Werk

Label: Periodical issue

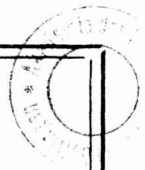
Jahr: 1948

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311028X_0073|log31

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

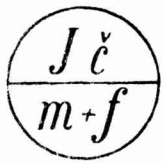
info@digizeitschriften.de



ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ

MATEMATIKY A FYSIKY

ROČNÍK 73 — SEŠIT 3



PRAHA 1948

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

Vydává a nakládá Jednota československých matematiků a fysiků v Praze

Ročník 73 • Sešit 3 • 1948

Hlavní redaktoři

VOJTĚCH JARNÍK a MILOSLAV A. VALOUCH

Část vědecká

Redakční rada pro část matematickou

OTAKAR BORŮVKA, BOHUMIL BYDŽOVSKÝ, EDUARD ČECH, VÁCLAV HLAVATÝ, BOHUSLAV HOSTINSKÝ, VLADIMÍR KNICHAL, VLADIMÍR KOŘÍNEK, MILOŠ KÖSSLER, ŠTEFAN SCHWARZ a FRANTIŠEK VYČICHLO

Redakční rada pro část fysikální

JINDŘICH M. BAČKOVSKÝ, RUDOLF BRDIČKA, DIONÝS ILKOVIČ, FRANTIŠEK LINK, ZDENĚK MATYÁŠ, VIKTOR TRKAL a AUGUST ŽÁČEK

Články — Zprávy — Literatura

Odborní redaktoři

KAREL HAVLÍČEK a ZDENĚK PÍRKO

Ročně 4 sešity **Roční předplatné Kčs 120,—**

Redakce a administrace: Praha II, Žitná 25. Telefon 29308. V pracovní dny od 8 do 12 a od 14 do 16 hodin kromě soboty. Účet poštovní spořitelny: Jednota čs. matematiků a fysiků, čís. 13103. Knihtiskárna Prometheus v Praze VIII, Rokoska 94. Telefon RR8139. Novinová sazba povolena ředitelstvím pošt a telegrafů 18. listopadu 1933, čís. 288250/VII. Dohlédací poštovní úřad Praha 25.

Tento sešit vyšel 30. prosince 1948

Prof. Dr Bohumil Bydžovský: **Knihovna, sv. 23**

Úvod do algebraické geometrie

1948. A5. 668 str. 50 obr. **Brož. Kčs 320,—**

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 73 (1948)

Note on the T. Y. Thomas's Paper: On the Projective Theory of Two Dimensional Riemann Spaces.

By **Alois Urban**, Praha.

(Received December 4, 1947.)

As proved by *T. Y. Thomas*,[1]) there exists for every Riemannian space a contravariant vector density of weight two, namely $\mathfrak{a}a^{\lambda\mu}K_\mu$,[2]) preserved by the projective transformation which changes the geodesics of the considered Riemannian space to these of another one.

In this note there is found the relation of the invariant mentioned above to the curvature tensor of the projective Riemannian space.[3])

Let $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}(\xi^\varkappa)$[4]) be the coefficients of a symmetric connection ($\xi^\varkappa$ being the coördinates of an n-dimensional space). The coefficients of any symmetric connection with the same paths are given by the projective transformation

$$'\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + 2A^\nu_{(\lambda}p_{\mu)}, \tag{1}$$

where p_μ is an arbitrary covariant vector.

The quantities

$$\Pi^\nu_{\lambda\mu} = \Pi^\nu_{\mu\lambda} \overset{\text{def.}}{=} \Gamma^\nu_{\lambda\mu} - \frac{2}{n+1} A^\nu_{(\lambda}\Gamma^\varkappa_{\mu)\varkappa} \tag{2}$$

are unaltered under the transformation (1). Let us introduce the

[1]) Thomas T. Y.: On the Projective Theory of Two Dimensional Riemann Spaces. (Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A., 31 (1945), 259–261.)

[2]) Where $a^{\lambda\mu}$ are the contravariant components of the fundamental tensor of the Riemannian space, $\mathfrak{a} = \det.(a_{\lambda\mu})$ and K_μ is the first derivative of the Gaussian curvature.

[3]) A projective Riemannian space is the totality of Riemannian spaces which yield the same system of geodesics.

[4]) Small (capital) Greek indices take the values $1, \ldots, n$ $(0, 1, \ldots, n)$.

quantities $\Pi^{\nu}_{\omega\mu\lambda}$ by the relation

$$\Pi^{\nu}_{\omega\mu\lambda} = 2\partial_{[\omega}\Pi^{\nu}_{\mu]\lambda} + 2\Pi^{\varkappa}_{[\omega|\alpha|}\Pi^{\alpha}_{\mu]\lambda}. \tag{3}$$

If we introduce a set of functions $P^{\Omega'}_{\Omega}$ and $P^{\Omega}_{\Omega'}$ defined by

$$P^{o'}_{o} = 1,\ P^{\nu'}_{o} = 0,\ P^{\nu'}_{\lambda} = \frac{\partial \xi^{\nu'}}{\partial \xi^{\lambda}},\ P^{o'}_{\lambda} = -\frac{1}{c(n+1)}\frac{\partial \log \Delta}{\partial \xi^{\lambda}},$$

$$c = \text{const.} \tag{4}$$

$$P^{o}_{o'} = 1,\ P^{\nu}_{o'} = 0,\ P^{\nu}_{\lambda'} = \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial \xi^{\lambda'}},\ P^{o}_{\lambda'} = \frac{1}{c(n+1)}\frac{\partial \log \Delta}{\partial \xi^{\nu}}\frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial \xi^{\lambda'}},$$

where

$$\xi^{\nu'} = \xi^{\nu'}(\xi^{\nu}) \tag{5}$$

is a coordinates transformation with $\Delta = \det . \left(\frac{\partial \xi^{\nu'}}{\partial \xi^{\nu}}\right) \neq 0$, then we find that the set of functions

$$\begin{aligned} {}^{*}\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} &= {}^{*}\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} = \Pi^{\nu}_{\lambda\mu}, \\ {}^{*}\Gamma^{\Omega}_{\omega\Sigma} &= {}^{*}\Gamma^{\Omega}_{\Sigma o} = c\delta^{\Omega}_{\Sigma}, \\ {}^{*}\Gamma^{o}_{\lambda\mu} &= {}^{*}\Gamma^{o}_{\mu\lambda} = \frac{1}{c(n-1)}\Pi^{\nu}_{\lambda\nu\mu} = \frac{1}{c(n-1)}\Pi_{\lambda\mu} \end{aligned} \tag{6}$$

transforms under (5) according to

$${}^{*}\Gamma^{\Omega'}_{\Lambda'\Sigma'} = {}^{*}\Gamma^{\Omega}_{\Lambda\Sigma}P^{\Omega'}_{\Omega}P^{\Lambda}_{\Lambda'}P^{\Sigma}_{\Sigma'} + P^{\Omega'}_{\Gamma}\,\partial_{\Lambda'}P^{\Gamma}_{\Sigma'} \tag{7}$$

where

$$\partial_{\Lambda'}P^{\Gamma}_{\Sigma'} = \delta^{\lambda'}_{\Lambda'}\frac{\partial}{\partial \xi^{\lambda'}}P^{\Gamma}_{\Sigma'}.^{5}) \tag{8}$$

Because of (7) the functions (6) are the coefficients of a projective connection.

The projective curvature tensor of the ${}^{*}\Gamma$'s

$$\mathfrak{P}\dot{\Omega}\dot{\Sigma}\dot{\Lambda}^{\Phi} = 2\partial_{[\Omega}{}^{*}\Gamma^{\Phi}_{\Sigma]\Lambda} + 2{}^{*}\Gamma^{\Phi}_{[\Omega|\Psi|}{}^{*}\Gamma^{\Psi}_{\Sigma]\Lambda} \tag{9}$$

satisfies the following relations

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}\dot{\omega}\dot{\mu}\dot{\lambda}^{\nu} &= \Pi^{\nu}_{\omega\mu\lambda} + \frac{2}{n-1}A^{\nu}_{[\omega}\Pi_{\mu]\lambda}, \\ \mathfrak{P}\dot{\omega}\dot{\mu}\dot{\lambda}^{o} &= \frac{1}{c(n-1)}(2\partial_{[\omega}\Pi_{\mu]\lambda} + 2\Pi_{[\omega|\varkappa|}\Pi^{\varkappa}_{\mu]\lambda}). \end{aligned} \tag{10}$$

The components $\mathfrak{P}\dot{\omega}\dot{\mu}\dot{\lambda}^{\Phi}$ may be expressed by means of the curvature

[5]) Cf. V. Hlavatý: Hypersurfaces in a Projective Curved Space (Annals of Mathematics 39 (1938), 728–729.)

tensor of the Γ's

$$R^{\cdot\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = 2\partial_{[\omega}\Gamma^{\nu}_{\mu]\lambda} + 2\Gamma^{\nu}_{[\omega|\varkappa|}\Gamma^{\varkappa}_{\mu]\lambda},^{6}) \tag{11}$$

namely

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \mathfrak{P}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = P^{\cdot\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}, \\ &\text{b)}\ \mathfrak{P}^{\cdot\cdot\cdot\cdot 0}_{\omega\mu\lambda} = \frac{2}{c}\left(D_{[\omega}P_{\mu]\lambda} + \frac{1}{2(n+1)}P^{\cdot\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}\Gamma^{\varkappa}_{\nu\varkappa}\right), \end{aligned} \tag{12}$$

where D_ω denotes the operator of the covariant derivative with regard to Γ's and

$$\begin{aligned} &P_{\mu\lambda} = -\frac{1}{n^2-1}(nR_{\mu\lambda} + R_{\lambda\mu}),\ R_{\mu\lambda} = R^{\cdot\cdot\cdot\cdot\nu}_{\nu\mu\lambda}, \\ &P^{\cdot\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = R^{\cdot\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} - 2P_{[\omega\mu]}A^{\nu}_{\lambda} + 2A^{\nu}_{[\omega}P_{\mu]\lambda} \end{aligned} \tag{13}$$

($P^{\cdot\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$ being the *Weyl* curvature tensor). If we use the well known relation

$$D_\nu P^{\cdot\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = 2(2-n)D_{[\omega}P_{\mu]\lambda},^{7}) \tag{14}$$

we may express (12b) in the following form valid for $n > 2$

$$\mathfrak{P}^{\cdot\cdot\cdot\cdot 0}_{\omega\mu\lambda} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2-n}D_\nu P^{\cdot\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} + \frac{1}{n+1}P^{\cdot\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}\Gamma^{\varkappa}_{\nu\varkappa}\right). \tag{15}$$

If $n = 2$, the *Weyl* curvature tensor vanishes identically and therefore

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \mathfrak{P}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} = 0, \\ &\text{b)}\ \mathfrak{P}^{\cdot\cdot\cdot\cdot 0}_{\omega\mu\lambda} = \frac{2}{c}D_{[\omega}P_{\mu]\lambda}. \end{aligned} \tag{16}$$

In the case of the projective twodimensional Riemannian space we have

$$P_{\mu\lambda} = -Ka_{\mu\lambda}, \tag{17}$$

where $a_{\lambda\mu}$ is the fundamental tensor of the Riemannian space and K is the Gaussian curvature. Hence we get from (16b) and (17)

$$\mathfrak{P}^{\cdot\cdot\cdot\cdot 0}_{\omega\mu\lambda} = -\frac{2}{c}K_{[\omega}a_{\mu]\lambda}. \tag{18}$$

Let us now introduce the bivector density $\mathfrak{E}^{\lambda\mu} = \mathfrak{E}^{[\lambda\mu]}$ of weight $+1$ with the components $\mathfrak{E}^{11} = \mathfrak{E}^{22} = 0$, $\mathfrak{E}^{12} = -\mathfrak{E}^{21} = 1$. By means of (18) we find that the covariant vector density of weight $+1$

$$\mathfrak{M}_\lambda \overset{\text{def.}}{=} K_{[\omega}a_{\mu]\lambda}\mathfrak{E}^{\omega\mu} = K_\omega a_{\mu\lambda}\mathfrak{E}^{\omega\mu} = -\tfrac{1}{2}c\,\mathfrak{P}^{\cdot\cdot\cdot\cdot 0}_{\omega\mu\lambda}\mathfrak{E}^{\omega\mu} \tag{19}$$

is a projective invariant.

---

[6]) Cf. Schouten J. A.-Struik D. J.: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie, I., p. 110.

[7]) Cf. Eisenhart L. P.: Non-Riemannian Geometry (American Math. Soc., New York, 1927), p. 89.

If we define $e_{\lambda\mu}$ by

$$e_{\lambda\mu}\mathfrak{E}^{\lambda\nu} = \delta^{\nu}_{\mu} \tag{20}$$

then we have $e_{\lambda\mu} = e_{[\lambda\mu]}$ and consequently we obtain for the contravariant vector density

$$\mathfrak{N}^{\nu} \overset{\text{def.}}{=} \mathfrak{E}^{\nu\lambda}\mathfrak{M}_{\lambda} \tag{21}$$

the relation

$$\mathfrak{N}^{\varkappa} = \mathfrak{E}^{\varkappa\lambda}K_{\omega}\mathfrak{a}a^{\alpha\beta}e_{\mu\alpha}e_{\lambda\beta}\mathfrak{E}^{\omega\mu} = \mathfrak{a}K^{\varkappa} \tag{22}$$

which shows that $\mathfrak{N}^{\varkappa}$ as defined by (21) is identical with the vector density introduced by *T. Y. Thomas.*[1])

From (19) and (22) we get

$$\mathfrak{a}K^{\varkappa} = \tfrac{1}{2}c\,\mathfrak{P}_{\dot{\omega}\dot{\mu}\dot{\lambda}}{}^{\upsilon}\mathfrak{E}^{\omega\mu}\mathfrak{E}^{\lambda\varkappa}, \tag{23}$$

from which follows that $\mathfrak{N}^{\varkappa}$ is a projective invariant. *The equation* (23) *gives the relation of the invariant* $\mathfrak{a}K^{\varkappa}$ *introduced by T. Y. Thomas to the components* $\mathfrak{P}_{\dot{\omega}\dot{\mu}\dot{\lambda}}{}^{0}$ *of the projective curvature tensor* $\mathfrak{P}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}}{}^{\Phi}$ *of the twodimensional projective Riemannian space.*

Praha, Charles University, Department of Geometry.

*

Poznámka k článku T. Y. Thomase: On the Projective Theory of Two Dimensional Riemann Spaces.

(Obsah předešlého článku.)

T. Y. Thomas zavedl ve článku uvedeném v nadpise a v poznámce [1]) kontravariantní vektorovou hustotu váhy +2, a to $\mathfrak{a}K^{\varkappa}$, a ukázal, že je invariantní vzhledem k projektivní transformaci (1), jestliže $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ a $'\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ jsou Christoffelovy symboly druhého druhu dvojrozměrných Riemannových prostorů. V předchozí práci je nalezen rovnicí (23) vztah této vektorové hustoty ke složkám $\mathfrak{P}_{\dot{\omega}\dot{\mu}\dot{\lambda}}{}^{0}$ projektivního tensoru křivosti $\mathfrak{P}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}}{}^{\Phi}$ projektivního Riemannova prostoru.

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 73 (1948)

$(n + 4)$-úhelník vepsaný racionální normální křivce n-rozměrného prostoru.

Jan Srb, Jihlava.

(Došlo dne 11. června 1947.)

Pascalovu větu o šestiúhelníku vepsaném kuželosečce rozšířil pro racionální normální křivku čtyrrozměrného prostoru *G. Veronese*, pro racionální normální křivku n-rozměrného prostoru *F. Deruyts*.[1])

V tomto článku dokazuji jinou závislost mezi $n + 4$ body racionální normální křivky n-rozměrného prostoru a popisuji užití této závislosti při konstrukci dalších bodů a oskulačních prostorů křivky, dané $n + 3$ obecnými body.

Nazveme-li protějšími stranu, určenou dvěma po sobě následujícími vrcholy $(n + 4)$-úhelníku, vepsaného racionální normální křivce n-rozměrného prostoru, a nadrovinu, určenou n po sobě následujícími vrcholy tohoto $(n + 4)$-úhelníka, které obdržíme, když z vrcholů zbývajících po určení strany vynecháme vrchol prvý a poslední, platí věta:

(1) *V $(n + 4)$-úhelníku, vepsaném racionální normální křivce n-rozměrného prostoru, protínají každé tři po sobě následující strany své protější nadroviny ve třech bodech, které leží s $n - 2$ vrcholy, společnými těmto třem nadrovinám, v téže nadrovině. A obráceně. Mají-li prostory, určené $n + 4$ body n-rozměrného prostoru určitě uspořádanými a takovými, že žádných $n + 1$ z nich neleží v téže nadrovině, polohu popsanou v první části věty, mají tuto polohu při libovolném uspořádání bodů a $n + 4$ body tyto prostory určující leží na racionální normální křivce n-rozměrného prostoru, určené kterýmikoliv $n + 3$ z nich.*

Důkaz prvé části. Na racionální normální křivce n-rozměrného prostoru C^n buď dáno $n + 4$ bodů $1, 2, \ldots, n + 3, n + 4$ v tomto, jinak libovolném pořádku určujících $(n + 4)$-úhelník křivce C^n ve-

[1]) Encyklopädie der mat. Wissenschaften, III, C, 7, C. Segre, Mehrdimensionale Räume, str. 896, pozn. 373.

psaný. Cyklickou záměnou pojmenování vrcholů můžeme vždy dosáhnout toho, že tři po sobě následující strany $(n+4)$-úhelníku jsou $a_1 \equiv (1, 2)$, $a_2 \equiv (2, 3)$, $a_3 \equiv (3, 4)$. Potom jsou $S^1_{n-1} \equiv \equiv (4, 5, \ldots, n+3)$, $S^2_{n-1} \equiv (5, 6, \ldots, n+4)$, $S^3_{n-1} \equiv (6, \ldots, n+4, 1)$ protější nadroviny těchto stran, mající společný $(n-3)$-rozměrný prostor S_{n-3}, určený vrcholy $6, 7, \ldots, n+3$. Protože žádných $n+1$ bodů křivky C^n neleží v téže nadrovině, protínají strany a_i nadroviny S^i_{n-1} v bodech A_i, $(i = 1, 2, 3)$. Z S_{n-3}, který má tedy s C^n $n-2$ společné body $6, 7, \ldots, n+3$, promítněme do libovolné nezávislé roviny S_2 body $1, \ldots, 5, n+4$ do bodů $1', \ldots, 5', (n+4)'$ a body A_i do bodů A'_i, $(i = 1, 2, 3)$. Racionální normální křivka C^n se promítá z S_{n-3} do roviny S_2 do kuželosečky C^2, na níž leží body $1', \ldots, 5', (n+4)'$. Protože je $S^1_{n-1} \equiv (4, 5, \ldots, n+3) \equiv (4, 5, S_{n-3})$, $S^2_{n-1} \equiv (5, 6, \ldots, n+3, n+4) \equiv (5, S_{n-3}, n+4)$, a $S^3_{n-1} \equiv \equiv (6, \ldots, n+3, n+4, 1) \equiv (S_{n-3}, n+4, 1)$, jsou body $A'_1 \equiv \equiv [(1', 2') \times (4', 5')]$, $A'_2 \equiv [(2', 3') \times (5', n+4')]$ a $A'_3 \equiv [(3', 4') \ldots (n+4', 1')]$. Podle Pascalovy věty o šestiúhelníku vepsaném kuželosečce leží body A'_i $(i = 1, 2, 3)$ na přímce p roviny S_2. Přímka p a prostor S_{n-3} jsou nezávislé. Určují proto nadrovinu, ve které tedy leží $n+1$ bodů $6, \ldots, n+3, A_1, A_2, A_3$. Tím je prvá část věty (1) dokázána.

