdně odhalovat a bezohledně je potírat všude, kde se objeví. Proto byla napsána i tato kritika. Jejím cílem není znemožnit s. Trajera a zabránit mu v práci, nýbrž naopak mu pomoci a umožnit mu vystříhat se dalších chyb.

Avšak nejde pouze o s. Trajera. Daleko více jde o široké učitelské masy, kterým je třeba ukázat správnou cestu k marxistickému chápání výchovy. A i na tak malém úseku, jako je problém slovních úloh v mate-

matice lze vykonat kus veliké a záslužné práce. Vítáme proto diskusi o základních otázkách vyučování matematice, jak o ní mluví s. Trajer v 7. čísle časopisu „Komenský“. Jsme přesvědčeni, že jedině přímá, nesmlouvavá a nezastíraná výměna názorů širokých učitelských mas a vědeckých pracovníků může vnést jasno do těžkých a palčivých problémů vyučování matematice v dnešní socialistické škole.

RECENSE ČLÁNKŮ A KNIH

A) ČLÁNKY

Eduard Čech: Projektivní diferenciální geometrie korespondencí mezi dvěma prostory I-V. Časopis ruský 77 (1952), str. 91 až 188.

Český výtah článku I byl již uveřejněn v *Časopise pro pěstování matematiky a fyziky*, roč. 74 (1949), str. 46—48, článku II tamtéž, roč. 75 (1950), str. 135—136, článku III tamtéž, roč. 75 (1950), str. 157—158. V následujícím podám stručný obsah článků IV a V.

Článek IV se rozpadá na dvě části. V první části běží o problém asymptotické transformace přímkové kongruence L trojrozměrného prostoru S_3 v přímkovou kongruenci L' prostoru S_3' . To znamená takovou bodovou transformaci prostoru S_3 v prostor S_3' , při které každá přímka kongruence L přejde v přímku kongruence L' a mimo to platí, že je-li R zcela libovolná zborcená plocha prostoru S_3 složená z přímek kongruence L , a je-li R' obraz plochy R při uvažované transformaci, potom vždy obrazem každé asymptotické křivky plochy R je asymptotická křivka plochy R' . Ukazuje se, že řešením tohoto problému jsou přesně ty korespondence mezi prostory S_3 a S_3' , které byly nalezeny při řešení zcela jiného problému v článku III. Ve druhé části článku IV se na základě teorie K -linearisujících transformací, vyložené v článku I, dospívá k novému typu transformace přímkové kongruence L v přímkovou kongruenci L' , který se v případě kongruencí se dvěma různými fokálními plochami dá geometricky charakterisovat takto: Každá přímka p kongruence L přejde v příslušnou přímku q kongruence L' projektivitou π , při které obrazem každého ohniska kongruence L na přímce p je ohnisko kongruence L' na přímce q a mimo to platí, že jestliže přímka p opisuje rozvinutelnou plochu obsaženou v L , která má na p bod vratu M , potom přímka q opisuje rozvinutelnou plochu obsaženou v L' , která má na q bod vratu πM . Mimo to jsou studovány ještě určité transformace parabolických kongruencí, jejichž geometrická charakterisace je značně složitější a nebudu ji zde uvádět.

V článku V běží o takové korespondence, které jsou obálkami kolineací. Nejprve jsou určeny a geometricky popsány všechny obálky jednoparametrové soustavy kolineací n -rozměrného prostoru, při čemž se ukazuje, že řešením problému jsou pouze takové korespondence, které se vyskytly už v článku II. Mimo to jsou v článku VI určeny všechny obálky dvouparametrové soustavy kolineací trojrozměrného prostoru; podstatným prostředkem k řešení tohoto problému jsou výsledky docílené v druhé části článku V.

E. Čech, Praha.

B) KNIHY

F. Kadeřávek-K. Havlíček: Technická geometrie v lékařství a strojí inženýrství. Sbírka Kruh, sv. 36, vydalo Přírodovědecké vydavatelství v Praze 1952, 84 stran, Kčs 72,—.

Tato recenze po matematické stránce může být nanejvýše polovičním posudkem knížky, která vyžaduje stejně, ne-li více, posudku lékařsky-fyzikálního. Matematický výklad je tu i po stránce náplně i po stránce metody podřízen svému účelu —

aplikacím na lékařství. Domnívám se, že vzhledem k poslání, které knížka má, t. j. seznámiti studující lékařství (pokud nestudovali desk. geometrii na gymnasiu) s jistými pro ně potřebnými elementárními geometrickými poznatky, zvolili autoři velmi vhodnou formu. Na theoretické poznatky navazují ihned medicínské aplikace; tímto uspořádáním a dále tím, že matematický výklad nezabíhá do zbytečných podrobností, neunavují čtenáře nematematika. Na druhé straně předpokládají u čtenáře jistou zběhllost v matematickém usuzování a do jisté míry vypěstovanou představitost, jaké asi má mít absolvent gymnasia.

Knížka se skládá ze tří částí: první obsahuje vysvětlení principů pravoúhlého promítání na jednu průmětnu a jeho aplikace (užití v roentgenoskopii, grafické izolování orgánů, plastická rekonstrukce) a dále promítání na dvě a více průmětů, které však nevyuští v žádné lékařské využití. Druhá část se zabývá promítáním centrálním, bicentrálním (polycentrálním) i s modifikací pohyblivého středu a pohyblivé průmětny. Je zaměřena k aplikacím v roentgenologii (určení polohy cizího tělesa v těle, stereoskopické zobrazování, užití clon, stratigrafické Roentgenovy snímky). Třetí část obsahuje stručný nástin kinematické geometrie a její použití pro studium pohybů lidského těla (strojní prothetika, t. j. konstrukce prothes).

V první a druhé části dovolil elementární charakter věci vyložití úplně základní poznatky o obou druhích promítání. Tyto dvě části jsou po matematické stránce pěkně a účelně zpracovány. Snad by tu bylo mohlo být i stručné poučení o kosoúhlém promítání, jehož se v aplikacích (str. 21 a d.) užívá. Naproti tomu v geometrii pohybu nutil autory sám předmět, omezit se jen na uvedení základních faktů. Bylo by bývalo jistě účelné, vysvětlit aspoň stručně některé složitější pojmy, které určitě nejsou čtenáři známy (na př. spojitý pohyb, obálka přímk, evoluta a pod.). Nemám tím na mysli ani exaktní definice opřené o infinitesimální úvahy ani pouze etymologický výklad, ale spíše názorné vysvětlení, kterým se popisuje vytvoření určitého útvaru, ovšem s příslušnými poznámkami, co by bylo třeba matematicky odůvodnit. Je jisté, že by tím byl poněkud vzrostl rozsah knížky, ale jistě jen k jejímu prospěchu. Myslím, že v nynější podobě zanechává výklad o kinematické geometrii u čtenáře mnoho nejasností.

Na druhé straně bylo snad možné, vynechat při pravoúhlém promítání zavedení souřadnicového systému, který vzbuzuje na počátku mylné představy o souvislosti průmětů a souřadnicových rovin. Je tu konečně i otázka, zda by nebylo bývalo možné, vyhnouti se vůbec zavedení nevlastních (úběžných) elementů, které nebylo lze provést při rozsahu a zaměření knížky exaktně a které možná svádí k chybným představám (bod v nekonečnu).

V názvosloví se někde kniha rozchází s terminologií dnes zavedenou na školách (kolmé promítání místo pravoúhlé, symetrála úsečky místo osa, posuv místo posunutí a j.). Bylo by snad bývalo také vhodné, vyhnouti se při označování symbolům těžko stravitelným nedeskriptivářím (${}^1V_{1\infty}$, ${}^1P_1^k$, ${}^1H_1^{\alpha}$ *) a při vyslovování matematických vět obejít nic neříkající slovo „obecně“.

Velkou předností knížky je její styl, který je velmi živý a — myslím — i nematematikovi dobře přístupný. Další předností je řada pěkných obrázků v textu i příloh na konci knihy.

Celkem lze říci, že z hlediska matematika je tato publikace velmi cenným a originálním příspěvkem pro popularisaci matematiky mezi pracovníky jiného vědního oboru a pro styk matematické teorie s praxí.

Jan Vyšín, Praha.

V. N. Faddejeva: **Numerické metody lineární algebry.** (B. H. Фаддеева: **Вычислительные методы линейной алгебры.**) Gostechizdat, 1950, 250 stran, cena 7,85 r.

Jak známo, ohromný počet problémů aplikované matematiky vede na základní úlohy lineární algebry: řešení systému lineárních algebraických rovnic, inverse matice, výpočet charakteristických kořenů a charakteristických vektorů matice. Přesto, že

*) Možná, že by bylo na místě, vysvětlit i index místo exponentu (M^{α}).

řešení těchto problémů se opírá o dostatečně široce a hluboce vypracované matematické teorie — teorii determinantů, teorii lineárních transformací a teorii matic — a je tedy po theoretické stránce značně jednoduché, v praxi je většinou spojeno se značnými potížemi.

Máme na mysli především značný objem numerické práce nutné k vyčíslení řešení každého problému (v nejlepších methodách je úměrný třetí mocnině řádu příslušné kvadratické matice) a také relativně poměrně složitou závislost přesnosti vypočteného výsledku na daných hodnotách, na methodě řešení, a na přesnosti, s kterou jsou prováděny jednotlivé aritmetické operace v průběhu výpočtu.

V poslední době, s jedné strany vlivem vzrůstající potřeby aplikovaných věd a s druhé strany vlivem praktické možnosti (která je způsobena bouřlivým rozvojem numerické techniky) řešiti ty problémy lineární algebry matic vyšších řádů, o kterých jsme se zmínili výše, se stále objevují nové práce věnované numerickým methodám lineární algebry.

Práce sovětských matematiků zaujímají mezi nimi základní místo. Stačí jen vzpomenout na metody vyčíslení determinantu *A. N. Krylova* a *A. M. Danilevského*, na práci *K. A. Semendjajeva* „O výpočtu charakteristických kořenů a invariantních variet matic pomocí iterací“, na metody zlepšující konvergenci iteračního procesu *L. A. Ljusternika*, *M. K. Gaburina*, *A. A. Abramova*, na metody řešení systému lineárních rovnic *L. V. Kantoroviče* a *A. M. Lopšice*, které jsou založeny na minimalisaci některých kvadratických funkcionalů svázaných s maticí systému.

Ale všechny tyto práce (jako konečně i většina zahraničních prací věnovaných tomuto tematiku) byly publikovány v časopisech a nestaly se majetkem širokých matematických a inženýrských kruhů.

Kniha *V. N. Faddejevy* je v podstatě v matematické literatuře první knihou, která je věnována systematickému přehledu základních numerických method lineární algebry, v čemž vidíme velikou zásluhu autora. Autor definuje v předmluvě svůj cíl takto: „Tato kniha představuje pokus o systematisování nejdůležitějších numerických method lineární algebry, jak prací klasických, tak prací z posledních let. Autor si nečiní nárok na vyčerpávající úplnost a uvádí jen ty metody, které už byly ověřeny v praxi. Při výkladu se autor nesnažil o naprosto bezvadnou přesnost výkladu a neprobíral ani všechny možné případy, které se mohou vyskytnout v aplikacích té či oné metody, ale omezil se jen na příklady typické a v praxi nejdůležitější.“

Svého cíle autor zcela dosáhl. *)

Kniha má tři kapitoly. První kapitola má úvodní charakter a obsahuje ty partie z lineární algebry, které jsou potřebné v dalších kapitolách knihy. V § 1 této kapitoly je definován pojem matice a algebraické operace s maticemi. Zvláště jsou zdůrazněny pro další výklad velmi důležitá pravidla sčítání a násobení matic rozdělených určitým způsobem na pole a speciálně matice vroubené a kvasidiagonální. Dále je definován charakteristický a minimální polynom a jsou odvozeny *Hamilton-Kellyho* vztahy. Definují se elementární transformace matice a ukazuje se, že tato operace v podstatě odpovídá násobení dané matice zleva, resp. zprava, vhodnou trojúhelníkovou maticí. Dokazuje se věta o rozložení libovolné matice na součin dvou trojúhelníkových matic. V § 2 se zkoumají základní vlastnosti n -rozměrného komplexního vektorového prostoru. Zavede se pojem lineární závislosti a pojem base a ukazuje se, že počet vektorů base je nezávislý na způsobu jejich výběru. V dalším je popsán proces orthogonalisace systému lineárně nezávislých vektorů. Pak jsou

*) Doplněním recenzované knihy může být cyklus přehledných statí o aplikované lineární algebře, které byly publikovány a reprodukovány v časopise *Uspěchi matem. nauk* (stat *G. Weilenda*, díl II, sv. 4, 1947), *L. Foze*, *Ch. D. Chaskiho* a *D. Wilkinsona*, *M. Š. Birmana*, *M. K. Gavurina*, *D. P. Grossmana*, díl V, sv. 3, 1950, *A. Turinga*, díl VI, sv. 1, 1951, *M. R. Šury-Bury*, díl VI, sv. 4, 1951 a některé práce v *Trudech Matem. instituta im. V. A. Steklova*, sv. XXVIII, 1949.

