Werk

Label: Article

Jahr: 1949

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0074|log126

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Le problème principal est le suivant: trouver tous les 1-systèmes appartenant au groupoïde additif donné $\mathfrak{G}$. — Soit f une application du groupoïde $\mathfrak{G}$ dans le système d'endomorphismes de ce groupoïde. (L'endomorphisme du groupoïde est la déformation du groupoïde dans lui-même.) Désignons $f(a) = A$, $f(b) = B$ etc. et définissons $a \,.\, x = A(x)$, $b \,.\, x = B(x)$ etc., où $A(x)$ est l'image de l'élément x dans l'endomorphisme A. La multiplication définie est distributive à gauche et chaque 1-système peut être construit par ce procédé.

Par un procédé analogue, on peut donner les conditions nécessaires et suffisantes pour la construction d'un 1-système, dans lequel même la loi distributive droite est valable, d'un 1-système abélien, d'un 1-système associatif, d'un 1-système, dont la multiplication possède une division. Enfin, la solution de quelques problèmes concernant l'homomorphisme des 1-systèmes est donnée.

Un travail intitulé Les systèmes à deux compositions avec une loi distributive apparaîtra dans les Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk à Brno.

O VNOŘITELNOSTI SEMIGRUP.

VLASTIMIL PTÁK, Praha.

Sdělení se týkalo práce uveřejněné ve Spisech vydávaných přírodovědeckou fakultou university Karlovy, **192** (1949).

*

Summary. — Výtah.

Immersibility of Semigroups.

VLASTIMIL PTÁK, Praha.

The essential parts of the communication are contained in the author's paper published (in English) in Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou university Karlovy (Acta facultatis rerum naturalium universitatis Carolinae), **192** (1949).

ОБ ОДНОЙ ОБЩЕЙ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И О ЕЕ ПРИМЕНЕНИИ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ.

АЛФРЕД РЕНЬИ, Будапешт.

Уже давно известно существование некоторой связи между понятиями теории вероятностей и теории чисел. Однако до сих пор в большинстве случаев речь шла только о том, что были установлены некоторые аналогии между обеими теориями.

Например известно; что распределения целых чисел в классах вычетов по взаимно простым модчлям являются в некотором смысле независимыми. Это замечание был источником многих попыток доказательства и нестрогих выводов, но число результатов, строго доказанных таким путем невелико. Мы должны в этом отношении упомянуть только исследования P. Erdös и M. Kac[1]) о распределении значений мултипликативных функций. Однако некоторые авторы применяли понятия теории вероятностей без критики, и это часто приводило к противоречиям.

В настоящее время, после того как акад. *А. Н. Колмогоровым*[2]) было дано строгое аксиоматическое обоснование теории вероятностей, устранены все неясности понятия вероятности. Теория *Колмогорова*, как всякая вполне аксиоматическая теория, допускает разные интерпретации, и поэтому может быть применена в различных областях. Итак открыт путь к плодотворному применению теории вероятностей также в теории чисел.

В настоящеи сообщении будет изложена новая теорема теории вероятностей, имеющая важные следствия для теории чисел. Эту теорему я нашел исходя из известного метода *Ю. В. Линника*, метода, который называется ,,большим решетом".[3]) Обобщая ,,большое решето", удалось доказать следующую теорему:[4]) всякое четное число $2N$ может быть представлено в виде суммы простого и ,,полу-простого'' числа, т. е. в виде $2N = p + p_1 p_2 \dots p_k$ где p, p_1, p_2, $\dots$ p_k простые числа и k не превосходит абсолютную константу K. Изучение ,,большого решета'' открыло, что оно принадлежит в сущности к теории вероятностей. Общая теорема, которая была найдена мною таким путем, и которую я хочу здесь изложить, содержит ,,большое решето'' *Линника*, вместе с упомянутыми обобщениями в качестве частных случаев.

С точки зрения теории вероятностей в основе нашей теоремы лежит следующий очевидный факт: если x_1 и x_2 — независимые случайные величины и случайная величина y тесно связана с x_1 то y слабо связана с x_2. Для того чтобы формулировать нашу теорему во всей общности, прежде всего введем некоторые обозначения и определения.