Důkaz části druhé. Buď dáno $n+4$ bodů n-rozměrného prostoru, z nichž žádných $n+1$ neleží v téže nadrovině, v uspořádání $1, 2, \ldots, n+4$ takových, že prostory jimi určené mají vzájemnou polohu popsanou v prvé části věty (1). Tedy přímky $a_1 \equiv \equiv (1, 2), a_2 \equiv (2, 3), a_3 \equiv (3, 4)$ protínají protější nadroviny $S^1_{n-1} \equiv \equiv (4, 5, \ldots, n+3)$, $S^2_{n-1} \equiv (5, 6, \ldots, n+4)$, $S^3_{n-1} \equiv (6, \ldots, n+4, 1)$ v bodech A_i $(i = 1, 2, 3)$, které s dalšími body $6, \ldots, n+3$ leží v téže nadrovině S_{n-1}. Z $(n-3)$-rozměrného průsečného prostoru nadrovin S^i_{n-1} $(i = 1, 2, 3)$, t. j. z prostoru $S_{n-3} \equiv (6, \ldots, n+3)$, promítněme zbývající body $1, \ldots, 5; n+4$ do nezávislé roviny S_2, do bodů $1', \ldots, 5', (n+4)'$, body A_i do bodů A'_i $(i = 1, 2, 3)$. Nadroviny $S^1_{n-1} \equiv (4, 5, S_{n-3})$, $S^2_{n-1} \equiv (5, S_{n-3}, n+4)$ a $S^3_{n-1} \equiv \equiv (S_{n-3}, n+4, 1)$ protínají rovinu S_2 v přímkách $p_1 \equiv (4', 5')$, $p_2 \equiv (5', n+4')$ a $p_3 \equiv (n+4', 1')$, které se s přímkami $a'_1 \equiv \equiv (1', 2')$, $a'_2 \equiv (2', 3')$ a $a'_3 \equiv (3', 4')$ protínají v bodech A'_1, A'_2, A'_3, ležících podle předpokladu na přímce p roviny S_2, v níž nadrovina S_{n-1} rovinu S_2 protíná. Žádné tři z bodů $1', 2', \ldots, 5', (n+4)'$ neleží na téže přímce roviny S_2. V opačném případě by tři dané body, které se do těchto bodů promítají, a $n-2$ body, určující S_{n-3}, tedy celkem $n+1$ z daných bodů $1, \ldots, n+4$, leželo proti předpokladu v nadrovině určené touto přímkou a nezávislým S_{n-3}. Podle Pascalovy věty o šestiúhelníku vepsaném kuželosečce

leží tedy 6 bodů $1', 2', \ldots, 5', (n+4)'$ na jednoduché kuželosečce C^2 roviny S_2. Tato kuželosečka se promítá z prostoru S_{n-3} kvadratickým kuželem $(n-2)$-ho druhu $S_{n-3} - V^2_{n-1} \equiv K$, na němž leží všechny dané body $1, \ldots, n+4$. Pro lineární nezávislost každých $n+1$ z daných bodů mohou v prostoru dvojných bodů S_{n-3} tohoto kužele ležet pouze $n-2$ dané body $6, \ldots, n+3$, tento prostor určující. Cyklickými záměnami pojmenování vrcholů $(n+4)$-úhelníka $1, \ldots, n+4$ můžeme vždy docílit toho, že kterýkoliv vrchol bude označen 1. Existují tedy $n+4$ různé kvadratické kužely $(n-2)$-ho druhu K_i, $(i = 1, \ldots, n+4)$ takové, že na každém z nich leží všechny dané body $1, \ldots, n+4$ a v dvojném prostoru každého z nich leží právě $n-2$ těchto bodů. Kužely jsou různé, protože mají různé prostory singulární. Prostory dvojných bodů kuželů K_i jsou totiž určeny vždy $n-2$ (cyklicky) po sobě následujícími body řady $1, \ldots, n+4$ tak, že vždy druhý bod skupiny $n-2$ bodů, určujících singulární prostor některého kužele, je prvým bodem skupiny $n-2$ bodů, určujících singulární prostor kužele následujícího. Dva totožné prostory by však musely být určeny skupinami $n-2$ bodů se společným prvým bodem.

První tři kužely K_i $(i = 1, 2, 3)$ mají prostory dvojných bodů: $S^1_{n-3} \equiv (6, 7, \ldots, n+3)$, $S^2_{n-3} \equiv (7, 8, \ldots, n+4)$, $S^3_{n-3} \equiv (8, \ldots, \ldots, n+4, 1)$. Je tedy $S^1_{n-2} \equiv (6, 7, \ldots, n+3, n+4)$, t. j. spojující prostor obou prostorů S^1_{n-3} a S^2_{n-3}, $(n-2)$-rozměrným prostorem ležícím na kuželi K_1 i K_2 a $S^2_{n-2} \equiv (7, 8, \ldots, n+4, 1)$, t. j. spojující prostor obou prostorů S^2_{n-3} a S^3_{n-3}, $(n-2)$-rozměrným prostorem ležícím na kuželi K_2 i K_3. Svazek nadrovin Σ_1 s basí S^1_{n-2} protíná kužely K_1 a K_2 v řadách $(n-2)$-rozměrných prostorů s ním perspektivních. Svazek nadrovin Σ_2 s basí S^2_{n-1} přiřaďme svazku Σ_1 tak, aby se korespondující si nadroviny obou svazků protínaly v $(n-2)$-rozměrných prostorech kužele K_2. Oba svazky jsou pak projektivní a takové, že každým z daných bodů $1, \ldots, n+4$, ležících na kuželi K_2, procházejí nadroviny korespondující si v projektivnosti obou svazků. Svazek nadrovin Σ_3 s basí S^3_{n-2} přiřaďme svazku nadrovin Σ_2 tak, aby se korespondující si nadroviny protínaly v $(n-2)$-rozměrných prostorech kužele K_3. Oba svazky Σ_2 a Σ_3 jsou pak projektivní a takové, že každým z daných bodů $1, \ldots, n+4$, ležících na kuželi K_3, procházejí v projektivnosti obou svazků si korespondující nadroviny. Je tedy $\Sigma_1 \overline{\wedge} \Sigma_2 \overline{\wedge} \Sigma_3$ a každým bodem $1, \ldots, \ldots, n+4$ procházejí nadroviny, které si v těchto projektivnostech korespondují. Pokračujeme-li takto dále, obdržíme pomocí n kuželů K_i $(i = 1, \ldots, n)$ celkem n projektivních svazků nadrovin $\Sigma_1 \overline{\wedge} \Sigma_2 \overline{\wedge} \ldots \overline{\wedge} \Sigma_n$ takových, že každým z daných bodů $1, \ldots, n+4$ procházejí nadroviny, které si v projektivnostech těchto svazků

korespondují. n projektivních svazků Σ_i $(i = 1, \ldots, n)$ má obecnou vzájemnou polohu, protože každých n korespondujících si nadrovin se protíná v jednom bodě. Abychom to ukázali, zvolme ve svazku Σ_1 $n - 1$ nadrovin, které korespondují: ve svazku Σ_2 nadrovině určené bodem *6*, který jistě neleží v jeho basi určené skupinou $n - 2$ po sobě následujících bodů $n + 4$-úhelníka počínající bodem *7*, ve svazku Σ_3 nadrovině určené bodem *7*, který jistě neleží v jeho basi počínající bodem *8* atd. až ve svazku Σ_n nadrovině určené bodem $n + 4$, který jistě neleží v jeho basi určené skupinou bodů počínající bodem *1*. Ve svazku Σ_1 zvolme nyní libovolnou nadrovinu S^1_{n-1}, která není jednou z těchto $n - 1$ nadrovin a která neprochází žádným z bodů *1*, ..., *5*, které neleží v jeho basi. Ve svazcích Σ_i $(i = 2, \ldots, n)$ sestrojme nadroviny S^i_{n-1} $(i = 2, \ldots, n)$ korespondující nadrovině S^1_{n-1} svazku Σ_1. Prostor S_x, ve kterém se těchto n korespondujících si nadrovin protíná, leží v $(n - 2)$-rozměrném prostoru S_{n-2}, ve kterém se protínají nadroviny S^1_{n-1} a S^2_{n-1}. Tento S_{n-2} prochází prostorem $(7, \ldots, n + 4)$ společným basím svazků Σ_1 a Σ_2, neprochází body *1*, ..., *5*, kterými neprochází S'_{n-1} a neprochází bodem *6*, protože nadrovině svazku Σ_2, která prochází bodem *6*, koresponduje ve svazku Σ_1 nadrovina jiná než S'_{n-1}. S_x leží v prostoru S_{n-2} a v nadrovině S^3_{n-1}, které mají společný prostor $(8, \ldots, n + 4)$. Bod *7* leží v S_{n-2}, neleží však v nadrovině S^3_{n-1}, protože nadrovině svazku Σ_3, která prochází bodem *7*, koresponduje ve svazku Σ_1 jiná nadrovina než S^1_{n-1}. Nenáleží tedy celý S_{n-2} nadrovině S^3_{n-1} a protíná ji v $(n - 3)$-rozměrném prostoru S_{n-3}, v němž tedy leží S_x. Prostor S_{n-3} neprochází body *1*, ..., *6*, protože leží v S_{n-2} a neprochází bodem *7*, protože leží v S^3_{n-1}. Pokračujeme-li tak dále, obdržíme, že prostor S_x leží v přímce S_1, v níž se protíná $n - 1$ korespondujících si nadrovin S^i_{n-1} $(i = 1, \ldots, n - 1)$, která prochází bodem $n + 4$ a neprochází žádným z ostatních daných bodů *1*, ..., $n + 3$. Nadrovina S^n_{n-1} neprochází bodem $n + 4$, protože nadrovině svazku Σ_n, procházející bodem $n + 4$, koresponduje v Σ_1 jiná nadrovina než S^1_{n-1}. Proto protíná S^n_{n-1} přímku S_1 v bodě a $S_x \equiv S_0$, j. b. d.

Svazky Σ_i $(i = 1, \ldots, n)$ vytvoří tedy průsečnými prostory korespondujících si nadrovin racionální normální křivku n-rozměrného prostoru, na které leží všechny dané body *1*, ..., $n + 4$. Protože tedy tyto body leží na racionální normální křivce n-rozměrného prostoru, platí pro ně prvá část věty (1) při libovolném uspořádání. Tím je dokázána i druhá část věty (1).

II.

V této části článku ukážeme užití právě dokázané věty na dvou základních úlohách.

1. Racionální normální křivka n-rozměrného prostoru C^n buď dána svými $n + 3$ reálnými body $1, \ldots, n + 3$. Jest sestrojiti bod $n + 4$, v němž C^n protíná nadrovinu S_{n-1} proloženou $n - 1$ body křivky $5, \ldots, n + 3$ a neprocházející žádným ze zbývajících bodů $1, \ldots, 4$.

Řešení. Podle věty (1) jsou:

(*a*) $(1, 2)$; $(4, 5, 6, \ldots, n + 3)$,
(*b*) $(2, 3)$; $(5, 6, \ldots, n + 3, n + 4)$,
(*c*) $(3, 4)$; $(6, \ldots, n + 3, n + 4, 1)$

tři páry protějších prostorů. Prostory (*a*) se protínají v bodě I_1, který neleží v $(n - 3)$-rozměrném prostoru $(6, \ldots, n + 3)$. V opačném případě by n bodů $1, 2, 6, \ldots, n + 3$ leželo v $(n - 2)$-rozměrném prostoru proti předpokladu, že tyto body leží na racionální normální křivce C^n. Nadrovina $(5, \ldots, n + 4) \equiv S_{n-1}$ je protata přímkou $(2, 3)$ v bodě II_1, který z uvedeného důvodu neleží v $(6, \ldots, n + 3)$. Přímka (I_1, II_1) neprotíná prostor $(6, \ldots, n + 3)$, protože tento prostor neprotíná rovina $(1, 2, 3)$, jak plyne z vlastnosti bodů křivky C^n, a body $I_1 \not\equiv II_1 \not\equiv 2$ leží na přímkách $(1, 2)$ a $(2, 3)$. Určují tedy body $I_1, II_1, 6, \ldots, n + 3$ nadrovinu, ve které leží bod $III_1 \equiv$ $\equiv [(3, 4) \times (6, \ldots, n + 3, n + 4, 1)]$ na přímce $(3, 4)$. Podle věty (1) je potom $(6, 7, \ldots, n + 3, III_1, 1) \equiv (6, 7, \ldots, n + 3, n + 4, 1) \equiv$ $\equiv S^1_{n-1}$. Nadroviny S_{n-1} a S^1_{n-1} se protínají v $(n - 2)$-rozměrném prostoru $(6, \ldots, n + 3, n + 4) \equiv S_{n-2}$, v němž tedy leží bod $n + 4$. Kdyby se obě nadroviny ztotožňovaly, leželo by v S_{n-1} $n + 1$ bodů $6, 7, \ldots, n + 3, n + 4, 1$ křivky C^n.[1])

Druhou trojici protějších prostorů volme takto:

(*a*) $(2, 3)$; $(5, 6, 7, \ldots, n + 3, 1)$,
(*b*) $(3, 4)$; $(6, 7, \ldots, n + 3, 1, n + 4)$,
(*c*) $(4, 5)$; $(7, \ldots, n + 3, 1, n + 4, 2)$.

Prostory (*a*) se protínají v bodě I_2. Nadrovina prostorů (*b*) je určena prostorem $S_{n-2} \equiv S_{n-1} \times S^1_{n-1}$ a bodem 1, tedy prostory (*b*) se protínají v bodě II_2. Podle věty (*1*) leží bod III_2, který je průsečíkem prostorů (*c*), na přímce $(4, 5)$ v nadrovině $(7, \ldots, n + 3, I_2 II_2, 1)$. Potom je $(7, \ldots, n + 3, 1, III_2, 2) \equiv (7, \ldots, n + 3, 1, n + 4, 2)$ a tato nadrovina protíná prostor $S_{n-2} \equiv (6, \ldots, n + 3, n + 4)$ v $(n-3)$-rozměrném prostoru $S_{n-3} \equiv (7, \ldots, n + 3, n + 4)$, obsahujícím bod $n + 4$.

m-tou trojici protějších prostorů volme takto:

(*a*) $(m, m + 1)$; $(m + 3, m + 4, m + 5, \ldots, n + 3, 1, \ldots, m - 1)$
(*b*) $(m + 1, m + 2)$; $(m+4, m+5, \ldots, n+3, 1, \ldots, m-1, n+4)$
(*c*) $(m + 2, m + 3)$; $(m + 5, \ldots, n + 3, 1, \ldots, m - 1, n + 4, m)$

[1]) Pro stručnost nebudu v dalším provádět zcela evidentní důkazy nezávislosti a existence příslušných prostorů.

Dvojice prostorů (a) se protíná v bodě I_m. Nadrovina $(m+4, m+5, \ldots, n+3, 1, 2, \ldots, n-1, n+4)$ je určena prostorem $S_{n-m+1} \equiv (m+4, m+5, \ldots, n+3, n+4)$ a body $1, 2, \ldots, m-1$ a je protata přímkou $(m+1, m+2)$ v bodě II_m. Podle věty (1) je bod III_m, který je průsečíkem prostorů (c), průsečík přímky $(m+2, m+3)$ s nadrovinou $(I_m, II_m, m+5, \ldots, n+3, 1, \ldots, m-1)$. Pak se tedy nadrovina $(m+5, \ldots, n+3, 1, 2, \ldots, m-1, III_m, m)$ protíná s prostorem S_{n-m+1} v $(n-m)$-rozměrném prostoru $S_{n-m} \equiv (m+4, \ldots, n+3, n+4)$, obsahujícím bod $n+4$. Pokračujeme-li tak dále, bude po n-tém kroku $S_{n-m} \equiv S_0 \equiv n+4$.

2. Racionální normální křivka n-rozměrného prostoru C^n buď dána svými $n+3$ reálnými body $2, \ldots, n+4$. V bodě 2 jest sestrojiti všechny oskulační prostory křivky.

(2,1) *Konstrukce tečny.* Položme $1 \equiv 2$ a volme:

$$[(1,2) \times (4,5,6,\ldots,n+1,n+2,n+3)] \equiv I_1,$$
$$[(2,3) \times (5,6,\ldots,n+1,n+2,n+3,n+4)] \equiv II_1,$$
$$[(3,4) \times (6,\ldots,n+1,n+2,n+3,n+4,1)] \equiv III_1.$$

Bod I_1 tečny sestrojené k C^n v bodě $1 \equiv 2$ leží podle věty (1) v nadrovině $(II_1, III_1, 6, \ldots, n+3)$ a v nadrovině $(4, 5, 6, \ldots, n+3)$, tedy v $(n-2)$-rozměrném prostoru S_{n-2}, procházejícím $(n-3)$-rozměrným prostorem $(6, \ldots, n+3)$, v němž se obě nadroviny protínají.

Dále volme:

$$[(1,2) \times (4,6,5,7,\ldots,n+3)] \equiv I_1,$$
$$[(2,3) \times (6,5,7,\ldots,n+3,n+4)] \equiv II_1,$$
$$[(3,4) \times (5,7,\ldots,n+3,n+4,1)] \equiv III_2.$$

Bod I_1 leží podle věty (1) v nadrovině $(II_1, III_2, 5, 7, \ldots, n+3)$ a v S_{n-2}, tedy v $(n-3)$-rozměrném prostoru S_{n-3}, v němž se oba prostory protínají a který prochází $(n-4)$-rozměrným prostorem $(7, \ldots, n+3)$. Dále volme:

$$[(1,2) \times (4,7,6,5,8,\ldots,n+3)] \equiv I_1,$$
$$[(2,3) \times (7,6,5,8,\ldots,n+3,n+4)] \equiv II_1,$$
$$[(3,4) \times (6,5,8,\ldots,n+3,n+4,1)] \equiv III_3.$$

Bod I_1 leží podle věty (1) v nadrovině $(II_1, III_3, 6, 5, 8, \ldots, n+3)$ a v S_{n-3}, tedy v $(n-4)$-rozměrném prostoru, v němž se oba prostory protínají a který prochází $(n-5)$-rozměrným prostorem $(8, \ldots, n+3)$.

Pokračujeme-li takto dále, dospějeme k přímce procházející bodem $n+3$ a k nadrovině, která tímto bodem neprochází, které se protínají v bodě $I_1 \equiv 1 \equiv 2$ tečny křivky C^n v bodě $1 \equiv 2$.

(2,2) *Konstrukce oskulační roviny.* Podle (2,1) sestrojme v bodě 2 tečnu t a promítněme z tohoto bodu $n+1$ daných bodů, na př. $3, \ldots, n+3$ do nadroviny, která neprochází bodem 2, na př. $S_{n-1} \equiv$

Stručný přehled vědeckých prací profesora Karla Petra v desítiletí 1938-1948.

Napsal **Vladimír Kořínek.**

K šedesátinám prof. Karla Petra vyšel v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky stručný nástin jeho života z pera prof. Fr. Nušla a stručný přehled jeho prací z pera prof. M. Kösslera.[1]) Tento přehled byl doplněn při sedmdesátinách prof. Petra autorem za desítiletí 1928—1938.[2]) Účelem tohoto článku jest doplnit u příležitosti osmdesátin prof. Petra tyto přehledy stručným vylíčením jeho vědecké činnosti za desítiletí 1938—1948.

I v osmé desítce svého věku neustává prof. Petr ve své intensivní činnosti. Jen v roce 1946 publikuje na příklad 5 vědeckých prací. V tomto období věnuje hlavní svou pozornost algebře, která i předtím byla spolu s teorií čísel hlavním předmětem jeho zájmu. Je to pravděpodobně způsobeno tím, že odchodem na odpočinek z universitní činnosti v roce 1938 nemusí se z důvodů svých universitních přednášek tak mnoho zabývat analysou a může se cele věnovat oboru, v němž spočívá hlavní těžisko jeho práce.

Analysy týká se v tomto období toliko práce **100 (101)**[3]) o polynomech Bernoulliových. Prof. Petr definuje Bernoulliovy polynomy diferenční rovnicí[4])

$$\varphi_k(x + 1) - \varphi_k(x) = x^k$$

[1]) Karel Petr, Stručný nástin jeho života a stručný přehled jeho prací. Napsali k jeho šedesátinám Fr. Nušl a M. Kössler. ČMF **57** (1928), 169—182. Tento článek je v dalším citován jako I.

[2]) Stručný přehled vědeckých prací profesora Karla Petra v desítiletí 1928—1938. U příležitosti jeho sedmdesátin napsal Vladimír Kořínek, ČMF **67** (1938), D245—D254. Tento článek je v dalším citován jako II.

[3]) Čísla se vztahují na seznam připojený k tomuto přehledu. Prof. Petr zabýval se čísly a polynomy Bernoulliovými již ve dvou starších pracích 4 a 6 z I. Mimo to odvodil ve svém Počtu integrálním, 2. vyd., odst. 109, str. 231—232 a cvičení 2 až 14, str. 272—274, všechny hlavní vlastnosti těchto polynomů a čísel metodami počtu integrálního.