odvozeny transformační vzorce pro souřadnice vektoru při transformaci base. Ukazuje se souvislost mezi rozměrem podprostoru vytvořeného konečným systémem vektorů a hodnotami matice souřadnic těchto vektorů (věta o hodnotě matice, z které plyne tato souvislost se uvádí bez důkazu). V § 3 se zkoumají lineární zobrazení n -rozměrného vektorového prostoru. Definují se operace s lineárními zobrazeními. Odvozují se vztahy mezi lineárním zobrazením (transformací) a maticemi a mezi maticemi jednoho a téhož zobrazení v různých bázích. Zavádí se pojem charakteristického kořenu (čísla) a charakteristického vektoru lineárního zobrazení a jeho matice. Dokazují se některé vlastnosti charakteristických kořenů a charakteristických vektorů reálných matic, mezi jiným — orthogonalita mezi charakteristickými vektory reálné matice a charakteristickými vektory matice s ní transponované. Jako speciální případ jsou pak odvozeny základní vlastnosti charakteristických kořenů symetrických matic. Jsou uvedeny některé vlastnosti pozitivně definitních kvadratických forem a hermitovsky symetrických matic. Dokazuje se, že je možno matici, která má vesměs různé charakteristické kořeny, převést na diagonální tvar a ukazuje se možnost takového kanonického tvaru pro matice symetrické. Odvozují se vztahy mezi charakteristickými kořeny a charakteristickými vektory podobných matic a též vztahy mezi charakteristickými kořeny matice a charakteristickými kořeny maticového polynomu této matice (pro zjednodušení je důkaz proveden jen pro případ, kdy má matice charakteristické kořeny vesměs různé). § 4 je věnován podrobnému popisu *Jordanovy* kanonické formy (věta o možnosti uvedení libovolné matice na *Jordanův* kanonický tvar pomocí podobnostních transformací je pouze formulována, ale není dokazována). Kapitola ukončuje § 5, v kterém je definována limita vektoru a matice. Tento pojem je pak v dalším používán při vyšetřování iteračních metod řešení problémů lineární algebry. Autor uvádí tři normy vektoru v n -rozměrném vektorovém prostoru (vektor prostoru označíme $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$;

$$\|X\|_I = \max_i |x_i|; \|X\|_{II} = \sum_{i=1}^n |x_i|; \|X\|_{III} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

a odpovídající normy matice A jsou definovány jako $\max_{\|X\|=1} \|AX\|$. Ke konci paragrafu jsou uvedeny a dokázány některé věty, které se týkají podmínek existence limity $\lim_{m \rightarrow \infty} A^m = 0$ a konvergence *Neumannovy* řady $E + A + A^2 + \dots$.

Kapitola II je věnována třem příbuzným úlohám: problému řešení systému lineárních algebraických rovnic, problému inverze matice a problému eliminace. V § 6 jsou uvedeny některé varianty Gaussovy metody řešení soustavy lineárních rovnic postupnou eliminací; řešení pomocí této metody spočívá ve dvou krocích: odvození „trojúhelníkového“ systému ekvivalentního danému systému (podle terminologie autora „přímý pochod“) a řešení tohoto systému (podle terminologie autora „inversní pochod“). V § 7 je uvedena metoda vyčíslení determinantů pomocí operací téhož typu jako „přímý pochod“ Gaussovy metody. § 8 je věnován popisu kompaktního schématu řešení systému lineárních rovnic. Tento systém představuje zkrácení numerického schématu Gaussovy metody a je založen na tom, že je možno na počítačích strojích vypočítati výrazy typu $\frac{1}{c} \sum_{i=1}^n a_i b_i$ bez pomocných mezivýpočtů.

V § 9 je vyložena souvislost mezi methodou Gaussovou a rozkladem matice systému na součin dvou trojúhelníkových matic. § 10 je věnován methodě druhých odmocnin obzvláště výhodné pro řešení systému se symetrickou maticí. V § 11 jsou popsány metody inverze dané matice založené na methodách řešení systému lineárních rovnic vyložených v předešlých paragrafech. V § 12 je formulována úloha „eliminace“ (tak nazývá autor vyčíslení lineární formy tvaru $\sum_{i=1}^n c_i x_i + d$, kde c_i, d jsou daná čísla a $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je řešení daného systému lineárních rovnic). Autoru

vádí metodu jejího řešení, ke které není třeba znát čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ukazuje se, že řešení systému lineárních rovnic a inverze matic vede ke speciálním problémům teorie eliminace, a proto mohou být tyto případy řešeny použitím uvedené metody eliminace. V § 13 je popsána metoda zlepšení nalezeného hrubého přiblížení k hodnotě inverzní matice. V § 14 je ukázáno, jak je možno tím, že rozbijeme danou matici na pole, převést úlohu vyčíslení matice inverzní k dané matici na úlohu vyčíslení inverzních matic nižšího řádu. V § 15 je uveden analogický způsob pro vyčíslení matice inverzní k matici n -tého řádu, která vznikla ovroubením matice řádu $(n - 1)$ -ho, jejíž inverzní matice má známou hodnotu, a ukazuje se, jak tento způsob může se použít pro vyčíslení inverzní matice a řešení lineárního systému metodou „ovroubení“. V § 16 je uveden „schodovitý“ způsob řešení systému lineárních rovnic (publikovaný *Morissem* v r. 1946) a je uveden jeho vztah k metodě vroubení a metodě Gaussové.

§§ 17—19 jsou věnovány základním iteračním metodám: různým variantám obyčejné metody a metodě Seidlově. Jsou zde uvedeny některé podmínky konvergence iterační metody, které plynou z vět § 5, prozkoumána souvislost mezi obyčejnou iterační metodou a metodou Seidlovou a uvedeny některé podmínky konvergence metody Seidlové (zvláště čistě algebraický důkaz, který byl publikován *Reichem* r. 1950, že ke konvergenci Seidlových metod řešení soustavy rovnic o matici A stačí, aby matice A byla pozitivně definitní; tato podmínka je v případě pozitivních diagonálních elementů matice A i nutná).

V § 20 jsou navzájem porovnány jednotlivé metody uvedené v kapitole II.

V kapitole III jsou zkoumány metody vyčíslení charakteristických kořenů a charakteristických vektorů matice. V § 21 je objasněna algebraická podstata metody *A. N. Krylova* o převedení charakteristického determinantu na tvar polynomu. Nalezené charakteristické hodnoty mohou být použity pro výpočet charakteristických vektorů (pouze v případě jednoduchých kořenů). V § 23 je popsána metoda *Samuelsonova*. V § 24 je popsána *Danilevského* metoda o rozvedení charakteristického determinantu v polynom a ukázáno, jak lze této metody použít při výpočtu charakteristických vektorů. V § 25 je vyložena *Leverrierova* metoda vyčíslení koeficientů charakteristické rovnice a *D. K. Faddejevova* modifikace této metody, umožňující provedení výpočtu charakteristických vektorů a hodnoty inverzní matice. V § 26 je popsána „schodovitá“ metoda stanovení všech charakteristických kořenů a charakteristických vektorů matice a matice k ní transponované pro případ, že kořeny tak zvaných schodovitých rovnic jsou reálné a různé. V § 27 je uvedena interpolační metoda přibližného rozvedení determinantu, jehož prvky jsou polynomy v λ v polynom v λ a uvedena tabulka interpolačních koeficientů, která je velmi výhodná při praktických výpočtech. V § 28 jsou uvedené metody stručně mezi sebou porovnány.

§§ 29—35 třetí kapitoly jsou věnovány iteračním metodám. V § 29 je podána metoda vyčíslení prvních (s největším modulem) charakteristických kořenů a charakteristických vektorů v případě, že jsou reálné, a elementární dělitelé matice lineární. V § 30 je popsáno několik způsobů zrychlení konvergence iteračního procesu, v §§ 31 a 32 metody vyčíslení ostatních charakteristických kořenů a jim odpovídajících charakteristických vektorů (za těchto předpokladů jako v § 29). V § 33 je zcela krátce zkoumán případ, kdy matice má dvojici komplexně sdružených charakteristických kořenů s maximálním modulem, a jako dříve všechny elementární dělitele lineární, v § 34 pak případ nelineárních elementárních dělitelů. Konečně § 35 je věnován zrychlení konvergence iterační metody při řešení systému lineárních rovnic, která pochází od *L. A. Ljusternika*.

V celé II. a III. kapitole se předpokládá, že elementy uvažovaných matic jsou reálné.

Jak je vidět z výše uvedeného obsahu knihy, obsahuje tato kniha při poměrně nevelkém objemu mnoho materiálu. Autor krátce a jasně, aniž by zatěžoval výklad zbytečnými detaily, ukazuje podstatu uvedených metod a jejich vzájemné sou-

vislosti. Dokonce i v prvé kapitole, která má čistě úvodní charakter, můžeme najít několik pěkných důkazů (ku příkladu důkaz věty o rozkladu matice na součin dvou trojúhelníkových matic, důkaz věty § 1 a 2). Velmi šťastné je též zavedení několika norem v n -rozměrném vektorovém prostoru v § 5 kap. I, které umožňuje vyslovení několika konkrétních vět o konvergenci iteračních procesů z obecných theoreticko-funkcionálních úvah. Zkoumání jednotlivých method autor rozvádí do pečlivě vypracovaných početních schemat (bere v nich zřetel na dostatečně spolehlivé metody kontroly) a doprovází ilustrujícími číselnými příklady.

Dovolím si nyní uvést některé nedostatky knihy. Vzhledem na cíl, který si autor stanovil v předmluvě, nelze mu dělati výčitek, že ponechal bez povšimnutí řadu method řešících zkoumaný problém. Nicméně některé obecné problémy a konkrétní výsledky by se měly v knize odrážet větší měrou. Mám na mysli především otázky přesnosti (které byly v poslední době předmětem mnoha prací). Stručné poznámky, na které se omezil autor, zůstávají ve většině případů neodůvodněné. V knize není též zmínka o možnosti využití prostředků současné numerické techniky, především automatických číslicových strojů, při řešení podobných problémů, třebaže je tomuto tematiku věnováno mnoho prací.

Při výkladu způsobu výpočtu charakteristických vektorů založeném na methodě A. N. Krylova autora nepřipomíná práci A. M. Lopšice (*Trudy seminaru po vektornomu i tenzornomu analyzu* sv. VII, 1949), jehož obsah se částečně kříží s obsahem uvedeného paragrafu.

Když mluví o iteračních methodách řešení systému lineárních rovnic, autor neuvádí efektivní a v praxi prověřenou methodu A. A. Abramova zlepšení konvergence (*DAN, SSSR, 74, 6* (1950), 1051) a modifikaci Seidelovy metody pro systémy s pozitivně definitní maticí, kterou nedávno uveřejnil Aitken.

Autor neuvádí vždy objem numerické práce nutné pro řešení úlohy tou či onou methodou (což může čtenáři znesnadnit výběr nejvhodnější metody). Takové pokyny chybí ku příkladu v § 8, §§ 10—16 kap. II, § 22, 26 kap. III. Objasnění uvedených numerických příkladů jsou někdy velmi stručná, což ztěžuje využití knihy čtenáři, který se dobře nevyzná v detailech theorie uvedené metody. Zatím by bylo ovšem výhodné, kdyby mohl knihy používat pro informaci i kvalifikovaný počtář, který není obeznámen s teorií používané metody. Methody, kterých se používá pro nesymetrické matice, bylo by lépe ilustrovat na řešeních příkladů s nesymetrickými maticemi.

Někdy jsou tvrzení autora nedostatečně odůvodněna. Tak na příklad na str. 65 se říká, že věta 1 se v obecném případě dokazuje „bud pomocí úvah o spojitosti neb pomocí přechodu ke kanonickému Jordanově tvaru“. Nám se zdá nepravděpodobné, že by bylo možno tuto větu dokázat v obecném případě jen pomocí úvah o spojitosti, bez použití Jordanova kanonického tvaru nebo jiných algebraických vztahů. Z popisu schodovité metody řešení systému lineárních rovnic není vidět jak jsou definovány hodnoty neznámých $x_i = z_{i,n+1}$ po definování všech z_{ik} pro $i < k \leq n$. Není jasná poznámka o relativní rychlosti konvergence obyčejné iterační metody a Seidelovy metody na str. 134 a poznámka na str. 145 o podmínkách, kdy je třeba dáti přednost iterační methodě před jinými methodami řešení systému lineárních rovnic.

Některé termíny a výrazy nejsou dost vhodné (jindy nepřesně definované). Tak na př. (str. 55) místo „největší společný dělitel“ autor píše „obecný největší dělitel“, nebo místo „iterační“ píše „iterativní“, místo „hlavní minor“ „minor ležící na hlavní diagonále“ (str. 19, 147); na str. 177 je uveden výraz „trhliny v pomocných determinantech“, jehož smysl není přesně definován; Morrisova metoda by se měla podle našeho mínění jmenovati spíše stupňovitá nebo žebříkovitá než schodovitá. Když zavádí pojem minimálního polynomu (str. 20) autor neuvádí, že by jeho existence a jednoznačnost měly být dokázány a že se též obyčejně klade koeficient u nejvyšší mocniny polynomu rovný jedné.

Nakonec padne do očí značný počet tiskových chyb, které jsou v knize (námi

bylo napočteno 56 tiskových chyb, ale ve skutečnosti je jich jistě ještě více). Tak na př. na str. 110 v levé části vzorce (13) je A_{n-1}^{-1} místo A_n^{-1} ; na str. 114 řádek sedmý shora je $A^{-1}u_n$ místo $A_{n-1}^{-1}u_n$; ve druhé z obou matic na str. 132 jsou vytištěny písmena a místo b , v desáté řádce shora na téže straně je A místo B ; na pravé straně posledního ze vzorců (14) na str. 189 je vytištěno a_{44} místo $Sp A_4$. V soupisu citované literatury je v [2] u práce *N. N. Luzina* špatně uveden rok, u práce *K. A. Semendjajeva* je špatně uveden svazek časopisu atd.