Пусть E — некоторое множество и пусть через ξ означаются элементы множества E. Пусть F — борелевское тело подмножеств множества E, которое содержит также E в кажестве элемента. Элементы тела F будем обозначать через $A, B, \dots$ и называть событиями. Пусть $P(A)$ обозначает вполне аддитивную неотрицательную функцию множеств, определенную для $A \varepsilon F$; предположим $P(E) = 1$. Другими словами мы рассматриваем поле вероятностей $\{F, P\}$ в смысле *Колмогорова*.

P — измеримую функцию $x = x(\xi)$ определенную на E, принимающую вещественные значения, будем называть случайной величиной. Через

$$e(x) = \int_E x \, dP \tag{1}$$

обозначаем математическое ожидание величины x, и через $e_A(x)$ условное математическое ожидание величины x при гипотезе что событие A осуществлено, т. е. мы положим (для $P(A) \neq 0$)

$$e_A(x) = \frac{1}{P(A)} \int_A x \, dP \tag{2}$$

Через $\beta(x)$ обозначаем дисперсию величины x, т. е.

$$\beta(x) = e((x - e(x))^2) \tag{3}$$

Пусть $I = (a, b)$ обозначает полуинтервал $a \leqq t < b$ на вещественной оси, $(-\infty \leqq a < b \leqq +\infty)$, и пусть $A^x(I)$ означает множество таких ξ для которых значение $x(\xi)$ содержится в I. Положим $V^x(I) = P(A^x(I))$, значит $V^x(I)$ — функция распределения величины x; $V^x(I)$ — аддитивная функция полуинтервала. Как обычно, мы будем называть величины x и y независимыми, если

$$P(A^x(I_1)\, A^y(I_2)) = P(A^x(I_1))\, P(A^y(I_2)) \tag{4}$$

для всех полуинтервалов I_1 и I_2.

Теперь мы введем новое понятие: понятие *коэффициента родства* случайной величины x к случайной величине y. Коэффициент родства обозначим через $\varrho_y(x)$ и определим посредством формулы (предположим $\beta(y) \neq 0$)

$$\varrho_y(x) = \left[\frac{1}{\beta(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} (e_{A^x(I)}(y) - e(y))^2 \, V^x(I)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

где интеграл означает интеграл Burkill-а функции полуинтервала которая стоит под знаком интеграла. Заметим следующие свойства коэффициента родства: если x и y независимы, то $\varrho_y(x) = 0$; если $y = x$, то $\varrho_x(x) = 1$; вообще $0 \leqq \varrho_y(x) \leqq 1$; $\varrho_y(x)$ не изменяется если заменяем x на $f(x)$ где $f(t)$ — однозначная измеримая функция действительного переменного, т. е. $f(t_1) \neq f(t_2)$ если $t_1 \neq t_2$. Так например $\varrho_y(\lambda x + \mu) = \varrho_y(x)$ если $\lambda \neq 0$. Далее $\varrho_y(x)$ не изменяется если заменить y на $y - a$, где a — постоянное. Таким образом можем всегда заменить y на $Y = y - e(y)$, и поэтому имеем

$$\varrho_y(x) = \left[\frac{1}{e(Y^2)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^2_{A^x(I)}(Y)\, V^x(I)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

Если x — характеристическая величина события A (т. е. $x(\xi) = 1$ если $\xi \varepsilon A$ и $x(\xi) = 0$ в противном случае), дальше y — характеристическая величина события B, то $\varrho_y(x) = \varrho_x(y)$ равен коэффициенту корреляции между событиями A и B, т. е.

$$\varrho_y(x) = \frac{P(AB) - P(A)\,P(B)}{\sqrt{P(A)\,(1 - P(A)\,)P(B)\,(1 - P(B))}} \tag{7}$$

Введем еще одно понятие. Обозначим

$$d(x, y) = \sup_{(I_1, I_2)} \left| \frac{P(A^x(I_1)\, A^y(I_2))}{P(A^x(I_1)\, P(A^y(I_2))} - 1 \right| \tag{8}$$

где I_1 и I_2 пробегают все полуинтервалы вещественной оси, и назовем $d(x, y)$ *коэффициентом зависимости* между x и y. Бесконечную последовательность случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ будем называть *ограниченно связанной* если квадратичная форма $\Sigma\Sigma d_{nm}t_nt_m$, где $d_{nm} = d(x_n, x_m)$, будет ограниченной, т. е. если имеем

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} d_{nm}t_nt_m \right| \leqq \Delta \tag{9}$$

для

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n^2 = 1.$$

Число Δ называем *модулем* ограниченно связанной последовательности. Очевидно, что $\Delta = 0$, если величины x_n попарно независимы.