[4]) Tuto diferenční rovnici pro polynomy Bernoulliovy uvádí již J. L. Raabe v knize Die Jacob-Bernoullische Funktion. Zürich 1848, str. 16. Rozvoje (1) jsem v literatuře nikde nenalezl.

a podmínkou $\varphi_k(0) = 0$. Tím jsou Bernoulliovy polynomy $\varphi_k(x)$ pro přirozené číslo k úplně určeny a snadno z této definice plyne, že $\varphi_k(x)$ je pro liché k polynom stupně $\frac{1}{2}(k+1)$ v $(2x-1)^2$ a pro sudé k polynom stupně $\frac{1}{2}k$ v $(2x-1)^2$ násobený $(2x-1)$. Z této vlastnosti polynomů Bernoulliových plyne, že platí rozvoje

$$\begin{aligned} \varphi_{2r-1}(x) &= c_0^r \mathfrak{A}_r(x) + c_1^r \mathfrak{A}_{r-1}(x) + \ldots + c_{r-1}^r \mathfrak{A}_1(x), \\ \varphi_{2r}(x) &= d_0^r \mathfrak{B}_r(x) + d_1^r \mathfrak{B}_{r-1}(x) + \ldots + d_{r-1}^r \mathfrak{B}_1(x), \end{aligned} \tag{1}$$

kdež $\mathfrak{A}_k(x)$ a $\mathfrak{B}_k(x)$ jsou tyto součiny:

$$\mathfrak{A}_k(x) = \frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1)(x-1)(x-2)\ldots(x-k)}{2k}$$

$$\mathfrak{B}_k(x) = \frac{(2x-1)\,x(x+1)\ldots(x+k-1)(x-1)(x-2)\ldots(x-k)}{2\,(2k+1)}.$$

Prof. Petr nejdříve odvozuje velmi prostě vlastnosti koeficientů c_j^i, d_j^i těchto rozvojů. Tyto vlastnosti jsou překvapivě jednoduché:

1. c_j^i, d_j^i jsou přirozená čísla.
2. $c_j^i = d_j^i$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots; j = 0, 1, 2, \ldots, i-1$.
3. Platí pro $i > j > 0$ rekurentní vztah

$$c_j^i = c_j^{i-1} + (i-j)^2 c_{j-1}^{i-1}$$

a dále

$$c_0^i = d_0^i = 1.$$

Vlastnost 3 dovoluje velmi lehko rekurentně počítat koeficienty c_j^i, d_j^i. Prof. Petr se domnívá, že pro tyto jednoduché vlastnosti svých koeficientů mohou mít rozvoje (1) velkou důležitost pro teorii funkcí a čísel Bernoulliových. Proto studuje podrobně vlastnosti těchto koeficientů a ukazuje, jakým způsobem se dají tyto koeficienty lehko počítat. Správnost své domněnky pak ozřejmuje tím, že odvozuje pomocí těchto rozvojů velmi jednoduchým způsobem řadu vlastností polynomů a čísel Bernoulliových a čísel příbuzných. Dokazuje řadu číselně teoretických vlastností koeficientů c_j^i a d_j^i a podává velmi jednoduchý důkaz věty Staudt-Clausenovy, která říká toto: Jest pro r-té Bernoulliovo číslo:

$$(-1)^r B_r = \tfrac{1}{2} + \sum_p \frac{1}{p} + \text{celé číslo},$$

kdež se sčítá pro všechna lichá prvočísla p taková, že $p-1$ dělí $2r$. Na konec odvozuje vzorce pro snadný výpočet koeficientů.

Práce **104** patří do teorie čísel a týká se Gaussových součtů. Jedná se o součet

$$\sum_{k=1}^{P} \left(\frac{k}{P}\right) \alpha^k, \tag{2}$$

kde P je liché číslo bez čtvercových dělitelů, α P-tá odmocnina z jedné. Jedna z prvních metod pro stanovení hodnoty tohoto součtu, pocházející od Gausse,[5]) spočívá v tom, že se ukáže, že součet (2) se rovná součinu

$$\psi_P(\alpha) = (\alpha - \alpha^{-1})(\alpha^3 - \alpha^{-3}) \ldots (\alpha^{P-2} - \alpha^{-P+2}).$$

Gauss to ukázal algebraickou cestou. Není však jasno, jakým způsobem přišel na výrazy, kterých při důkaze používá. Později podal Cauchy[6]) jiný, rovněž algebraický, důkaz této věty, ale jen pro případ, že P je liché prvočíslo. Záhy se však obrátila pozornost matematiků při stanovení součtu (2) k metodám jiným. Prof. Petr upozorňuje, že se věnovala uvedené Cauchyově práci velmi malá pozornost snad proto, že Cauchy podal důkaz poněkud povrchně, a ukazuje, že se důkaz dá snadno upravit tak, aby platil i pro případ, že P je liché číslo bez čtvercových dělitelů. Jako aplikaci podává autor důkaz zákona reciprocity pro Jacobiho symboly $\left(\frac{P}{Q}\right)$. Dále ukazuje, že platí vztah

$$\psi_{P_1}(\alpha_1)\,\psi_{P_2}(\alpha_2) = \psi_P(\alpha),$$

jsou-li P_1, P_2 dvě čísla nesoudělná a bez čtvercových dělitelů, $P = P_1P_2$, α_1 a α_2 P_1-tá a P_2-tá primitivní odmocnina z jedné, $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ (což je P-tá primitivní odmocnina z jedné).

Všechny ostatní práce prof. Petra z tohoto období patří do algebry.

Práce **102 (103)**, ačkoliv se zabývá problémem geometrickým, je v podstatě algebraická. Jedná se o tento problém: Jsou dány strany $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n-úhelníku vepsaného do kružnice. Jest vypočísti poloměr kružnice R a plochu n-úhelníku P.[7]) Prof. Petr stanoví nejdříve nutné a postačující podmínky, které musí strany $a_1, a_2, \ldots, a_n$ splňovat, aby to byly strany n-úhelníka vepsaného do kružnice a pak vykládá metody, jimiž lze sestrojit algebraické rovnice pro P a R. Koeficienty těchto rovnic jsou polynomy v $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pro $n = 3, 4, 5, 6$ pak skutečně tyto rovnice vypočítává. Přitom se ukazuje, že rovnice pro P mají pro $n = 2k - 1$ a $n = 2k$ stejný stupeň a že jejich koeficienty spolu jednoduše souvisí.

---

[5]) K. Fr. Gauss: Summatio quarumdam serierum singularium. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. 1, 1811. Werke II, str. 9—45.

[6]) Aug. Cauchy: Méthode simple et nouvelle pour la détermination complète des sommes alternées, formées avec les racines primitives des équations binômes. Journal de mathématiques pures et appliquées **5**, 1840, 154 až 168. Viz str. 161. Oeuvres complètes. 1-ère série, tome 5, nr. 82, 152—166. Viz str. 159.

[7]) Prof. Petr se zabýval různými vlastnostmi mnohoúhelníků již v dřívějších pracích. Viz práce 7 (9), 19, 34, 38 z I.

První Petrova práce z tohoto období je 94 a zabývá se kvadratickou formou s reálnými koeficienty $\sum_{ik} a_{ik}x_ix_k$, $a_{ik} = a_{ki}$. Jak známo, lze regulární lineární substitucí o reálných koeficientech převésti tuto formu na tvar $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^2$, $c_i \neq 0$, je-li ovšem diskriminant formy $D_n = |a_{ik}|$ různý od nuly. Přitom počet z záporných koeficientů mezi koeficienty c_i nezávisí na lineární substituci, nýbrž jen na kvadratické formě, a je roven počtu změn znaménkových v posloupnosti

$$D_n, D_{n-1}, \ldots, D_1, D_0 = 1, \tag{3}$$

kdež D_i jsou hlavní subdeterminanty diskriminantu formy tak zvolené, že subdeterminant D_i stupně i-tého je subdeterminant z determinantu D_{i+1}. Abychom mohli změny znaménkové v (3) spočítat, musíme předpokládat, že žádné dva sousední subdeterminanty v (3) nejsou rovny nule. Posloupnost (3) lze sice vždy tak zvolit, aby to bylo splněno, pro praktický výpočet bude však výhodné, budeme-li umět určit číslo z i z posloupnosti (3), která tuto podmínku nesplňuje. Tímto problémem se zabýval prof. Petr již dříve v práci 21 z I.[8]) Tam ukázal, že posloupnost (3) udává přesně počet záporných členů z, přiřadíme-li každému členu D_i, který se rovná nule, znaménko jeho hlavního subdeterminantu nejvyššího stupně, který je od nuly různý. V práci 94 vykládá prof. Petr jinou jednodušší metodu, jak určit z. K tomu cíli nechť v posloupnosti (3) existuje úsek

$$D_r \neq 0,\ D_{r+1} = 0,\ \ldots,\ D_{r+s-1} = 0,\ D_{r+s} \neq 0. \tag{4}$$

Je-li $s = 2$, pak nutně D_r a D_{r+2} mají opačná znaménka a počet změn znaménkových v (4) nutno položit rovný jedné. Pro $s = 3$ ukazuje prof. Petr, že počet změn znaménkových v úseku (4) nutno položit rovný dvěma, jsou-li D_r a D_{r+3} stejného znaménka, a rovný jedné, jsou-li tato čísla opačných znamének. Pro $s > 3$ již neurčují znaménka krajních členů D_r a D_{r+s} samy o sobě, za kolik změn znaménkových nutno úsek (4) počítat. Prof. Petr vyšetřuje však ještě případy $s = 4, 5, 6$. Jeho metoda vede k tomu, že posloupnost (4) se v těchto případech nahradí posloupnostmi jednodušími, obsahujícími toliko D_r, D_{r+s} a pak ještě jisté hlavní subdeterminanty stupně nejvýše $(s - 2)$-ho. Metody lze však použít i při $s > 6$, kterézto případy však prof. Petr nevyšetřuje.

L. E. Dickson[9]) podal krátký důkaz této věty: Budiž A čtver-

[8]) Viz I, str. 179.

[9]) L. E. Dickson: Modern Algebraic Theories, 1926, str. 89 a násl. — L. E. Dickson: Höhere Algebra. Autorisierte deutsche Ausgabe von „Modern Algebraic Theories", herausgegeben von Ewald Bodwig, 1929, str. 80 a násl. — K celému problému srovnej: C. C. Mac Duffee: The Theory of Matrices, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 2 Band, 5, 1933, str. 70 až 72. Viz zvláště Corollary 39,12 na str. 70 a citaci Dicksona na str. 72.

cová matice o n řádcích s prvky v tělese T. Pak existuje čtvercová matice S o n řádcích s prvky v tělese T a s nenulovým determinantem taková, že platí

$$S^{-1}AS = B,$$

kdež B je matice speciálního tvaru, která se dá psát takto:

$$B = \begin{pmatrix} C_{r_1}, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & C_{r_2}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & C_{r_3}, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & C_{r_k} \end{pmatrix}.$$

Zde jest $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$, C_{r_i} je čtvercová matice r_i-řádková tvaru

$$C_{r_i} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \ldots, & 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 1 \\ C_{i1}, & C_{i2}, & C_{i3}, & \ldots, & C_{ir_i-1} & C_{ir_i} \end{pmatrix}$$

a 0 jsou matice nulové. Ve speciálním případě, když T je těleso komplexních čísel, zavedl tuto kanonickou formu Frobenius.[10]) První úplný důkaz pro obecné těleso T podal S. Lattès[11]) pro případ, že A není singulární matice. Dicksonův důkaz nepředpokládá nic o determinantu matice A. Prof. Petr namítá úplně oprávněně, že jednotlivé kroky tohoto důkazu jsou pouze v knize naznačeny, čímž vznikají potíže při porozumění. Aby tyto potíže odstranil, podává v práci **95** svou vlastní úpravu důkazu Dicksonova. Prof. Petr vyslovuje stejně jako Dickson tuto větu nikoliv pro matici $A = (a_{ik})$, nýbrž pro lineární substituci

$$y_i = \sum_{k=i}^{n} a_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Důkaz pak provádí pomocí lineárního operátoru Δ definovaného vztahem

$$\Delta x_i = \sum_{k=i}^{n} a_{ik} x_k.$$

Práce **96** (**97**) a **98** (**99**) týkají se symetrických funkcí. Prof. Petr odvozuje v nich některé věty, kterých se dá výhodně použíti,

[10]) G. Frobenius: Journal für die r. und angew. Math. **86**, 1879, 146 až 208.

[11]) S. Lattès: Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, **28**, 1914, 1—84.

chceme-li vyjádřit monotypickou (jednoduchou)[12]) symetrickou funkci pomocí elementárních symetrických funkcí.[13])

Obsah hlavní věty z pojednání 96 (97) dá se stručně popsat takto: Budiž $F_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vyjádření monotypické (jednoduché) symetrické funkce $\Sigma x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} = f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pomocí elementárních symetrických funkcí. Prof. Petr přiřaďuje funkci $f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jisté monotypické (jednoduché) funkce $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $f_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ menší váhy.[14]) Buďtež

$$F_1(a_1, a_2, \ldots, a_n), \ldots, F_s(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

příslušná vyjádření těchto funkcí elementárními symetrickými funkcemi. Téměř každému členu z $F_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dají se přiřadit jisté členy z $F_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $i = 1, 2, \ldots, s$ jednoduchým způsobem tak, že pro koeficienty takto sobě přiřaděných členů platí jistá velmi jednoduchá lineární relace. Dá se tedy koeficient takového členu z F_0 lehko vypočítati, známe-li vyjádření F_i všech monotypických (jednoduchých) funkcí f_i. Koeficienty těch výjimečných členů z F_0, které podmínkám nevyhovují, dají se snadno určit z vyjádření F_s. Vyjádření dané monotypické (jednoduché) symetrické funkce elementárními symetrickými funkcemi se tudíž snadno vypočte, známe-li vyjádření některých monotypických (jednoduchých) funkcí váhy nižší. Tento způsob výpočtu je zvláště výhodný, máme-li k disposici tabulky pro koeficienty vyjádření monotypických (jednoduchých) funkcí elementárními symetrickými funkcemi až do jisté váhy a chceme-li počítat vyjádření monotypické (jednoduché) funkce váhy větší. Prof. Petr počítá jako příklad vyjádření symetrické funkce $\Sigma x_1^5 x_2^4 x_3^3 x_2^2$ váhy 14, užívaje přitom Řehořovského tabulek pro koeficienty takovýchto vyjádření, které jdou až do váhy 12.[15]) Věta Petrem nalezená bude zvláště výhodná, půjde-li o roz-

[12]) Prof. Petr říká monotypická symetrická funkce takové celistvé symetrické funkci, která vznikne z jednoho svého členu, když na tento člen provedeme všechny permutace neurčitých, a všechny členy od sebe různé, které takto dostaneme, sečteme. Sám užívám místo názvu monotypická funkce názvu jednoduchá funkce.

[13]) Prof. Petr věnoval vždy velkou pozornost způsobům, jakým lze co nejvýhodněji vyjádřit daný symetrický polynom jakožto polynom elementárních symetrických funkcí. Svědčí o tom na příklad výklady a cvičení z jeho proseminářů.

[14]) Váha monotypické (jednoduché) symetrické funkce $f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je její stupeň $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ v neurčitých $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Je-li polynom $F_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ součet členů tvaru $ca_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n}$, pak váha jest výraz $m_1 + 2m_2 + \ldots + nm_n = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ a ten je pro všechny členy polynomu F_0 stejný.

[15]) Ed. Weyr a V. Řehořovský: Základové vyšší algebry. Theorie souměrných funkcí kořenů. Praha 1885.

šíření již vypočítaných tabulek pro koeficienty vyjádření monotypických (jednoduchých) funkcí elementárními symetrickými funkcemi až do jisté váhy pro váhy větší. Takovéto rozšíření dá se pomocí této věty velmi snadno provésti.

V pojednání 98 (99) vyšetřuje prof. Petr jisté součty n řad N-árních neurčitých

$$X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \ldots, X_N^{(i)}, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

při čemž předpokládá $n \leqq N$. Tyto součty

$$\Sigma X_1^{(1)} X_2^{(2)} \ldots X_n^{(n)} \tag{5}$$

jsou tvořeny takto: Ve výraze $X_1^{(1)} X_2^{(2)} \ldots X_n^{(n)}$ permutujeme všemi způsoby dolní indexy $1, 2, \ldots, n$. Tím vznikne $n!$ členů. V každém takovém členu nahradíme ještě dolní indexy $1, 2, \ldots, n$ všemi kombinacemi n-té třídy z čísel $1, 2, \ldots, N$. Dostaneme celkem

$$\binom{N}{n} n!$$

členů, které sečteme. Tento součet označíme právě vzorcem (5). Mimo tyto součty zavedeme si ještě součty

$$\begin{aligned}
(X^i) &= X_1^{(i)} + X_2^{(i)} + \ldots + X_N^{(i)} \\
(X^{i_1} X^{i_2}) &= X_1^{(i_1)} X_1^{(i_2)} + X_2^{(i_1)} X_2^{(i_2)} + \ldots + X_N^{(i_1)} X_N^{(i_2)} \qquad (6) \\
(X^{i_1} X^{i_2} X^{i_3}) &= X_1^{(i_1)} X_1^{(i_2)} X_1^{(i_3)} + X_2^{(i_1)} X_2^{(i_2)} X_2^{(i_3)} + \ldots + X_N^{(i_1)} X_N^{(i_2)} X_N^{(i_3)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Prof. Petr nejdříve odvozuje identitu, která vyjadřuje součet (5) pomocí součtů (6) a stanovuje explicitně koeficienty této identity. V dalším pak ukazuje význam této identity pro teorii symetrických funkcí. Tak odvozuje explicitně vyjádření monotypické (jednoduché) symetrické funkce jakožto polynomu v součtech k-tých mocnin $s_k = X_1^k + X_2^k + \ldots + X_N^k$. Pomocí tohoto vyjádření počítá dále explicitně vyjádření monotypické (jednoduché) funkce jakožto polynomu v elementárních symetrických funkcích a dokazuje pro koeficienty tohoto vyjádření větu Cayleyovu.

Přitom ukazuje, jak se dá těchto výsledků s výhodou použít při praktickém výpočtu vyjádření dané monotypické (jednoduché) funkce elementárními symetrickými funkcemi. Dokázaná identita umožňuje dále prof. Petrovi rozšířit platnost řady vět a vzorců z teorie symetrických funkcí na symetrické funkce n řad N-árních neurčitých. Tyto funkce jsou definovány jakožto polynomy v těchto řadách neurčitých, které se nezmění, když na každou řadu provedeme libovolnou, ale na každou řadu tutéž, permutaci N neurčitých.

Těžisko Petrovy vědecké práce v posledních letech spočívá v teorii invariantních útvarů algebraických forem. Této teorii vě-

noval prof. Petr po celou dobu, po kterou vědecky pracuje, velkou pozornost a značné úsilí a velkou a velmi podstatnou měrou přispěl k jejímu rozvoji.[16]) Z posledního desítiletí sem patří práce **105**, **106**, **107**, **108**. V nich se zabývá prof. Petr výpočtem vytvořujících funkcí pro počet invariantních útvarů algebraických binárních forem. Práce znamenají velký pokrok v sestrojování a výpočtu těchto funkcí.

Vytvořující funkce pro počet invariantních útvarů příslušných k jedné binární formě jest racionální funkce proměnných a, t, jež rozvinuta podle mocnin a, t, udává čísleným koeficientem A_{rs} ve členu $A_{rs}a^r t^s$ mocninného rozvoje, kolik jest invariantních útvarů stupně r v koeficientech základní formy a stupně s — 1 v neurčitých. Nejjednodušší taková funkce, kterou autor nazývá hrubá, je zlomek, jehož čitatel je výraz $(t - t^{-1})$ a jmenovatel jest součin $n + 1$ faktorů tvaru $(1 - at^k)$. n je zde stupeň základní formy. Tato vytvořující funkce je sice tvarem jednoduchá, ale hodí se velmi málo k výpočtu koeficientů A_{rs}. Proto se matematikové snažili nahradit tuto funkci jinou vytvořující funkcí, z níž by se její koeficienty daly snáze počítat. Výsledky, ke kterým dospěli, měly však opět jinou vadu. Jmenovatel obsahoval již i při poněkud vyšším n ($n > 4$) více faktorů tvaru $1 - a^k t^e$ než n. Dá se však očekávat, že budou existovat vytvořující funkce s nejvýše n faktory ve jmenovateli. Netřeba podotýkat, že větší počet faktorů prodlužuje značně výpočet koeficientů.