Nehledě na uvedené nedostatky, ukazuje se kniha bezpodmínečně potřebnou širokému kruhu inženýrů i matematiků zabývajících se aplikovanými vědecko-výzkumnými pracemi a její vydání je nutno vřele přivítat.

D. G. Grossman.

Přeložil *O. Koníček*, Praha.

I. G. Petrovskij: Přednášky o parciálních diferenciálních rovnicích. (И. Г. Петровский: Лекции об уравнениях с частными производными.) Gostechizdat, Moskva-Leningrad, 1950, 340 str. Náklad 15 000. Cena 3,80 r.

Vyjítí přednášek *I. G. Petrovského* bylo očekáváno s velkým zájmem; a tento zájem byl plně ospravedlněn. V porovnání s jinými pracemi o téže tematice — sovětskými i zahraničními — je zmíněná kniha v mnohém nová a originální i co do obsažené látky i co do method výkladu. Jeví se v tom jasně autorova záliba i zaměření jeho vědeckých bádání. Největší pozornost je soustředěna na obecné otázky theorie parciálních diferenciálních rovnic. Výklad je stručný, bez zbytečných řečí. Na konci každé partie je přehled (bez důkazů) nových výsledků v příslušné oblasti. Po dokázání základních vět, a také na jiných místech knihy, autor často připojuje řadu zajímavých poznámek k hlavnímu textu.

Prvá kapitola obsahuje úvod do klasifikace rovnic. Druhá, věnovaná rovnicím hyperbolického typu, je rozdělena na dvě části: *Cauchyho* úloha v oblasti neanalytických funkcí a kmity omezených těles. V třetí a čtvrté kapitole je vyložena theorie eliptických a parabolických rovnic.

Přejdeme k podrobnějšímu zkoumání jednotlivých kapitol.

Prvá kapitola začíná definicí pojmů, majících vztah k rovnicím matematické fyziky a k formulaci problémů pro tyto rovnice. Ve druhém paragrafu je proveden důkaz věty *Kovalevské* pro *Cauchyho* problém v analytickém případě; v třetím je vyšetřována obecná *Cauchyho* úloha pro soustavu rovnic, napsaných v implicitním tvaru, a zavádí se pojem charakteristik. Podrobně a zajímavě je sestaven čtvrtý paragraf, věnovaný otázce jednoznačnosti řešení *Cauchyho* problému v oblasti neanalytických funkcí. Je podán důkaz *Holmgrenovy* věty o jednoznačnosti řešení *Cauchyho* úlohy pro soustavu lineárních rovnic s analytickými koeficienty ve třídě neanalytických funkcí a jsou uvedeny další výsledky *Hadamardovy* a *Carlemanovy*. Na konci paragrafu jsou uvedeny některé dosud nerozřešené otázky.

Na konci první kapitoly je vyšetřováno převedení na kanonický tvar v bodě obecných lineárních rovnic a jejich klasifikace, a také převedení na kanonický tvar v oblasti pro rovnice 2. řádu s dvěma nezávisle proměnnými.

Zvláštní zájem budí poslední paragraf první kapitoly, v němž je vyšetřována redukce soustavy lineárních rovnic prvního řádu s dvěma nezávisle proměnnými na kanonický tvar pomocí lineární transformace funkcí s podrobným objasněním hladkosti koeficientů této transformace. V souvislosti s uvedenou transformací je zavedena definice eliptické soustavy, hyperbolické soustavy a soustavy hyperbolické v užším smyslu.

Originální a obsahově bohatá je první část druhé kapitoly. Je věnována, jak už jsme uvedli, *Cauchyho* úloze v oblasti neanalytických funkcí. Po objasnění korektnosti *Cauchyho* úlohy a po krátkém výkladu hlavních myšlenek zobecněného řešení parciálních diferenciálních rovnic řeší autor *Cauchyho* úlohu pro hyperbolickou soustavu 1. řádu s dvěma nezávisle proměnnými. Řešení je určeno soustavou lineárních

integrálních rovnic *Volterrova* typu s integrační cestou podél charakteristik soustavy. Autor dokazuje existenci a jednoznačnost řešení ve třídě funkcí se spojitými derivacemi prvního řádu, a také korektnost uvedené Cauchyho úlohy.

Dále se vyšetřuje Cauchyho problém pro vlnovou rovnici s počátečními hodnotami pro $t = t_0$ v jedno-, dvou- a třídimensionálním případě a je proveden důkaz věty o jednoznačnosti pro dvakrát spojitě diferencovatelná řešení. Důkaz existence řešení je proveden verifikací známého vzorce pro třídimensionální případ. Dvou- a jednodimensionální případ se dostanou postupným anulováním proměnných. Celá partie o Cauchyho úloze pro vlnovou rovnici obsahuje řadu cenných poznámek o podstatě otázky. Speciálně, při vyšetřování vzorců, dávajících řešení Cauchyho úlohy, je objasněna otázka difuze vln.

Potom následuje několik paragrafů, neobvyklých v matematické knize o parciálních diferenciálních rovnicích, o *Lorentzově* transformaci a matematických základech speciálního principu relativity.

V souvislosti s Lorentzovou transformací je objasněna otázka Cauchyho problému pro vlnovou rovnici s počátečními podmínkami danými na nadrovině v závislosti na úhlu, který svírá nadrovina s časovou osou. Velmi bohatý na materiál je poslední paragraf první části druhé kapitoly, v němž je podán přehled základních faktů v teorii Cauchyho úlohy pro obecné hyperbolické rovnice. Jsou zde uvedeny výsledky dosažené samým autorem a *S. L. Sobolevem* a také výsledky metody konečných diferencí (práce *Courantova*, *Friedrichsova*, *Lewyho*).

Přejdeme ke druhé části druhé kapitoly (kmity omezených těles).

V této části po důkazu jednoznačnosti řešení smíšené úlohy pro vlnovou rovnici je podrobně objasněna spojitá závislost řešení na počátečních podmínkách v jednorozměrném případě. Metodou *Fourierovou* je řešena úloha o kmitech struny. Dále je v řadě paragrafů vyložena *Fourierova* metoda pro hyperbolickou rovnici tvaru:

$$A(t) \frac{\partial u}{\partial t^2} + C(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D(t) \frac{\partial u}{\partial t} + E(x) \frac{\partial u}{\partial x} + [F_1(t) + F_2(x)] u = 0.$$

Předpokládá se, že koeficienty jsou dostatečně hladké, při čemž

$$A(t) > a_0 > 0 \text{ a } C(x) < c_0 < 0,$$

kde a_0 a c_0 jsou konstanty. Po vyložení obecných výsledků, týkajících se charakteristických čísel a charakteristických funkcí jsou uvedeny bez důkazu výsledky ohledně jejich variačních vlastností a dále se dokazuje věta *Courantova*. To umožňuje autoru získat asymptotické výrazy pro charakteristická čísla a funkce. Zdůvodnění *Fourierovy* metody pro výše uvedenou rovnici se děje na základě variačního počtu a asymptotických výrazů.

Potom je krátce uvedeno zdůvodnění *Fourierovy* metody na základě užití *Greenovy* funkce a aplikace teorie integrálních rovnic. Ve dvoudimensionálním případě je až do konce vyšetřováno pouze kmitání obdélníkové membrány.

V závěrečném paragrafu této části jsou uvedeny některé poučky o charakteristických funkcích v mnohodimensionálním případě, o *Sturmově* větě, o singulárních úlohách v jednodimensionálním případě a o přibližném výpočtu charakteristických čísel a funkcí.

V hlavním textu třetí kapitoly se vyšetřuje *Laplaceova* rovnice, dokazují se základní vlastnosti harmonických funkcí a řeší se *Dirichletova* úloha pro kruh.

Jedním z ústředních paragrafů je v této kapitole ten, v němž je prostě a elegantně vyložena metoda *Poincaré-Perronova* k sestrojení zobecněného řešení *Dirichletova* problému a je provedeno vyšetření regularity hraničních bodů. Uvedme ještě jeden zajímavý paragraf, v němž je užito metody sítí k řešení *Dirichletovy* úlohy.

Obsahově velmi bohatý je poslední paragraf kapitoly, v němž je přehled nej důležitějších výsledků pro obecné eliptické rovnice (práce *S. N. Bernštejna*, *I. G. Petrovského*, *S. L. Soboleva*, *Lewyho*, *Fellera* a jiných). Teorie potenciálu je vyložena

pouze pro rovinný případ, a na ní založená věta o existenci řešení vnitřní Dirichletovy úlohy je uvedena pouze pro křivky s kladnou křivostí.

Poslední kapitola věnovaná parabolickým rovnicím je neveliká. V ní je Fourierovou metodou řešena rovnice pro vedení tepla v jednodimensionálním případě a dokazuje se věta o existenci a jednoznačnosti pro problém šíření tepla v neomezené tyči. Ve stručném přehledu bádání o rovnicích parabolického typu jsou uvedeny základní výsledky práce *Gevreyovy*.

Učiníme nyní několik poznámek ohledně jednotlivých míst knihy, při čemž uvedeme tyto poznámky nikoliv v pořadí jejich významu, nýbrž podle postupu výkladu v knize.

Autor odvozuje rovnice matematické fyziky, při čemž uvažuje kubický element objemu (str. 9—12). Účelnější je vyšetřování libovolné oblasti s použitím Ostrogradského vzorce. Úvaha o napětí membrány na str. 14—15 se jaksi vymyká z celkového stylu knihy.

Při důkaze věty Kovalevské autor užívá (viz str. 31) v českém překladu str. 30 elementární majoranty

$$|c_{k_0 k_1 \dots k_n} a_0^{k_0} a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n}| \leq M,$$

což mu neumožňuje, přesně řečeno, učinit důležitou poznámku na str. 37 (překlad str. 35) o závislosti q a α pouze na R a supremu abs. hodnot koeficientů soustavy. Obvyklé užití druhé majoranty by okamžitě ospravedlnilo tuto poznámku.

Bylo by žádoucí, aby na str. 64 (překlad str. 60) bylo uvedeno, že redukce na kanonický tvar v oblasti má přece jen lokální charakter.

Je nutné podrobněji objasnit pojem zobecněného řešení (viz str. 84—86, překlad str. 78—80). Zdá se nám racionálnější integrální definice zobecněných řešení. Toto neuznává hladkých řešení a je mnohem vhodnější při řešení úloh v zobecněném smyslu.

Naprostu jednoduše lze dokázat, že zobecněné řešení v integrálním smyslu a spojitě řešení Laplaceovy rovnice je obvyklé řešení.

Požadavek čtyř derivací u φ_0 a φ_1 (viz str. 148, překlad str. 137), aby bylo možno derivovat člen po členu Fourierovu řadu, je příliš silný. Jest žádoucí, aby bylo uvedeno *d'Alembertovo* řešení pro omezenou strunu a aby bylo ospravedlněno na základě Fourierovy metody za obecných předpokladů, bez derivování člen po členu.

Ve všem následujícím jsou kladeny na φ_0 (počáteční hodnota u) a na φ_1 (počáteční hodnota u_t) stejné požadavky. Podle podstaty věci mají být požadavky na φ_1 méně ostré než na φ_0 .

Na str. 150 (překlad str. 138) se mluví o zobecněném řešení limitní úlohy, avšak nikde není jasně řečeno, co je to zobecněné řešení problému. Dříve bylo definováno pouze zobecněné řešení rovnice.

Nejsm přivržencem toho, aby byly dokazovány obecné věty o rozložení podle charakteristických funkcí a aby byla ospravedlňována Fourierova metoda v jednorozměrném případě na základě variačního počtu a asymptotických vyjádření. Tato cesta je příliš složitá.

Základní a obtížnou věcí v důkaze je v podstatě pouze dokázat uzavřenost soustavy charakteristických funkcí. Tu by bylo možno dokázat pomocí *Greenovy* funkce a teorie integrálních rovnic. Na základě uzavřenosti lze podle *V. A. Steklova* lehce dokázat větu o rozložení funkce $f(x)$, vyhovující limitním podmínkám a mající spojitou derivaci, v stejnoměrně konvergentní řadu. Stejně elementárně se dokazuje možnost dvojnásobného derivování člen po členu pro případ operátoru

$$L(y) = \frac{d}{dx} [p(x) y] - q(x) y$$

při následujících podmínkách: $f(x)$ má spojitě derivace do třetího řádu, $q(x)$ do druhého řádu, $q(x)$ má spojitou derivaci a konečně platí:

$$f(x) = 0 \text{ a } \frac{d}{dx}[p(x)f(x)] = 0 \text{ pro } x = 0 \text{ a } x = l.$$

Tyto požadavky jsou slabší než ty, které jsou uvedeny autorem na str. 177 (překlad str. 163).

Poznamenejme ještě, že užití věty *Hilbert-Schmidtovy*, kromě uzavřenosti soustavy charakteristických funkcí, dává velmi prostě i variační vlastnosti charakteristických hodnot a funkcí ve třídě dvakrát spojitě diferencovatelných funkcí. To otvírá cestu také k získání asymptotických výrazů.

Výpočty, provedené na str. 189, (překlad str. 173—174) jsou zbytečné. Stačí ukázat, že vzorec (5.24) určuje funkci $\chi(s)$, která vyhovuje rovnici (1.24) i limitním podmínkám a připomenout jednoznačnost takového řešení. Bezprostřední ověření vzorce (5.24) je velmi jednoduché.