Теперь можем формулировать нашу

Теорему: *Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ означает ограниченно связанную последовательность случайных величин с модулем Δ, и пусть y — какое-либо случайная величина; предположим $\beta(y) > 0$. Тогда имеет место неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_y^2(x_n) \leqq (1 + \Delta)\frac{e(y^2)}{\beta(y)}. \tag{10}$$

Для доказательства нам нужна следующая лемма, выражающая тот факт что неравенства Bessel-я в обобщенном виде справедлива для *почти ортогональных* систем случайных величин. Систему $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ случайных величин называем *почти ортогональной*, если квадратичная форма $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}t_nt_m$, где $c_{nm} =$

$= e(\varphi_n, \varphi_m)$, ограничена, т. е. если $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}t_nt_m\right| \leqq K$ для $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^2 = 1$

Константу K будем называть *гранью* системы $\{\varphi_n\}$. Имеет место

Лемма: *Если $\{\varphi_n\}$ — почти ортогональная система случайных величин с гранью K, и y — любая случайная величина, положим $\gamma_n = e(y\varphi_n)$ для $n = 1, 2, \ldots$* Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma^2{}_n \leqq Ke(y^2) \tag{11}$$

Эта лемма — для почти ортогональных систем функций действительного переменного — была доказана R. P. Boas-ом.[5])

Доказательство этой леммы очень просто. В самом деле, для всякого целого $N \geqq 1$ имеем

$$e\left((y - \frac{1}{K}\sum_{n=1}^{N}\gamma_n\varphi_n)^2\right) = e(y^2) - \frac{2}{K}\sum_{n=1}^{N}\gamma_n{}^2 + \frac{1}{K^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} c_{nm}\gamma_n\gamma_m \geqq 0.$$

Так как

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} c_{nm}\gamma_n\gamma_m\right| \leqq K \cdot \sum_{n=1}^{N}\gamma_n{}^2$$

получаем

$$e(y^2) \geqq \frac{1}{K}\sum_{n=1}^{N}\gamma_n{}^2$$

что доказывает лемму.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Для всякого $n = 1, 2, 3, \ldots$ возьмем некоторое разложение действительной осьи на конечное число не пересекающихся полуинтервалов: $\{I_{nk}\}$ $k = 1, 2, \ldots, N(n)$. Пусть $A_k^{x_n}$ означает событие $x_n \varepsilon I_{nk}$ и положим $P(A_k^{x_n}) = p_{nk}$; очевидно что $\sum_{k=1}^{N(n)} p_{nk} = 1$. Пусть Φ_{nk} означает характеристическую величину события $A_k^{x_n}$ и пусть будет

$$\varphi_{nk} = \frac{\Phi_{nk} - p_{nk}}{\sqrt{P_{nk}}}. \tag{12}$$

(Ясно, что можно предположить $p_{nk} \neq 0$). Положим

$$c_{nn'kk'} = e(\varphi_{nk}\varphi_{n'k'}) \tag{13}$$

В силу определения коэффициента зависимости имеем для $n \neq n'$

$$|\, c_{nn'kk'} \,| \leqq \sqrt{P_{nk}P_{n'k'}} \cdot d(x_n, x_{n'}), \tag{14}$$

дальше для $k \neq k'$

$$c_{nnkk'} = -\sqrt{p_{nk}p_{nk'}}, \tag{15}$$

и наконец

$$c_{nnkk} = 1 - p_{nk} \tag{16}$$

Пользуясь этими формулами, докажем, что случайные величины $\{\varphi_{nk}\}$ $(n = 1, 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots, N(n))$ образуют почти ортогональную систему с гранью равной $1 + \Delta$, где Δ — модуль ограниченно связанной последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ В самом деле, пусть $\{t_{nk}\}$ — любая двойная последовательность $(n = 1, 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots, N(n))$ для которого $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(n)} t_{nk}^2 < \infty$. Пользуясь формулами (14), (15) и (16), и полагая