Prof. Petr ukázal — a to je hlavní teoretický výsledek jeho prací — že taková vytvořující funkce, kterou nazval normální, dá se vždy sestrojit tak, aby měla ve jmenovateli jen n faktorů. Tato funkce dá se pak rozložit v součet velmi jednoduchých částí, jejichž rozvoje dají se lehko počítat. Těchto částí je pro $n = 2m - 1$ a pro $n = 2m$ právě m. To učinil v pojednání **106**. Prof. Petr vypracovává však v těchto pojednáních (**106** a **107**) také metody pro skutečný výpočet těchto vytvořujících funkcí, podává návod, jak postupovat, abychom se vyhnuli při výpočtu velkým číslům, a ukazuje, jak lze kontrolovat správnost početních výsledků.

Tyto normální vytvořující funkce pak skutečně sestrojuje a to v pojednání **105** pro $n = 5, 6, 7, 8$ a v pojednání **107** pro $n = 12$. Na sestrojení vytvořující funkce pro formu 12. stupně byla kdysi vypsána cena společností British Association for the Advancement of Sciences. Funkce sestrojil Franklin. Franklinova metoda je však nesrovnatelně složitější, takže byly uveřejněny jen výsledky roku 1881 Sylvestrem v Am. Journal of Math. 4, 1881, 41—61 a po-

[16]) Algebraických forem týkají se práce 4, 5, 22, 23, 38 a speciálně počtu invariantních útvarů a vytvořujících funkcí pro tento počet práce 30 (31), 32, 37 (43), 65 (66) z I.

drobné výpočty byly uloženy v safu university v Baltimore. V pojednání 108 aplikuje prof. Petr tyto metody na sestrojení vytvořující funkce pro invariantní útvary dvou binárních forem stupně m-tého a stupně n-tého. Hrubá vytvořující funkce má v čitateli jeden faktor a ve jmenovateli $m + n + 2$ faktorů. Normální vytvořující funkce má ve jmenovateli nejvýše $m + n + 1$ faktorů. Prof. Petr sestrojil v tomto pojednání normální vytvořující funkce pro případy $m = 3$, $n = 3$; $m = 4$, $n = 4$; $m = 3$, $n = 4$.

Přehlédneme-li na závěr ještě jednou vědeckou práci prof. Petra v osmém desítiletí jeho věku, neubráníme se dojmu, že je mohutná. Ve věku, kdy jiní vědečtí pracovníci již odpočívají a jejich životní dílo bývá již uzavřeno, publikuje prof. Petr 11 vědeckých prací a z toho 5 v jediném roce a to přesto, že po větší část tohoto období žil náš národ pod německou okupací a za druhé světové války v podmínkách pro vědeckou práci velmi nepříznivých.

Seznam prací prof. Karla Petra
v desítiletí 1938—1948.

Tento seznam je pokračováním seznamu, který sestavil k šedesátinám prof. Karla Petra prof. M. Kössler (tento Časopis **58**, 1928, 180—182), a seznamu za desítiletí 1928—38, který sestavil autor (tento Časopis, **67**, 1938, D252—D253). Číslování prací pokračuje z obou seznamů.

Bylo užito těchto zkratek:

ČMF: Časopis pro pěstování matematiky a fysiky.

Rozpravy Č. A.: Rozpravy České akademie věd a umění. Třída II.

Bull. Int.: Bulletin International. Académie tchèque des sciences. Classe des sciences mathématiques, naturelles et de la médecine.

94. Poznámka o kvadratických formách. ČMF **68**, (1938/39), 162—173.
95. O racionálném kanonickém tvaru lineární substituce. ČMF **69**, (1939/40), 9—22.
96. O jedné větě pro koeficienty symetrických funkcí. Rozpravy Č. A. **52**, (1942), č. 11, str. 10.
97. Ein Satz über die Koeffizienten symmetrischer Funktionen. Bull. Int. **43**, (1942), 132—143.
98. O užití jedné identity v teorii symetrických funkcí. Rozpravy Č. A. **52**, (1942), č. 12, str. 20.
99. Eine Identität aus der Theorie der symmetrischen Funktionen und ihre Anwendung. Bull. Int. **43**, (1942), 144—162.

100. O polynomech Bernoulliských. Rozpravy Č. A. **53**, (1943). č. 40, str. 16.
101. Ueber die Bernoullischen Polynome. Bull. Int. **44**, (1943). 511—526.
102. O mnohoúhelnících vepsaných do kruhu, jichž strany jsou dány. Rozpravy Č. A. **54**, (1944), č. 25, str. 9.
103. Sur les polygones donnés par leurs côtés qui sont inscrits dans un cercle. Bull. Int. **45**, (1944), 325—335.
104. O alternujících funkcích v kruhovém tělese. Rozpravy Č. A. **56**, (1946), č. 3, str. 12.[17])
105. O vytvořujících funkcích pro počet invariantních útvarů příslušných k jedné základní binární formě. Rozpravy Č. A. **56**. (1946), č. 5, str. 23.[17])
106. Zevšeobecnění výsledků pro vytvořující funkce dávající počet invariantních útvarů při binární formě daného stupně. Rozpravy Č. A. **56**, (1946), č. 8, str. 22.[17])
107. O vytvořující funkci v normálním tvaru pro počet invariantních útvarů u formy binární 12. stupně. Rozpravy Č. A. **56**, (1946), č. 10, str. 16.[17])
108. O vytvořujících funkcích pro počet invariantních útvarů příslušných k systému dvou binárních forem. Rozpravy Č. A. **56**. (1946), č. 14, str. 15.[17])

---

[17]) Překlad do světového jazyka této práce v Bull. Int. ještě nevyšel.

LITERATURA

B. Recense didaktických a jiných publikací.

Recense matematických svazků Cesty k vědění. Přes rušivé působení válečných poměrů může Jednotou čsl. matematiků a fysiků v Praze vydávaná sbírka *Cesta k vědění* vykázati zřetelný úspěch. Nahrazujíc českému čtenáři cizojazyčné sbírky téhož zaměření (Manuali Hoepli, Scientia, Sammlung Göschen a p.) dílky namnoze vyšší hodnoty, plní dobře své informační a popularisačně-vědecké poslání. O jeho šíři si laskavý čtenář učiní přibližnou představu z níže uvedených recensí 23 svazků matematického obsahu, které dosud ve sbírce vyšly. Recense pocházejí od 4 autorů [Dr *L. Franka* (*F.*), Ing. *O. Hlínky* (*H.*), prof. *R. Pisky* (*P.*) a prof. *J. Zezuly* (*Z.*)], náležejících k mladší generaci brněnských matematiků. *Jiří Klapka.*

V Brně, dne 14. ledna 1948.

Štefan Schwarz: O rovniciach. (1. svazek Cesty k vědění, Praha 1940.) Slovenský matematik v česky psaném pojednání zhošťuje se velmi pěkně úkolu poučiti čtenáře knižnice především o řešení algebraických rovnic. S výjimkou kapitoly poslední, jež se týká numerického řešení a systémů rovnic, jest svazek věnován řešení algebraické rovnice pomocí radikálů, čili t. zv. algebraickému řešení. Potřebné poznatky o číslech a polynomech shrnuty jsou v prvních dvou kapitolách, zatím co obsahem kapitoly další jest vhodné pojednání o základní větě algebry a symetrických funkcích kořenů. Po této průpravě zabývá se autor obecnou rovnicí druhého, třetího a čtvrtého stupně, pak rovnicemi binomickými a reciprokými. Vyvrcholení tohoto svazku představuje kapitola šestá, v níž jest vyloženo, jak a kteří matematikové zasloužili se o zodpovědění otázky o algebraické řešitelnosti obecné rovnice pátého a vyššího stupně. Čtenář se dovídá o číselných tělesech, reducibilitě a ireducibilitě polynomů a o tom, kolik důvtipu museli znamenití matematikové vynaložiti, než dospěli k negativní odpovědi na uvedenou otázku.

Poznámka. Druhé vydání knížky z r. 1946 obsahuje celý důkaz neřešitelnosti rovnice pátého stupně a dva dodatky: O konstrukcích pravítkem a kružítkem a O casu irreducibilis kubické rovnice. *F.*

Josef Holubář: O metodách rovinných konstrukcí. (4. svazek Cesty k vědění, Praha 1940.)

Autor zvolil ve své knížce za ústřední úkol klasickou úlohu Apolloniovu — t. j. úlohu sestrojiti kružnici, která se dotýká tří daných kružnic — a úlohy s ní příbuzné (na př. hledaná kružnice má protínat dané tři pod úhly φ_1, φ_2, φ_3, jež pak dále specialisuje), aby čtenáře seznámil s různými geometrickými methodami a ukázal jejich vhodnost při řešení různých úloh. V úvodní části (kap. 1 a 2) ukazuje čtenáři užití 4 různých method při řešení téže úlohy o trojúhelníku, uvádí kriteria, kdy úkol je elementární, t. j. kdy je řešitelný pravítkem a kružítkem, a stanoví přehled úloh. V kapitole 3, ve které přistupuje k vlastnímu řešení úlohy Apolloniovy, zavádí zprvu pojem cyklu — t. j. orientované kružnice — opakuje hlavní věty o podobnosti, chordále, dotyku

dvou kružnic a o konfiguraci středů a os podobností tří kružnic, což mu umožňuje předvésti elegantní řešení, které podali francouzští matematikové Gergonne, Gaultier a Fouché. V prvé části 4. kapitoly uvádí t. zv. methodu geometrických míst, na př. vyvozuje místo středů kružnic, které se dotýkají dvou kružnic daných, nebo které je protínají orthogonálně či diametrálně, event. vyhovují kombinacím těchto podmínek. Jedná se zde v podstatě — poněvadž středy hledaných kružnic leží většinou na kuželosečkách — o konstrukce průsečíků dvou nenarýsovaných kuželoseček o společném ohnisku. A to je možno v mnohých případech, užijeme-li kolineace či polarity, jak ukazuje autor v druhé části uvedené kapitoly. Jí autor přechází k řešení dané úlohy dvěma methodami transformačními — dilatací a inversí. Zvlášť instruktivní pro čtenáře jsou části, osvětlující pojmy cyklu, polarity a inverse, se kterými se na střední škole neseznámil, ale kterých je často potřebí k řešení speciálních problémů na př. v elektrotechnice. V poslední kapitole je stručně ukázáno ještě řešení analytické a knížku uzavírá množství vhodně volených příkladů, na kterých si může čtenář ověřiti, zda uvedené methody si dostatečně osvojil, a vyzkoušeti jejich dosah a působivost. *P.*

Václav Hruška: Konstrukce omezenými prostředky a geometrické aproximace. (7. svazek Cesty k vědění, Praha 1940.)

Velkou část doby studia technického musí posluchač věnovat grafickému provádění geometrických konstrukcí a to pokud možno nejpřesnějšímu. Přitom má většinou k disposici jen kružítko a pravítka a mnohdy ještě padnou konstrukce mimo nákresnu, nebo pro nevýhodnou polohu jsou velmi nepřesné. V předložené knížce má posluchač nejen možnost na řadě praktických příkladů naučit se překonávat tyto potíže, nýbrž i uvědomiti si hlouběji souvislost těchto konstrukcí s užitím metrické a projektivní geometrie, hlavně tím, že má úlohu mnohdy řešenu několika způsoby. Ujasní si možnost řešení předložené úlohy a klasifikaci užitých konstrukcí, eventuálně též rozložení konstrukce na sled jednodušších. V části pojednávající o přesnosti konstrukcí jsou udána pravidla Wienerova a ukázány některé úpravy konstrukcí při nepříznivé poloze, abychom obdrželi výsledek co nejpřesnější. V poslední části je poukázáno na neřešitelnost úloh vyšších než čtvrtého stupně a užití konstrukcí, které vedou aspoň k přibližnému řešení (známá klasická úloha o trisekci úhlu), konstrukce některých mnohoúhelníků pravidelných a konečně důležité konstrukce pro přibližnou rektifikaci kruhového oblouku. *P.*

Ladislav Seifert: Imaginární elementy v geometrii. (10. svazek Cesty k vědění, Praha 1941.)

Autor seznamuje čtenáře velmi vhodným způsobem, vycházeje z elementární geometrie analytické, s nejnutnějšími pojmy geometrie projektivní v rovině, aby mohl z úvah o korespondenci a speciálně involuci — definované bilineární rovnicí — osvětliti pojem imaginárního bodu na přímce event. imaginární přímky ve svazku. Definuje dále involuci na kružnici a stanoví pojem sdružených i samotných imaginárních elementů v rovině i v prostoru, přímek minimálních či isotropických, kruhových bodů a absolutní kružnice, které mají základní význam pro měření v euklidovské geometrii. K těmto výsledkům přičleňuje i všechny základní geometrické konstrukce s imaginárními prvky, vedle řady vhodných příkladů k procvičení látky.

Kromě těchto základních poznatků je objasněn ve stručném přehledu v poslední třetině knížky i pojem imaginárních mimoběžek a eliptické zborcené paprskové involuce, imaginárních kuželoseček i ploch, o nichž důkladnější poučení najde čtenář ve spisech uvedených v poznámkách. V dodatku je zmínka o Gaussově rovině a základních operacích v ní, která může zajímat zvláště na př. zájemce o elektrotechniku. Svazek lze vřele doporučiti též posluchačům techniky v prvním semestru jako úvod k projektivní geometrii, zvláště proto, že analytická methoda, užitá zde k osvětlení pojmu imaginár-

ního útvaru, navazuje bezprostředně na znalosti, které si posluchač odnesl ze střední školy. *P.*

Václav Pleskot: Spojnicové nomogramy. (Cesta k vědění, sv. 12, Praha 1941, 2. vydání 1946.)

Svou přístupnou formou získaly si v čtenářské obci velkou oblibu. V úvodě definuje autor nomogram a nomografii a vysvětluje princip spojnicových nomogramů na základě cartesiových souřadnic tří bodů ležících v téže přímce. V odstavci o anamorfose, jíž rozumíme převedení funkcionálného vztahu na tvar determinantu, jsou vysvětleny dva základní kroky: rozloučení proměnných a úprava vztahu do zobrazovacích rovnic. Dále je uvedeno řešení 5 kanonických tvarů rovnic o 3 proměnných, u nichž je snadná a známá anamorfosa. Při tom jsou vhodně vysvětleny důležité pojmy, na př. modul, nositelka, užití kosoúhlých souřadnic, promětná methoda, aby v oddíle o stupnicích bylo pojednáno o stupnici lineární, projektivní, reciproké, logaritmické, o stupnicích goniometrických a jejich sestrojení. Pak je uveden výpočet modulu a délky stupnice a je pojednáno o kolineaci, t. j. úpravě determinantu i nákresu a zdůrazněny její výhody. Kapitoly následující informují o zobrazení vztahů s více než 3 proměnnými. Jde buď o t. zv. řešení pomocí stupnic binárních (bodu v rovině přísluší 2 kóty, užití isoplet), nebo o řešení pomocí sdružování nomogramů (nová proměnná a vyjádření dílčích vztahů) a konečně o řešení pomocí nomogramů o rovnoběžných nebo kolmých indexech, které umožňují řešení vztahů až mezi 8 proměnnými podle uvedeného kanonického tvaru 6. Protože v intencích sbírky „Cesta k vědění" je knížka určena pro čtenáře s běžným středoškolským vzděláním, tudíž neznalého nauky o determinantech, je připojen dodatek o počítání s determinanty. Příklady řešené v textu jsou doplněny souborem příkladů ke cvičení s připojeným návodem. Závěrem nutno zdůrazniti, že oblíbenost spisku je plně zasloužená. *H.*

Zdeněk Pírko: O souřadnicích v rovině. (15. svazek Cesty k vědění, Praha 1942.)

Je škoda, že rozsah svazků této sbírky autorovi nedovolil hlouběji seznámiti čtenáře s látkou, jejíž znalost je důležitá pro studium a bádání v geometrii. Užitečnost souřadnicového systému kartézského v elementární geometrii poznal čtenář již na střední škole, hlavně při probírání analytické geometrie. Zde však své poznatky rozšiřuje na př. o pojmy dualita nebo homogenní souřadnice bodové i přímkové, které mají základní význam při studiu geom. útvarů, hlavně ve spojení s projektivními souřadnicemi Plückerovými. Bez znalosti Plückerových souřadnic si nelze představiti studium přímkových útvarů prostorů troj- i vícerozměrných methodami projektivní diferenciální geometrie. K těmto nejdůležitějším kapitolám (2 a 5), zabývajícím se právě zmíněnými druhy souřadnic, jejichž úvahy se dají lehce rozšířit na úvahy v prostoru, přistupuje instruktivní kapitola 4 o elementárních souřadnicích křivočarých. Z nich na př. polární souřadnice se probírají na technických větvích dnešních středních škol a mají velký význam pro studium systémů čar, ať už v rovině či na ploše, a jejich transformací. V kapitole 3 jsou pak uvedeny některé speciální souřadnicové systémy, jejichž znalost dodá čtenáři jisté zručnosti při řešení některých geometrických problémů. Souřadnice nomografické jsou jen letmo uvedeny ke konci kapitoly 2 a čtenář má možnost důkladněji se obeznámiti s jejich užitím a důležitostí ve sv. 12 této sbírky „Spojnicové nomogramy" od V. Pleskota. Čtenář jistě s radostí uvítá velmi hezký přehled časového vývoje jednotlivých souřadnicových systémů, stejně jako množství vhodně volených příkladů, které mu pomohou zvládnout množství látky v knížce podané. Získá tak značný přehled o souřadnicových systémech rovinných a nebude mu činit valných potíží zobecnit mnohé na prostor, kde jejich používání je mnohostrannější a bez něhož je nemyslitelná práce a další studium geometrie. *P.*

Jiří Klapka: Jak se studují geometrické útvary v prostoru. (Část první 18. svazek, část druhá 23. svazek Cesty k vědění, 2. vydání, Praha 1947.)

Na střední škole se probírají základy analytické geometrie v rovině a dojde se od nejzákladnějších pojmů až ke kuželosečkám v obecné poloze. Tyto základy zpravidla nestačí k úspěšnému čtení knih, v nichž je analytické geometrie použito. Dosavadní literatura skýtala jen obšírná pojednání o analytické geometrii a ještě často byla zaměřena jednostranně. V této práci se čtenář seznámí se všemi způsoby zavádění souřadnic v rovině i v prostoru a s počítáním s nimi. Autor vyšel od homogenních rovnoběžkových souřadnic bodu v rovině. Vyjadřuje v nich kuželosečku, zavádí pojem determinantu a matice i symbolické označování kvadratických forem. Pěkně je rozlišen rozdíl mezi homogenními a nehomogenními souřadnicemi bodu v prostoru. Seznámí čtenáře s přímkou a rovinou, aby při určení roviny třemi body přešel k homogenním souřadnicím trojúhelníkovým, které rozšíří na čtyrstěnové souřadnice v prostoru. Tak se čtenář seznámí s nejobecnějším určením bodu v prostoru a to nikoliv jen nějak mlhavě, nýbrž může si ihned na vypočtených příkladech (vzdálenost dvou mimoběžek) zjistit, zda výkladu porozuměl. Tím je mu podán návod, jak řešit příklady, které jsou ke každé kapitole připojeny.

V rovině i v prostoru je velmi pěkně probrána dualita. Zajímavý je odstavec o Plückerových přímkových souřadnicích. Tyto souřadnice, tak důležité pro přímkovou geometrii, bývají v úvodech jen málo vysvětleny, kdežto autor je zde podává vyčerpávajícím způsobem, spojeným s propočteným příkladem vzdálenosti bodu od přímky a s šesti příklady k procvičení (s výsledky).

V druhé části je objasněn pojem plochy. Velmi pěkný je odstavec jednající o rovnici kvadriky (plochy druhého stupně) v Plückerových přímkových souřadnicích, pomocí nichž lze snadno rozhodnout, zda rovnice představuje plochu přímkovou nebo nepřímkovou. Velká část spisku podává transformace obecné rovnice kvadriky na základní tvar a rozhodnutí, o jakou kvadriku se jedná (klasifikace kvadrik). Z ploch vyšších stupňů je probrán anuloid.

Obě části skýtají ve zhuštěné formě vše, co z analytické geometrie je třeba k dalšímu studiu. *Z.*

Eduard Čech: Co je a nač je vyšší matematika? (20. svazek Cesty k vědění, Praha 1942.)