Na str. 190 (překlad str. 174) by bylo žádoucí trochu podrobnější objasnění ekvivalentnosti rovnice (14.24) a diferenciální rovnice (13.24) s limitními podmínkami.

Bylo by užitečné ukázat principiální obtížnost obecného ospravedlnění Fourierovy metody, dokonce i pro vlnovou rovnici, v trojdimensionálním případě (viz str. 200, překlad str. 183—184).

Na str. 202 (překlad str. 185) je uvedeno, že při dvou a třech nezávisle proměnných stačí požadovat, aby funkce f měla omezené a spojitě derivace až do třetího řádu včetně. To je správné, avšak vezmeme-li v úvahu to, že řešení Poissonovy rovnice se spojitými derivacemi až do druhého řádu, rovné nule na hranici, je vyjádřeno Greenovou funkcí pak plyne odtud, že stačí spojitost derivací prvního a druhého řádu v uzavřené oblasti.

Není jasno, o jaké úplnosti $\varphi_n(x)$ ve třídě přípustných funkcí se mluví na str. 208 (překlad str. 190). Při obvyklé úplnosti v L_2 jsou další tvrzení nesprávná. Je nutná konvergence v průměru i funkcí i jejich derivací. Mimoto, při limitním přechodu $\chi_i^{(n)}(x) \rightarrow \chi_i(x)$ je třeba předem požadovat normovanost charakteristických funkcí a zmínit se výslovně o nutnosti přejít k podposloupnosti vzhledem k neurčenosti znaménka u normované charakteristické funkce.

Proč je na str. 235 (překlad str. 216) uvedena podmínka (1.32) jednoznačnosti řešení vnější Dirichletovy úlohy v trojdimensionálním případě?

Jednoznačnost řešení, rovné nule v nekonečnu, bezprostředně vyplývá z věty o maximum a minimum pro harmonické funkce. Lze lehce dokázat, uijeme-li řešení Dirichletovy úlohy pro kouli a inverse, že, když $\mu(M)$ je funkce harmonická v okolí bodu v nekonečnu a rovná nule v nekonečnu, podmínka (1.32) je splněna.

Druhá krajová úloha na str. 238 (překlad str. 219) je formulována tak, že je dána jednostranná normální derivace na hranici. Obvykle je dána limita normální derivace při přibližování bodu po normále k bodu plochy. Z existence této limity plyne (viz str. 259, překlad str. 237) i existence jednostranné normální derivace na hranici, rovné této limitě. Opak neplatí. Pro *Ljapunovy* plochy při spojitosti hraniční funkce se řeší druhá krajová úloha ve smyslu limity normální derivace. Existuje věta o jednoznačnosti při formulaci limitní podmínky s jednostrannou derivací. Výsledek je v tomto případě, jak je patrné z řečeného, obsaženější.

Je užitečné poznamenat, že nutnost podmínky (1.33) může být dokázána při pouhé podmínce spojitosti $\mu(M)$ v oblasti i s hranicí, jestliže uijeme existence řešení při splnění podmínky (1.33).

Je žádoucí uvést výsledky práce *M. V. Keldyše* a *M. A. Lavrentjeva* o jednoznačnosti řešení druhé krajové úlohy.

Důkaz o jednoznačnosti, užívající pouze spojitosti $\mu(M)$ v oblasti bez hranice, se provede velmi jednoduše, jestli předpokládáme, že v každém bodě hranice je možno sestavit dotykovou kouli, jejíž všechny body až na bod dotyku leží uvnitř oblasti.*)

Při převedení křivočarého integrálu na integrál vzhledem k s (str. 264, překlad str. 242) je užitečné připomenout periodičnost jádra a nutnost periodičnosti všech funkcí.

Úvahy, které vedou k identitě na str. 266 (překlad 244), nejsou úplně opodstatněné, neboť v 33. paragrafu byla jednoznačnost druhé krajové úlohy dokázána za předpokladu, že první derivace jsou spojitě v oblasti i s hranicí.

Naše poznámky se týkají pouze jednotlivých detailů výkladu.

Na závěr zdůrazněme ještě jednou charakteristické zvláštnosti recenzované knihy. Tato obsahuje mnoho cenného, řídce se vyskytujícího materiálu, zvláště pokud se týče vět o existenci a jednoznačnosti o otázkách korektnosti řešení úloh pro jednu parciální diferenciální rovnici a pro soustavu takových rovnic. Plán knihy je sestaven velmi zajímavě. Všechny výsledky, v to počítaje i dávno známé, jsou vloženy originálně v duchu současných názorů. Autor uvedl mnoho zajímavého materiálu z prací, objasňujících cesty dalšího rozvoje teorie. Vše to činí knihu velmi cennou nejen pro studenty, nýbrž i pro vědecké pracovníky.

V. I. Smirnov.

Přeložil O. Vejvoda, Praha.

B. V. Gněděnko: Nástin historie matematiky v Rusku. (Б. В. Гнеденко: Очерки по истории математики в России.) OGIZ, Gosudarstvennoje izdatel'stvo tekhniko-teoretičeskoj literatury, Moskva-Leningrad, 1946, 247 str., cena rublů 6,—, váz. 7,50.

Dnes, kdy kvapem doháníme své mezerovité vědomosti o mocném Sovětském svazu a o minulosti největšího slovanského národa, přišla nám Gněděnkova knížka jako na zavolanou.

První písemné památky ruské matematiky sahají až do r. 1134. Nikolajem Ivanovičem Lobačevským se ruská matematika vysunula na přelomu XVIII. a XIX. století na světovou úroveň, a udržela svou světovou pověst Pafnutijem Lvovičem Čebyševem, Andrejem Andrejevičem Markovem, Alexandrem Michajlovičem Ljapunovem, Soňou Kovalevskou a jejich odchovanci. Ve XX. století, zvláště po Velké říjnové revoluci, postavila se ruská matematika právě v nejmodernějších oborech, v teorii čísel a v počtu pravděpodobnosti na první místo světové matematické tvorby. Proto zasluhovala ruská matematika již dávno zvláštní monografie, která by soustavně podala její vývoj a zasadila jej do rámce kulturního i politického růstu velkého ruského národa a státu. Bylo toho tím více zapotřebí, protože západoevropská literatura matematická a matematicko-historická, stojící hlavně pod německým vlivem, nezná mnohé objevy ruské a vůbec slovanské, přičítá je pozdějším západoevropským znovuobjevitelům a přikládá jim jména těchto pozdějších neruských autorů. Opakuje se tu kolikrát známá historie Bolzanova objevu spojitě funkce bez derivace.

Gněděnkovy „Očerki“ jsou prvou splátkou tohoto velkého dluhu. Jejich velká zásluha spočívá v tom, že je tu po první podán soustavný a přehledný popis vývoje ruské matematiky od nejstarších dob až po naše dny. Existují sice krásné monografie o jednotlivých obdobích ruské matematiky, zvláště práce V. V. Bobynina, T. J. Raj-

*) Viz článek *S. Zaremba: O jednom smíšeném problému, vztahujícím se k Laplaceově rovnici. (Ob odnoj smešannoj zadače, otnosjaščesja k uravneniju Laplasy.)* „Uspechi matematičeskich nauk“, 1946, t. I, vyp. 3—4.

nova a jiných, nebo dějiny ruské Akademie věd nebo monografie věnované jednotlivým ruským matematikům, avšak obraz celého vývoje od nejstarších dob až do poloviny XX. stol. scházel.

Autor „Očerků“ zanášel se již 10 let myšlenkou napsat podobnou knížku. Světová válka se svým hrůzným spustošením evropské Rusi znemožnila provedení tohoto úmyslu dříve. Avšak již rok po vztyčení vítězného rudého praporu na berlínském parlamentu vychází v Moskvě Gnědénkův pomník ruské matematické tvorby. Malý rozměr knihy (247 stránek velikosti $12\frac{1}{2}$ cm $\times$ 20 cm), snaha, učinit knihu přístupnou čtenářům s gymnasijským vzděláním, přiblížit látku lidsky širokým vrstvám vědyčtivých ruských lidí a konečně i osobní záliba autora, vědecky činného v počtu pravděpodobnosti a v matematické statistice, vedly k nutnému omezení látky, jejímu tu obšírnějšímu, jinde stručnějšímu zpracování, ba spokojujícímu se někdy jen kratičkou zmínkou. Malý rozsah knihy také nedovoloval zpracovat všechny obory a doby stejně důkladně. Škoda, že kniha není provázena jmenným rejstříkem, který by teprve nejen ukázal, jak četní ruští matematikové vynikli nad průměr a jak bohatý materiál autor snesl, nýbrž i udělal z knihy nepostradatelnou příručku pro každého, kdo se jednak chce poučit o minulosti ruské matematiky, jednak chce na základě jejích skvělých výkonů pracovat dále.

Nutná stručnost je vyvážena jak životopisnými náčrtky velkých matematiků, tak nástinu historického prostředí a vysvětlivkami matematické látky, přesahující odborné znalosti předpokládaného matematického vzdělání čtenářstva.

Uvedeme ještě přehled kapitol a paragrafů knihy: Úvod. Obsah. Kap. I. Matematické vědomosti v Rusku do počátku XVIII. stol. § 1. Matematické vědomosti do XVII. stol. § 2. Matematické vědomosti v XVII. stol. § 3. Organizace škol. § 4. Aritmetika Magnického. Kapitola II. Vědecká práce v Rusku v XVIII. a XIX. stol. § 5. Založení Akademie věd. § 6. Euler. § 7. Organizace universit. § 8. Nikolaj Ivanovič Lobačevskij. § 9. Petrohradská matematická škola. § 10. Michajl Vasiljevič Ostrogradskij. § 11. Pafnutij Lvovič Čebyšev. § 12. Andrej Andrejevič Markov. § 13. Alexandr Michajlovič Ljapunov. § 14. Sofia Vasiljevna Kovalevskaja. § 15. Moskevská matematická společnost. Kapitola III. Rozvoj matematiky ve XX. stol. § 16. Zvláštnosti rozvoje matematiky ve XX. stol. § 17. Matematická střediska v Sovětském svazu. § 18. Moskevská matematická škola. § 19. Sovětská škola teorie čísel. § 20. Sovětská škola teorie pravděpodobnosti. Doplnky. Doplněk 1. Slovanská numerace. Doplněk 2. Čára, omezující rovinný obrazec o největším obsahu. Doplněk 3. Mnohočleny nejméně se odchylující od nuly. Doplněk 4. Pojem množiny. Použitá literatura.

Nejlepším doporučením knihy je jistě okolnost, že náklad 50 000 výtisků je v nakladatelství rozebrán.

Q. Vetter, Praha.

O. F. G. Schilling: **The theory of Valuations.** (Theorie ohodnocení). Mathematical Surveys IV, American Mathematical Society, New York, 1950, str. VIII + 253, \$ 6.—

Dle autorových slov uvedených v předmluvě lze pokládat teorii ohodnocení za zvláštní případ topologické algebry.

V pojednání J. Kürscháka (1913) poprvé definováno ohodnocení pro libovolné komutativní těleso jako rozšíření pojmu absolutní hodnoty, čímž ovšem i zavedena metrika. Další rozšíření pojmu ohodnocení pro komutativní tělesa pochází hlavně od Ostrowského a Krulla. Myšlenka ohodnocení ukázala se však tak plodnou, že byl pojem ten rozšířen i na okruhy (komutativní i nekomutativní a dokonce i neasociativní).

Definice Kürschákova zahrnuje také klasické užití absolutní hodnoty v teorii těles reálných a komplexních čísel a metrickou topologii tak vzniklou. Této topologie užívá se na příklad při důkazech základní věty algebry. Není však již tak snadné novější užití číselné theoretického pojmu dělitelnosti při topologizaci. Metrika

na dělitelnosti založená se po prvé vyskytuje při *Henselově* konstrukci p -adických čísel. (Henselovy práce spadají do prvních let tohoto století.) Uskutečňuje se tak úzké spojení mezi teorií algebraických funkcí jedné proměnné a teorií algebraických čísel. Od Hensela pochází (1908) také základní pomocná věta o reducibilitnosti, na jejímž zevšeobecnění je založena velká část teorie ohodnocení. Mocný nástroj, užívaný při diskusi algebraických křivek, stal se tak dostupným i pro algebraická číselná tělesa, později i pro jiné otázky algebry.

V novější době měla teorie ohodnocení důležitou úlohu v teorii algebraických čísel, na př. při nové formulaci a doplnění teorie těles tříd (*Artin, Chevalley, Hasse*) a při klasifikaci jednoduchých algeber nad číselnými algebraickými tělesy (*Hasse, Albert*). V úzké souvislosti s jinými topologickými metodami má veliký význam v Krullových pracích o struktuře komutativních okruhů a při výstavbě přesných základů algebraické geometrie.

Je patrné, že teorii tak rozvětvenou bylo by nesnadné směstnat do jedné knihy. Kniha Schillingova se soustřeďuje na obecný význam teorie ohodnocení pro algebraickou a číselně theoretickou strukturu těles, komutativních i nekomutativních, jednoduchých algeber, a zabývá se také na př. lokální teorií těles tříd a nekomutativní teorií ideálů. Nepřehlíží však na př. k souvislostem mezi absolutní hodnotou v klasickém smyslu a p -adickým ohodnocením a vůbec se nezabývá užitím teorie ohodnocení v algebraické geometrii.