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n'=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(n)}\sum_{k'=1}^{N(n')} c_{nn'kk'}t_{nk}t_{n'k'}, \tag{17}$$

полагая далее

$$T_n = \sum_{k=1}^{N(n)} t_{nk}^2, \tag{18}$$

применяя неравенство Cauchy и имея в виду, что $\sum_{k=1}^{N(n)} p_{nk} = 1$, найдем

$$|S| \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n'=1}^{\infty} d(x_n, x_{n'})\, T_n^{\frac{1}{2}} T_{n'}^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n. \tag{19}$$

Таким образом, в силу определения модуля зависимости, получаем

$$|S| \leqq (1 + \Delta) \sum_{n=1}^{\infty} T_n \tag{20}$$

Итак доказано, что система $\{\varphi_{nk}\}$ является почти ортогональной с гранью $K = 1 + \Delta$. Следовательно, с помощью доказанной леммы, и полагая $\gamma_{nk} = e(y\varphi_{nk})$ получаем неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(n)} \gamma_{nk}^2 \leqq (1 + \Delta)\, e(y^2) \tag{21}$$

Однако, пользуясь определением величины φ_{nk}, мы видим, что

$$\gamma_{nk}^2 = (e_{A_k^{x_n}}(y) - e(y)^2\, V^{x_n}(I_{nk}) \tag{22}$$

Поэтому, если для краткости положим

$$D_n = \sum_{k=1}^{N(n)} \gamma_{nk}^2, \tag{23}$$

то только что доказанное неравенство дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \leqq (1 + \Delta)\, e(y^2) \tag{24}$$

С другой стороны, значение D_n зависит только от выбора разложения $\{I_{nk}\}$, и легко видеть что верхняя грань величины D_n — для всех возможных разложений — равна $\beta(y)\, \varrho_y{}^2(x_n)$. В самом деле, интеграл Burkill-а $\int_{-\infty}^{+\infty} F(I)$, как известно, равен верхной грани сумм $\sum F(I_k)$ — (где $\{I_k\}$ пробегает все возможные разложения действительной оси в конечное число непересекающих полуинтервалов), если только функция полуинтервала $F(I)$ *субаддитивна*, т. е. $F(I_1 + I_2) \equiv F(I_1) + F(I_2)$ при $I_1 I_2 = 0$. Таким образом, если мы покажем, что

$$F(I) = (e_{A^{x_{n(I)}}}(y) - e(y))^2\, V^{x_n}(I) \tag{25}$$

субаддитивна, то утверждение

$$\sup .\, D_n = \beta(y)\, \varrho_y{}^2(x_n) \tag{26}$$

будет доказано.

Доказательство субаддитивности функции (25) состоит из двух шагов. Во-первых, $F(I)$ может быть представлено в виде $\frac{G^2(I)}{H(I)}$, где $G(I)$ и $H(I)$ — аддитивные функции. В самом деле имеем

$$F(I) = e^2_{A^{x_{n(I)}}}(Y)\, V^{x_n}(I) = \frac{e^2(Y\, .\, Z(x_n, I))}{V^{x_n}(I)} \tag{27}$$

где $Z(x_n, I)$ — характеристическая величина события $A^{x_n}(I)$. Во-вторых, каждая функция вида $\frac{G^2(I)}{H(I)}$ где $G(I)$ и $H(I)$ аддитивны, является субаддитивной, как это видно из элементарного неравенства $\frac{(a+b)^2}{c+d} \leqq \frac{a^2}{c} + \frac{b^1}{d}$, где $c > 0$, $d > 0$, a и b вещественны. Таким образом (26) доказана. Имея в виду что разложения $\{I_{nk}\}$ $n = 1, 2, \ldots$ выбираются независимо одно от других, мы получаем таким образом

$$\beta(y) \sum_{n=1}^{\infty} \varrho_y{}^2(x_n) \leqq e(y^2) \tag{28}$$

и составляет утверждение нашей теоремы.

Наконец, отметим лишь одно из следствий нашей теоремы, касающееся распределения простых чисел в прогрессиях. Для множества E возьмем конечную последовательность целых чисель: 1, 2, 3, ..., N. Пусть F — множество всех подмножеств