Jistou rukou vede autor čtenáře k poznání základů počtu diferenciálního a integrálního; pomocí četných příkladů dosahuje i výcviku v řešení jednoduchých úloh. Základní pojmy matematické analysy: limita, spojitost, derivace a integrál stanou se duševním majetkem toho, kdo čte svědomitě, neboť názornost geometrického a jasnost aritmetického výkladu nepřipouštějí pochybností. Spis nejen poučuje o povaze a některých aplikacích vyšší matematiky, nýbrž učí též matematicky myslit. Uveďme dále, že ve svazku najdeme odstavec o počítání s nerovnostmi, jež se tak často vyskytují v důkazech, na něž však nebývá pamatováno souvislým pojednáním i v obšírnějších učebnicích. V oddíle o derivaci jest zdůrazněn výcvik v počítání, v oddíle o integrálu to přirozeně povaha věci a rozsah knížky nedovoluje. Zato se zájmem bude zde čtenář čísti zvláště výklad o logaritmické funkci jakožto integrálu a o výpočtu jejích hodnot. Závěrečná kapitola doplňuje probranou látku pojednáním o methodě postupného dělení, o vlastnostech spojité funkce a derivace a důkazem existence omezeného integrálu spojité funkce. *F.*

Karel Čupr: Aritmetické hry a zábavy. (21. svazek Cesty k vědění, Praha 1942.)

Ve čtrnácti kapitolách jest zde shrnuto, uspořádáno a vyloženo veliké množství úloh, jež pro svou zajímavost anebo překvapující výsledek příjemně pobaví. Četné historické poznámky, jakož i úlohy, jež mají už dávnou tradici, zvyšují ještě poutavost tohoto pojednání. Každá kapitola obsahuje matematický výklad poučující o podstatě úloh v ní obsažených. Vhodná jest též stylisace úloh, neboť jsou namnoze uvedeny v souvislosti s historickými osobnostmi nebo alespoň s místem a časem svého původu. Budiž zde uvedeno, že jedna z kapitol této přehlídky lidské hravosti a důvtipu zabývá se čísly Fibonacciovými a úlohami, jež k nim vedou. Jest známo, že úlohy, hádanky, paradoxa a sofismata rázu matematického těší se značnému zájmu široké veřejnosti a tak se její hloubavější části dostává do rukou odborné pojednání o aritmetických hrách, jež v české literatuře jsou velmi málo zastoupeny. Jest záslužné, že jejich morální a intelektuální cena jest tímto svazkem připomenuta. *F.*

Prof. Dr Bohumil Kladivo: Měřické chyby a jejich vyrovnání (podle metody nejmenších čtverců). (Cesta k vědění, sv. 24, Praha 1943, str. 179.)

Spisek se zabývá látkou značně nesnadnou. Je patrně zamýšlen pro více méně zasvěcené a nezasvěcenému čtenáři bude připadati ve svém matematickém podání obtížným. Po rozlišení chyb podle jejich vzniku je odůvodněna jejich četnost co do velikosti, a v souvislosti s pravděpodobností je odvozena funkce, zákon a křivka četnosti. S posouzením přesnosti měření vyplynul též pojem průměrné a střední chyby jedné i několika veličin na sobě nezávisle určených za předpokladu, že funkce četnosti jsou sudé funkce. Konec oddílu I je ve skutečnosti úvodem k vlastnímu vyrovnávacímu počtu, neboť objasňuje pojem váhy pro jednu i více funkcí nezávisle měřených veličin, dokazuje normální Gaussův zákon četnosti, uvádí z tohoto zákona plynoucí míru přesnosti, jakož i pojednává o chybách pravděpodobných a extrémních. Oddíl II vytyčuje úkoly vyrovnání měření: 1. přímých, 2. zprostředkujících a 3. závislých a vysvětluje nezbytné pojmy (odchylka, odchylková rovnice, normální rovnice), aby bylo dokázáno, že Legendrova methoda zdůvodněná Gaussem (postulát aritmetického průměru vede k methodě nejmenších čtverců) je z uvedených nejvhodnější. Přistoupeno k vyrovnání přímých měření o nestejné váze a stanoveny střední chyby pro jednotku váhy a to: výsledku, jednoho měření a středu ze 2 měření. Oddíl III jedná o vyrovnání měření zprostředkujících a ihned uvádí (po úvaze o váze kterékoli odchylkové rovnice) řešení normálních rovnic Gaussovým eliminačním postupem a součtovou kontrolu těchto řešení. Postup hledání středních chyb neznámých veličin v normálních rovnicích pomocí determinantů a stanovení střední chyby pro jednotku váhy vede k určení hodnoty (přímo i nepřímo) součtu součinů vah a dvojmocí oprav. Následuje řešení problémů o jedné a dvou neznámých, načež pojednáno o redukci odchylkových rovnic na tvar lineární. Při vyrovnání závislých měření je pojednáno o obou způsobech: převedení na vyrovnání pomocí veličiny zprostředkující a pomocí korelát. Oddíl V uvádí methody a možnosti zkoušek správnosti (znaménková zkouška, Abbeho zkouška atd.) a informuje o systematických vlivech, které zatěžují měření. Oddíl VI precisuje požadavek přesnosti v měření a stanoví hospodárný postup v hledání co nejpřesnější hodnoty hledané veličiny. Závěrečná kapitola zhodnocuje význam výsledků vypočtených methodou nejmenších čtverců, uvádí a dokazuje podmínky, kdy se měřické chyby řídí zákonem četnosti a po druhé zdůvodňuje methodu nejmenších čtverců podle úvah Laplaceových s doplňky autorit jiných. Konečná úvaha o chybách, které se neřídí normálním zákonem četnosti a u kterých nejsou splněny ani podmínky druhého zdůvodnění, připomíná, že i u nich methoda nejmenších čtverců, jak upozornil Legendre, podává snadno vypočítatelné a určité, v jistém smyslu vyrovnané hodnoty hledané veličiny. Každý oddíl je doplněn

vhodnými vyřešenými příklady, jejichž prostudováním nabude čtenář jistě velkého přehledu. *H.*

Vladimír Ryšavý: Vektory a tensory. (25. svazek Cesty k vědění, Praha 1943.)

Autor sice jako podtitulek napsal elementární úvod, ale po krátké přípravě se dostává značně daleko. Vektory vysvětluje nejdříve z vlastností fysikálních a z názoru. Skalár je veličina mající pouze velikost, vektory mají nejen velikost, nýbrž ještě směr. Z toho odvozuje sčítání, odčítání a skalární součin vektorů. Lineární transformace souřadnic opírá o determinanty, k nimž krátký úvod je obsažen v dodatku.

K objasnění pojmu tensor používá z mechaniky převzatého problému setrvačnosti tuhého tělesa při rotaci kolem těžiště. K určení vektoru je třeba tří skalárů, k určení tensoru tří vektorů. Tensorová algebra zná sčítání, násobení, zúžení a přidružení. Vektorový součin odvozuje jako zvláštní případ antisymetrického tensoru druhého řádu. Pěkná je kapitola o užití v geometrii a fysice. Vektorem lze snadno určit u prostorové křivky tečnu, hlavní normálu, oskulační rovinu, první i druhou křivost, ve fysice pak pohyb daného bodu. Po vysvětlení derivace vektorů a tensorů přechází autor do fysiky k Einsteinovu principu relativity a k čtyřrozměrnému světu Minkovského. *Z.*

Jaroslav Janko: Jak vytváří statistika obrazy světa a života. (Díl I., 22. svazek Cesty k vědění, Praha 1942; díl II., 26. svazek, Praha 1944.)

Lze říci, že tyto dva svazky představují dosti zevrubnou práci o statistice, jedné z věd, jichž vývoj jest dílem teprve našeho století. Při četbě poznáváme, že se jedná o rozvoj rychlý a úspěšný. Vždyť jmenujeme-li jako obory jejího uplatnění pojišťovnictví, výrobu, obchod, zemědělství, medicinu, vědy přírodní a technické, národní hospodářství a sociologii, sotva lze považovati výčet za úplný. V prvním díle seznámíme se s methodami hromadného pozorování, náhodným výběrem při znaku alternativním a se statistickou indukcí, jež umožňuje z výsledků pozorování malého souboru usouditi na poměry v souboru velkém, přímému pozorování nesnadno přístupném. Ve druhém díle zabývá se autor především znakem kvantitativním a učí, jak zde statistická indukce pomocí výběrových charakteristik přechází k vyšším souborům. Druhá polovina svazku věnována jest korelaci, jež jest jedním z ústředních pojmů statistiky, a jež značí vztah mezi dvěma nebo více statisticky zkoumanými zjevy. *F.*

Josef Klíma: Různé způsoby zobrazovací v deskr. geometrii. (27. svazek Cesty k vědění, Praha 1944.)

V malé knížečce jsou shrnuty téměř všechny používané způsoby zobrazovací. Autor vyšel od centrální projekce, která se nejlépe přibližuje lidskému vidění. Velmi pěkná je zmínka o křivočaré perspektivě. Malíři totiž mají námitky, neboť oko tím, že bloudí po obraze, mění neustále průmětnu. Tedy by vlastně vyhovoval průmět na kulovou plochu ze středu. Byly tedy vymyšleny způsoby zobrazení této kulové plochy na rovinu. Tak v Serranově perspektivě se zobrazují přímky křivkami, úběžníky vodorovných přímek jsou dva, jiný zleva a jiný zprava.

Z obecného zobrazení dvojobrazového se autor dostává k stereoskopickému průmětu a k anaglyfům. (Škoda, že není nějaký anaglyf připojen jako příloha.) Zvláštní případ středového promítání je průmět rovnoběžný. Kolmé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny je zvláštní případ promítání dvojstředového. Dále je uvedena kolmá i kosoúhlá axonometrie s vojenskou perspektivou jako zvláštním případem a též i méně obvyklá středová axonometrie. Dvojstopní zobrazení využívá stop na dvou základních rovinách. Body v prostoru se pak zobrazují v středové kolineaci o téže ose, která je průsečnicí základních rovin. Zajímavý je případ, když je osa úběžnou přím-

kou, vzdálenosti obou rovin od průmětny jsou stejné a promítáme paprskem k průmětně kolmým. Odtud je odvozeno zobrazení kinematické, kterého lze s výhodou použíti v kinematice. Nelineárním promítáním je promítání síťové. Síť je v podstatě lineární kongruence a průmět bodu je dán stopníkem na průmětnu toho paprsku sítě, který jde daným bodem (všechny body tohoto paprsku mají týž průmět). Obrazem přímky je kuželosečka. Autor probírá, jak se jeví incidence, rovnoběžnost a kolmost. V kartografii je potřeba stejnoplochého zobrazení koule na rovinu, ve šroubovém promítání je průmětem bodu stopník šroubovice tím bodem procházející. Šroubovým průmětem přímky rovnoběžné s průmětnou je přímka, průmětem obecné přímky je kruhová evolventa. V cyklografickém promítání je obrazem bodu orientovaná kružnice o středu v kolmém průmětu bodu a poloměru rovném vzdálenosti bodu od průmětny. V odstavci o reliefu je probrána věta de la Gournerieho. Základy zobrazení čtyrrozměrného prostoru zakončují svazek.

Pro ty, kteří znají základy promítání na dvě průmětny, skýtá spisek lehce přístupný a vyčerpávající přehled o všech methodách zobrazovacích. *Z.*

Karel Čupr: Numerické řešení rovnic. (28. svazek Cesty k vědění, 2. vydání, Praha 1947.)

Jak už název praví, pojednává tento svazek o jednom z nejdůležitějších úkolů praktické matematiky, neboť numerické řešení rovnic algebraických i transcendentních představuje velmi často závěrečný krok v řešení technických problémů. Platí to o jedné rovnici pro jednu neznámou, jíž jest věnována první a delší část spisku, stejně jako o systémech rovnic, jimiž se obírá část druhá. Po úvodních kapitolách, týkajících se algebraických rovnic stupně prvního až čtvrtého, přistupuje autor k problému obecnému a probírá jej zevrubně — jak jen to rozsah spisku dovoluje — v obou jeho částech: separaci kořenů i jejich aproximaci. Jsou zde vyloženy, dokázány a na příkladech ilustrovány věty: Bolzano-Weierstrassova, věta o použití derivace, Rolleova, Budan-Fourierova a Sturmova, jež slouží k separaci kořenů; nazýváme tak stanovení intervalů, v nichž kořeny leží. Aproximace, t. j. úlohou předepsané nebo libovolně udané zmenšení těchto intervalů, prováděna jest methodami: Newtonovou, iteracemi, Bernoulliovou a Lagrangeovou. Téměř padesát úloh řešených nebo alespoň pokynem či výsledkem opatřených vycvičí čtenáře v probrané látce. *F.*

Josef Klíma-Karel Šimek: Kamenořez. (29. svazek Cesty k vědění, Praha 1944.)

Při dnešním nedostatku stavebního materiálu snad opět přijde na řadu kámen. Stavby z kamene překonaly tisíciletí. Kamenořez nás učil, jak rozděliti stavbu na jednotlivé kameny, jaké plochy voliti k jejich omezení a jak kameny navzájem vázati. Autoři vycházejí z nejjednodušší vazby zdi svislé, přecházejí ke zdem sklonitým, rovným i zakřiveným, a k jejich vzájemnému spojení. Zásady vazby kamenů jsou v podstatě jednoduché, ale v daném případě dosti často je nutno činit ústupky, aby řešení bylo možné. A tu je velmi vhodně uvedeno chybné řešení mostního pilíře, který nevydržel nápor ledu, aby se ukázalo, kam až koncese jít nesmějí. Velmi podrobně jsou probrány různé druhy křídel. Křídlo je opěrná zeď, která zadržuje tlak násypu při křižování silnice se železnicí a brání sesypání materiálu horní komunikace na spodní. Z kleneb jsou probrány jak rovná klenba a vzestupný oblouk, tak i kosoúhlá klenba řešená válcem i plochou zborcenou. O francouzském a anglickém řešení těchto kleneb je tu jen zmínka. Tyto kdysi tak obvyklé klenby bychom dnes nahradili klenbou železobetonovou. Schody jsou uvedeny jak přímé tak i kruhové. Obrázky kamenického nářadí a přehled literatury zakončují svazek.

Celá látka ze stereotomie, jak se potřebuje na vys. školách technických, je ve spisku shrnuta a formou všem přístupnou velmi pěkně vysvětlena. *L.*

Pavel Potužák: Praktická geometrie. Část 1. (30. svazek Cesty k vědění, Praha 1945.)

Ve své první části (str. 159) je vzorným přehledem látky a method nižší geodesie. Po vytýčení úkolu a rozsahu geodesie a praktické geometrie seznamuje čtenáře napřed se stabilisováním a signalisováním bodů, dále s nejběžnějšími pomůckami vytyčovacími, se soustavou měr a pomůckami přímého měření délek, aby byly hned aplikovány na jednoduchých praktických příkladech výkonného měřictví za současného uvedení přípustných chyb. Kapitola o úhloměrných strojích a jejich částech vyčerpává v rámci jejich popisu a vlastností požadavky na úhloměrný stroj kladené, aby v další kapitole bylo navázáno na různé methody měření vodorovných úhlů. Poslední kapitola zahrnuje bohužel pouze obecná řešení trigonometrických úloh, neboť zhuštěný obsah a útlost svazku nedovolily autorovi, aby připojil číselné příklady výpočtů, což by čtenáři-laikovi bylo jistě vítaným usnadněním studia, neboť spisek má býti nejen kapesním kompendiem pro odborníky, ale i pomůckou pro všechny, kdož se zajímají o práci zeměměřičského inženýra. *H.*

Miroslav Katětov: Jaká je logická výstavba matematiky? (31. svazek Cesty k vědění, Praha 1946.)

Třicet svazků předešlých představuje zajisté dostatečné školení čtenářské obce, aby právem došlo k vydání spisu o logické výstavbě matematiky. Užitek z četby tohoto svazku jest nemalý, ať už máme na mysli výklady z obecné logiky, jež jsou obsahem prvních čtyř kapitol, anebo z logiky matematické v kapitolách následujících. V přesných úvahách o axiomech, definicích, důkazech, množinách a zobrazeních vycítí čtenář zřetelně stupínek, na který musí nutně vystoupiti, chce-li pokračovati ve svém vzdělání matematickém. Rovněž si uvědomíme závažnou skutečnost, že matematika není výsledek poznání, nýbrž dílo lidského ducha. Její deduktivní povaha vyžaduje od každého adepta i vážnějšího zájemce znalost její logiky, jak je patrno už z toho, jaké nesnáze působí důkazy. Každý čtenář matematických spisů této knižnice by si měl přečíst svazek 31 ne jednou, nýbrž dvakrát. *F.*

Bohuslav Hostinský: O mnohoúhelnících a mnohostěnech. (Cesta k vědění, sv. 33, Praha 1947, str. 63.)

Jednoduchými prostředky, hlavně užitím pojmu limity, osvětluje autor množství vztahů, týkajících se konvexních útvarů (mnohoúhelníků, čar, mnohostěnů a ploch), z nichž mnohé jsou obecně známé. Vycházeje od nejjednodušších elementů geometrických, autor stanoví úhel jako velikost otočení, jedná o měření úhlů, o úhlech v trojúhelníku a mnohoúhelníku. Pak v oddílu o vypuklých mnohoúhelnících v rovině je definována jejich normála, pomocí této zaoblený vypuklý mnohoúhelník a jeho opěrné přímky, induktivně vyvozen pojem šířky a střední šířky a stanoveny věty o obsahu vypuklých mnohoúhelníků. V závěru I. oddílu autor podává oba tvary Cauchyho věty o střední šířce či o střední vzdálenosti opěrné přímky od pevného bodu uvnitř vypuklého mnohoúhelníka a vztah mezi jeho obvodem a obsahem. Další oddíl si všímá prostoru; z úhlů v prostoru je stanoven úhel dvou rovin, odchylka přímky od roviny, určen trojhran (hrany, úhly, stěny), vysvětlen vznik sférického trojúhelníka a dokázána vzájemnost polarity dvou trojhranů a sférických trojúhelníků. Stanoven známý výraz pro plošný obsah sférického dvou- a trojúhelníka a vysvětlen pojem tělesného úhlu obecné kuželové plochy. Postup shora uvedený pro trojhran je analogický pro vypuklý mnohohran, přistupuje však k němu věta o deformaci vypuklého mnohohranu. Závěr oddílu o mnohostěnových plochách, jejich vzniku, rozdělení a možnostech rozvinutí do roviny je úvodem ke kapitole poslední, jednající o mnohostěnech uzavřených a jednoduše souvislých. Po výčtu 5 pravidelných vypuklých mnohostěnů dokázána Descartova věta o součtu hranových úhlů, Eulerova věta o počtu hran a další věty, vzniklé dalšími kombinacemi, aby způsobem zcela obdobným jako u mnohoúhelníků bylo

pojednáno o vypuklém mnohostěnu a jeho opěrných rovinách. Na tomto podkladě je dělena dále kulová plocha na části o stejném obsahu a odvozen vzorec pro objem obecného tělesa s křivočarou podstavou. Konečně je uveden důkaz Steinerových vzorců pro výpočet povrchu a objemu zaoblených mnohostěnů a kapitola ukončena poučením o tloušťce vypuklého mnohostěnu a její střední hodnotě. Autorovo dílko, psané neobyčejně přístupně, je doplněno poznámkami k jednotlivým odstavcům a seznamem literatury pro čtenáře, kteří hodlají pokračovati ve studiu nad rozsah spisku. *H.*

Otakar V. Zich: Úvod do filosofie matematiky. (34. svazek Cesty k vědění, Praha 1947.)

Rychlý pokrok jednotlivých vědních oborů v posledních stoletích byl doprovázen uvolněním jejich vztahu k filosofii; nabízí se myšlenka, že alespoň do jisté míry to souvisí s povahou věci. Zčásti byl však tento zjev vyvolán postojem filosofie, jež se snažila udržeti si vedení vědy a předpisovati v otázce předmětu i methody. V tomto smyslu se vědní obory osvobodily od závislosti na filosofii, avšak potřeba úvah o předmětu a methodách vědního oboru a jeho vztahu k lidskému myšlení vůbec tím dotčena nebyla. Tak asi lze dnes pojímati filosofii jednotlivých věd. Svoje výklady začíná autor Richardsovou antinomií, aby ilustroval nutnost filosofického pohledu na matematiku a pak se obírá problematikou podrobněji, třídě své úvahy v oddíly: o slovním vyjádření, o předmětu matematiky a o matematické logice. Zvláště podotkněme, že zde najdeme i definici nezáporných celých čísel prostředky pouhé logiky a tudíž neodpovídá pravdě dlouho tradované mínění, že čísla přirozená jsou zcela věc názoru, nepřipouštějící další rozbor. Pak následují kapitoly věnované axiomu nekonečna a axiomu výběru, jež matematika pro svůj účel připojila k axiomům obecné logiky. Ke konci svazku poučí se čtenář o axiomatických soustavách. *F.*

Josef Kounovský: Zborcené plochy. (36. svazek Cesty k vědění. Praha 1947.)