Podáme stručný obsah díla, takže uvedeme přehled jednotlivých kapitol.

Kap. 1. Obecné vlastnosti ohodnocení, podává základní definice a věty teorie ohodnocení pro tělesa (i nekomutativní) při libovolné jednoduše uspořádané grupě ohodnocení, elementární výsledky o okruzích ohodnocení, vztahy mezi ohodnocením a homomorfismem a konečné rozšíření ohodnocení na algebraická rozšíření těles.

Kap. 2. Úplná tělesa, pojednává o tom, jak lze těleso s ohodnocením rozšířit na širší těleso, tak aby byly zachovány číselně-theoretické vlastnosti původního tělesa vzhledem k danému ohodnocení, zjednodušila se však po adjunkci nových prvků algebraická struktura rozšířeného tělesa. V případě ohodnocení hodnoty 1 (t. j., lze-li považovat grupu ohodnocení za aditivní grupu reálných čísel) je rozšířené těleso doplněním původního tělesa vzhledem k vhodné zvolené metrice. Přitom se užívá jen zcela elementárních vět z teorie doplňování metrických prostorů. Případ ohodnocení obecného typu uvedených v kap. 1 vyžaduje transfinite úvah. Ve všech případech je vrcholem důkaz jednoduchého číselně theoretického kritéria, Henselovy pomocné věty, která má základní důležitost při uvažování o algebraických vlastnostech doplněných těles.

Kap. 3. Rozvětovací teorie ohodnocení. Je to zevšeobecnění *Hilbertovy* teorie rozvětvení, odvozené jím pro algebraická číselná tělesa. Teorie je podána ve velmi obecném tvaru, takže výsledků lze užít i na nekonečná rozšíření obecných relativně kompaktních těles. To pak užito na Krullem podanou Galoisovu teorii pro nekonečná rozšíření. Tato kapitola obsahuje také odvození existenčních teorémů pro rozšíření těles při předepsané Galoisově grupě.

Kap. 4. Speciální teorie ideálů, jedná o klasické teorii ideálů, která platí v algebraických číselných tělesech a v tělesech algebraických funkcí jedné proměnné. Systém axiomů pro teorii ideálů udaný *E. Noetherovou* je nahrazen systémem, který požaduje existenci diskrétních ohodnocení hodnoty 1 a některé vlastnosti konečnosti a nezávislosti. Systém je tak uspořádán, že po vypuštění jednoho z axiomů dostaneme Artinovu teorii kvasidělitelnosti. Tato teorie má důležitost v úvahách o algebraických varietách a tím i v algebraické geometrii. Dále ukázáno, že zcela jednoduché předpoklady o struktuře ideálů tělesa mají za následek omezení pro algebraickou strukturu tělesa. Konečně jsou některé z výsledků komutativní teorie rozšířeny i na jednoduché algebry.

Kap. 5. Číselná teorie jednoduchých algeber, obsahuje zevšeobecnění teorie ideálů z kapitoly 4 na jednoduché algebry. Hlavním cílem je podat číselnou teorii jednoduchých algeber, pro jichž centra platí klasická teorie ideálů.

Kap. 6. Místní theorie tělesa tříd. V této kapitole pojednáno o tom, jak lze popsat množinu všech Abelových rozšíření nad speciálním úplným tělesem pomocí podgrup multiplikativní grupy příslušného základního tělesa. Výsledná theorie je v jistém smyslu zevšeobecněním theorie rozšíření pomocí odmocnin.

Kap. 7. Struktura úplných těles. Je to pokračování v úvahách kap. 2. Pojednáno zde hlavně o algebraické a topologické struktury úplných a maximálně úplných těles. Základní těleso F se omezuje různými předpoklady a popisují se strukturní vlastnosti těles (nekomutativních nad F).

Dílo je zakončeno dvěma dodatky a „slovníkem“ (Glossary).

Dodatek I. Obecná Galoisova theorie, podává po shrnutí základních vět klasické Galoisovy theorie konečných normálních separabilních rozšíření Galoisovu teorii nekonečných normálních separabilních rozšíření.

Dodatek II. Obecná theorie lineárních (asociativních) algeber (konečné hodnosti nad základním tělesem).

Slovník uvádí některé názvy a věty, jichž se v knize často užívá.

Každá kapitola je zakončena pečlivě sestavenou bibliografií látky v ní projednávané, což usnadňuje hledání ve velmi obsáhlé literatuře o různých směrech theorie ohodnocení.

Kniha obsahuje četné příspěvky autorovy. Snaží se podat teorii ohodnocení vždy co nejobecněji sledující stav theorie až do poslední doby. Je to kniha velmi obsažná s rozsahem ne příliš velikým. Aby autor tohoto cíle dosáhl, jsou důkazy podány co nejstručněji, ovšem někdy až na úkor snadné srozumitelnosti.

K. Rychlík, Praha.

REFERÁTY O PŘEDNÁŠKÁCH V MATEMATICKÉ OBCI PRAŽSKÉ A V BRNĚ

K PROBLEMATICE TEORIE PRUŽNOSTI

(Referát o přednášce Dr Ing. Ivo Babušky, proslovené dne 19. května 1952.)

1. Dirichletův problém.

Jak známo, Dirichletovým problémem v rovině, na př. pro kruh, rozumíme nalezení harmonické funkce uvnitř kruhu spojitě prodlužitelné na hranici kde nabývá předepsaných hodnot. Lze dokázat, že existuje právě jediné řešení. Snadno se nahlédne, že z požadavku, aby harmonická funkce byla spojitá na uzavřeném kruhu plyne, že předepsaná funkce na hranici musí být spojitá. V praxi se však často vyskytují případy, kdy okrajové podmínky jsou nespojité. Musí se proto opustit požadavek spojitosti harmonické funkce na uzavřeném kruhu. Je to možno několika způsoby.

- a) Prodlužitelnost všude, až na konečný počet výjimečných bodů.
- b) Úhlová prodlužitelnost všude nebo skoro všude.
- c) Radiální prodlužitelnost všude nebo skoro všude.

Problém unicuity a existence není zde již tak jednoduchý jako v případě spojitě prodlužitelnosti.

2. Neumanův problém.

Neumanovým problémem v rovině rozumíme, jak známo, nalezení harmonické funkce, která má na hranici předepsané normální derivace. Většinou se žádá, aby obě parciální derivace harmonické funkce byly spojitě prodlužitelné na hranici. Při nespojitých okrajových podmínkách vznikají problémy ještě obtížnější než v prvním případě a jsou zatím skoro neřešeny. Možnosti formulace problému pro nespojitě okrajové podmínky jsou zde ještě širší.

3. Biharmonický problém.

Biharmonickým problémem rozumíme nalezení biharmonické funkce W , mající na hranici předepsané hodnoty funkce a hodnoty normální

derivace. Je to tedy do určité míry spojení problému Dirichletova a Neumanova. Skutečně obtíže při nespojitostech okrajových podmínek jsou spojením obtíží obou dřívějších případů. Uničita tohoto problému není dodnes ani pro spojitě okrajové podmínky dokázána. Mimo důkaz

Kirchhoffův, který předpokládá že ΔW , $\frac{\partial \Delta W}{\partial x}$, $\frac{\partial \Delta W}{\partial y}$ jsou spojitě prodlužitelné na hranici, ukázal v roce 1932 MUSCHELIŠVILI, že stačí žádat, aby ΔW a konjugovaná funkce k ΔW byla spojitě prodlužitelná na hranici.

V roce 1934 ukázal MICHLIN, že stačí žádat, aby ΔW bylo omezené. Lze však ukázat, že stačí aby holomorfní funkce φ byla totálně spojitá na hranici, když $\operatorname{Re} \varphi' \equiv \Delta W$ tento případ jest zobecněním obou dřívějších důkazů. Je-li hranice dostatečně hladká, lze důkazy ještě zobecnit.

Biharmonický problém jest základním problémem matematické theorie rovinné pružnosti. Je to t. zv. první problém. Mimo to vyskytují se ještě problém druhý a smíšený. Problematika druhého problému jest podobná jako u prvního, biharmonického. Problém smíšený jest složitější.

Problematika nespojitých okrajových podmínek vzniká z praxe a jest do velké míry otevřená právě tak, jako problematika nehladkých hranic. Zmíním se ještě o jiné problematice, kterou nám také dala praxe.

Při řešení biharmonického problému zajímají nás hlavně její druhé derivace. Vzniká otázka při řešení pomocí sítí, zda nemohou nastat velké nepřesnosti v druhých derivacích, které nás zajímají i když určíme biharmonickou funkci dosti přesně.

Jiným naléhavým problémem jest integrální rovnice druhého druhu

$$\varphi(t) + \int_a^b K(x, t) \varphi(x) dx = f(t),$$

když jádro K není integrovatelné, ale je analytické na otevřeném intervalu a, b . I tento problém vznikl při řešení otázek praxe.

Chtěl jsem naznačit některou matematickou problematiku specifickou pro theorii rovinné pružnosti, samozřejmě okruh otázek jest ještě mnohem širší. Naznačil jsem pouze některé z těch, které se nám v poslední době vyskytly a vznikly z praxe.

V celé theorii pružnosti, konečně to není ani pro pružnost specifické, vznikají rozsáhlé problémy, které technika musí řešit. Musí přijít k určitým závěrům. Exaktní matematické řešení není dnes možné. Tyto problémy nakonec, nepomůže-li matematik, což jest dnes ve většině případů, musí řešit technik sám. Řeší je svou cestou, která má však přednosti a nedostatky. Chtěl bych se proto nakonec zmínit o způsobu, jakým řeší technik svou problematiku a jak usuzuje zejména na rozdíl od matematika.

Každé myšlenkové tvoření má dvě části. Je to tvoření ideových kombinací a jejich výběr. Jest možných mnoho kombinací, ale ne všechny

jsou úspěšné. Uvažující člověk vybírá intuitivně ty kombinace, které mají naději na úspěch.

S tohoto hlediska jest řešení matematika a technika (dokonce každé myšlenkové tvoření) stejné. Rozdíl jest však v tom, jak matematik a technik postupuje. Matematikova práce jest ryze a přesně deduktivní. Jeho postup pozůstává ve tvoření vhodného řetězu deduktivních úsudků za sebou. Nakonec vychází matematik ze soustavy axiomů a přichází deduktivně k určitým závěrům. Intuitivní výběr ideových kombinací projeví se tedy pouze ve způsobu tvoření řetězu dedukcí od axiomu až do závěru a výběru axiomu (na př. při axiomu výběru se často uvádí byl-li použit neb ne).

Technik postupuje podobně. Na rozdíl od matematika užívá mnohem více axiomů než je třeba, přesněji axiomatically formulovaných vět, hypotéz. Tyto axiomy bere ze zkušenosti a většinou jich užívá, aniž je přesně formuloval a nejen to, ani často si neuvědomí, že jich užívá. Pro matematika jest tedy technická práce z tohoto důvodu plna logických skoků. Axiomatically postulované hypotézy nejsou ovšem axiomy v matematickém slova smyslu (t. j. nemusí být na př. nezávislé nebo nesporné) a často se liší v různých pracích, takže důkazy průkazné pro jednoho nemusí být přesvědčivé pro druhého. Je to pochopitelné, neboť jestliže matematikové nejsou úplně jednotni v nazírání na př. na axiom výběru, proč by technické museli býti jednotnější v nazírání na mnohem četnější technické hypotézy.

Technik při tvoření různých svých hypotéz jest dosti bezstarostný. Nevidí příčiny, proč by měl zachovávat matematickou přesnost, když ve svých úvahách provádí velké zjednodušování o němž je přesvědčen, že vede k větším chybám, než nějaká ta nepřesnost matematická. Pro technika jsou matematické úvahy obrazem jeho fyzikálně technických úvah a proto nečiní také rozdíl mezi matematickou implikací a fyzikálním důsledkem. Technik ovšem v zásadě nemůže postupovat jinak, poněvadž ani profesionální matematik nedovede problém exaktně řešit tam, kde technik musí k nějakým závěrům bezpodmínečně dospět. Je tedy zřejmo, že intuitivní výběr ideových kombinací má pro technika význam zásadní.

Tvoření různých pracovních hypotéz v technické práci jest však nejen prostředkem k získání závěrů odpovídajících skutečnosti, ale je i příčinou jejich omylů a chyb. Tyto chyby vznikají proto, že technici často si ony pracovní hypotézy ani neuvědomí. Mimo to technik nevidí různá úskalí matematiky, poněvadž vidí ve svých matematických úvahách fyzikální „děje“ a proto postupuje často příliš odvážně, což může být další příčinou chyb.

Naznačil jsem stručně některé subjektivní poznámky. Domnívám se, že z nich vyplývají některé závěry.

1. Je třeba vésti techniky k tomu, aby si uvědomovali každé užití

pracovní hypotézy a upozorňovat techniky na úskalí matematiky, na to, že příliš bezstarostné zacházení s matematikou může vésti k omylům. Je třeba ukázat toto nebezpečí na technických problémech, kdy je možno přijít k nesprávným závěrům. Při tom ovšem tyto případy nesmí být matematickými kuriozitami.

2. Bezpodmínečné vnucování nejvyšší matematické přesnosti technikům může vésti k značným obtížím.

3. Měli by být vychováváni matematici s technickou intuicí, kteří by s pochopením četli technické práce a nebáli se řešit technické problémy ne zcela matematicky korektní cestou ve spolupráci s technikou s matematickým pochopením. Tito technici by měli být rovněž zvlášť vychováváni a tvořili by aktivní spojku mezi technikou a matematikou a aplikovaná matematika by spojovala techniku s ryze theoretickou matematikou.

O REPRESENTACI USPOŘÁDANÝCH MNOŽIN

(Referát o přednášce Dr. Miroslava Novotného, proslovené 6. března 1952 v Brně.)

V této přednášce se budeme zabývat uspořádanými množinami. Množina M se nazývá *částečně uspořádaná*, jestliže je v ní definována relace $x \leq y$, která má tyto vlastnosti: 1. $x \leq x$, 2. $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$, 3. $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$. Místo relace $x \leq y$ píšeme také $y \geq x$. Je-li $x \leq y, x \neq y$, píšeme $x < y$. Když pro nějakou dvojici prvků x, y neplatí ani $x \leq y$ ani $y \leq x$, pak říkáme, že prvky x, y jsou *nesrovnatelné*, a píšeme $x \parallel y$ nebo $y \parallel x$.

Příklad: Buď P libovolná množina. Označme $\Phi(P)$ libovolný systém jejích podmnožin. Definujeme relaci $\leq$ v systému $\Phi(P)$ takto: pro $X, Y \in \Phi(P)$ platí $X \leq Y$, když a jen když $X \subset Y$. Snadno se dokáže, že množina $\Phi(P)$ je tímto způsobem částečně uspořádaná. Když na př. $\Phi(P)$ je systém všech jednobodových množin v P , pak libovolné dvě množiny tohoto systému jsou nesrovnatelné.

Množina M se nazývá *úplně uspořádaná*, když je uspořádaná částečně a nad to relace uspořádání $\leq$ splňuje ještě axiom 4: Pro každé dané $x, y \in M$ platí buďto $x \leq y$ nebo $y \leq x$. V úplně uspořádané množině tedy není nesrovnatelných prvků.

Příklad: Interval $\langle 0, 1 \rangle$ je množina úplně uspořádaná, jestliže jeho prvky srovnáme podle velikosti. Jiný příklad: Množina všech celých čísel uspořádaných podle velikosti.

Jednu a touž množinu lze uspořádati různými způsoby, jak ukazuje tento příklad: Buď ϑ libovolně dané ordinální číslo a buď M množina všech (ev. transfinitních) posloupností typu ϑ utvořených z čísel $0, 1, \dots, n$. Prvky množiny M jsou tedy všechny posloupnosti $x_0 x_1 \dots x_\lambda \dots$ ($\lambda < \vartheta$), kde $x_\lambda = 0, 1, 2, \dots, n$. Volíme-li $\vartheta = \omega_0$, kde ω_0 je první ne-

konečné ordinální číslo, pak množina M je tvořena všemi nekonečnými posloupnostmi utvořenými z čísel $0, 1, \dots, n$.

Tuto množinu M lze uspořádat na př. takto: Řekneme, že $x_0 x_1 \dots x_\lambda \dots$ ($\lambda < \vartheta$) $\leq y_0 y_1 \dots y_\lambda \dots$ ($\lambda < \vartheta$), když a jen když $x_\lambda \leq y_\lambda$ pro každé $\lambda < \vartheta$. Snadno se vidí, že množina M je tímto způsobem uspořádána částečně; při tom existují v M nesrovnatelné prvky. Na př. prvky $10 \dots$ a $01 \dots$ jsou nesrovnatelné, ať na ostatních místech označených tečkami stojí cokoliv. Právě popsané pravidlo uspořádání systému posloupností budeme pro stručnost označovat jako pravidlo (a).

Množinu M všech posloupností typu ϑ utvořených z čísel $0, 1, 2, \dots, n$ lze však uspořádat také jinak: Řekneme, že $x_0 x_1 \dots x_\lambda \dots$ ($\lambda < \vartheta$) $< y_0 y_1 \dots y_\lambda \dots$ ($\lambda < \vartheta$), když existuje $\delta < \vartheta$ tak, že $x_\lambda = y_\lambda$ pro $\lambda < \delta$ avšak $x_\delta < y_\delta$. Snadno se přesvědčíme, že při tomto uspořádání je M uspořádáno úplně, t. j. libovolné dvě posloupnosti jsou srovnatelné. Toto uspořádání se nazývá *lexikografické*. Na př.: Platí $10 \dots > 01 \dots$, ať na místech označených tečkami stojí cokoliv.

Buď dána úplně uspořádaná množina M , buďte A, B její dvě podmnožiny takové, že $A < B$, t. j. každý prvek z A je před každým prvkem z B . Řekneme, že tyto dvě podmnožiny jsou v M *sousední*, jestliže neexistuje prvek $x \in M$ tak, že $A < x < B$. Dvojice sousedních podmnožin $A < B$ v M taková, že $A \cup B = M$, se nazývá *řez* v množině M . Když v M neexistuje prvek $x < A$, řekneme, že M je *koiniciální* s A , podobně, když v M neexistuje prvek $y > B$, řekneme, že M je *konfinální* s B .

Dvě částečně uspořádané množiny M, M_1 nazýváme *isomorfními*, jestliže existuje prosté zobrazení f množiny M na množinu M_1 tak, že $x \leq y$ v M implikuje $f(x) \leq f(y)$ v M_1 a $f(x) \leq f(y)$ v M_1 implikuje $x \leq y$ v M . Je to zobrazení, jež zachovává všechny relace včetně nesrovnatelnosti. Isomorfní úplně uspořádané množiny se nazývají *podobné*.

Hlavní problém, kterým se budeme zabývat, je tento: *Zda ke každé úplně uspořádané množině existuje ordinální číslo ϑ a systém posloupností typu ϑ utvořených z čísel $0, 1, \dots, n$ uspořádaný lexikograficky tak, aby obě množiny byly podobné*. Stručněji řečeno, zda lze každou uspořádanou¹⁾ množinu *reprezentovat* posloupnostmi z čísel $0, 1, \dots, n$ uspořádanými lexikograficky. Ukážeme, že odpověď na tuto otázku je kladná; zároveň si všimneme, jak v literatuře probíhaly pokusy snížit n a ϑ na nejmenší možná ordinální čísla. V závěru rozšíříme své úvahy i na množiny částečně uspořádané.

Kladné řešení problému podal F. HAUSDORFF v knize *Grundzüge der Mengenlehre* (1914). Značí-li ω_ξ libovolné regulární počáteční ordinální číslo, pak symbol η_ξ značí množinu všech lexikograficky uspořádaných posloupností typu ω_ξ utvořených z čísel $0, 1, 2$ s touto vlastností: v každé posloupnosti $x_0 x_1 \dots x_\lambda \dots$ ($\lambda < \omega_\xi$) existuje $\delta < \omega_\xi$ tak, že od něho počínaje

¹⁾ Úplně uspořádané množiny nazývám dále stručně uspořádanými množinami.

jsou všechna $x_\lambda = 1$. Na př. pro $\xi = 0$ jest 010101... příkladem posloupnosti, jež do η_0 nepatří, kdežto 20110 1111... tam patří. Snadno se vidí, že η_ξ je koiniciální s posloupností 1111...; 0111...; 0011...; 0001...; ... typu ω_ξ^* , t. j. typu inversně uspořádaného k typu ω_ξ . Podobně je η_ξ konfinální s množinou typu ω_ξ . Libovolný řez v této množině má buďto dolní skupinu konfinální s množinou typu ω_ξ nebo horní koiniciální s množinou typu ω_ξ^* . Celkem tedy je možno říci, že η_ξ není konfinální ani koiniciální s množinou mohutnosti $< \aleph_\xi$, ani v ní neexistuje dvojice sousedních podmnožin o mohutnosti $< \aleph_\xi$. Hausdorff dokázal tuto větu: *Množina η_ξ obsahuje podobnou množinu ke každé uspořádané množině o mohutnosti $\aleph_\xi$.*

Důkaz: Buď $A = \{a_0, a_1, \dots, a_\alpha, \dots\}$ ($\alpha < \omega_\xi$) množina o mohutnosti $\aleph_\xi$, jejíž prvky jsou srovnány do posloupnosti typu ω_ξ bez ohledu na své uspořádání. Buď $B = \eta_\xi$; zvolme libovolně $b_0 \in B$ a přiřadme je k a_0 . Dejme tomu, že jsme k prvkům $a_0, a_1, \dots, a_\lambda, \dots$ ($\lambda < \alpha < \omega_\xi$) již přiřadili prvky $b_0, b_1, \dots, b_\lambda, \dots$ ($\lambda < \alpha < \omega_\xi$) tak, že $b_\lambda \in B$ a uspořádání obou posledních množin je podobné. Prvek a_α je buď před všemi a_λ nebo za nimi nebo v nich definuje řez. Máme ukázat, že v B existuje v prvním případě prvek b_α před všemi b_λ , v druhém případě za nimi a v třetím případě že existuje prvek b_α , který zapadne mezi prvky b_λ tak, jako prvek a_α mezi prvky a_λ . To však je správné, neboť množina $b_0, b_1, \dots, b_\lambda, \dots$ ($\lambda < \alpha$) má mohutnost $< \aleph_\xi$; není tedy množina B s touto množinou konfinální ani koiniciální, takže jak před ní tak za ní jsou prvky z B . Nechť konečně $B' \cup B''$ je řez v množině $b_0, b_1, \dots, b_\lambda, \dots$ ($\lambda < \alpha$), jenž odpovídá řezu v množině $a_0, a_1, \dots, a_\lambda, \dots$ ($\lambda < \alpha$) vytvořenému prvkem a_α . Pak horní i dolní skupina řezu mají mohutnost $< \aleph_\xi$, takže nejsou sousední. Existuje tedy mezi nimi prvek b_α . Tedy lze prvek b_α sestrojít pro každé $\alpha < \omega_\xi$.

Dosud jsme předpokládali, že ω_ξ je regulární ordinální číslo. Není-li ω_ξ regulární, je regulární $\omega_{\xi+1}$. Snadno se vidí, že každá množina o mohutnosti $\aleph_\xi$ je podobná jisté podmnožině v $\eta_{\xi+1}$. Odtud tedy plyne řešení našeho problému: *Každá uspořádaná množina o mohutnosti $\aleph_\xi$ ($\aleph_\xi$ libovolná nekonečná mohutnost) je podobná jistému systému transfiniitních posloupností typu ϑ utvořených z čísel 0, 1, 2 a uspořádaných lexikograficky; přitom ϑ je vhodné regulární počáteční ordinální číslo.*

W. SIERPIŃSKI dokázal v roce 1949 (*Sur une propriété des ensembles ordonnés*, Fund. Math. XXXVI, 1949), že čísla 0, 1, 2 v Hausdorffově větě lze nahradit čísly 0, 1. Dokázal větu: *Každá uspořádaná množina mohutnosti $\aleph_\omega$ je podobná jistému systému transfiniitních posloupností nul a jedniček typu ω , uspořádaných lexikograficky.* Zároveň ukázal, že typ ω , se obecně snížit nedá, t. j. existují uspořádané množiny mohutnosti $\aleph_\omega$, jež se nedají reprezentovat posloupnostmi typu $< \omega$. Taková je na př. množina typu ω .

Tyto dva výsledky dokazují, že problém se dá řešit kladně a při tom lze vystačit při tvoření posloupností s dvěma čísly 0, 1. Dále ovšem tento

počet snížit nelze. Pokud se týká typu reprezentujících posloupností, dokázal Sierpiński, že pro množinu o mohutnosti $\aleph_\nu$ je tento typ $\leq \omega_\nu$. Jsou známy příklady, kdy tento typ posloupností je $< \omega_\nu$.