Technická veřejnost jistě uvítala s povděkem tento spis, který přístupnou a názornou formou seznamuje čtenáře s nejdůležitějšími vlastnostmi ploch zborcených, jak se potřebují v praxi strojnické, stavební či zeměměřické a to i proto, že starší spis od Jarolímka a Procházky, nebo spis tří autorů Kadeřávka-Klímy-Kounovského, který obsažně pojednává o zborcených plochách, je rozebrán. Kounovského spis byl recensován velmi příznivě dr Jiřím Klapkou v Časopise r. 72, str. 44, nebo v Rozhledech r. 27, str. 61 (dr M. Mikan) a v Zeměměřickém obzoru r. 1947, str. 157—158 (ing. L. Klika) a zhodnocen jak po stránce vědecké, tak i po stránce praktické. Autor usnadňuje četbu svého spisu tím, že klade na čtenářovu přípravu požadavky vskutku minimální a ve svých výkladech vychází od znalostí zcela elementárních, jakož i tím, že látku osvětluje četnými příklady z nejrůznějších oborů technických. *P.*

SPOLKOVÝ VĚSTNÍK.

Zápis o řádné valné schůzi JČMF, konané dne 30. listopadu 1948 v posluchárně fysikálního ústavu university Karlovy v Praze II, Ke Karlovu 5.

Předseda *B. Bydžovský* zahajuje v 16,30 hod. valnou schůzi a konstatuje, že podle čl. 7 stanov je schopna se usnášet. Přítomno bylo 32 členů, omluvili se *J. Hrdlička*, *V. Libický* a *R. Zelinka*. Zápis předešlé valné schůze se nečte, protože byl otištěn v Časopise 72 (1947), D 134—140. Proti jeho znění nebylo námitek. Předseda vzpomíná poté členů, kteří nás opustili, pokud bylo lze zjistit od předešlé valné schůze. Jsou to: zakládající člen dr *Viktorin Vojtěch*, profesor Karlovy university v Praze, a skuteční členové Ing. Dr *Josef Axamit* v Praze a Ing. *Josef Bouška* v Jablonci n. Nisou. Zemřel též bývalý ředitel knihtiskárny Jednoty a Promethea *Ladislav Storkán*. Přítomní vyslechli tento projev stojíce. Valná schůze se pak usnesla poslati pozdrav Dr *Bohuslavu Maškovi*, náměstku ředitele Stát. hvězdárny v. v., který se dožívá 1. prosince 1948 osmdesáti let.

Zpráva publikačního redaktora pro matematiku *F. Vyčichla*.

V uplynulém správním období byly vydány z matematiky a deskriptivní geometrie mimo středoškolské učebnice tyto knihy:

V Knihovně *Vojtěchovy* Základy, I. díl, 7. vyd., dotisk 1948, *Jarníkův* Úvod do počtu integrálního a *Bydžovského* Úvod do algebraické geometrie. Dotisk *Vojtěchových* Základů II. je v práci v tiskárně.

V Kruhu vyšly *Hruškovy* Nomogramy s jednou průsvitkou a v prosinci vyjde *Hlavatého* Úvod do neeuklidovské geometrie, 2. vyd. opravené.

V Cestě k vědění vyšly knížky: O nekonečných řadách od *J. Vyšína*, Theoretické základy fotogrammetrie od *J. Kounovského*, Fotogrammetrie praktická od *M. Menšíka*, O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů od *J. Holubáře*, Praktická geometrie, II. díl, od *P. Potužáka*. Vytištěna je také další knížka Cesty Nekonečno v matematice od *B. Pospíšila*, která vyjde v lednu. V lednu vyjdou také v Cestě *Čuprovy* Geometrické hry a zábavy.

Mimo sbírky vyšla Deskriptivní geometrie pro samouky od *Kounovského* a *Vyčichla*, Poznámky k učebnicím aritmetiky pro střední školy od *E. Čecha* a *V. Jozífka* a Poznámky k učebnicím geometrie pro střední školy od *E. Čecha*, *K. Komínka* a *R. Zelinky*. V únoru vyjde Methodika aritmetiky od *Berezanské*, kterou přeložil prof. *E. Čech*.

Ministerstvem informací a osvěty je povoleno vydati v Knihovně Diferenciální geometrii a tensorový počet, 2. vyd., od *V. Hlavatého*, v Kruhu Úvod do elementární theorie číselné, 2. vyd. upravené, od *K. Rychlíka* a Cyklografie od *L. Seifferta*, v Cestě k vědění Aritmetické hry a zábavy, 2. vyd., od *K. Čupra*, Jak vytváří statistika obrazy světa a života, II. díl, 2. vyd., od *J. Janka*, Praktická geometrie, I. díl, 2. vyd., od *P. Potužáka*, Vektory a tensory, 2. vyd., od *Vlad. Ryšavého*, Počítání s neúplnými čísly od *K. Hruši*. Mimo sbírky vyjde Kde žijeme (Geometrický podklad názoru na prostor) od *K. Havlíčka*, Řešené úlohy z vyšší matematiky, I. díl, 2. vyd., a II. díl, od *Vl. Ryšavého*, Operátorový počet od *V. Vodičky*.

Nová sbírka, Brána k vědění, určená pro ty, kteří mají jen školu II. stupně, má v tisku 8 svazečků. Z matematiky vyjdou v ní knížky: *Horák:* Pythagorova věta, *Jozífek:* O logaritmech, *Šoler:* Slovní rovnice I. stupně, *Vyšín:* Neurčité rovnice. Mimo to máme připravené rukopisy: *Hostinský:* Počet pravděpodobnosti, 2 svazky pro Cestu; *Glivěnko-Rychlík:* Základy počtu pravděpodobnosti, které vyjdou mimo sbírky; *Hostinský:* Diferenciální geometrie, 3. vyd., a *Hruška:* Grafický počet, 2. vyd., pro Knihovnu; *Katětov:* Jaká je logická výstavba matematiky, 2. vyd., *Klíma-Šimek:* Kamenořez, 2. vyd., *Kotyk:* Dějiny matematické vzdělanosti starého věku (2 sv.), *Vodička:* Determinanty v technické praxi (2 sv.) pro Cestu. Řada rukopisů je přislíbena.

Uplynulé období vlivem politických změn v únoru je také mezníkem ve vydavatelské činnosti Jednoty a snad historie Jednoty vůbec. Školský zákon nedovoluje, aby JČMF vydávala učebnice matematiky, fysiky, deskriptivní geometrie pro školy II. a III. stupně, jak činila dosud. Jednota mohla letos ještě opatřiti dotisky některých učebnic, které byly povoleny ministerstvem školství, a snad bude tomu podobně i u některých také pro příští rok.

Bude tedy třeba revidovati vydavatelskou činnost, ovšem až po vyjití nakladatelského zákona. Pro dobu přechodnou budeme muset hledat prostředky na vydávání vědeckých prací v matematických a fysikálních knížkách určených široké veřejnosti, jichž základem je Brána k vědění, kde redakci vedou *Havlíček*, *Jozífek* a *Kahuda*. Očekáváme také, že cesta k socialismu, kterou nastupujeme, přinese rozmach matematicko-přírodovědeckým oborům a že zejména matematické knihy budou hojně kupovány a čteny. Jen je třeba podle mého mínění zaměřit je k úkolům doby. Na příklad: Je-li třeba dnes mnoho dobrých učitelů matematiky na škole II. stupně, je nutno v první řadě vydávat methodiky a knihy, které potřebují tito učitelé, a pod. Myslím, že při tom bude nutno sahat k překladům dobrých knih cizích.

Základní knihy v některých oborech nám stále scházejí. Musím bohužel říci, že lhůta na dodání rukopisu pro Diferenciální rovnice byla prof. *Borůvkou* určena na další jeden rok, u rukopisu Algebry je situace podobná vzhledem k zaměstnanosti prof. *Kořínka*. Proto pomýšlíme vydati pro potřeby studentů překlad učebnice *Stepanovovy* O diferenciálních rovnicích alespoň cyklostylovaně. Chceme také vydati překlad knihy *Zygmunda* a *Sakse* O analytických funkcích, abychom měli dobrou učebnici o funkcích komplexní proměnné. O věci se jedná.

V učebnicích vysokoškolských nastane rovněž nový vývoj. Studium na vysokých školách postupně bude reformováno a bude třeba studentům dát vhodné pomůcky pro základní disciplíny, jakými jsou matematika, fysika a deskriptivní geometrie. Domnívám se, že pro vysoké školy technické musíme nejdříve opatřiti jen cyklostylem nebo rotaprintem rozmnožené texty přednášek a cvičení, v nichž by byly probrány základní věci, které budoucí inženýr potřebuje a které se na vysokých školách od posluchače budou požadovat, a teprve potom po zkušenostech vydat knihy, které by vznikly spoluprací více autorů.

Na pedagogických fakultách bude tomu podobně. Určité zkušenosti již jsme tam během tří let získali a mohlo by se přikročit k vydání textů. V celku stojíme tedy před těmito úkoly:

1. začít vydávat Bránu k vědění a snažit se o její velké rozšíření,
2. vydávat methodiky pro učitele,
3. učebnice vysokoškolské revidovat a opatřit nové — pro dobu přechodnou třeba jen cyklostylované,

4. doplniti v nejkratší době mezery v základních disciplinách, zejména v theorii diferenciálních rovnic, theorii funkcí a v algebře, eventuelními překlady cizích děl.

Splnění těchto úkolů bude ovšem možné, když nakladatelský zákon ponechá Jednotě právo vědecké knihy nakládati.

Zpráva publikačního redaktora pro fysiku *M. A. Valoucha.* Připojuje se k obecným vývodům prof. *Vyčichla*, s nimiž se ztotožňuje, a podává přehled publikační činnosti JČMF v uplynulém období, pokud jde o knihy spadající do oboru fysiky a příbuzných věd:

Ve sbírce Cesta k vědění byly vydány: *A. Okáč:* Výklad k základním operacím v chemické analyse, 2. vyd.; *F. Běhounek:* K jádru hmoty; *B. Hacar:* Mechanika sluneční soustavy; *J. Milbauer:* Chemie ve fotografii; *J. Kožešník:* Fysikální podobnost a stavba modelů; *J. Korecký* a *R. Pospíšil:* Vzácné kovy v technice.

Mimo sbírky vyšlo 2. vyd. knihy *J. Klága* Parní turbiny s dodatkem o plynových turbinách.

V nejbližší době, patrně v lednu 1949, vyjdou v Cestě k vědění další dvě knihy: *J. Bouška:* Zemský magnetismus a *A. Zátopek:* Jak se studují zemětřesení.

Program další publikační činnosti v nejbližší době je patrný z výčtu připravených rukopisů, jejichž vydání bylo povoleno ministerstvem informací a osvěty a které jsou z části již v tiskárně. Jsou to *Guth-Link:* Astronomické praktikum a *Pacholík:* Chemické pokusy anorganické, které vyjdou mimo sbírky; *Herčík:* Úvod do kvantové biologie, která vyjde jako 51. svazek Cesty k vědění, a rukopisy pro sbírku Brána vědění: *Černý:* Geometrická optika, *Doležel:* Fotometrie, *Marek:* Archimedův zákon, *Veselý:* O vývěvách.

Dále jsou slíbeny a zčásti připraveny tyto rukopisy: *Havelka:* Geometrická optika a *Matyáš:* Struktura kovů a jejich vlastnosti (mimo sbírky); pro Cestu k vědění *Link:* Jak poznává astrofysika vesmír, 2. vyd. a *Petržílka-Slavík:* Piezoelektřina, 2. vyd., a konečně pro sbírku Brána vědění *Chytilová:* Periodická soustava s fysikálního hlediska, *Kahuda:* O atomu, *Kašpar:* Plastický film, *Kašpar:* O vlnění, *Konečný:* O počasí, *Koutný:* Elektrický proud a jeho účinky, *Lamparter:* Hudební akustika, *Mikuláček:* Elektrický proud a jeho účinky, *Pokorný:* Bouře a ochrana před bleskem, *Pospíšil:* Elektromagnetické záření, *Šoler:* Léčení elektřinou, *Šoler:* Praktická optika, *Špaček:* Povrchové napětí, *Vaněk:* Zemská gravitace, *Veselý:* Tepelná roztažnost hmot, *Veselý:* Slunce — dá ce tepla, světla, života.

Ještě je třeba uvésti, že vydání sborníku CPX, obsahujícího referáty z předloňského kongresu o paprscích *X* a jejich použití, který byl původně v publikačním programu JČMF, převzala Matice hornicko-hutnická.

Publikačního programu a současně péče o vyučování fysice na školách všech stupňů se týká návrh na vypsání veřejné soutěže, který byl schválen na poslední výborové schůzi. Soutěž má býti vypsána na nejlepší pojednání o vyučování fysice na všech stupních a druzích škol a JČMF si vyhradí publikační právo na pojednání v soutěži odměněná. Návrh soutěže je nyní projednáván s MŠVU, které by mimo jiné případně přispělo na finanční dotování soutěže, a proto zatím není možno podat podrobnější zprávu.

Zpráva hlavního knihovníka *Vl. Kořínka.* V roce 1948 do konce listopadu bylo zařazeno do knihovny 145 nových knih z domácí a cizí literatury. Do knihovny docházelo úhrnem 153 časopisů, a to 34 časopisy z Ameriky a Anglie, 9 časopisů z Francie, 80 časopisů z ostatních zemí a 30 časopisů z ČSR.

Bylo vypůjčeno v 1435 výpůjčkách 1624 svazků. Bylo vráceno do knihovny v téže době 1403 svazků. Výpůjčních dnů bylo 163.

Od začátku školního roku 1948 byly vyloženy v čítárně semináře matematického a semináře pro theoretickou fysiku sešity běžných ročníků časopisů, které do knihovny docházejí. V místnosti knihovny, kde jest i nakladatelská expedice, není totiž vhodné místo pro čtení těchto sešitů, neboť tu není ani dostatečný prostor ani dostatečný klid. Tím jest celé oddělení časopisů umístěno v matematickém ústavě. Z vázaných ročníků časopisů nejdůležitější časopisy jsou umístěny v policích v čítárně a v místnosti přilehlé k čítárně a z čítárny přístupné. Ostatní časopisy jsou bohužel dosud uskladněny v jedné místnosti matematického ústavu, neboť nebylo lze dosud opatřit příslušné police. Opatření polic působí velké potíže, neboť závody, které police vyrábějí, oznámily, že nemohou vyrobit police pro nedostatek železa.

Doplňování knihovny fysikálními knihami a časopisy vázne, neboť fysikové z Jednoty, na něž se hl. knihovník obrátil, nenavrhli ještě nikoho jako pomocného knihovníka pro fysiku a hl. knihovník nemá po fysikální literatuře dostatečný přehled a nerozumí jí, aby mohl sám řídit doplňování knihovny fysikální literaturou.

Zpráva ředitele *M. Valoucha*. Změna stanov, na které se usnesla předešlá valná schůze, musela být na přání zúčastněných ministerstev podrobena některým úpravám a její schválení ministerstvem vnitra bude vydáno v prosinci.

Na vyzvání ÚAV NF se ustavil akční výbor: *Vyčichlo* (předseda), *Jarník, Kořínek, Valouch* ml. a *Zelinka* a prověřil členy výboru. Při revisi členů byl členství zbaven 1 člen.

Výbor konal 4 schůze a presidium 15 schůzí. Kromě toho byly konány četné schůze vědecké rady a komisí, zejména methodických pro matematiku, deskriptivní geometrii, fysiku a chemii. Tyto komise byly sloučeny za předsednictví s. š. *Kahudy* v jednu komisi s třemi subkomisemi. Z jejich podnětu bylo posláno několik memorand MŠVU, zejména o reformě studia kandidátů profesury, o vyučování matematice na školách druhého stupně, o odborném dozoru a o sjezdu profesorů matematiky a deskriptivní geometrie. Je naděje, že bude lze sjezd uskutečnit počátkem hlavních prázdnin; jeho přípravy se ujal brněnský odbor. Členských schůzí s přednáškami — některé společně s jinými korporacemi — bylo konáno 17; ze zahraničí na nich přednášelo 7 hostů. Zprávy o nich jsou uveřejněny v Časopise a ve Fysice v technice.

Osmdesátiny prof. Dr *K. Petra* byly oslaveny na schůzi dne 10. června společně s přírodovědeckou fakultou university Karlovy a Ústavem matematiky při České akademii věd a umění. — Čestnému členu Jednoty prof. Dr *W. Sierpinskému* ve Varšavě byla u příležitosti čtyřicetiletí jeho vědecké práce odevzdána blahopřejná adresa Jednoty. — Předsedovi Jednoty prof. Dr *B. Bydžovskému* byla udělena státní cena za vědu a čestný doktorát varšavské university. — Stého výročí narozenin prof. Dr *Emila Weyra* — viz zprávu v Rozhledech 28 (1948/49), 10 — bude vzpomenuto přednáškou na členské schůzi.

K publikační činnosti, o níž referovali redaktoři, poznamenává, že základní školský zákon svěřuje vydávání učebnic pouze státním nakladatelstvím, takže vydavatelská činnost Jednoty v tomto oboru končí. Pokud se týče ostatních oborů, bude záviset na chystaném zákonu nakladatelském. Ceny dotiskovaných učebnic byly letos nižší, ježto byl snížen vyhláškou NÚC autorský honorář a knihkupecký rabat.

Časopisy Jednoty byly reorganisovány. Ježto nová organisace školská vyžaduje intensivnější pěstování methodiky M, G a F než v dosavadní části Vyučování v Časopise, bylo rozhodnuto oddělit ji od Časopisu a vydávat nový časopis Matematika a fysika ve škole, který má stálé rubriky Vyučování, rozdělené podle stupňů škol, a Články a referáty, týkající se

všech kategorií škol, pokud jejich zpracování je rázu methodického nebo didaktického; příležitostné rubriky jsou Literatura, obsahující především recense methodických publikací a učebnic, Zprávy, na př. z jednání methodických komisí, OPS a pod., Úlohy, na př. pro praktika, soutěže a pod., po případě ještě Diskuse. Aby bylo vydávání nového časopisu povoleno, bylo nutno časopis Fysika v technice prozatím zastavit, takže v roce 1949 nebude vycházet, ale kolektiv jeho spolupracovníků má být udržen a jejich příspěvky publikovány v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky. Jeho vědecká část má zachovat mezinárodní ráz. V části Články a referáty má míti možnost publikovat širší okruh přispěvatelů, zejména mladších, a bude proto zavedena praxe „archivních výtisků": práce se v Časopise zaregistruje buď pouze názvem nebo stručným autoreferátem a rukopis se uloží v knihovně. Referáty zůstanou zachovány, články příležitostné (jubilea, úmrtí) se otisknou, pokud skýtají možnost k zachycení vědeckého profilu (části biografické a pod. se zařadí do Rozhledů). Ostatní oddíly: Zprávy, Literatura a Spolkový věstník budou zachovány. Rozhledy matematicko-přírodovědecké podrží v podstatě nynější úpravu. Počet úloh řešených o ceny bude redukován na 15 z matematiky, 10 z fysiky a 5 z deskriptivy. Bude zavedena zvláštní úloha o cenu z matematiky a z fysiky. Časopis a Rozhledy dostává každý člen v rámci členského příspěvku jako dosud; na Matematiku a fysiku ve škole předplácí člen Kčs 52,—.

Ministerstvo informací a osvěty bude požádáno, aby povolilo vydávání Časopisu ve 4 sešitech ročně v rozsahu asi 480 stran, Mat. a fys. ve škole v 5 seš. ročně v rozsahu asi 400 stran a Rozhledy v 8 seš. v rozsahu asi 256 stran. Pro nedostatek papíru vyšel 1. a 2. sešit Rozhledů jen o 16 str., doufáme však, že v dalších sešitech bude lze úbytek vyrovnat. Ne-li, bude předplatné sníženo.

Knihtiskárna Prometheus byla znárodněna, protože jak svým zařízením, tak i počtem zaměstnanců splňovala ustanovení zákona. Snažíme se však, aby její charakter knihtiskárny pro vědecký tisk, zejména tisk matematických a fysikálních publikací, zůstal zachován.