Analogickými problémy týkajícími se uspořádaných kontinuí se zabýval J. Novák. *Uspořádaným kontinuem* rozumíme uspořádanou množinu s prvním a posledním prvkem, jež nemá mezer ani skoků, t. j. v níž každý řez má tuto vlastnost: buďto horní skupina má nejmenší prvek a dolní nemá největší, nebo dolní skupina má největší prvek a horní nemá nejmenší. Dokázal, že typ reprezentujících posloupností souvisí s tak zvanou separabilitou uspořádaného kontinua. Tento pojem je zaveden takto: Buď M uspořádaná množina, $H \subset M$ její podmnožina. Řekneme podle Hausdorffa, že H je *hustá* v M , když ke každé dvojici prvků $a, b \in M$, $a < b$, existuje dvojice prvků $a', b' \in H$ tak, že $a \leq a' < b' \leq b$. Minimum mohutností hustých podmnožin v M nazval Novák *separabilitou* množiny M . Novák pak dokázal tuto větu: *Buď C uspořádané kontinuum o separabilitě m . Pak C je podobno jistému systému transfinitejších posloupností nul a jedniček typu ϑ uspořádaných lexikograficky, kde ϑ je nějaké vhodné ordinální číslo o mohutnosti $\leq m$.* Důkaz této věty podal Novák v práci *On partition of an ordered continuum*, jež vyjde v časopise *Fundamenta Mathematicae*. Dospívá k tomuto výsledku takto: Volí v uspořádaném kontinuu C hustou podmnožinu H o mohutnosti m a provádí t. zv. *postupné dělení* kontinua C : Vybere libovolný bod z H uvnitř C . Tím se C rozpadne ve dva sousední uzavřené intervaly I_0, I_1 . Volme v každém z nich další bod z H a dostaneme další intervaly $I_{00}, I_{01}, I_{10}, I_{11}$; ke všem těmto intervalům počítáme jejich krajní body. Dále postupujeme transfinitečně. Když jsme již sestrojili všechny intervaly $I_{i_0 i_1 \dots i_\xi \dots}$ ($\xi < \lambda$) pro všechna $\lambda < \alpha$, kde $i_\xi = 0$ nebo $= 1$, definujeme intervaly $I_{i_0 i_1 \dots i_\xi \dots}$ ($\xi < \alpha$) takto: je-li α izolované, vybereme uvnitř každého intervalu $I_{i_0 i_1 \dots i_\xi \dots}$ ($\xi < \alpha - 1$) dělicí bod z množiny H ; ten rozdělí interval $I_{i_0 i_1 \dots i_\xi \dots}$ ($\xi < \alpha - 1$) ve dva intervaly $I_{i_0 i_1 \dots i_\xi \dots 0}$ a $I_{i_0 i_1 \dots i_\xi \dots 1}$ ($\xi < \alpha$). Jestliže α je limitní ordinální číslo, utvoříme všechny průniky $\bigcap_{\lambda < \alpha} I_{i_0 i_1 \dots i_\xi \dots}$ ($\xi < \lambda$). Každý z těchto průníků je uzavřený interval nebo bod; v prvním případě jej označme $I_{i_0 i_1 \dots i_\xi \dots}$ ($\xi < \alpha$). Číslo α nazveme *řádem intervalu* $I_{i_0 i_1 \dots i_\xi \dots}$ ($\xi < \alpha$). Pokračujeme v této konstrukci až do jistého minimálního ordinálního čísla ϑ , pro něž neexistuje žádný interval řádu ϑ . Toto číslo ϑ nazveme *řádem dělení*. Snadno se vidí, že jest $\vartheta \leq m$. V každém intervalu je totiž vybrán právě jeden dělicí bod z množiny H , takže systém všech intervalů má mohutnost $\leq m$. Kdyby bylo $\vartheta > m$, byla by mohutnost systému všech intervalů daného dělení $> m$ a to je spor. Každý bod v C je nyní průnikem jistého monotonního systému intervalů $\bigcap_{\lambda < \alpha} I_{x_0 x_1 \dots x_\xi \dots}$ ($\xi < \lambda$). Snadno se vidí, že

$$I_{x_0 x_1 \dots x_\xi \dots} (\xi < \lambda) \supset I_{x'_0 x'_1 \dots x'_\xi \dots} (\xi < \lambda'),$$

když a jen když

$$\lambda' \geq \lambda \text{ a } x_\xi = x'_\xi \text{ pro } \xi < \lambda.$$

Tedy všechny tyto intervaly definují svými indexy posloupnost $x_0 x_1 \dots x_\xi \dots (\xi < \alpha)$ typu $\leq \vartheta$. Lexikografické uspořádání těchto posloupností je podobno uspořádání kontinua C .

Prof. Novák mi pak položil problémy, zda lze typ těchto posloupností snížit na počáteční ordinální číslo mohutnosti separability a zda lze řád dělení snížit na toto číslo. Odpověď na obě otázky je kladná; to jsem dokázal v práci *Sur la représentation des ensembles ordonnés*, jež vyjde v časopise *Fundamenta Mathematicae*. Platí dokonce tato věta: *Každá uspořádaná množina o separabilitě $\aleph_\alpha$ je podobna jistému systému transfinitečních posloupností nul a jedniček typu ω_α při lexikografickém uspořádání.* Důkaz tohoto tvrzení spočívá na tomto principu: Označme podle Sierpiňského U_{ω_α} množinu všech posloupností nul a jedniček typu ω_α uspořádanou lexikograficky. Vyberme v množině M o separabilitě $\aleph_\alpha$ hustou podmnožinu o mohutnosti $\aleph_\alpha$. K ní existuje podle Sierpiňského věty podobná podmnožina H_1 v množině U_{ω_α} . Ostatní prvky v M , jsou-li jaké, definují mezery v H , t. j. řez, v nichž horní skupina nemá nejmenší a dolní skupina nemá největší prvek. Každé mezeře v H odpovídá mezera v H_1 . Tyto mezery lze vyplnit prvky z U_{ω_α} , jež pak odpovídají prvkům z $M - H$.

Pokud se týče druhého problému, dokázal jsem, že odpověď je kladná. Dokázal jsem však více: *Je-li uspořádané kontinuum podobno nějakému systému posloupností nul a jedniček typu ϑ při lexikografickém uspořádání, existuje dělení řádu $\leq \vartheta$.* Z důkazu Novákovy věty, jak jsem jej zde uvedl, plyne rovněž silnější tvrzení: *Je-li ϑ řád dělení kontinua C , pak se dá C reprezentovat posloupnostmi nul a jedniček typu $\leq \vartheta$.* Odtud snadno vychází: *Minimum řádu dělení kontinua C a minimum typu reprezentujících posloupností jsou tatáž ordinální čísla.*

Položil jsem si problém, do jaké míry lze tyto úvahy převést na množiny částečně uspořádané. Výsledek je obsažen v práci *O reprezentaci částečně uspořádaných množin posloupnostmi nul a jedniček*, jež vyjde v tomto časopise. Východiskem mých úvah byla tato BIRKHOFFOVA věta z knihy *Lattice theory* (1940, 1948): *Každá částečně uspořádaná množina P je isomorfní s jistým systémem $\Phi(P)$ podmnožin v P uspořádaných podle inkluze.* Důkaz je velmi prostý: Ke každému prvku $x \in P$ přiřadíme jeho normální uzávěr, t. j. podmnožinu $f(x)$ skládající se ze všech prvků $t \in P$ pro něž $t \leq x$. Systém $\Phi(P)$ všech $f(x)$ je zřejmě isomorfní s množinou P . Na základě této věty jsem dokázal tuto větu: *Každá částečně uspořádaná množina o mohutnosti $\aleph_\alpha$ je podobna jistému systému transfinitečních posloupností nul a jedniček typu ω_α uspořádaných podle pravidla (a).* Důkaz: Buď

$u_0 u_1 \dots u_\lambda \dots (\lambda < \omega_\alpha)$ posloupnost všech prvků množiny P bez ohledu na uspořádání. Nechť k prvku $x \in P$ patří normální uzávěr $M \in \Phi(P)$. Přiřadíme k prvku x posloupnost $x_0 x_1 \dots x_\lambda \dots (\lambda < \omega_\alpha)$, kde $x_\lambda = 1$, když $u_\lambda \in M$, a $x_\lambda = 0$, když $u_\lambda \in P - M$. Snadno se dokáže, že toto přiřazení posloupností k prvkům množiny P je isomorfismus, jsou-li posloupnosti uspořádány podle pravidla (a).

Jestliže množina P je uspořádána úplně, pak také systém přiřazených posloupností typu ω_α je uspořádán úplně podle pravidla (a). Zřejmě se však v tomto případě uspořádání podle pravidla (a) kryje s uspořádáním lexikografickým. Vyplyvá odtud tedy jako důsledek věta Sierpiňského.

Řekneme, že prvek x částečně uspořádané množiny P je *maximální*, když neplatí $t > x$ pro žádné $t \in P$; podobně se definuje prvek *minimální*. Řekneme dále, že prvek x , jenž není ani maximální ani minimální, má *vlastnost* (α) , když k němu existuje $y \in P$, $y \leq x$ tak, že $y \leq t$ pro každé t , pro něž $x \leq t$. Podobně definujeme *vlastnost* (β) . Řekneme nyní, že podmnožina $H \subset P$ je *hustá* v P , jestliže obsahuje všechny prvky maximální, minimální, všechny prvky s vlastností (α) nebo (β) a jestliže ke každému $a < b$, $a, b \in P$ existují prvky $a', b' \in H$ tak, že $a \leq a' < b' \leq b$. Minimum mohutností hustých podmnožin v P nazýváme *separabilitou* P . Analogicky jako u množin úplně uspořádaných jsem dokázal větu: *Každá částečně uspořádaná množina o separabilitě $\aleph_\alpha$ je podobna jistému systému transfinitečních posloupností nul a jedniček typu ω_α uspořádaných podle pravidla (a).* Tato věta je ze všech dosud uvedených nejobecnější, neboť z ní plynou všechny dosud uvedené věty kromě Birkhoffovy a věty o rovnosti minima řádu dělení a minima typu reprezentujících posloupností uspořádaného kontinua.

Uvedené výsledky vedou na další problémy. V semináři prof. Nováka o uspořádaných prostorech se podrobně zkoumají uspořádaná kontinua a mezi jiným také vztah minima mohutnosti řádu dělení k jiným charakteristikám uspořádaného kontinua. Dále se zdá, že bude potřeba podrobit analýze pojem husté podmnožiny v částečně uspořádané množině a zkoumat otázku, zda lze typ reprezentujících posloupností snížit.

Závěrem lze říci, že problém, jehož první řešení podal Hausdorff téměř před čtyřiceti lety, je stále ještě podnětný. Již to svědčí o jeho závažnosti a ceně.

ZPRÁVY

Dr Miloslav Valouch zemřel

Tuto smutnou zprávu o úmrtí zasloužilého ředitele Jednoty československých matematiků a fysiků dne 11. VI. 1952 sdělili jsme našim čtenářům a členům Jednoty již v 2. čísle našeho časopisu.

Dnes přinášíme smuteční projev*) prof. Dr. Bohumila Bydžovského, předsedy Jednoty čsl. matematiků a fysiků, kterým se rozloučil se zesnulým Dr. Miloslavem Valouchem jménem celé naší vědecké veřejnosti v pražském krematoriu:

„Dostalo se mi bolestné cti, abych promluvil nad rakví zesnulého Dr. Miloslava Valoucha, jehož neočekávaným odchodem s tohoto světa utrpěla naše kulturní veřejnost ztrátu sotva nahraditelnou. Jménem jeho přátel a spolupracovníků, jménem Jednoty čsl. matematiků a fysiků a také jménem celé naší vědecké veřejnosti chci zde vydati svědectví o muži a životu mimořádně významném a jedinečném, o životě jednoho z těch, kteří způsobem někdy nenápadným, ale za to tím účinněji a s velkým úspěchem zasáhli do rozvoje vzdělanosti našeho národa.

Miloslav Valouch se narodil před téměř 74 lety v Olomouci z rodiny řemeslnické a prožil v tomto městě své dětství a jinošství. Národnostní zápasy v tehdejší Olomouci, které měly jako všude jinde u nás také ráz zápasu sociálního, jistě působily na vývoj vnímavého ducha mladého Valoucha, který již jako gymnasista přispíval do olomouckého pokrokového tisku. V této činnosti pokračoval i když odešel na studia do Prahy. Na filosofické fakultě Karlovy university studoval matematiku a fysiku a dosáhl zde aprobační pro vyučování na gymnasiích a také hodnosti doktora filosofie. Na studiích se živil takřka sám, kondicemi a kancelářskými pracemi.

Po vykonaných studiích vyučoval na různých gymnasiích nejprve na venkově, při čemž byl stále přispivatelem do denního tisku a jiných časopisů, dokonce i nějakou dobu byl redaktorem pokrokového týdeníku. Styk s novinami, tiskárny, redakce uvedl jej do okruhu životních zkušeností, které po stránce ideové rozšiřovaly jeho obzor a zároveň jej seznamovaly s technickou stránkou tiskárenské a vydavatelské činnosti.

*) V Československém časopise pro fysiku, II. roč., který vydává Ústř. ústav fysikální, vyšel nekrolog Dr. Mil. Valoucha s vylíčením jeho životní práce.

To nejen mělo význam pro jeho pozdější dráhu životní, nýbrž vycházelo vstříc také jeho přirozenému technickému nadání. Toto nadání ostatně uplatňoval také jako učitel; byl znamenitý experimentátor, což byla jen jedna stránka jeho vynikajícího učitelského působení. Toto působení překračovalo hranice školy. Již jako universitní posluchač konal přednášky po venkově a tuto svou osvětovou činnost ještě zesílil jako středoškolský učitel. Konal přednášky nejen vědecky populární, nýbrž i obecně kulturní a politické. Po tom, co jsem již řekl o duševním vývoji mladého Valoucha, je samozřejmé, že v celé své činnosti, jak školní, tak mimoškolní, vystupoval jako upřímný zastánce pokroku, jako odpůrce klerikálního doktrinarství. Byl v tom věrným příslušníkem tehdejší pokrokové inteligence, která se připravovala k úkolům, které ji očekávaly v blízké době politického osvobození. V této době národního růstu, na kterou ovšem také již padaly stíny blížící se světové katastrofy, ocitl se mladý Valouch ve vlastním kulturním ohnisku všech těch snah, když r. 1909 byl jmenován profesorem na reálce v Praze. Ocitl se v učitelském sboru, kde byla řada mladých, pokrokových profesorů a záhy ho plně zaujal spolkový život. Stal se členem výboru Ústředního spolku českých profesorů a také členem výboru Jednoty čsl. matematiků a fysiků. Obě tyto události měly osudový význam pro jeho další život, každá svým způsobem. Obě jej uvedly do nových směrů činnosti. V ústředním spolku českých profesorů se odehrával boj pokrokové opozice proti konservativnímu a austrofilskému vedení; byl to zároveň s velké části boj generační a vítězná pokroková strana, ke které ovšem náležel i Valouch, obrátila činnost spolku novým směrem. V této nové orientaci měl právě Valouch význačnou roli, která se projevila nejvýrazněji za první světové války, kdy se kolem jeho osoby seskupila družina pokrokových profesorů a konala důvěrné porady, částečně také ve styku s proslulou Mafií, o úkolech, které nastanou po očekávaném pádu Rakouska. Schůzky se konaly většinou na půdě Jednoty čsl. mat. a fys. a členové Jednoty začli velmi záhy udávat tón důvěrným jednáním, jež měla m. j. na mysli školskou reformu ve smyslu vhodném pro svobodný československý stát. Když došlo k převratu 28. října 1918, byl Valouch asi politicky nejlépe informovaný profesor a když revoluční shromáždění profesorů se usnášelo na návrhu na obsazení vedoucích míst ve středoškolském odboru nově zřizovaného ministerstva školství a národní osvěty, nebylo divu, že jedním z kandidátů byl Dr Valouch. Stal se přednostou administrativního oddělení tohoto odboru a v této funkci se velmi zasloužil o budování sítě středních škol v menšinovém území a to ve směru pokrokovém. V této funkci se poprvé objevilo mimořádné administrativní a organizační nadání Dr Valoucha a stalo se v krátké době jasným, že toto nadání jej předurčuje k úřednímu postavení ještě zodpovědnějšímu. Stal se záhy přednostou presidia a později vedoucím sekčním šéfem ministerstva, v kterémžto postavení setrval po dva roky, téměř až do svého pensionování r. 1927. Z četných povín-

ností, jež mu vznikaly z jeho úředního postavení a v nichž se skvěle uplatňovala jeho iniciativnost, energie, pracovitost a zároveň znalost lidí, je třeba zvláště vytknout jeho účastenství v zákonodárných pracích a jeho funkci stálého zástupce ministerstva v kulturním výboru národního shromáždění; ze zásluh, které si v tomto postavení získal, je třeba vytknouti zvláště tu, že z jeho podnětu došlo k úřednímu projednávání školské reformy, a to přes odpor konservativní veřejnosti, který se projevoval i politicky a měl patrně také část viny na předčasném ukončení Valouchovy úřední dráhy. Snaha o uplatnění reformních snah školských byla u Dr. Valoucha opřena o vlastní školské zkušenosti i o reformní ruch, který se v posledních letech před první světovou válkou rozvinul na půdě Jednoty čsl. mat. a fys. Nové osnovy gymnasiální z r. 1909 vyžadovaly sepsání nových učebnic a to bylo pro Jednotu příležitostí k tomu, aby vydala učebnice matematiky pro všechny třídy a všechny typy tehdejších středních škol. Jedním z autorů nových učebnic byl také Dr. Valouch a jeho učebnice geometrie pro nižší střední školy se dočkaly sedmi vydání a byly vydány také slovensky. Dr. Valouch byl ostatně v té době autor již osvědčený. Vedle řady methodických článků sepsal dobře sestavený „Přehled matematiky“, podnes užitečný a vydal v témže roce 1904 logaritmické tabulky, o jejichž oblibě a zároveň vynikajících kvalitách svědčí, že jsou podnes v užívání v nejširších kruzích jak školních, tak vědeckých a technických a dočkaly se již 15. vydání. Dr. Valouch byl vynikající znalec tabulkových děl a vydal a vydával řadu jiných tabulek, hlavně pro technické potřeby.

Potřeba sepsati nové učebnice podle moderních osnov byla mocným podnětem k tomu, aby členové Jednoty se začali zabývat soustavně otázkami reformními, nejprve na užším poli matematiky a fysiky, později však — a k rozhodnutí o tom přispělo také závažné slovo Valouchovo — se tyto snahy rozšířily na reformu střední školy vůbec. A tak, když za války a pak těsně po válce reformy školské nabyly aktuality a měly býti prováděny, byla Jednota první a takřka jediná vědecká korporace, která vystoupila s návrhem hotovým a promyšleným. Velkou zásluhu o to měl právě Valouch, a to nejen tím, že sám měl zájem o tyto otázky, nýbrž i svým tehdejším postavením v Jednotě. Byl totiž r. 1915 zvolen ředitelem Jednoty; stal se tak nejdůležitějším funkcionářem Jednoty, který spojoval spolkovou funkci jednatelskou s řízením kanceláře Jednoty stále se rozmáhající a řízením jejích podniků, v první době nakladatelství. Silou své podnikavé a při tom rozvážné osobnosti nabyt Valouch rozhodujícího vlivu na všechny záležitosti Jednoty. To, že v prvních letech po válce spojoval ve své osobě ředitelství Jednoty s vysokým postavením v ústředním úřadě, jistě také přispělo ke zvýšení vážnosti Jednoty v naší veřejnosti. Rozhodně byl reformní návrh Jednoty, který byl na tu dobu poměrně radikální a velmi se blížil pojetí jednotné školy, po řadu let středem reformních diskusí. I když jeho myšlenky došly uskutečnění jen v malé

míře pro odpor konservativních a zpátečnických živlů, přece rozvířil poněkud klidnou hladinu středoškolské veřejnosti a položil pevný základ pro rozhodnější reformy pozdější. I k těm přispěl Dr Valouch, když za druhé světové války zorganizoval v Jednotě reformní komise školské, jež se později staly složkou Výzkumného ústavu pedagogického a pomáhaly uvést v život myšlenku jednotné školy.

Když Dr Valouch odešel v r. 1927 z ministerstva, nastal v jeho životě rozhodný obrat vyznačený tím, že od té doby veškerou svou činnost věnoval naší Jednotě. Nepravím příliš mnoho, když řeknu, že od té doby životopis Valouchův po mnohých stránkách je takřka totožný s dějinami Jednoty. Když nyní, kdy neodvratný osud učinil konec této činnosti, přehlížíme její průběh a výsledky, uvědomujeme si, co snad při pohledu zblízka mohlo uniknouti pozornosti, že jeho působení v Jednotě bylo podloženo určitým a promyšleným plánem, který s houževnatostí a vynalézavostí opravdu nevšední znenáhla uváděl v život. Byl to plán, učiniti Jednotu vzorem odborné vědecké společnosti, která by zahrnula do svého okruhu vše, co souvisí s vědeckými obory, jimž je věnována, která by zároveň ve své všestranné činnosti nebyla bržděna hospodářskými nesnázemi, byla finančně pevně zabezpečena, která by konečně, plně co nejlépe své odborné úkoly, stala se váženým a uznávaným kulturním činitelem v životě národa. Je věcí dějin naší Jednoty, aby ocenily, jak se tento plán zdařil; jisto je, že nedostatky, které by snad vytkly — a bez takových není lidského díla — tkví jinde, než v poctivé a veskrze úspěšné snaze Dr Valoucha. A tak, za vedení tohoto skvělého organisátora, rozvíjela se publikační činnost Jednoty tak, že její nakladatelství bylo v první řadě vědeckých nakladatelství a vyhovovalo všem potřebám škol, studujících, vědeckých pracovníků i širší veřejnosti v oboru matematických věd. Jednota zřizovala a pomáhala zříditi podniky pro výrobu matematických a fyzikálních pomůcek. Když Jednota obezřetným řízením Valouchovým hospodářsky rostla, opatřila si vlastní dům, v němž umístila svou kancelář a m. j. také knihovnu, která vyrostla, také jeho přičiněním, v bohatou knihovnu odbornou. Když rozmáhající se činnost publikační narážela na obtíže tiskárenské, dané tím, že tisk vědeckých prací, zvláště pak matematických, klade na tiskárnu mimořádné požadavky, koupila Jednota na návrh Dr Valoucha a za jeho vedení tiskárnu vlastní, kterou pak Dr Valouch zase plánovitě zdokonaloval, doplňoval novými stroji a materiálem, vychovával personál, máje na mysli zříditi nejprve vzornou tiskárnu specialisovanou pro sazbu matematickou, ale v další budoucnosti se mu rýsovala tiskárna vědecká, která by sloužila i vědeckým oborům jiným. Tiskárna Jednoty záhy začala tisknouti práce jiných vědeckých společností, tak m. j. České Akademie, Královské společnosti nauk. S rostoucím počtem publikací ukázalo se výhodným založiti vlastní knihkupectví a Jednota se pak stává komisionářem i jiných korporací vědeckých.

To, co tu říkám několika větami, znamenalo spoustu promyšlené a neúnavné práce, znamenalo cesty, intervence, znamenalo plné rozvinutí všech organizačních a administrativních schopností muže oddaného službě vědy. Ale při tom se Valouchova práce neomezovala jen na stránku ryze administrativní, nebo organizační, zasahoval svými návrhy a kritikami do samé podstaty věci. Tak, když vycítil potřebu nové sbírky spisů, navrhl také hned vnitřní její náplň, dával rady autorům, ohlížel se po zkušenostech doma i v cizině. Redakční kruh Časopisu pro matematiku a fyziku si jistě vzpomíná, co plodných podnětů pro úpravu tohoto časopisu od něho vyšlo, jak mu leželo na srdci, aby Časopis nabyl světové úrovně. O tom všem by každý jeho spolupracovník mohl vypravovati po dlouhé hodiny.

Svou dlouholetou činností v Jednotě, provázenou nespornými úspěchy, nabyl Dr Valouch úcty a vážnosti v celém našem vědeckém a kulturním světě. Byl zván na porady o společných záležitostech našich vědeckých společností, byl dotazován o radu ve věcech publikačních a příbuzných. Vliv jeho činnosti přesáhl meze jeho mateřské Jednoty a rozšiřoval se na organizaci naší vědy vůbec.

Když v posledních letech nastaly změny ve vydavatelských poměrech, bylo dědictví, které po té stránce převzala od Jednoty jiná místa, připraveno skvěle pro nové úkoly, díky dlouholeté a účelné práci Dr Valoucha, a bylo jen důsledné, že se stal ředitelem nového vědeckého nakladatelství, které v mnohých směrech je pokračováním práce, kterou uváděl v život plán pojatý v mladých letech.

Když se dnes zamýšlíme nad jeho životem, musíme říci, že Dr Valouch byl mužem pokroku v nejlepším slova smyslu. Nikoli slovy, nikoli velkými a lacinými hesly, nýbrž činy. Byl myslitel s živou obrazotvorností, která však byla řízena střízlivou úvahou, realistickým nazíráním na možnosti dané životem. Byl skvělým debatérem, který mluvil jen o věci, kterou si podrobně promyslel, a dovedl pak prosazovati své myšlenky ne silou slov, nýbrž silou důvodů. Žádal dobrou a úsilovnou práci od svých spolupracovníků, ale byl neméně přísný, ne-li přísnější sám k sobě. Každý, kdo se dostal do okruhu jeho myšlení, byl upoután jeho jasným duchem a stržen jeho vůlí obrácenou do budoucna a spějící za pokrokem.

Dr Valouch byl (v naší Jednotě) činný až do svých posledních dnů. Byl již dávno ve věku, kdy i nejsvědomitější pracovník může pomýšlet na odpočinek. Ale on naň nepomýšlel a neochaboval ve své činnosti. Napomáhal mu mladistvý duch, jehož pružnost, pronikavost a rychlé a hluboké chápání souvislostí ho neopustily do poslední chvíle.

Loučíce se s tím, který nás nyní opouští, ohlédli jsme se po jeho životě. Byl to život krásný. Byl plný úspěšné práce. Konal jej člověk, který myslil především vždy na dílo a nad dílem zapomínal na sebe. Byl příkladně skromný, odmítal okázalé projevy uznání a zakazoval si oslavné články při příležitostech, které si takové pocty takřka samozřejmě vyža-

dovaly. Přijal jen čestné členství Jednoty, které mu bylo uděleno již v r. 1921.

Jeho život byl krásný i tím, že přívětivý osud jej obklopil harmonickým rodinným životem a dal mu za průvodkyni životem choť oddanou a plnou pochopení pro jeho snahy. Jeho vrozená střízlivost se projevovala i kázní v projevech citových; ale pod povrchem zdánlivě chladným a snad i strohým žil hluboký cit, který se projevoval jak ve vztazích k rodině, tak také k přátelům a spolupracovníkům. Byl přítelem věrným, nezištným a obětavým. Jeho převážně intelektuální zaměstnání jej neodvádělo od krásných a žádoucích věcí života. Miloval cestování a s pevnou a obratnou rukou na volantu projel mnohým krajem své vlasti i ciziny. Byl ctitelem umění a byl dychtivým a pozorným čtenářem. A prožíval s hlubokým pochopením a bedlivou pozorností národní a světové dění, které v takovém bohatství provázelo jeho život.

Teď se skončil tento krásný život a bude žítí již jen v naší vděčné paměti.

Drahý příteli, když se nyní s Tebou loučím jménem Tvých přátel, spolupracovníků, Jednoty čsl. mat. a fys. a celé naší vědecké veřejnosti, tanou mi na mysli dvě slova: dík a slib. Dík za přátelství, jímž jsi okrášlil náš život, dík za práci, kterou jsi po tolik let věnoval rozvoji naší vzdělanosti, a slib, že se vynasnažíme pokračovati v Tvém díle. Největším díkem je Ti zavázána Jednota československých matematiků a fysiků, které jsi věnoval nedocenitelné bohatství dlouholeté práce. Tvoje jméno bude v dějinách naší Jednoty, Tvé Jednoty, vždy uváděno jako jméno jednoho z jejích nejzasloužilejších členů za celou dobu jejího trvání, ba snad za nejzasloužilejšího vůbec. Odpočívej v pokoji!

Novinové výplatné povoleno Okrskovým pošt. úřadem Praha 022:
j. zn. 309-38-Ře-52. — Dohlédací poštovní úřad Praha 022.