Zařízení dílny pro výrobu celuloidových pomůcek ke kreslení a rýsování bylo doplněno, takže její výrobní kapacita se zvýšila. Stále trvající nedostatek celuloidu je vážnou překážkou, která by mohla také znemožnit připravovanou výrobu logaritmických pravítek nové úpravy. Dosavadní pokusy slibují, že by chystaným modelem byl odstraněn tíživý nedostatek těchto pravítek.

Na podkladě závěrečných účtů osvětluje hospodářský a finanční stav Jednoty. Dne 31. prosince 1947 bylo základní jmění Jednoty Kčs 550 000,—, výdajné jmění Kčs 3 685 208,40. Ze vkladů u peněžních ústavů je vázáno Kčs 3 309 126,95. Rovněž veškeré fondy, ať ve vkladech, nebo v cenných papírech, jsou dosud vázány.

Členské příspěvky navrhuje výbor v dosavadní výši: zakládající členové 500 Kčs (právnické osoby 1000 Kčs) jednou pro vždy a 40 Kčs roční předplatné na Časopis; skuteční členové ročně 100 Kčs (právnické osoby 105 Kčs, zahraniční členové 120 Kčs) a činní členové ročně 80 Kčs — z toho je 40 Kčs roční předplatné na Časopis.

Z našich spolupracovníků dokončila pí *Věnceslava Charvátová* dne 1. října 1948 dvacetpět let činnosti v Jednotě, což bylo vzpomenuto jednak blahopřejným projevem výboru, jednak udělením diplomu Obchodní a živnostenské komory v Praze. Pí *Matylda Křepelková-Skákalová* odchází pro churavost na odpočinek po osmadvacetileté činnosti v Jednotě, za níž jí náleží zasloužilý dík.

Na konec projevuje jménem výboru nejvřelejší díky všem příznivcům a podporovatelům Jednoty, zejména ministerstvu školství, věd a umění, ministerstvu informací a osvěty, profesorskému sboru a ředitelstvím ústavů

matematického a fysikálního a pro theoretickou fysiku přírodovědecké fakulty na universitě Karlově v Praze a matematických a fysikálních ústavů vys. učení technického v Praze, ředitelstvím škol, dárcům knih knihovně, zejména pí *B. Kavánové*, vdově po astronomu *Jiřím Kavánovi*, jež věnovala knihovně přes 500 svazků, redakcím denních listů a Čs. rozhlasu, jakož i všem členům, zvláště jednatelům na ústavech. Rovněž děkuje všem našim spolupracovníkům v kanceláři, knihovně, nakladatelství, knihkupectví, v knihtiskárně a ve výrobě celuloidového zboží za horlivé plnění povinností.

Zprávu ředitele doplňuje předseda konstatováním, že Jednota uspořádala dne 23. června domácí slavnost v matematickém ústavě Karlovy university na počest sedmdesátin ředitele *M. Valoucha*, jemuž opětovně upřímně přál, aby se mohl ještě dlouho ve zdraví účastnit prací v Jednotě.

Zprávu kontrolujících komisařů podává *J. Vyšín*.

Kontr. komisaři revidovali dne 12. června a 23. listopadu 1948 účetní knihy a doklady Jednoty, jakož i účetní závěrku za rok 1947. Ve všem byl shledán vzorný pořádek a pečlivé hospodaření. Movité jmění bylo vykázáno pokladní hotovostí, průkazy o přebytcích u peněžních ústavů a cennými papíry podle rozvážného účtu. Také knihovna a čítárna byla revidována. Jejich správa je zařízena velmi účelně a prováděna vzorně. Navrhují tudíž valné schůzi, aby dala výboru absolutorium za správní rok 1947 a zároveň jemu a zejména řediteli poděkovala za úspěšné vedení a za obětavou práci pro Jednotu.

Valná schůze jednomyslně schvaluje přednesené zprávy a výši členských příspěvků a uděluje výboru absolutorium.

Doplňovací volby se konají aklamací, proti které není námitek, a to podle kandidátky předložené výborem. Zvoleni byli jednomyslně: předsedou na 3 roky *B. Bydžovský*, členy výboru na 3 roky *E. Čech*, *F. Kahuda*, *Vl. Kořínek*, *Z. Matyáš*, *O. Setzer*, *M. A. Valouch* a *L. Zachoval*, náhradníky na 1 rok *J. Beneš*, *B. Gruber*, *K. Havlíček*, *J. Kopřiva*, *B. Payerová* a *V. Pleskot*, kontrolujícími komisaři *V. Lenz*, *B. Šalamon* a *J. Vyšín*.

Na návrh předsedy vyslovuje valná schůze díky odstoupivším členům výboru Dr *J. Hrdličkovi*, Dr *E. Kašparovi* a Dr *A. Wanglerovi*. Připomíná, že je přítomen čestný člen v. š. r. *St. Petira*, který se právě před 55 lety stal členem Jednoty. Přítomní ho pozdravili potleskem.

Ježto nebylo volných návrhů, končí předseda valnou schůzi.

Výbor JČMF se ustavil po valné schůzi takto: předseda *B. Bydžovský*, místopředseda *V. Ingriš*, ředitel *M. Valouch*, knihovník *Vl. Kořínek*, publikační redaktoři *F. Vyčichlo* (mat.) a *M. A. Valouch* (fys.), účetní správce *V. Jarník*, pokladník *O. Setzer*, zapisovatel *V. Pilát*, delegáti do vědecké rady *Vl. Kořínek* (sekce mat.), *V. Trkal* (sekce fys.), *F. Kahuda* (sekce pro vyuč.) a *Z. Matyáš* (sekce pro užitou mat. a fys.), bez zvláštní funkce *E. Čech*, *A. Hlavička*, *K. Hruša*, *M. Kössler*, *E. Kraemer*, *R. Kukač*, *M. Menšík*, *Z. Pírko*, *S. Teplý*, *Al. Urban*, *L. Zachoval* a *R. Zelinka*.

Schůze s přednáškami v Praze.

Dne 27. ledna 1948 přednášel prof. dr Zdeněk Malý: **Struktura hmoty ve školním vyučování.**

Dne 2. února 1948 přednášel dr Karel Havlíček: **Styk křivky a nadkoule v *n*-rozměrném eukleidovském prostoru. Křivky sférické.**

Přednášející referoval o svém článku „Contact des courbes et des hypersphères dans un espace euclidien à *n* dimensions. — Courbes sphériques", který byl uveřejněn v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky, roč. **72** (1947), str. 137—146.

Dne 2. února 1948 přednášel Giovanni Induni z Curychu: **O elektronovém mikroskopu.** Viz Fys. v tech. **3** (1948), 63.

Dne 23. března 1948 přednášel prof. M. Miesowicz z Krakova: **O pracích s kosmickými paprsky.** Viz Fys. v tech. 3 (1948), 95.

Dne 18. března 1948 přednášel prof. dr Eduard Čech o spolupráci Jednoty a Ústavu matematiky při České akademii věd a umění a referoval o pojmu roviny.

Dne 2. dubna 1948 přednášel prof. Hyman Levy z Londýna: **The form and content of a statistical laboratory.**

Dne 13. a 14. dubna 1948 přednášel prof. dr Waclaw Sierpiński z Varšavy: 1. **Sur les translations des ensembles linéaires,** 2. **Sur l'équivalence des ensembles par décomposition en deux parties.**

Dne 29. dubna 1948 přednášel dr Ladislav Rieger: **O cyklicky uspořádaných grupách.**

Větší část přednášky zaujímal výklad o uspořádaných grupách.

Grupa se nazývá uspořádanou grupou, jestliže množina jejích prvků je uspořádaná množina a jestliže nerovnost lze násobit zleva i zprava každým prvkem grupy.

Po úvodu, v němž bylo hovořeno o uspořádaných grupách, které se vyskytují v theorii základů geometrie, a o axiomu Archimedově v geometrii, přikročeno k jedné ze základních vět theorie uspořádaných grup, pocházející až od O. Höldera (1901), která praví:

Každá archimedovsky uspořádaná grupa je komutativní. (Grupa se nazývá archimedovsky uspořádanou, jestliže vhodná mocnina každého prvku, většího než jednotka grupy, převýší libovolný jiný prvek grupy větší než jednotka.)

Dále byly probrány známé postačující podmínky pro to, aby se grupa dala uspořádat (Šimbireva, 1947) a porovnány s nutnou a postačující podmínkou, kterou podal přednášející.

Pak bylo teprve přistoupeno k pojmu cyklicky uspořádaných grup, které jsou v jistém smyslu zobecněním grup uspořádaných. Cyklicky uspořádanou grupou se rozumí grupa, jejíž prvky tvoří cyklicky uspořádanou množinu ve smyslu, zavedeném prof. Čechem (Bodové množiny I) a kde se (trojčlenná) relace cyklického uspořádání dá násobit zleva i zprava.

Na konec byl uveden hlavní výsledek přednášejícího, totiž že každá cyklicky uspořádaná a nekonečná grupa, která v přirozené své topologii (pojem pochází rovněž od prof. Čecha) tvoří kompaktní spojitou grupu, je isomorfní s multiplikativní grupou komplexních čísel na jednotkové kružnici.

Dne 11. května 1948 a násl. přednášel prof. Lucien Godeaux: **Les transformations birationnelles et leurs représentations.**

Dne 13. května 1948 přednášel dr Jan Bílek: **O Bertiniově větě pro lineární soustavy.**

Přednášející pojednal o Bertiniových větách v lineárních soustavách variet na algebraické varietě methodami, jimiž se dnes pracuje v moderní algebraické geometrii. Jednotlivé věty doložil pak jednoduchými příklady. Poukázal také na zobecnění, jež provedl Enriques a jež jsou publikována v Math. Ann. Bd 113 (1937) v serii článků „Zur algebraischen Geometrie" od v. d. Waerdena. Na konci přednášky se zmínil také o pokusu vybudování algebraické geometrie pomocí theorie ideálů, jež je uvedeno v knížce z roku 1941, Gröbner: Idealtheoretischer Aufbau der alg. Geometrie, a uvedl, že se v tomto oboru otevírá matematikům bohaté pole působnosti.

Dne 28. května 1948 přednášel dr Miroslav Rozsíval: **Elektronový mikroskop.** Viz Fys. v tech. 3 (1948), 190.

Dne 8. června 1948 přednášel dr Jaroslav Kozel: **Geiger-Müllerovy počítače.** Viz Fys. v tech. 3 (1948), 191.

Dne 10. června 1948 se konala oslava osmdesátin prof. dr Karla Petra, na níž promluvili dr V. Jarník, dr M. Valouch a dr E. Čech.

Dne 14. června 1948 přednášel prof. dr René Audubert z Paříže: **La photogénèse des molécules dans les réactions chimiques et la vie moyenne des molécules éphémères.** Viz Fys. v tech. **3** (1948), 191.

Dne 23. června 1948 se konala domácí slavnost na počest sedmdesátých narozenin dr Miloslava Valoucha, na níž promluvili V. Ingriš, V. Charvátová a K. Wick.

Dne 22. října 1948 přednášel ředitel dr Ralph W. G. Wyckoff z Bethesda, USA: **Electron micrographic studies of molecules and crystal structures — Electron microskopic study of viruses and their multiplication.**

Dne 7. prosince 1948 přednášel dr Alois Urban: **Ze studijního pobytu v Holandsku.**

Přednášející studoval v 1. polovině t. r. v Holandsku, a to u prof. Schoutena v Epe. Podal nejprve přehled o svém studiu diferenciální geometrie a o své publikaci (On the Geodesic Representation between Twodimensional Riemannian Spaces), kterou uveřejnil v holandské Akademii. Referoval o nové učebnici J. A. Schoutena a v. d. Kulka: Pfaffs Problem and its Generalizations. Promluvil také o organisaci matematického života v Holandsku, který se (nepřihlížíme-li k vysokým školám) soustřeďuje ve Wiskundige Genotschap, obdobě naší JČMF, a v Het Matematisch Centrum, obdobě našeho Ústavu matematiky České akademie věd a umění. Dále podal zprávu o vyučování matematice a deskriptivní geometrii na holandských vysokých školách. Svůj referát uzavřel přehledem posledních prací význačných holandských geometrů. K přednášce připojil také stručný informační přehled o životě v poválečném Holandsku.

Dne 8. prosince 1948 přednášel prof. L. J. Mordell z Cambridge (Anglie): **O minimu binární kubické formy.**

Dne 14. prosince 1948 přednášel dr Ladislav Rieger: **Brouwerova logika a theorie svazů.**

Dne 16. prosince 1948 byl uspořádán vzpomínkový večer na paměť Prokopa Diviše. Promluvili prof. ing. dr Julius Strnad a Karel Černý.

Schůze s přednáškami v Brně.

Dne 20. 11. 1947 přednášel RNDr Vojtěch Farský: **Moderní methody měření kmitočtu.**

Měření kmitočtu patří dnes k nejpřesnějším měřením fysikálním vůbec. Normálem je piezoelektrický oscilátor s kmitočtem obyčejně 100 kc/s, z něhož se odvozuje ekvidistantní spektrum sahající až do kmitočtů řádu 30 Mc/s. Interval spektra bývá 10 kc/s. Měřený kmitočet se srovnává interferenční methodou s nejbližším kmitočtem spektra. Interferenční tón je v oboru akustickém. Přesnost nejnovějších method je řádu 10^{-7}. Methody byly podrobně vyloženy.

V přednášce bylo zdůrazněno, že National Bureau of Standards ve Washingtoně vysílá na krátkých vlnách nepřetržitě ve dne i v noci normální frekvence s přesností větší než $5 \cdot 10^{-8}$, které mohou sloužiti jako normály pro nejpřesnější měření na celém světě. Ke konci přednášky byl popsán a prakticky předveden přístroj dle autorova návrhu, který zjednodušuje některé kalibrační pochody při měření a dovoluje provésti velmi přesná měření (přesnost řádu 10^{-6}) s minimálními prostředky. Přístroj má velikost $30 \times 30 \times 15$ cm³ a váží 14 kg.

Dne 22. 1. 1948 přednášel dr Bedřich Havelka: **Zobrazování s hlediska vlnové optiky.**

Základní předpoklady geometrické optiky představují značné zjednodušení skutečnosti a byly by přesně platné, kdyby vlnová délka světla byla rovna nule. K přesnému vystižení zobrazení nutno brát v úvahu vlnivou povahu světla, t. j. považovat je za vlnivý rozruch konečné délky vlnové, který se šíří od jednotlivých bodů zobrazovaného předmětu.

Zobrazuje-li optická soustava předmětový bod stigmaticky, přemění kulovou vlnoplochu, vycházející z tohoto bodu, v kulovou vlnoplochu, jejímž středem je obrazový bod. Podle Huygensova principu jsou všechny body vlnoplochy obrazového prostoru novými zdroji vln, které jsou kohe-rentní a mají stejnou fázi; účinek těchto elementárních vln projeví se mimo střed vlnoplochy, takže obrazem bodu je ploška, obklopená střídavě tma-vými a světlými proužky, jejichž tvar závisí na způsobu omezení vlnoplochy.

Ideální stigmatické zobrazení nelze prakticky uskutečnit, ať je soustava jakkoliv složitá; poněvadž obraz je pozorován okem, t. j. soustavou, jež nezprostředkuje ideální zobrazení, není v praxi žádoucí úplný stigmatismus a jsou dovoleny určité úchylky, při kterých zobrazení se jeví jako ideální; toto zobrazení nazýváme dokonalým.

Úchylky od stigmatického zobrazení projeví se s hlediska vlnivé theorie tím, že původně kulová vlnoplocha nabude po průchodu soustavou tvaru, který se od koule liší. V tomto případě charakter obrazové plošky zůstává zachován jako při ideálním zobrazení, je však změněno rozdělení světla: osvětlení uprostřed plošky je menší, v okolí větší, neboť úhrnné množství světla je zachováno.

Osvětlení ve středu plošky možno učinit podle Lorda Rayleigho měřít-kem jakosti optického zobrazení. Pokud toto osvětlení neklesne pod 0,8 hod-noty osvětlení při ideálním zobrazení, považujeme zobrazení za dokonalé; v tomto případě je možno uzavřít vlnoplochu mezi dvě soustředné koule, jejichž poloměry se liší nanejvýš o $\frac{1}{4}\lambda$. Jinak řečeno: Deformace vlnoplochy o $\frac{1}{4}\lambda$ zmenšuje osvětlení obrazové plošky ve středu o 20% a neprojeví se zhor-šením kvality zobrazení.

Je-li zobrazovaný bod na optické ose, jde o vadu otvorovou (sférickou). Zobrazení studováno ve třech případech, které přicházejí v praxi v úvahu, a to v případě a) otvorové vady nekorigované, b) korigované, c) s dvoj-násobnou korekcí.

Zobrazení možno považovat v případě a) za dokonalé, pokud

$$\Delta x'_k = 16\lambda c^2,$$

při čemž nejpříznivější obrazová rovina je ve vzdálenosti $0{,}5\Delta x'_k$ od roviny paraxiální. V případě b), resp. c) nabývá podmínka dokonalého zobrazení tvaru

$$\Delta x'_m = 24\lambda c^2, \text{ resp. } \Delta x'_k = 70\lambda c^2$$

a nejpříznivější obrazová rovina je ve vzdálenosti $0{,}8\Delta x'_m$, resp. $0{,}5\Delta x'_k$. V uvedených vzorcích značí:

$$c = \frac{f}{D} \text{ (pro zobrazení předmětu v nekonečnu),}$$

kde f je ohnisková vzdálenost, D průměr soustavy,

$$c = \frac{m}{2A} \text{ (pro zobrazení předmětu v konečné vzdálenosti),}$$

kde m je zvětšení, A číselná apertura soustavy,

$\Delta x'_k$ otvorovou vadu krajovou,

$\Delta x'_m$ otvorovou vadu pásmovou.

$\equiv (3, \ldots, n+2)$ do bodů $3, \ldots, n+2, (n+3)'$. Je-li bod $2'$ průsečík tečny t s nadrovinou S_{n-1}, určují body $2', 3, \ldots, n+2$ $(n+3)'$ racionální normální křivku C^{n-1} nadroviny S_{n-1}. Sestrojíme-li k C^{n-1} podle (2,1) tečnu v bodě $2'$, neprochází tato jistě bodem 2 a určuje s ním rovinu obsahující dvě soumezné tečny křivky C^n.

(2,3) *Konstrukce oskulačního prostoru $(n-k)$-rozměrného.* Nechť je $k = n-1, \ldots, 1$. V bodě 2 křivky C^n buď sestrojen oskulační prostor S_{n-k-1} $(n-k-1)$-rozměrný. $(k+1)$-rozměrný prostor S_{k+1}, určený body $3, \ldots, k+4$, protíná S_{n-k-1} v bodě $2'$. Kdyby se oba prostory protínaly v prostoru rozměru většího než 0, obsahoval by jejich spojující prostor nejvýše $(n-1)$-rozměrný $n-k+k+2 = n+2$ body křivky C^n. Z $(n-k-2)$-rozměrného oskulačního prostoru křivky C^n v bodě 2, který již byl sestrojen a který nemá s S_{k+1} společného bodu, protože by v opačném případě nadrovina nebo nižší prostor obsahoval $n+1$ bodů křivky C^n, promítněme body $3, \ldots, k+5$ do prostoru S_{k+1} do bodů $3, \ldots, k+4, (k+5)'$. V S_{k+1} je potom $k+4$ body $2', 3, \ldots, k+4, (k+5)'$ určena racionální normální křivka tohoto prostoru C^{k+1}. Tečna sestrojená podle (2,1) v bodě $2'$ ke křivce C^{k+1} má tedy s oskulačním prostorem S_{n-k-1} společný pouze bod $2'$ a určuje s ním $(n-k)$-rozměrný prostor S_{n-k}, který má s C^n $n-k+1$ společných soumezných bodů.

*

Sur les polygones de $n+4$ côtés inscrits à une courbe rationnelle normale de l'espace à n dimensions.

(Résumé de l'article précédent.)

Démonstration du théorème: Dans un polygone de $n+4$ côtés, inscrit à une courbe rationnelle normale de l'espace à n dimensions, soient 3 côtés consécutifs; pour chaque côté, les n sommets qui restent en supprimant les deux extrémités du côté et les deux sommets adjacents déterminent un hyperplan rencontrant le côté considéré dans un point; on a ainsi 3 points et 3 hyperplans; alors il existe un hyperplan contenant les 3 points ainsi que l'espace d'intersection des 3 hyperplans. Réciproquement, soient $n+4$ points dans l'espace à n dimensions tels qu'aucun hyperplan ne contienne $n+1$ de ces points; si les $n+4$ points, considérés dans un ordre déterminé, jouissent de la propriété précédente, ils en jouissent dans un ordre quelconque et la courbe rationnelle normale déterminée par $n+3$ points choisis arbitrairement parmi les $n+4$ points donnés contient aussi le point restant.

Dans la seconde partie le théorème est appliqué à la construction de points ultérieurs de la courbe rationnelle normale déterminée par $n+3$ points, ainsi qu'à la construction d'espaces osculateurs.

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 73 (1948)

Études météoriques.

V. Bumba et **F. Link**, Praha.

(Reçu le 19 mars 1948.)

Une nouvelle méthode de classement thermique des météores permet de déterminer le type de visibilité et la composition de la plupart des météores faibles ($> 1^m$) dont on connait les altitudes d'apparition et de disparition. Le traitement statistique des trajectoires météoriques conduit à la détermination des différences entre les météores sporadiques et cométaires ainsi qu'à la détermination approchée du gradient de densité entre 50 et 150 km d'altitude.

1. Introduction. — A la suite des recherches entreprises par l'un de nous [1, 2] nous avons continué ce genre d'investigations en nous basant sur un nombre plus grand de météores et en détaillant davantage l'analyse des statistiques météoriques.

La méthode employée est une généralisation de la théorie d'Öpik [3] de météores combinée avec nos résultats crépusculaires [4] qui donnent la densité de la haute atmosphère. Nous expliquerons ici brièvement le principe de notre méthode. Dans le phénomène météorique on peut distinguer les phases suivantes:

1° Elévation de la température jusqu'à la fusion; la chaleur consomée $= q_1$.

2° Fusion; la chaleur consomée $= f$.

3° Elévation de la température jusqu'à la vaporisation; la chaleur consomée $= q_2$.

4° Vaporisation; la chaleur consomée $= v$.

Nous allons supposer maintenant que la visibilité du météore coïncide avec une des phases ci-dessus (sauf la première) et que la visibilité est accompagnée de la dispersion du noyau météorique soit en état liquide soit par la vaporisation. Il en résultent différents types de visibilité (6 en tout) qui sont caracterisés par le rapport des chaleurs nécessaires depuis l'entrée dans l'atmosphère jusqu'à la disparition et l'apparition respectivement. Ces rapports peuvent être exprimés par les rapports des masses d'air traversées par le météore jusqu'à la disparition M_d et jusqu'à l'apparition M_a, c'est-à-dire par le rapport

$$\log_{10} \frac{M_d}{M_a} = k$$

qui peut être déterminé pour chaque météore dont on connait l'altitude d'apparition H_a et de disparition H_d. Les masses d'air sont fournies par les densités de l'air en fonction de l'altitude à partir des mesures crépusculaires. Les rapports ainsi déterminés peuvent être comparés avec les valeurs experimentales calculées d'après les mesures de laboratoire concernant les matériaux météoriques [5]. On obtient ainsi les valeurs suivantes:[1])

Tableau I.

Type de visibilité	Apparition	Disparition	Log du rapport des masses d'air	
			Sidérites	Aerolithes
A	début de fusion $M_a \sim q_1$	fin de fusion $M_d \sim q_1 + f$	0,09	0,11
B	début de vaporis. $M_a \sim q_1 + f + q_2$	fin de vaporisation $M_d \sim q_1 + f + q_2 + v$	0,57	0,50
C	fin de fusion $M_a \sim q_1 + f$	fin de vaporisation $M_d \sim q_1 + f + q_2 + v$	0,79	0,64
D	début de fusion $M_a \sim q_1$	fin de vaporisation $M_d \sim q_1 + f + q_2 + v$	0,89	0,76
E	début de fusion $M_a \sim q_1$	début de vaporisation $M_d \sim q_1 + f + q_2$	0,32	0,28
F	fin de fusion $M_a \sim q_1 + f$	début de vaporisation $M_d \sim q_1 + f + q_2$	0,23	0,20

Öpik dans sa théorie ne considère que les types A et B sans donner toutefois explicitement une preuve expérimentale de leur existence. Nous y avons ajouté les autres types et nous verrons plus loin dans quelle mesure leur réalité se vérifie d'après les observations.

2. Matériel d'observation. — Dans le présent travail nous avons taché d'abord d'augmenter autant que possible le nombre de trajectoires météoriques entrant dans nos statistiques. Pour cela nous avons puisé dans les publications indiquées en tableau II.

L'ensemble des trajectoires forme une cartothèque établie en plus grande partie par Mr. *Fr. Hřebík*, membre de la Section de Calcul de la Société astronomique à Prague et nous tenons de lui exprimer ici nos vifs remerciements.

[1]) Le mode de dissipation que nous avons admis est caractéristique au corps cylindrique droit qui se déplace suivant la direction de son axe.

Tableau II.

No.	Désignation	Nombre
1	Denning M. N. 56	107
2	Denning M. N. 72	429
3	Denning M. N. 76	252
4	Porter M. N. 103	289
5	Meteor Sect. J. B. A. A. 27	28
6	Meteor Sect. J. B. A. A. 28	41
7	Meteor Sect. J. B. A. A. 29	75
8	Meteor Sect. J. B. A. A. 48	74
9	Meteor Sect. J. B. A. A. 49	78
10	Meteor Sect. J. B. A. A. 53	79
11	Mem. B. A. A. 24	41
12	Mem. B. A. A. 32	155
13	Wills, Pop. Astr. 41	43
14	Wills, Pop. Astr. 42	147
15	Wills, Pop. Astr. 43	84
16	Savicky, A. N. 228	386
17	Broch, Denk, Wien. Akad. 87	108
18	Olivier, Publ. Flower 22	54
19	Kat. Hoffmeister-Niessl	504
20	A. N. 256, 270, 273	55
	Total	2929

L'ensemble de météores a été divisé en trois catégories suivantes:

Météores faibles jusqu'à $+1{,}0^m$ inclus ..... 1370 météores
Météores brillants de $+0{,}9^m$ à $-2{,}5^m$ (Jupiter) ... 206 météores
Bolides plus brillants que $-2{,}5^m$ ..... 281 météores

Tableau III.

h_{km}	$-\log \varrho$			$-\log M_{km}$		
	I	II	III	I	II	III
50	2,95	2,95	2,95	2,09	2,09	2,09
60	3,64	3,64	3,64	2,53	2,58	2,62
70	4,04	4,08	4,13	2,82	2,92	3,02
80	4,34	4,46	4,53	3,06	3,17	3,29
90	4,64	4,72	4,82	3,26	3,40	3,53
100	4,86	4,95	5,05	3,43	3,59	3,75
120	5,23	5,37	5,52	3,74	3,96	4,18
140	5,59	5,75	5,96	3,99	4,29	4,57
160	5,84	6,09	6,37	4,20	4,57	4,94
180	6,04	6,38	6,72	4,40	4,82	5,25
200	6,21	6,62	7,05	4,58	5,06	5,55

Les masses d'air ont été adoptées d'après les trois hypothèses suivantes.

L'hypothèse III correspond directement aux résultats crépusculaires et les hypothèses II et I donnent des densités de l'air un peu supérieures. Peu important finalement les valeurs absolues de ϱ et de M, c'est surtout leur allure avec l'altitude qui est importante. Nos valeurs ne sont qu' approximatives surtout dans l'intervale de 60 a 90 km où l'on doit attendre quelques particularités dans la fonction $\log g = f(h)$. Il faut espérer que les sondages modernes à l'aide des fusées V-2 ou analogues apportent des renseignements nouveaux sur la pression de l'air en haute altitude. D'après les résultats préliminaires de l'ascension [6] du 10. X. 1946 la pression à l'altitude de 85 km serait de l'ordre de 10 dynes tandisque nos hypothèses donnent les pressions entre 50 et 80 dynes. Dès que nous aurons des renseignements plus précis et surtout plus étendus en altitude, il sera possible de reviser complétement notre matériel et de modifier, s'il y a lieu, nos conclusions.

Dans le ca'cul du rapport des masses d'air nous avons remplacé les masses d'air suivant la trajectoire inclinée du météore par les masses d'air au zenith données dans le tableau III. Ceci est permis jusqu'à la distance zénithale de 80°. Les trajectoires plus inclinées ont été écartées et leur discussion sera donnée plus tard.

3. Résultats. — Nous avons d'abord tracé les courbes $n = f(k)$ qui donnent la fréquence n des k en fonction de k dans l'intervale de 0,05. Ces courbes ont été tracées pour les différentes hypothèses ci-dessus et de leur ensemble nous pouvons affirmer que c'est l'hypothèse II qui donne des résultats les plus homogènes et les plus nets.

Après avoir adopté cette hypothèse, nous avons procedé à la statistique plus détaillée en choisissant l'intervale de k égal à 0,01. Pour adoucir les irregularités dues aux erreurs d'observation nous avons réuni en moyennes de trois les valeurs voisines en avançant par le pas de 0,01. De cette façon nous avons obtenu les courbes reproduites sur la fig. 1 qui nous servirons de base dans la discussion suivante.

4. Discussion des résultats. — Discutons d'abord les météores faibles qui sont les plus nombreux et qui remplissent le mieux les conditions imposées par la théorie d'Öpik. Sur la courbe annuelle comprenant tous les météores faibles on trouve plusieurs maxima de fréquence qui sont désignés par les lettres correspondantes des types de visibilité. Les constantes théoriques de ces types calculées d'après les constantes thermiques de météorites [5] sont marquées par des repères sur l'axe horizontale. On voit que l'accord est bon en plusieurs points.

Le type A ne se trouve pas verifié par les observations. Le type F donne un maximum où il est difficile de distinguer les pierres des fers sauf dans le cas de Perséides et dans la période printemps-automne. Le maximum E est bien developpé et sa position correspond plutôt aux sidérites. Vers $k = 0{,}40$ nous rencontrons un maximum qui ne correspond à aucun type connu de visibilité. On peut le rattacher très probablement au maximum suivant B-lit des pierres qui ne sont pas très homogènes. Les fers donnent ensuite un maximum peu distincte vers 0,6. Le maximum suivant C-lit est très bien developpé surtout parmi les Perséides et les Léonides Entre 0,7 et 0,8 se trouve encore un maximum assez prononcé qui pourrait être atribué au type D-lit. Quant aux maxima C-sid et D-sid leur existence est douteuse au moins dans notre matériel.

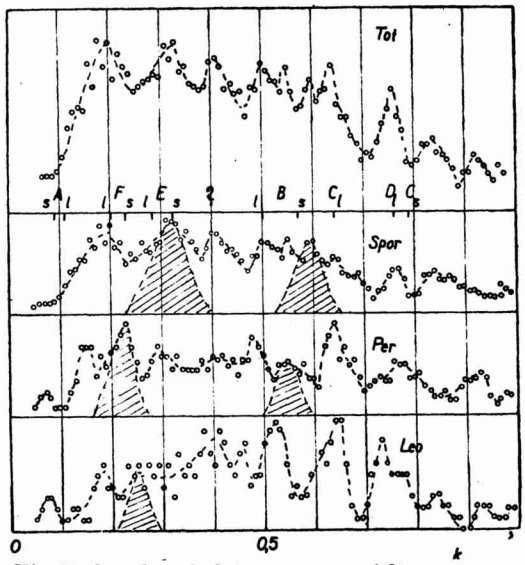


Fig. 1. Courbes de fréquence $n = f(k)$, moyennes de trois avançant par 0,01 en k. Les parties occupées par les sidérites sont hachurées.

Etant donné ce nombre de coïncidences entre les valeurs calculées de constantes d'après les mesures de laboratoire et les maxima trouvés d'après les observations, il est difficile de parler des coïncidences fortuites. C'est plûtot une confirmation de la bonne approximation de nos suppositions dont nous sommes partis. Nous insistons tout particulièrement sur la faible valeur du gradient de densité avec l'altitude. Si par exemple, dans l'intervale de 90 à 110 km où les météores sont les plus fréquents, nous adoptions à la place du gradient $\frac{\Delta \log \varrho}{\Delta h} = 0{,}022$ la valeur 0,06 d'après Whipple [7], nous retrouverions *grosso modo* nos maxima de fréquences déplacés vers la droite aux valeurs environs 3 fois plus grandes, c'est-à-dire dans la plupart des cas en dehors des limites imposées par les mesures de laboratoire.

On peut se rendre compte de la variation du gradient de densité avec l'altitude de la manière fort simple. Dans une faible étendue

d'altitudes h on peut admettre la variation de la densité ϱ suivant la formule

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\beta(h-h_0)}$$

et nous aurons par suite aussi

$$k = 0{,}43\beta\,(H_a - H_d).$$

Nous avons établi les statistiques de fréquence des différences $H_a - H_d$ pour les trois intervales d'altitudes moyennes $H_0 = (H_a + H_d) : 2$ suivantes: 50 km $< H_0 <$ 79 km, 80 km $< H_0 <$ 109 km, 110 km $< H_0 <$ 150 km. Les courbes de fréquence (fig. 2) sont analogues aux courbes de la fig. 1. Il serait peut-être difficile à première vue d'identifier mutuellement les différents maxima des deux courbes, mais ce qui frappe, c'est le décalage des maxima vers la droite avec l'altitude moyenne croissante. Le décalage peut être interprété d'après la formule cidessus par la diminution du gradient β de densité avec l'altitude. Cette diminution est respectée par l'introduction des masses d'air et les courbes $n = f(k)$ ne doivent pas présenter un décalage avec l'altitude.

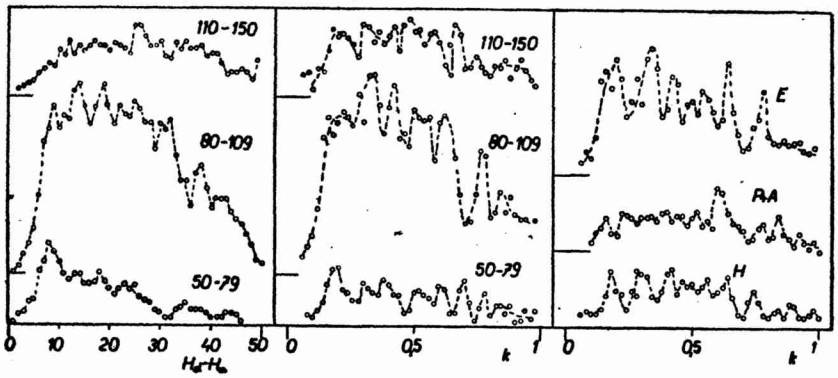


Fig. 2. A gauche: Fréquence de $H_d - H_a$ (km) en fonction de l'altitude moyenne. Au milieu: Fréquences de k en fonction de l'altitude moyenne. A droite: Fréquences de k pour l'altitude moyenne 80—110 km en fonction de la saison de l'année. E = mai, juin, juillet, août; $P + A$ = février, mars, avril, septembre, octobre; H = novembre, décembre, janvier.

Nous avons alors tracé les courbes $n = f(k)$ pour les trois intervalles ci-dessus (voir la fig. 2). Les météores sont peu nombreux audessous de 80 km, très nombreux entre 80 et 110 km et sensiblement moins nombreux plus haut. Néanmoins on peut dire en comparant surtout les deux derniers intervalles qu'il n'y pas de décalage sensible entre les maxima de fréquence.

Quant à la variation saisonière, nous n'en avons trouvé aucune indication nette ce qui est en contradiction avec le travail précé-

dent [2]. Il faut toutefois noter que le nombre actuel de météores est plus que le double de celui qui était à notre disposition auparavant. Nous avons également tâché de mettre en évidence la variation saisonière dans la couche de 80 à 100 km (voir la fig. 2). Le résultat est encore negatif.

5. Météores cométaires. — Nos statistiques de k permettent d'analyser quelques essaims météoriques comme les Perséides et les Léonides dont le nombre est suffisant. La comparaison des météores cométaires avec les météores sporadiques fait ressortir quelques différences entre ces deux catégories notamment la faible proportion des B-sid parmi les météores cométaires. Cette catégorie est à peine indiquée parmi les Perséides et paraît manquer complètement parmi les Léonides. Cette constatation ne signifie pas le manque absolue des sidérites, car elles peuvent se trouver encore dans la catégorie F et E où les fers se distinguent assez mal des pierres. Une estimation préliminaire donne comme proportion des sidérites parmi les météores dont $k < 1{,}0$ 20% pour les Perséides et la valeur un peu moins sûre $< 10\%$ pour les Léonides, tandisque parmi les sporadiques la proportion des sidérites s'élève à 30%. En tout la proportion des sidérites est voisine de 25% des météores dont $k < 1{,}0$ et qui constituent la majorité de 88% de tous les météores faibles. Notons encore le maximum très marqué C-lit parmi les météores cométaires qui est très peu visible parmi les sporadiques. La prépondérance des pierres parmi les météores cométaires signalée ailleurs [8] trouve ici la confirmation.

6. Météores brillants et bolides donnent des courbes de fréquence dont les maxima sont déplacés vers la droite probablement par le manque d'isothermie du noyau météorique. Ces circonstances ont été discutées plus en détail dans le travail précédent auquel nous renvoyons le lecteur. Il est intéressant de noter la forte proportion des C-lit surtout parmi les bolides. Nous pensons de revenir encore sur une discussion plus détaillée basée alors sur des principes différents de ceux dont nous sommes partis dans ce travail. Autrement dit notre théorie qui suppose l'isothermie du noyau météorique cesse d'être applicable telle quelle aux météores plus brillants que 1^m environ.

7. Conclusions. — Dans ce travail nous avons visé deux buts différents: l'exploration de la haute atmosphère et la classification thermique des météores. Quant à l'exploration de la haute atmosphère nous sommes arrivés aux conclusions suivantes:

1° Le gradient moyen de densité décroit avec l'altitude. Les valeurs moyennes sont: 0,050/km entre 50—80 km, 0,023/km entre 80—110 km, 0,014/km entre 110—150 km en logarithmes décadiques. Ces valeurs numériques dependent des constantes thermiques des météorites. Elles sont en bon accord avec les mesures crépusculaires.

2° Il n' y a pas de variation annuelle appréciable du gradient moyen entre 50 et 150 km, ni dans la couche entre 80 et 110 km.

En ce qui concerne le problème météorique proprement dit:

3° Il est possible de classer chaque météore dont on connait l'altitude d'apparition et de disparition dans une des catégories que nous avons définies et qui comprennent environ 88% des météores plus faibles que 1^m.

4° Ce classement doit se faire à la base des masse d'air dont nous avons fourni les valeurs provisoires. Notre classement peut dans certains cas remplacer l'analyse spectrale impossible des météores à cause de leur faiblesse.

5° Comme première application de ce classement nous pouvons donner la proportion Sid : Lit = 30 : 70 pour les météores sporadiques et 15 : 85 pour les météores cométaires (Perséides et Léonides).

6° La visibilité de la plus grande partie ($\frac{2}{3}$) des météores est liée à l'état liquide du noyau.

En terminant nous voudrions exprimer notre désir qui nous hantait durant ce travail: Plus de météores! En effet les statistiques demandent un nombre suffisant d'individus pour pouvoir former des groupes assez caractéristiques et nous étions considérablement gênés par le nombre relativement faible de météores. De ce point de vue le présent travail ne peut donner qu'une indication des possibilités reservées à notre méthode dont le developpement dépend du nombre d'observations.

Observatoire National de Prague.

BIBLIOGRAPHIE.

1. F. Link: C. R. Paris, **221**, (1945), p. 326.
2. F. Link: Bull. Math. Phys. Tchécosl. **71**, (1946), p. 79.
3. E. Öpik: Publ. Obs. Tartu **29**, (1937), No. 5.
4. F. Link: Met. Zeit. **61**, (1944), p. 87.
5. F. Link-O. Petráček: Bull. Math. Phys. Tchécosl. **72** (1947), p. 147.
6. E. O. Hulburt: Journ. Opt. Soc. Amer. **37**, (1947), p. 405.
7. F. L. Whipple: Pop. Astr. **47**, (1939), No. 8.
8. P. M. Millman: H. A. **82**, (1932), No. 6 et 7.

Meteorické studie.

(Obsah předešlého článku.)

Pokračování a rozšíření práce uveřejněné v tomto časopise [2]. Cílem této práce je výzkum vysoké atmosféry pomocí meteorů a tepelná klasifikace meteorů. Pomocí tepelných konstant meteorů odvozených z laboratorních dat je možno užitím Öpikovy theorie meteorů a jejího rozšíření v této práci odhadnouti gradient hustoty ve vysoké atmosféře mezi 50 až 150 km výšky. Ve velké většině případů lze z výšky zážehu zhasnutí meteoru odvoditi jeho typ a složení, zejména u slabších meteorů, kde nelze fotografovati jejich spektra.